

$$\begin{aligned} & \text{D'après la formule des probabilités totales, } P(V) = P(L \cap V) + P(\bar{L} \cap V) \\ & \text{donc } P(L \cap V) = P(V) - P(\bar{L} \cap V) = 0,38 - 0,36 = 0,02 \\ & P_L(V) = \frac{P(L \cap V)}{P(L)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2 \end{aligned}$$

QCM 4 : Un groupe de coureurs participe à une course cycliste et ils subissent de façon aléatoire un contrôle antidopage. On appelle T l'évènement « le contrôle est positif » et on admet que $p(T) = 0,05$. On appelle D l'évènement « le coureur est dopé ».

Le contrôle antidopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

La probabilité que le coureur soit dopé est :

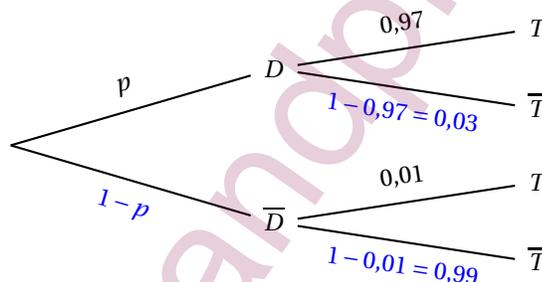
A. $\frac{95}{100}$

B. $\frac{98}{100}$

C. $\frac{29}{500}$

D. $\frac{1}{24}$

On établit un arbre pondéré résumant la situation en appelant p la probabilité que le coureur a d'être dopé :



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,97p + 0,01(1-p) = 0,96p + 0,01.$$

$$\text{On sait que } P(T) = 0,05 \text{ donc } 0,96p + 0,01 = 0,05 \text{ donc } 0,96p = 0,04 \text{ donc } p = \frac{0,04}{0,96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

QCM 5 : L'ensemble des solutions, dans \mathbb{R} , de l'équation : $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14$ est :

A. $\{-5; 4\}$

B. $\{-5\}$

C. $\{4\}$

D. \emptyset

Pour que $\ln(x+3) + \ln(x-2)$ existe, il faut que $x+3 > 0$ donc que $x > -3$, et $x-2 > 0$ donc $x > 2$. On peut donc éliminer les deux premières réponses proposées.

Si $x = 4$, $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 7 + \ln 2 = \ln 14$; la solution est donc $x = 4$.

On peut naturellement aussi résoudre dans $]2; +\infty[$ l'équation proposée :

$$\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14 \iff \ln((x+3)(x-2)) = \ln 14 \iff (x+3)(x-2) = 14$$

$$\iff x^2 + 3x - 2x - 6 = 14 \iff x^2 + x - 20 = 0 \text{ qui a deux solutions } -5 \text{ et } 4 \text{ dont une seule dans l'intervalle }]2; +\infty[.$$

QCM 6 : Pour tout réel x strictement positif, $e^{-3\ln x}$ est égal à :

- A. x^3 B. $\frac{1}{x^3}$ C. $-3x$ D. $-x^3$

$$\left| \text{Pour } x > 0, \text{ on a } e^{-3\ln x} = (e^{\ln x})^{-3} = x^{-3} = \frac{1}{x^3} \right.$$

QCM 7 : L'ensemble des solutions, dans \mathbb{R} , de l'inéquation : $(e^x - 3)(e^x + 1) \geq 0$ est :

- A. $] -\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ C. $[\ln 3 ; +\infty[$
 B. $] -\infty ; \ln 3]$ D. \mathbb{R}

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour tout } x, e^x > 0 \text{ donc } e^x + 1 > 0. \\ e^x - 3 \geq 0 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln 3 \\ \text{L'ensemble solution est donc } [\ln 3 ; +\infty[. \end{array} \right.$$

EXERCICE 2 _____ **7 points**

QCM 8 : Soit $I = \int_0^1 (e^{2x} - x) dx$

- A. $I = e^2 - 2$ B. $I = 2e^2 - 2$ C. $I = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ D. $I = \frac{1}{2}e^2 - 1$

$$\left| I = \int_0^1 (e^{2x} - x) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{e^0}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}e^2 - 1 \right.$$

QCM 9 : Soit le nombre complexe $z = \frac{1+i}{1-i}$

- A. l'écriture algébrique de z est $-i$ C. un argument de z est égal à $\frac{\pi}{2}$
 B. l'écriture algébrique de z est $i\sqrt{2}$ D. le module de z est $\sqrt{2}$

$$\left| \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i \text{ qui a pour argument } \frac{\pi}{2} \right.$$

QCM 10 : Soit $f(x) = 4xe^{-x}$ pour tout x réel.

La dérivée $f'(x)$ de f sur \mathbb{R} est égale à :

- A. $3e^{-x} + 4x$ B. $(4x - 1)e^{-x}$ C. $-4e^{-x}$ D. $(4 - 4x)e^{-x}$

$$\left| f(x) = 4xe^{-x} \text{ donc } f'(x) = 4 \times e^{-x} + 4x \times (-1)e^{-x} = (4 - 4x)e^{-x} \right.$$

QCM 11 : Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[-4 ; 2]$ telle que $f(x) = a|x|$, $a \in \mathbb{R}$.

Alors a est égal à :

A. $-0,2$

B. $0,2$

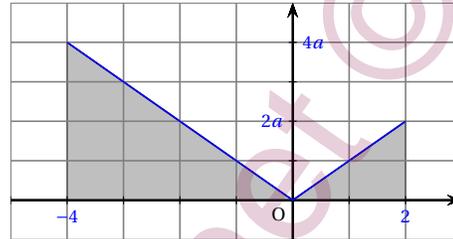
C. $0,25$

D. $0,1$

Une fonction densité est positive dont le réel a est positif.

On trace la représentation de la fonction f et l'aire grisée sous la courbe doit être égale à 1.

Donc $\frac{4 \times 4a}{2} + \frac{2 \times 2a}{2} = 1$ ce qui équivaut à $8a + 2a = 1$ autrement dit $a = 0,1$.



QCM 12 : On considère que la durée de vie, exprimée en années, d'un médicament est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ telle que $p(X \leq 1) = 0,18$, alors :

A. $\lambda = \ln\left(\frac{50}{41}\right)$

B. $\lambda = -\ln(18)$

C. $\lambda = -\ln(0,82)$

D. $\lambda = \frac{\ln(0,82)}{\ln(100)}$

On cherche λ tel que $\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = 0,18$.

$$\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^1 = 1 - e^{-\lambda}$$

On résout : $1 - e^{-\lambda} = 0,18 \iff 0,82 = e^{-\lambda} \iff \ln(0,82) = -\lambda \iff \lambda = -\ln(0,82)$

QCM 13 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$p(-1 < X < 1)$ est égal à :

A. $1 - 2p(X > 1)$

B. $2[p(X < 1) - 1]$

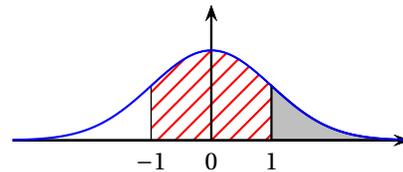
C. $1 - 2p(X < 1)$

D. $2p(X > 1) - 1$

Sur la figure ci-contre, la partie hachurée en rouge correspond à $p(-1 < X < 1)$, la partie grisée correspond à $p(X > 1)$ et la partie restée en blanc correspond à $p(X < -1)$.

Par symétrie, $p(X < -1) = p(X > 1)$ et comme l'aire totale sous la courbe est égale à 1, on a :

$$\begin{aligned} p(-1 < X < 1) &= 1 - p(X < -1) - p(X > 1) \\ &= 1 - p(X > 1) - p(X > 1) = 1 - 2p(X > 1). \end{aligned}$$



QCM 14 : Après avoir examiné 100 personnes, on a constaté que 20 % d'entre elles étaient malades. L'intervalle de confiance, au niveau asymptotique 95 %, de la probabilité qu'une personne examinée soit malade peut être estimée par :

A. $[0,10 ; 0,20]$

B. $[0,15 ; 0,25]$

C. $[0,10 ; 0,30]$

D. $[0,05 ; 0,35]$

$$\left| \text{L'intervalle de confiance est } I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,20 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,20 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,10 ; 0,30] \right|$$

EXERCICE 3 _____ **6 points**

Après l'administration d'un médicament par voie orale chez un patient, sa concentration plasmatique dans le sang, en g/L, en fonction du temps peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t}) \text{ où } t \text{ est le temps exprimé en heures.}$$

1. $C(0) = 3(e^0 - e^0) = 0$

2. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow +\infty} 3(e^{-t} - e^{-2t}) = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$$

Cela signifie que la concentration plasmatique tend vers 0 quand le temps augmente.

3. $C(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$ donc $C'(t) = 3(-1e^{-t} - (-2)e^{-2t}) = 3(2e^{-2t} - e^{-t}) = 3e^{-t}(2e^{-t} - 1)$

4. • On cherche le signe de la dérivée sur $[0; +\infty[$.

Pour tout t , $e^{-t} > 0$ donc $C'(t)$ est du signe de $2e^{-t} - 1$.

$$2e^{-t} - 1 > 0 \iff e^{-t} > \frac{1}{2} \iff -t > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t < -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t < \ln(2)$$

• On calcule le maximum de la fonction C sur $[0; +\infty[$:

$$C(\ln(2)) = 3(e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}) = 3\left((e^{\ln(2)})^{-1} - (e^{\ln(2)})^{-2}\right) = 3(2^{-1} - 2^{-2}) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

• On établit le tableau de variations de la fonction C sur $[0; +\infty[$:

t	0	$\ln(2)$	$+\infty$
$C'(t)$		0	
		+	-
$C(t)$	0	$\frac{3}{4}$	0

5. La valeur maximale de la concentration a été calculée dans la question précédente et est égale à $\frac{3}{4}$.

6. On veut les valeurs de t pour lesquelles $C(t) = \frac{2}{3}$; d'après le tableau de variations, il y aura 2 valeurs de t répondant à la question.

On résout dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $C(t) = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} C(t) = \frac{2}{3} &\iff 3(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{2}{3} \iff 9e^{-t} - 9e^{-2t} = 2 \iff 0 = 9e^{-2t} - 9e^{-t} + 2 \\ &\iff 9(e^{-t})^2 - 9e^{-t} + 2 = 0 \end{aligned}$$

On pose $T = e^{-t}$ et on résout l'équation $9T^2 - 9T + 2 = 0$.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times 2 = 9 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$T' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 3}{18} = \frac{1}{3} \text{ et } T'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 3}{18} = \frac{2}{3}$$

On cherche donc les valeurs de t telles que $e^{-t} = \frac{1}{3}$ et $e^{-t} = \frac{2}{3}$:

$$e^{-t} = \frac{1}{3} \iff -t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff t = \ln(3); \quad e^{-t} = \frac{2}{3} \iff -t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \iff t = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \iff t = \ln(1,5)$$

La concentration est égale à $\frac{2}{3}$ pour $t = \ln(1,5)$ et $t = \ln(3)$.

7. On complète le tableau des variations de la fonction C :

t	0	$\ln(1,5)$	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$+\infty$
$C(t)$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	0

On en déduit que la concentration du médicament est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[\ln(1,5) ; \ln(3)]$.

On peut vérifier graphiquement les résultats précédents :

