République du Cameroun
Éléments de correction de l'épreuve zéro de mathématiques
Baccalauréat C et E
Session de 2021
Rédigé par : Nzouekeu Mbitkeu Patrice

Partie A : Évaluation des ressources. (13,25 points)

Exercice 1. *(3,25 points)*

Soit h la fonction définie sur $[\frac{-3}{4};+\infty[$ par

$$h(x) = \sqrt{x+\frac{3}{4}}$$

1. *Résolvons l'équation $h(x) = x$.*

$$h(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{3}{4}} = x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{3}{4}}\right)^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{3}{4} = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$\Delta = (-4)^2 - (4\times 4\times -3) = 16+48 = 64 = 8^2$$
$$x_1 = \frac{4-8}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$
$$x_2 = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$S = \left\{\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right\}$$

2. *Montrons que si $x \in [0;\frac{3}{2}]$ alors :*
   (a) *$h([0;\frac{3}{2}]) \subset [0;\frac{3}{2}]$*
   soit $x \in [0;\frac{3}{2}]$ on a

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$
$$0+\frac{3}{4} \leq x+\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2}+\frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4} \leq x+\frac{3}{4} \leq \frac{9}{4}$$
$$0 \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{2}$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{2}$$

Donc

$$h(x) \in [0; \frac{3}{2}]$$

d'où

$$h([0; \frac{3}{2}]) \subset [0; \frac{3}{2}]$$

(b) $\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
On a

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\frac{3}{4}}}$$

$\forall x \in [0; \frac{3}{2}]$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$0 + \frac{3}{4} \leq x + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \leq x + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{2}$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 2\sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq 2 \times \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3} \leq 2\sqrt{x+\frac{3}{4}} \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où le résultat.

(c) $|h(x) - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|x - \frac{3}{2}|$
D'après la question 2b on a

$$0 \leq \frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\forall x \in [0; \frac{3}{2}]$

$$|h'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[x; \frac{3}{2}] \subset [0; \frac{3}{2}]$ *on a*

$$\left|h\left(\frac{3}{2}\right) - h(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2} - x\right|$$

Or $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ *donc*

$$\left|\frac{3}{2} - h(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2} - x\right|$$

$$\left|-(h(x) - \frac{3}{2})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-(x - \frac{3}{2})\right|$$

D'où

$$\left|h(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$$

3. *Soit la suite u définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}} \end{cases}$$

(a) *Montrons que pour tout entier naturel non nul n,*

$$\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\left|u_1 - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3})\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc la proposition est vraie au rang 1.
Supposons que

$$\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$$

est vraie et montrons que

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times \frac{3}{2}$$

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|h(u_n) - \frac{3}{2}\right|$$

or d'après la question 2c on a

$$\left|h(u_n) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|u_n - \frac{3}{2}\right|$$

d'après l'hypothèse de recurrence on a donc

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$$

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times \frac{3}{2}$$

d'où le résultat.

(b) *Déduisons la convergence de la suite (u_n). On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n} \times \frac{3}{2} = 0$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \frac{3}{2}| = 0$$

par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

d'où la suite u converge vers $\frac{3}{2}$

<u>Partie B :</u> Évaluation des compétences.(6,75 points)

<u>**Problème**</u> **1.** *()*

1. *Dans le repère défini par M.TAGNE, donnons la position exacte des lieux d'accès qui marquent la rencontre des courbes décrivant les côtés du terrain.*

   ♣ *Déterminons les valeurs possibles de l'entier naturel n.*

$$5 \equiv 2[3]$$
$$5^2 \equiv 1[3]$$
$$5^3 \equiv 2[3]$$
$$5^4 \equiv 1[3]$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$5^{2k} \equiv 1[3]$$
$$5^{2k+1} \equiv 2[3]$$

Nous déduisons donc que $n \in \{1;2\}$. D'après la famille de fonctions définie par

$$f_n(x) = (1-x)e^{nx}$$

on obtient les deux fonctions définies comme suit :

$$f_1(x) = (1-x)e^{x}$$

et

$$f_2(x) = (1-x)e^{2x}$$

♣ *Position relative des deux courbes (C_1) de $f_1(x)$ et (C_2) de $f_2(x)$.*
Il suffit de résoudre l'équation

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow (1-x)e^x = (1-x)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^x - (1-x)e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(1-x)(e^x - e^{2x})] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(e^x - e^{2x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x) = 0 \quad ou \quad (e^x - e^{2x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad e^x(1-e^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = 0$$

$$f_1(1) = (1-1)e^1 = 0$$

$$f_1(0) = (1-0)e^0 = 1$$

On a les points $A(1;0)$ *et* $B(0;1)$ *[2,25 points]*

2. *Dans un repère orthomormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *, fesons une représentation rigoureuse du domaine de M.TAGNE sur l'intervalle* $[-2;+\infty[$. *(4cm pour 1 unité)*
   ♣ *Étude de la fonction* $f_1(x)$ *sur l'intervalle* $[-2;+\infty[$.

$$f_1(x) = (1-x)e^x$$

Calculons les limites aux bornes

$$\lim_{x\to -2^+} f_1(x) = \lim_{x\to -2^+} (1-x)e^x = (1-(-2))e^{-2} = 3e^{-2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} (1-x)e^x = -\infty$$

Calculons la derivé
$\forall x \in [-2;+\infty[$,

$$f_1^{'}(x) = [(1-x)e^x]' = (1-x)'e^x + (e^x)'(1-x) = -e^x + e^x(1-x) = e^x(-1+1-x) = -xe^x$$

$$f_1^{'}(x) = -xe^x$$

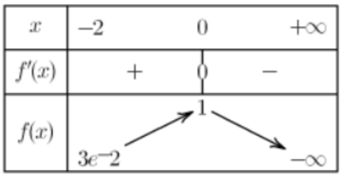
$$f_1^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$f_1(0) = (1-0)e^0 = 1$$

Dressons le tableau de variations



♣ *Étude de la fonction $f_2(x)$ sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.*

$$f_2(x) = (1-x)e^{2x}$$

Calculons les limites aux bornes

$$\lim_{x\to -2^+} f_2(x) = \lim_{x\to -2^+} (1-x)e^{2x} = (1-(-2))e^{-4} = 3e^{-4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} (1-x)e^{2x} = -\infty$$

Calculons la derivé
$\forall x \in [-2;+\infty[$,

$$f_2'(x) = [(1-x)e^{2x}]' = (1-x)'e^{2x} + (e^{2x})'(1-x) = -e^{2x} + 2e^{2x}(1-x) = e^{2x}(-1+2-2x) = (1-2x)e^{2x}$$

$$f_2'(x) = (1-2x)e^{2x}$$

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)e^{2x} = 0$$

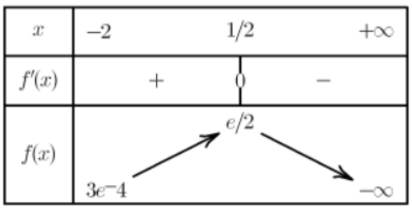
$$\Leftrightarrow 1-2x = 0$$

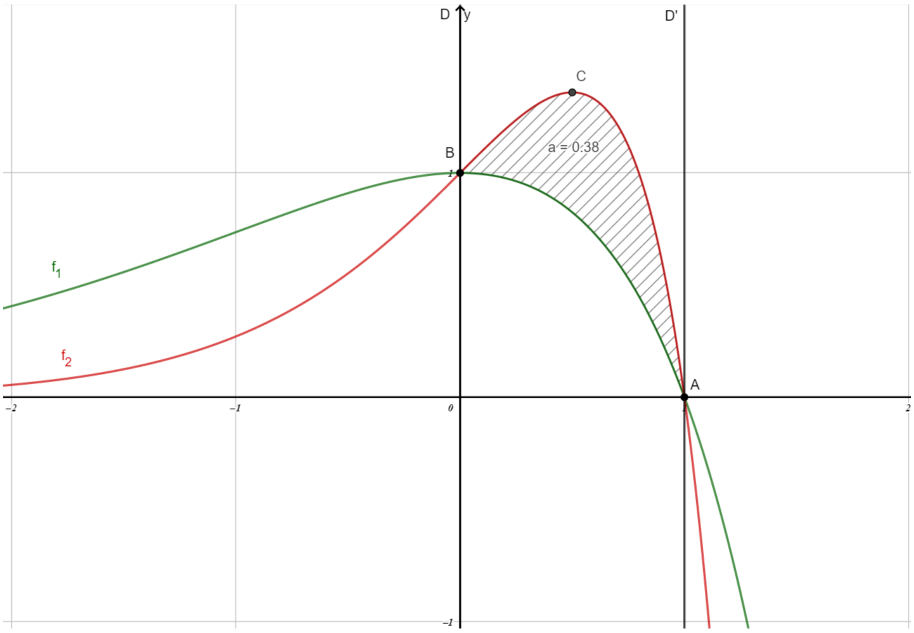
$$\Leftrightarrow 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)e^{2\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e = \frac{e}{2}$$

Dressons le tableau de variations





[2,25 points]

3. *Déterminons le montant à prévoir pour couvrir entièrement le domaine. (On prendra pour unité d'aire* $10.000m^2$)

   ♣ *Cherchons d'abord l'aire comprise entre les deux courbes délimitées par les droites d'équation* $x = 0$ *et* $x = 1$.

   On a

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \Big[f_2(x) - f_1(x)\Big]dx \\ &= \int_0^1 \Big[(1-x)e^{2x} - (1-x)e^{x}\Big]dx \\ &= \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx - \int_0^1 (1-x)e^{x}dx \\ &= I_2 - I_1 \end{aligned}$$

   avec

$$I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$$

   et

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{x}dx$$

   Calculons

$$I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$$

   Posons $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^{2x}$; $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
   par intégration par partie on a :

$$I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}$$

Calculons

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

Posons $h(x) = 1-x$, $h'(x) = -1$, $r'(x) = e^x$; $r(x) = e^x$
par intégration par partie on a :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -e^x dx$$

$$= \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1$$

$$= \left[(1-x)e^x + e^x\right]_0^1 = e-2$$

$$A = I_2 - I_1 = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - (e-2)\right)u.a$$

$$A = I_2 - I_1 = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)u.a$$

$$A = I_2 - I_1 = 10000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)m^2$$

d'où le montant M *vaut*

$$M = 2500 \times 10000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)FCFA = 25000000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)FCFA$$

$$M \simeq (6250000e^2 + 31250000 - 25000000e) \ \ FCFA$$

$$M \simeq 9474554,90684043 \ \ FCFA$$

[2,25 points]