Entrée École de santé des armées 12 juin 2020 - corrigé

Durée : 1 heure 30 minutes Coefficient : 2

QCM 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est :

A. impaire **B.** paire $\boxed{\textbf{C.}\ \text{bornée}}$ **D.** aucune des réponses précédentes

> Le polynôme x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$ donc ce polynôme ne s'annule jamais et est toujours positif; on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout réel x.
> La fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$.
> $f'(x)$ est du signe de $-2x-1$ donc la fonction f est croissante pour $x < -\frac{1}{2}$ puis décroissante pour $x > -\frac{1}{2}$; elle atteint un maximum pour $x = -\frac{1}{2}$.
> La fonction f est donc minorée par 0 et majorée par $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
> **Réponse C.**

QCM 2

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} =$

A. 1 $\boxed{\textbf{B.}\ 0}$ **C.** $+\infty$ **D.** -1

> D'après le cours, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.
> **Réponse B.**

QCM 3

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x =$

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ $\boxed{\textbf{C.}\ 0}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

> $\sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$
> Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} + x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0$.
> **Réponse C.**

QCM 4

Soit f une fonction telle que $f(1)=3$ et $f'(1)=-1$. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 a pour équation :

A. $y=-x+3$ | $\boxed{\textbf{B. } y=-x+4}$ | **C.** $y=x-2$ | **D.** $y=3x-4$

> La tangente a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y=-1(x-1)+3$ ou encore $y=-x+4$.
> **Réponse B.**

QCM 5

Le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x+\sin x=1$ est :

A. 0 | **B.** une infinité | $\boxed{\textbf{C. } 1}$ | **D.** 2

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sin(x)$.
> $f'(x)=1+\cos(x)\geqslant 0$ car $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$.
> La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
> De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
> Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
>
> **Réponse C.**

QCM 6

L'ensemble des solutions de l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x}+3\,\mathrm{e}^{x}-5=0$ est

A. $\emptyset$ | $\boxed{\textbf{B. } \{0\}}$ | **C.** $\{1\}$ | **D.** $\left\{1\,;\,\frac{-5}{2}\right\}$

> On pose $X=\mathrm{e}^{x}$; l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x}+3\,\mathrm{e}^{x}-5=0$ devient donc $2X^2+3X-5=0$.
> $\Delta=49>0$ donc l'équation en X a deux solutions $X=1$ et $X=-\frac{5}{2}$.
> $\mathrm{e}^{x}=1$ donne pour solution $x=0$, et $\mathrm{e}^{x}=-\frac{5}{2}$ ne donne pas de solution; l'équation donnée a donc pour solution $x=0$.
>
> **Réponse B.**

QCM 7

$\ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right]-\left[\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]^2=$

A. 3 | **B.** -1 | **C.** 0 | $\boxed{\textbf{D. } -3}$

> $\ln\left(\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right)=\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=-\ln(\mathrm{e}^2)=-2\ln(\mathrm{e})=-2$; $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\ln(\mathrm{e})=-1$ donc $\left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2=1$
> $\ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right]-\left[\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]^2=-2-1=-3$
> **Réponse D.**

QCM 8

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x-1) = \ln(1-2x)$ est :

A. $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$ $\boxed{\textbf{B. } \emptyset}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

> Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.
> L'équation $\ln(x-1) = \ln(1-2x)$ ne peut avoir des solutions que si $x - 1 > 0$ et $1 - 2x > 0$, donc si $x > 1$ et $x < \frac{1}{2}$ donc jamais.
> **Réponse B.**

QCM 9

L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x-1} - 2\right)$ est

A. $\left]\frac{\ln 3}{2}\,;\,+\infty\right]$ **B.** $]0\,;\,+\infty[$ **C.** $\left]\frac{1+\ln 2}{2}\,;\,+\infty\right[$ **D.** $]2\,;\,+\infty[$

> L'ensemble solution de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $\mathrm{e}^{2x-1} - 2 > 0$.
> On résout cette inéquation :
> $\mathrm{e}^{2x-1} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{2x-1} > 2 \iff 2x - 1 > \ln(2) \iff 2x > 1 + \ln(2) \iff x > \frac{1+\ln(2)}{2}$
> **Réponse C.**

QCM 10

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x =$

$\boxed{\textbf{A. } 4}$ **B.** $\dfrac{\ln 3}{4}$ **C.** 7 **D.** $2\,\mathrm{e}^2$

> La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ a pour primitive $x \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$.
> Donc $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\ln 3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{0} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{1}{2} = 4$

QCM 11

Soit la suite géométrique (u_n), de raison q, de premier terme $u_1 = 18$ telle que $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ alors :

$\boxed{\textbf{A. } q = \dfrac{1}{3}}$ **B.** $q = \dfrac{1}{2}$ **C.** $q = 2$ **D.** $q = -\dfrac{1}{3}$

> $u_1 = \dfrac{u_2}{q}$ et $u_3 = u_2 \times q$ donc l'égalité $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ équivaut à $u_2^3 = 216$ donc $u_2 = 6$.
> $u_1 = 18$ et $u_2 = u_1 \times q = 6$ donc $q = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.
> **Réponse A.**

QCM 12

Soit z le nombre complexe défini par $z = \left(\cos\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$, alors :

A. $z = 0$ **B.** $z = 1$ $\boxed{\textbf{C. } z = -\mathrm{i}}$ **D.** $z = \mathrm{i}$

$\cos\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$, donc $z = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^6 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$.

Réponse C.

QCM 13

L'équation $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :

$\boxed{\textbf{A. } x = \frac{\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8}\ [\pi]}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ ou $x = \frac{3\pi}{4}\ [\pi]$

C. $x = \frac{\pi}{8}\ [\pi]$ **D.** $x = \frac{\pi}{2}\ [4\pi]$

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(2x) = \sin\frac{\pi}{4} \iff 2x = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } 2x = \pi - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$
$$\iff x = \frac{\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8}\ [\pi]$$

Réponse A.

QCM 14

L'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, où A et B sont deux points distincts, est :

A. Le cercle de diamètre [AB], privé du point A
B. La médiatrice du segment [AB]
$\boxed{\textbf{C. } \text{La perpendiculaire à [AB] passant par le point A}}$
D. Le cercle de centre A et de rayon [AB]

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ signifie que l'angle $\widehat{\mathrm{BAM}}$ est droit; donc M est situé sur la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Réponse C.

QCM 15

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A$(-1\ ;\ 0\ ;\ -2)$, B$(-1\ ;\ -3\ ;\ -5)$, C$(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et D$(3\ ;\ -2\ ;\ x)$.

Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales pour x égal à :

A. -2 **B.** 0 $\boxed{\textbf{C. } 4}$ **D.** 1

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(0\ ;\ -3\ ;\ -3)$, et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ -3\ ;\ x-1)$.
Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont orthogonaux, autrement dit si le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est nul.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \iff 0 \times 1 + (-3) \times (-3) + (-3) \times (x-1) = 0 \iff 9 - 3x + 3 = 0 \iff x = 4$

Réponse C.

QCM 16

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ et $P_A(B)=\dfrac{1}{4}$, alors la probabilité $P(A)$ est égale à :

$\boxed{\textbf{A. } \dfrac{2}{3}}$ **B.** $\dfrac{1}{24}$ **C.** $\dfrac{1}{12}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B) \iff \dfrac{1}{6}=P(A)\times\dfrac{1}{4} \iff P(A)=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} \iff P(A)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{1} \iff P(A)=\dfrac{2}{3}$

Réponse A.

QCM 17

La durée de vie en années d'un appareil médical est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Sachant que la durée de vie moyenne de cet appareil est de 10 ans, alors λ est égal à :

A. 10 **B.** e^{-10} $\boxed{\textbf{C. } 0,1}$ **D.** 1

On sait que $E(T)=10$ et que $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}$, donc $\lambda=\dfrac{1}{10}=0,1$.

Réponse C.

QCM 18

On a 5 tubes à essai indiscernables de 5 personnes testées. Deux contiennent le virus Covid 19. Trois ne le contiennent pas.

On tire au hasard successivement et sans remise 3 tubes. La probabilité d'obtenir trois tubes sans virus est :

$\boxed{\textbf{A. } \dfrac{1}{10}}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{40}$ **D.** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$

Pour obtenir trois tubes sans virus, il faut prendre les 3 tubes parmi les 3 ne contenant pas de virus et il n'y a qu'une façon de le faire.

Il y a $\dbinom{5}{3}=10$ façons de choisir 3 tubes parmi 5.

On tire au hasard des tubes indiscernables, donc il y a équiprobabilité.

La probabilité d'obtenir trois tubes sans virus est donc : $\dfrac{1}{10}$.

Réponse A.

QCM 19

On a 5 tubes à essai indiscernables de 5 personnes testées. Deux contiennent le virus covid 19. Trois ne le contiennent pas.

On tire au hasard un tube, on le teste, on le remet. On procède ainsi à 4 tirages.

La probabilité d'obtenir exactement 3 tubes sans virus est :

A. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ **B.** $4 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5}$ $\boxed{\textbf{C. } 4 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \dfrac{2}{5}}$ **D.** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \dfrac{2}{5}$

Il s'agit d'une répétition de $n = 4$ tirages qui se passent dans les mêmes conditions et de façon indépendante.
Lors d'un tirage, la probabilité d'obtenir un tube sans virus est $p = \dfrac{3}{5}$
La variable aléatoire X qui, sur 4 tirages, donne le nombre de tubes sans virus suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{3}{5}$.
On cherche $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^1 = 4 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \dfrac{2}{5}$.

Réponse C.

QCM 20

On suppose que le statut pathologique réel d'un patient moyen est connu avec certitude par un moyen incontestable : un test de référence (sérologique ou autre) appelé le gold standard.

Ce gold standard permet de déterminer la prévalence p de la maladie, c'est-à-dire la probabilité qu'un individu soit malade dans la population.

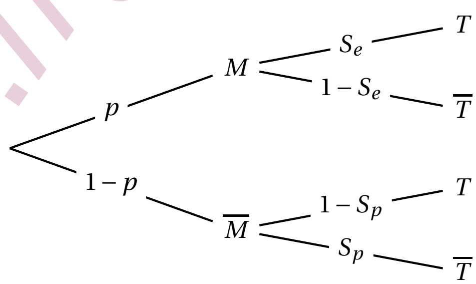
Comme on ne peut pas, par ailleurs tester toute la population avec ce gold standard (pour des raisons de coûts), on utilise un test diagnostique dont les valeurs informationnelles se déclinent ainsi :

- La sensibilité Se qui est la probabilité qu'un individu d'une population testée soit négatif au test diagnostique sachant sachant qu'il est réellement malade.
- La sensibilité Sp qui est la probabilité qu'un individu d'une population testée soit négatif au test diagnostique sachant sachant qu'il est réellement non malade.

On appelle valeur prédictive positive de ce test diagnostique, notée VPP, la probabilité qu'un sujet soit réellement malade sachant qu'il est positif au test diagnostique. Elle vaut :

A. $\frac{(1-p)Se}{pSe+(1-p)(1-Sp)}$ $\boxed{\textbf{B. } \frac{pSe}{pSe+(1-p)(1-Sp)}}$ **C.** $\frac{pSp}{(1-p)Se+p(1-Sp)}$ **D.** $\frac{pSp}{pSe+(1-p)(1-Sp)}$

On appelle M l'événement « le sujet est malade » et T l'événement « le test est positif » ; on peut alors résumer les données par l'arbre pondéré :



On cherche $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$.
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times S_e + (1 - p) \times (1 - S_p)$ et $P(M \cap T) = p \times S_e$
Donc $P_T(M) = \dfrac{p \times S_e}{p \times S_e + (1 - p) \times (1 - S_p)}$

Réponse B.