MINISTERE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION

4ème

Mathématiques

Sciences Techniques

4ème année de l' enseignement second

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

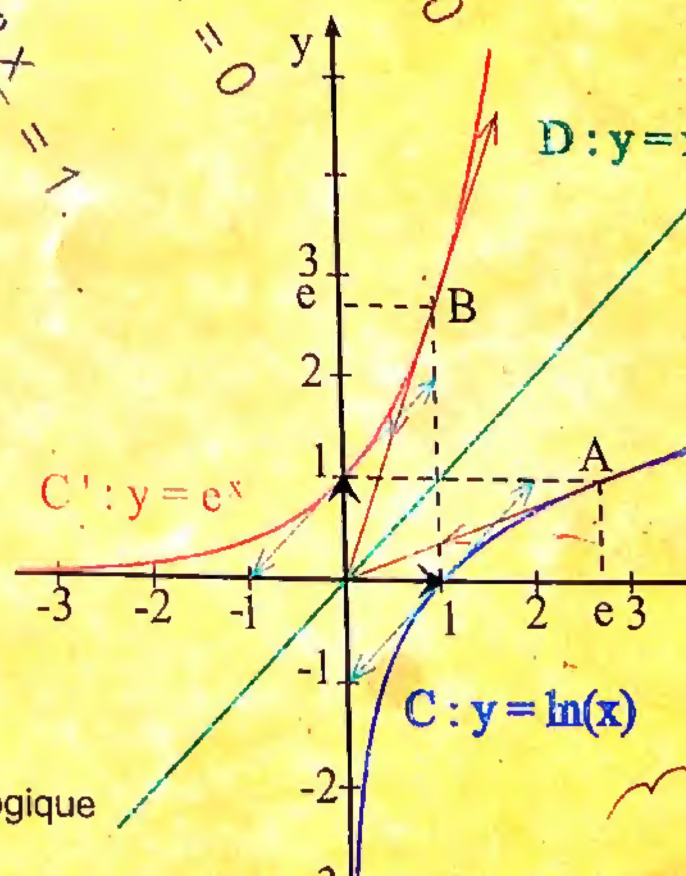
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



222 451

Centre National Pédagogique

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

4^{éme} ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SCIENCES TECHNIQUES

Auteurs

Slimane HASSAYOUNE
Inspecteur principal

Hédi GASSAR
Inspecteur

Amor ABBES
Professeur

Abdelhamid ABOUELKACEM
Professeur principal

Coordinatrice

Hikma SMIDA
Professeur universitaire

Evaluateurs

Ammar ARDHAOUI
Inspecteur principal

Abdellatif GALLALI
Inspecteur principal

Centre National Pédagogique

PRÉFACE

Le présent manuel est conforme au programme de mathématiques de la quatrième année Sciences Techniques applicable à partir de l'année scolaire 2007/2008.
Les activités proposées sont essentiellement conçues pour permettre aux élèves de construire des savoirs et de maîtriser des habiletés et des aptitudes par la consolidation des acquis et leur mobilisation dans des situations-problèmes du domaine des mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

La méthodologie adoptée permet d'établir un équilibre entre le travail personnel des élèves et le travail collectif encadré par l'enseignant.
C'est ainsi que :
- De nombreuses activités de rappel, de consolidation, de découverte, d'application, d'intégration et d'évaluation sont proposées.
- L'élève est, toujours, appelé à concevoir et à mettre en œuvre, lui-même, des stratégies pour justifier ou réfuter un résultat en exerçant son esprit critique et en utilisant les différents modes de raisonnement mathématique.
- La démarche expérimentale et les conjectures sont fréquemment sollicitées.
- Les activités d'évaluation sont favorisées par un éventail large d'exercices et problèmes proposés à la fin de chaque chapitre. Elles sont des occasions propices de diagnostic, de contrôle et de remédiation aux lacunes éventuelles.
- Des illustrations multiples et diversifiées permettent de visualiser les propriétés des configurations géométriques et les particularités des représentations graphiques des fonctions du programme.

En replaçant les activités mathématiques dans leurs contextes d'application et dans leur histoire, nous souhaitons que ce manuel puisse contribuer à former les esprits et faire apprécier l'utilité, l'efficacité et la beauté des mathématiques au plus grand nombre d'élèves voire à éveiller leur vocation scientifique.

Nous tenons à remercier vivement les évaluateurs pour leur précieuse et fructueuse collaboration.
Enfin, nous remercions d'avance, les lecteurs qui, par leurs remarques, critiques et suggestions nous aideront à améliorer cet ouvrage.

Les auteurs

MODE D'EMPLOI DU MANUEL

Ce manuel a été conçu pour que vous puissiez réaliser votre apprentissage selon une progression qui s'adapte à votre rythme et qui tient compte du niveau de vos connaissances. Il est constitué de 16 chapitres construits sur le modèle suivant :

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Cette rubrique est destinée à :

- Rappeler et consolider les acquis antérieurs.
- Vérifier les notions de base nécessaires aux apprentissages spécifiques au chapitre.
- Identifier les difficultés éventuelles et y remédier à temps et de façon contextualisée.

COURS

Cette rubrique est composée d'activités permettant d'approcher les nouvelles notions à partir des acquis réalisés au cours des apprentissages antérieurs et de maîtriser les aptitudes et les habiletés visées par les programmes. Les résultats essentiels sont présentés dans des encadrés et à l'aide d'un langage clair et simple. Les activités et les exercices résolus ont pour objectif d'aider l'élève à comprendre et assimiler les méthodes et techniques mises en jeu dans la résolution de problèmes.

RÉSUMÉ DU COURS

Cette rubrique est constituée des résultats exigibles du programme pour une meilleure mémorisation des acquis fondamentaux du cours.

AVEC L'ORDINATEUR

Dans cette rubrique, nous proposons des activités permettant l'exploitation de l'outil informatique pour réaliser des expérimentations, conjecturer des propriétés ou contrôler des résultats. À travers un prolongement théorique, nous avons tenu à ce que ces activités soient aussi le point de départ d'une réelle démarche mathématique où l'élève est appelé à se poser des questions, justifier des affirmations, démontrer des propriétés et argumenter des points de vue.

EXERCICES ET PROBLEMES

Dans cette rubrique, des exercices d'application directe, des exercices d'approfondissement, des problèmes intégratifs dans des situations significatives du domaine mathématique ou en rapport avec l'environnement et des problèmes de synthèse sont proposés afin d'entraîner les élèves sur les diverses utilisations des nouvelles notions dans des contextes variés.

APERÇU HISTORIQUE

Dans cette rubrique, nous avons essayé de replacer les mathématiques dans leur histoire par des notes et des bibliographies destinées à être lues par les élèves ; il est possible d'en débattre en classe ou de provoquer des exposés permettant d'apprécier la contribution des mathématiques, en particulier, et les sciences, en général, à la compréhension des phénomènes, au développement de l'individu et à l'évolution du monde.

SOMMAIRE

Partie 1

Partie 2

Partie 1

Chapitre 1

Limite et continuité

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Prolongement par continuité
	❖	Limite et ordre
	❖	Fonctions monotones et limites
	❖	Limite et continuité d'une fonction composée.
	❖	- Continuité sur un intervalle - Image d'un intervalle par une fonction continue
	❖	Résolution d'équations de la forme : f(x) = k.
	❖	Limites et comportement asymptotique.
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en x_0.

1) $f(x)=-x^3+x^2+1$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$, $x_0=1$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+9}$, $x_0=2$.

2 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$

3 Soient f, g, het k les fonctions définies par :

$f(x)=-3x^7-x^5-x+1$; $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$; $h(x)=\sqrt{2x^2+x}+x$ et $k(x)=\left|\dfrac{x^3+4x^2}{x+4}\right|$.

a) Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
b) Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Théorèmes

- La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle de son monôme de plus haut degré :
  $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ où $a_n\neq0$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}a_nx^n$
- La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré :
  $R(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$ où $a_nb_m\neq0$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}R(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$
- Soit f une fonction et ℓ un réel. Quand le réel x tend vers x_0, ou vers x_0^+, ou vers x_0^-, ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on a les résultats suivants :

Si $\lim f=\ell$ et f est positive alors $\lim\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$ $(\ell\geq0)$.

Si $\lim f=+\infty$ et f est positive alors $\lim\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$

Si $\lim f=\ell$ alors $\lim|f|=|\ell|$.

Si $\lim f=+\infty$ ou $\lim f=-\infty$ alors $\lim|f|=+\infty$.

Théorèmes : Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions. Quand le réel x tend vers x_0, ou vers x_0^+, ou vers x_0^-, ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on a les résultats suivants :

f a pour limite	g a pour limite	f + g a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I

f a pour limite	g a pour limite	f x g a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$+\infty$	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell'>0$	$-\infty$
$+\infty$	$\ell'<0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell'<0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I

f a pour limite	g a pour limite	$\frac{f}{g}$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$+\infty$	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell'>0$	$-\infty$
$+\infty$	$\ell'<0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell'<0$	$+\infty$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (on applique la règle des signes)
0	0	F.I
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I

N.B : F.I désigne une forme indéterminée , pour laquelle une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

4 a) Vérifier que pour x > 0 on a : $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x}\sqrt{x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \ ; \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

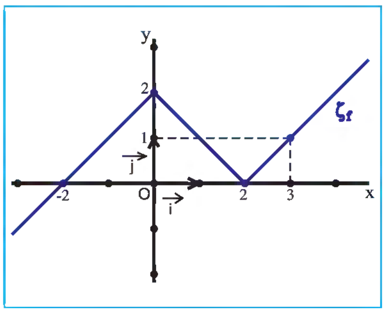
1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
2) La fonction f est - elle continue en 1 ?
3) La fonction f est - elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorèmes

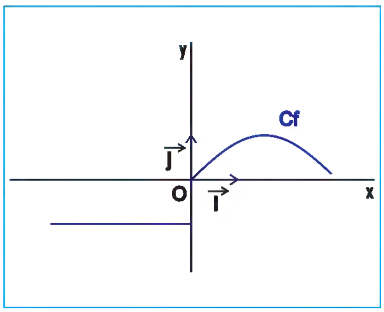
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
  f est continue en x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0, x_0 + h[$, $(h > 0)$.
  f est continue à droite en x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0 - h, x_0]$, $(h > 0)$.
  f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.
  f est continue en x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.
- Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors les fonctions f+g, fxg et $|f|$ sont continues en x_0, si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Toute fonction polynôme est continue en tout réel x_0.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel x_0 de son domaine de définition.

6 Répondre par « vrai » ou « faux » en se référant à la représentation graphique de f, dans chacun des cas suivants :

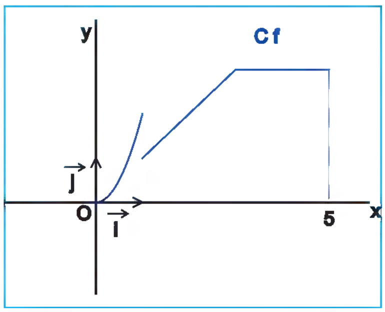
a) f est continue sur [-2, 3].



b) f est continue en 0.



c) f est continue sur]0, 5[.



COURS

Prolongement par continuité

Activité 1

1) On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$, par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$.

   a) Prouver que f est continue en tout réel différent de -1.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

2) On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

   a) Montrer que p(x) = x + 3 , pour tout réel x.

   b) En déduire que p est continue en -1.

3) Représenter graphiquement chacune des fonctions f et p dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Définition

Soit f une fonction continue en tout point d'un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 , la fonction g définie sur I, continue en x_0 et vérifiant : $\forall\, x \in I - \{x_0\}$, g(x) = f(x).

Activité 2

1) Soit f une fonction continue en tout point d'un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I et g le prolongement par continuité de f en x_0 de I.

   Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

   Déterminer le prolongement par continuité de f en 4.

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{|x+1| - |x-1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2) Déterminer le prolongement par continuité de f en 0.

3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Limite et ordre

Activité 1

a) Montrer que pour tout réel x on a $-x^2 + 2x - 5 < 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -2} -x^2 + 2x - 5$.

c) Préciser $\lim\limits_{x \to -2} \left|-x^2 + 2x - 5\right|$

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Montrer que pour tout réel x on a $f(x) > 0$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de I, distinct de x_0, alors $\ell \geq 0$.
Si $f(x) \leq 0$ pour tout x de I, distinct de x_0, alors $\ell \leq 0$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^-, x_0^+, $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 3

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
On suppose que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$.
Montrer que $\ell \leq \ell'$. (Indication : considérer la fonction $h = f - g$)

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^-, x_0^+, $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)= x^2 \cos(\frac{1}{x})$.

1) Montrer que pour $x \neq 0$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

2) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Théorème

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 5

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.

On suppose que pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in I - \{x_0\}$ on a : $-|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 .

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 6

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I et soit ℓ un réel. On suppose que pour tout x de I, différent de x_0 on a :

$|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in I - \{x_0\}$, $\ell - |g(x)| \leq f(x) \leq \ell + |g(x)|$.

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 de I et soit ℓ un réel.

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)-\ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{2x}\right)+3$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)-3| \leq |x|$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que pour tout réel non nul x on a $\frac{1}{x^3}-1\leq f(x)\leq \frac{1}{x^3}+1$

b) Conjecturer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 9

1) a) Montrer que pour tout réel x on a $x-1\leq x+\cos x\leq x+1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\cos x$.

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1+2\sin x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^2}+\cos\frac{1}{x}$.

Fonctions monotones et limites

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Une fonction est dite monotone sur I, lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
Une fonction est dite strictement monotone sur I, lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $f(x)=x|x|+1$.

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère du plan.
2) Etudier le sens de variation de f sur chacun des deux intervalles [-2, 0] et [0, 2].
3) En déduire que pour tout x de [-2, 2] on a $-3 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
* La fonction f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$
* La fonction f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$.
* La fonction f est dite bornée sur I s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Activité 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3-\sin x}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3-\sin x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{3-\sin x}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

1) Montrer que f est croissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$
2) La fonction f est-elle majorée sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$?
3) Quelle est la limite de f à gauche en π ?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a,+∞[ ).

Si f est croissante et non majorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

Activité 4

Soit f une fonction décroissante et non minorée sur un intervalle I =]a, b[.

1) Montrer que (-f) est croissante et non majorée sur I .

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a,+∞[ ).
Si f est décroissante et non minorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ $\left(\text{ou } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$

Activité 5

On considère les fonctions f et g définies par

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{2}{\cos x} + 1 \qquad\qquad x \mapsto \frac{x-1}{x}$$

1) Montrer que f est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et g est croissante sur]0, +∞[.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3) La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

4) Montrer que g est majorée sur]0, +∞[.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[
(ou I =]a,+∞[ ).
* Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b(ou en +∞).
* Si f est décroissante et minorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b(ou en +∞).

Limite et continuité d'une fonction composée

Activité 1

On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x)= 4x^2$, $g(x)= \sqrt{x}$ et $h(x) = 2|x|$

1) Montrer que pour tout réel x on a g(f(x)) = h(x)

2) Préciser $\lim\limits_{x \to -1} g(f(x))$ et comparer le résultat trouvé avec g(f(-1)).

Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. La fonction qui à tout réel x de I associe le réel g(f(x)) est appelée la composée de f par g. On la note gof, on lit : « g rond f » et on écrit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Activité 2

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Donner l'expression de $(g \circ f)(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} (g \circ f)(x)$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \; (\ell \in \mathbb{R})$ et g est continue en ℓ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 3

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Soit x_0 un élément de I. Montrer que si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f\left(x_0\right)$ alors gof est continue en x_0.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Soit x_0 un élément de I. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f\left(x_0\right)$ alors gof est continue en x_0 .

Activité 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de I.

1) Montrer que si f est positive sur I et continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.
2) Montrer que si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0 .

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

1) Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(\dfrac{1}{x})$; comparer avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Conclure

Théorème

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]0, +\infty[$ .On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+} f(\dfrac{1}{x})$ existe. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(\dfrac{1}{x})$.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty, 0[$ .On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(\dfrac{1}{x})$ existe. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(\dfrac{1}{x})$.

Activité 6

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cos(\dfrac{1}{x}) - x^2$

2) Calculer de deux façons $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)^6$

Activité 7

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x^2+x\right)^4$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|x^2-x\right|$; $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{\sin x}{x^3}}$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell'$

(x_0, ℓ et ℓ' pourront être finis ou infinis).

Continuité sur un intervalle
Image d'un intervalle

Activité 1

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

Déterminer l'ensemble de continuité de f.

Définition

Soit a et b deux réels tels que a < b.
* Une fonction définie sur un intervalle] a, b[est dite continue sur]a, b[si elle est continue en tout réel de]a, b[.
* Une fonction définie sur un intervalle] a, b] est dite continue sur]a, b] si elle est continue sur]a, b[et continue à gauche en b.
* Une fonction définie sur un intervalle [a, b[est dite continue sur [a, b[si elle est continue sur]a, b[et continue à droite en a.
* Une fonction définie sur un intervalle [a, b] est dite continue sur [a, b] si elle est continue sur]a, b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.
* Une fonction définie sur un intervalle]a,+∞[(resp. sur]-∞,a[) est dite continue sur]a,+∞[(resp. sur]-∞,a[) si elle est continue en tout réel de]a,+∞[(resp. de]-∞,a[).
* Une fonction définie sur un intervalle [a,+∞[est dite continue sur [a,+∞[si elle est continue sur]-∞,a[et continue à droite en a.
* Une fonction définie sur un intervalle]-∞,a] est dite continue sur]-∞,a] si elle est continue sur]-∞,a[et continue à gauche en a.

Activité 2

Justifier chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

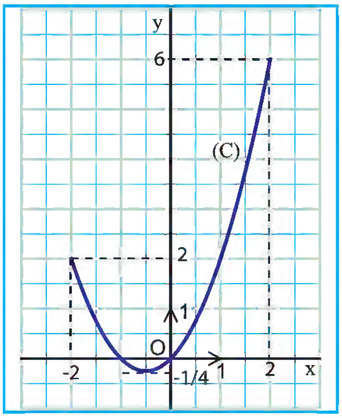
b) La fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+2x+1}{x+1}$ est continue sur l'intervalle $\left]-1, +\infty\right[$.

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $\left[-1 , 1\right]$.

Image d'un intervalle par une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par f(I) l'ensemble des réels f(x) tels que $x \in I$. On note $f(I)= \{f(x) ; x \in I\}$.

Activité 3



Soit la fonction $f: x \mapsto x^2+x$ définie dans [-2, 2].

(C) étant sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. (Voir figure ci-contre)

1) Justifier que f est continue sur l'intervalle [-2, 2].

2) Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants : f([-2,-1[) ; f([-1,0]) et f([0, 2]).

3) a) Montrer que pour tout x de [0, 2], le réel f(x) appartient à l'intervalle [0, 6].

b) Montrer que pour tout y de [0, 6] il existe un réel x de[0, 2] tel que y = f(x).

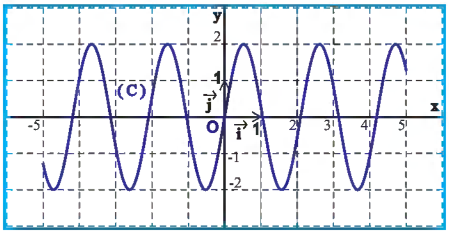
c) En déduire f([0, 2]).

4) a) Résoudre graphiquement les équations f(x)=0 et f(x)=1.

b) Résoudre algébriquement les équations f(x)=0 et f(x)=1.

Activité 4

Soit f la fonction définie dans l'intervalle]-5, 5[par f(x) = 2 sin3x et dont la représentation graphique est illustrée par la figure ci-contre :



1) a- Justifier que f est continue sur l'intervalle]-5, 5[.

b- Quelle est l'image de]-5, 5[par f ?

2) Résoudre graphiquement, dans]-5, 5[, l'équation f(x) = 0.

3) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 1.

4) Résoudre algébriquement, dans $[-\pi, \pi]$, les équations f(x)=0 et f(x)=1.

Activité 5

1) Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^2+1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

2) Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'ensemble f($\mathbb{R}$). Cet ensemble est-il un intervalle ?

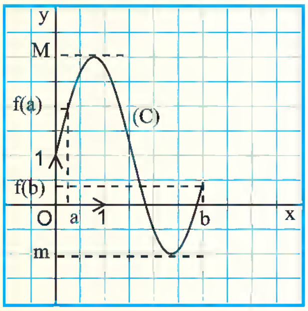
4) Déterminer l'ensemble $f(]-\infty,0[)$. Cet ensemble est-il un intervalle ?

5) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=k où k est un réel donné. Discuter.

Théorème

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

* L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue f est un intervalle fermé borné [m,M] où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [a, b].



Activité 6

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$. Déterminer algébriquement, l'image de] -1, 1 [par f.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

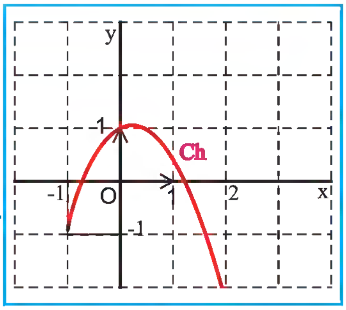
$$\begin{cases} g(x) = 2x+1 & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de g sur $]-\infty,0]$.

2) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty,0]$ par g.

Résolution d'équations de la forme f(x) = k

Activité 1



Soit h la fonction définie sur [-1, 2] par $h(x) = \sqrt{x+1} - x^2$ et représentée dans le graphique ci-contre :

1) Justifier la continuité de la fonction h sur l'intervalle [-1, 2].

2) Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{x+1} - x^2 = 0$.

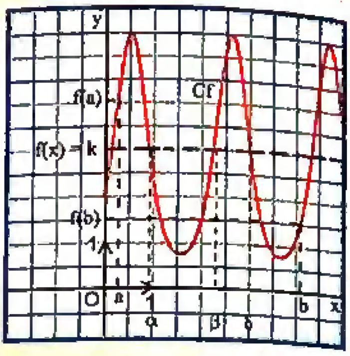
3) a) Calculer h (1) et h (2) et justifier que 0 appartient à l'intervalle h([1, 2]) .

b) En déduire que l'équation h(x) = 0 possède une solution α dans l'intervalle]1, 2[puis prouver que $1 < \alpha < 1,5$.

4) Montrer de même que h(x) = 0 possède une deuxième solution β dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,5.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a< b.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

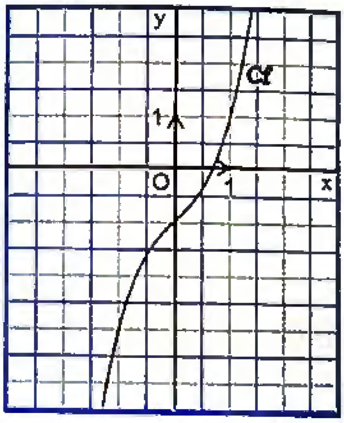


Commentaire :
Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle ne présente ni trous ni sauts.

Activité 2

On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $f : x \mapsto x^3+x-1$

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Conjecturer sur l'ensemble des solutions de l'équation f(x)=0 dans [0,1].
3) Comparer 0 avec f(0) et f(1).

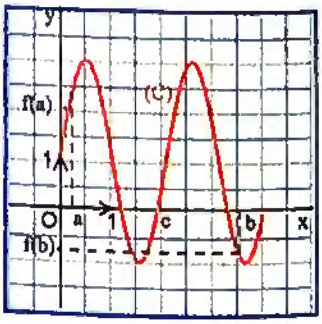


Corollaire 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

Remarque

Ce corollaire indique que lorsque f est continue et change de signe sur un intervalle [a, b] alors sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses au moins une fois en un point d'abscisse appartenant à cet intervalle.



Corollaire 2

Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

Activité 3

(unicité de la solution)

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 2x - 1$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'image de l'intervalle [0, 1] par f est l'intervalle [-1, 3].

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans l'intervalle]0, 1[.

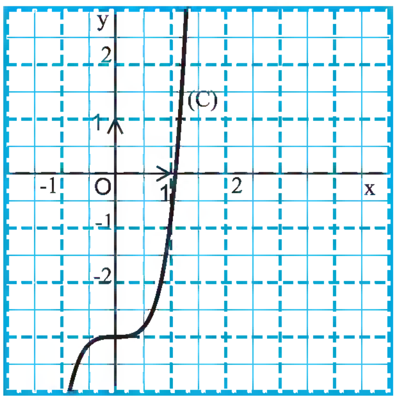
4) Donner une valeur approchée, à 10^{-2} près par défaut, de α .

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

Activité 4

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^5 + x^3 - 3$,
(voir graphique ci-contre)



1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est strictement croissante sur [0, 2].
3) a) Calculer f (0) et f (2).
   b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique appartenant à l'intervalle [0, 2].
4) On désigne par α la solution de l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [0, 2].
a) Calculer f (1) et en déduire que α appartient à [1, 2].
b) Calculer f (1,5) et en déduire une valeur approchée, à 0,5 près par défaut, de α.
c) Calculer f (1,25) et en déduire une valeur approchée, à 0,25 près par défaut, de α.

Commentaires :

Pour trouver une valeur approchée d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$, dans un intervalle $[a, b]$, on utilise **la dichotomie** de la façon suivante :

- On partage $[a, b]$ en deux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ de même amplitude.
- On détermine lequel de ces deux intervalles contient α en utilisant le corollaire1.
- On recommence avec cet intervalle les deux étapes précédentes.
- On s'arrête lorsqu'on a obtenu un encadrement satisfaisant de α.

(Dichotomie signifie : division en deux)

Activité 5

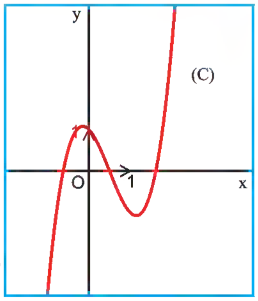
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, 1]$.

b) Utiliser la méthode de dichotomie pour détermier une valeur approchée de α .

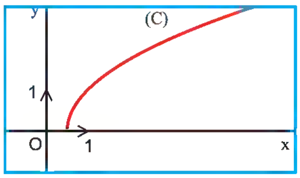
Limites et comportement asymptotique

Activité 1



1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ dont la courbe est représentée par le graphique ci-contre. Montrer que la courbe (C) de f admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ des branches paraboliques de direction celle de l'axe des ordonnées.

2) On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $f: x \mapsto \sqrt{2x-1}$ définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:



Montre que sa courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Branches paraboliques d'une courbe :

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ (resp. quand $x \to -\infty$)

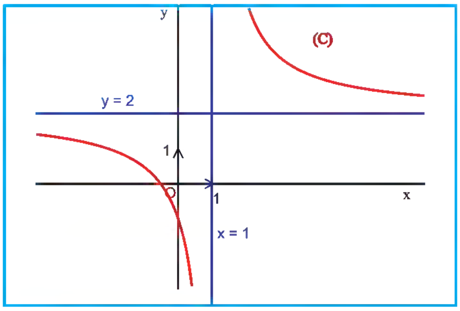
alors (C_f) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (resp. quand $x \to -\infty$)

alors (C_f) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ et représentée ci-contre :
Montrer que sa courbe possède une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

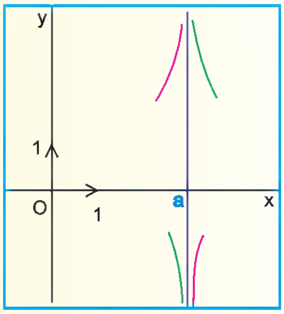


Asymptotes parallèles aux axes du repère :

* On dit que la droite Δ : $x = a$ est une asymptote à la courbe de f dans l'un des quatre cas suivants :

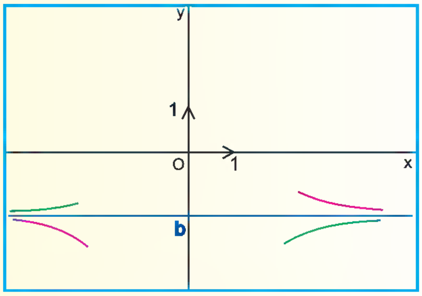
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



* On dit que la droite Δ : $y = b$ est une asymptote à la courbe de f lorsque

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$



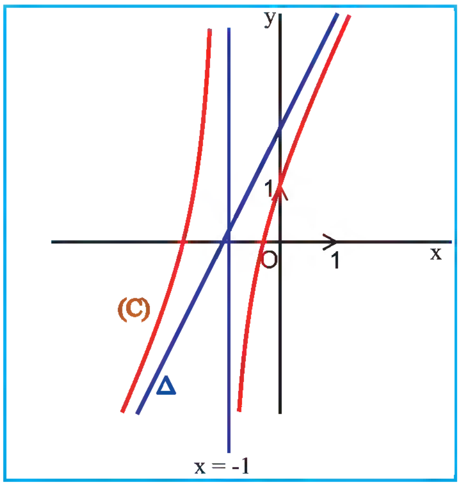
Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+1}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Montrer que la droite D : $x = -1$ est une asymptote à (C).

b) Montrer que pour tout x différent de -1 on a $f(x) = 2x+2-\dfrac{1}{x+1}$

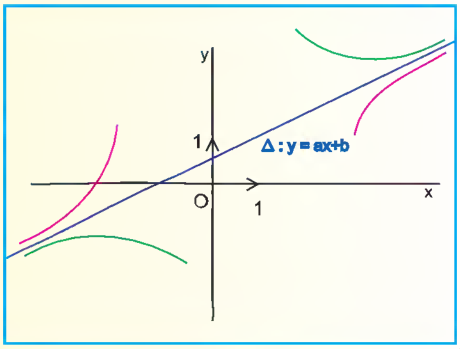
c) Prouver alors que la droite Δ : $y = 2x+2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



Asymptote oblique à une courbe :

On dit que la droite Δ : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de -∞ (resp. de +∞) si on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x)-(ax+b)\right] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x)-(ax+b)\right] = 0$)



Activité 4

1) Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$

a) Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Soit la fonction $g: x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$ on a : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
b) Déterminer les asymptotes à la courbe représentative C de g.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - x\right]$

b) Montrer que la droite D : y = x + 0,5 est une asymptote oblique à la courbe représentative (C) de h au voisinage de +∞.

c) Etudier le comportement asymptotique de la courbe (C) au voisinage de -∞.

4) Soit k la fonction définie par $k(x) = x + \sqrt{x}$. Montrer que sa courbe représentative admet une branche parabolique de direction la droite D : y = x au voisinage de +∞.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [c, +∞[.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)
alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de +∞ .

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = +\infty$ ou $-\infty$
alors la courbe représentative de f admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de la droite D : y = ax.
Les résultats sont vrais pour une fonction f définie sur un intervalle du type]-∞, c] et x tendant vers -∞ .

RÉSUMÉ DU COURS

- **Prolongement par continuité :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 de I.
Si f admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction p définie sur I par

$p(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en x_0 et p est continue en x_0.

- **Limite et ordre :**

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.
  On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si f(x) est positif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est positif.
Si f(x) est négatif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est négatif.

- Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, $(\neq x_0)$, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

- **Fonctions monotones et limite:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a, +∞[ ).

* Si f est croissante et non majorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)
* Si f est décroissante et non minorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)
* Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b (ou en$+\infty$).

- **Limite d'une fonction composée :**

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout x de D_f on a f(x) appartient à D_g .

* Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$

(x_0, ℓ et ℓ' peuvent être finis ou infinis).

En particulier si $\ell \in D_g$ et g est <u>continue</u> en ℓ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = g(\ell)$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$

* Soit x_0 un élément de D_f.

Si f est continue x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

*Si f est continue sur Df et si g est continue sur Dg alors gof est continue sur D_f.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

- Si f est positive et continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.
- Si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0.

- **Continuité sur un intervalle- Image d'un intervalle :**

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
* L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

- **Résolution d'équations de la forme f(x) = k :**

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que a< b.

Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

* Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.
* Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.
* Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

- **Asymptote oblique à une courbe :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [c, +∞[.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)

alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de +∞ . (Si b = +∞ ou -∞ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de +∞).

Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type]-∞, c] et x tendant vers -∞ .

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soit $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

1) Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :
   - Placer x dans A_2 et f(x) dans B_2 ;
   - Placer (-1) dans A_3 et écrire la formule = A_3*A_3* A_3 - A_3* A_3 -1 dans B_3 ;
   - Ecrire la formule = A_3 + 1 dans A_4 ;

Sélectionner la ligne 3 puis étendre cette formule jusqu'à la ligne 10.

2) a- Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10.

b- Choisir successivement dans les menus suivants :

Avec Excel : insertion- Graphique - Nuage de points –Terminer.

c- Conjecturer sur l'ensemble des solutions de l'équation f (x) = 0.

3) Le tableau de données et le graphique laissent apparaître que f (x) = 0 admet une solution comprise entre 1 et 2 .Pour obtenir un encadrement plus précis de cette solution placer :

* en A_3 : 1 et en A_4 : = A_3 + 0.1 sélectionner la ligne 4 puis étendre la formule jusqu'à la ligne 10.

* Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10 et insérer le graphique Examiner le résultat, puis continuer la recherche (mettre dans A_3 : 1 et dans A_4,= A_3 + 0.05).

4) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet, dans $\mathbb{R}$, une solution et une seule α et vérifier que α appartient à l'intervalle]1.45, 1.5[.

Activité 2

Calcul d'une limite en utilisant un logiciel de calcul formel :

Exemple : Soit à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x})$

- Ouvrir le logiciel Derive.
- Taper l'expression suivante : x *sin(1/x) pour exprimer $x\sin(\frac{1}{x})$.
- Valider par entrée (l'expression $x\sin(\frac{1}{x})$ va apparaître sur l'écran)
- Cliquer sur la raccourcie lim (on obtient une fenêtre où il y'a le nom de la variable x et le point limite *).
- Pour point limite compléter par +∞ puis appuyer sur simplifier.
- Il va apparaître sur l'écran les étapes et le résultat final de la limite demandée

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = 1$

Application : Déterminer à ton tour, en utilisant le logiciel Derive, chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x \; ; \qquad \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \; ; \qquad \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2+x};$$

(**N.B** : l'expression $\sqrt{x^2+1}-x$ s'écrit sqrt$(x^2+1)-x$ ou $\sqrt{\ }$ (x^2 +1) – x)

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie par $f(x)=(x-2)^3$.
a) Déterminer la limite de f en 2.
b) Déterminer les limites de $\frac{1}{f}$ à droite en 2 et à gauche en 2.
c) Que représente la droite d'équation $x = 2$, pour la courbe de $\frac{1}{f}$?

2 1) Représenter chacune des fonctions

$$f : x \to \frac{2x}{x+1} \text{ et } g : x \to \frac{-x+1}{2x+1}$$

2) On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser les asymptotes à ces courbes, aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

3 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right);\ \lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{1-x}+1\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right)$$

4 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-x-1\right);\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+3\cos x\right);\ \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+3\cos x\right)$$

5 Etudier chacune des limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^2+3x-4}\right)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

6 On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}\ ;\ g(x) = \frac{x^2+4}{2x}$$

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ h(-4) = a\ ; \text{ a est un réel.} \end{cases}$$

1) a- Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de chacune de ces fonctions.
b- Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Pour la fonction h, déterminer le réel a pour qu'elle soit continue en $x_0 = -4$.

7 Pour $x \in [-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$ on pose

$$g(x) = \frac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$$

a) Montrer que pour x différent de -2 et

$$x \in [-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[\ ,\ g(x) = \frac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$$

b) En déduire que g admet un prolongement par continuité en $x_0 = 2$ que l'on précisera.

8 Trouver chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{tg2x} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x^2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{tgx-\sin x}{x^2} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2x}{1-\cos x} \; .$$

9 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par.

$f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$ Montrer que f est bornée.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2+\cos x}$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{2+\cos x}$

10 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0.

11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur]-1, 1[.

13 Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = 2x-1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur [0, 2].
2) Déterminer l'image de [0, 2] par f.
3) Déterminer l'image de [0, +∞[par f.
4) Tracer, dans un repère orthonormé du plan la courbe C représentative de f.

14 fonction g définie par $g(x)= -\dfrac{1}{x^2}$.

a- Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$.
b- Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles]-∞, 0[et]0, +∞[.
c- Déterminer les images des ces intervalles par la fonction g.

15 a- Montrer que l'équation $x^5 + 3x - 2 = 0$ possède une solution réelle unique α appartenant à l'intervalle]0, 1[.

b- Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{4}$

16 1) En considérant la fonction $f : x \mapsto x^3+2x-1$ pour $x \in$]-∞, 1[, montrer que l'équation $x^3+ 2x = 1$. admet une solution unique x_0 telle que $0 < x_0 < 1$.

2) Déterminer une valeur approchée à 0,1 prés par défaut de x_0.

17 1) Montrer que l'équation $\sin x -2x +1 = 0$ admet une solution unique β dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de cette solution à $\dfrac{\pi}{8}$ prés .

2) Montrer que l'équation $\dfrac{3}{2}x - tgx = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

18 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une racine réelle comprise entre 1,6 et 1,7.

19 Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^6 - x - 1$.
a) Montrer que l'équation $P(x)= 0$ admet une racine réelle unique α dans l'intervalle $[1, 2]$.
b) Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette racine à 10^{-1} près.
c) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,25$.

20 Soit la fonction : $f(x)=x^2-3x|x|$.
1) Etudier la continuité puis les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3) Déterminer les images des intervalles et $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par f.

21 1) Représenter sur un même graphique (unité 3 cm) la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite D d'équation $y = x + 1$.
2) Etablir à l'aide du graphique que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, où $f(x) = x^2 - x - 1$, l'une positive qu'on notera α et l'autre négative qu'on notera β.
3) a) Placer sur la parabole et la droite D les points d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$
b) Conjecturer alors à l'aide du graphique, un encadrement de α.
4) a) Expliquer par le graphique que sur l'intervalle $[0,+\infty[$, il est équivalent de dire que $x < \alpha$ ou $f(x) < 0$.
b) En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$
c) Montrer le résultat précédent.
5) a) Montrer que $1 - \alpha$ est une solution négative de l'équation $f(x) = 0$.
b) En déduire à l'aide de la question 4), un encadrement de β.

22 Soit la fonction h définie par
$$h(x)=\frac{x}{|x|-1}$$
1) Préciser le domaine de définition de h et montrer que h est une fonction impaire, tracer alors la courbe (C') de h et préciser ses asymptotes.
2) Dresser le tableau de variation de h.
3) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre des solutions de l'équation $x + k = k|x|$.

23 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.
1) Calculer $P(-1)$, $P(-\frac{1}{2})$, $P(0)$ et $P(1)$.
2) a) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois racines distinctes qu'on les notera x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$.
b) Vérifier que $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1$
3) a) Montrer que pour tout réel α on a : $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.
b) Montrer alors, que
$$x_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right),\ x_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$
et $x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

24 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + \sqrt{2x - 1}$
Etudier les branches infinies de sa courbe C et tracer une allure de C.

APERÇU HISTORIQUE

Augustin Louis Cauchy
(21 août 1789 [Paris] - 23 mai 1857 [Sceaux])

Augustin Louis Cauchy est le mathématicien français le plus prolifique (avec presque 800 articles publiés). Ses idées politiques et religieuses ont pourtant à plusieurs reprises contrarié sa carrière. Il est né le 21 août 1789, au lendemain des événements de juillet. Son père, premier commis du lieutenant de police de Paris, voyait sa vie menacée par la colère du peuple. Il s'était, pour quelques temps, réfugié avec sa famille à Arcueil. Dès le plus jeune âge, il prend en main l'éducation de son fils, et Augustin est admis à l'Ecole Polytechnique. Celle-ci a à peine 10 ans d'âge, mais déjà les savants les plus prestigieux y enseignent.

A la sortie de l'école, Cauchy est admis dans le corps le plus prestigieux (celui des Ponts et Chaussées), et en 1810, nommé aspirant ingénieur, il participe à la construction du port de Cherbourg. C'est à Cherbourg que Cauchy commence ses recherches mathématiques sur les polyèdres, et ses premiers résultats sont prometteurs. Mais, fatigué par le cumul de la charge d'ingénieur et des longues veillées de recherche, Cauchy connait un état dépressif qui s'éternise et le pousse à retourner vivre chez ses parents.

A Paris, il cherche une situation en adéquation avec sa volonté de faire de la recherche mathématique pure. Malgré l'appui de son père, il se voit devancé par d'autres pour plusieurs postes, avant d'être élu, en 1814, à la société philomathique, antichambre de l'Académie (alors nommé Institut). A la chute de l'empire, Cauchy, royaliste et dévot, voit de nombreux protecteurs accéder au pouvoir. Leur influence permet sa nomination comme professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique en 1815.

Augustin Louis Cauchy est sans nul doute celui qui développa et précisa les règles essentielles du calcul sur les limites.

Le cours d'analyse que Cauchy professe à l'Ecole Polytechnique est décrié tant par ses élèves que par ses collègues des autres matières. Pourtant c'est ce cours, publié en 1821 et 1823, qui devait devenir la référence de l'analyse au XIXès. en mettant en avant la rigueur, et l'intuition. C'est la première fois que de vraies définitions de limites, de continuité, de convergence de suites, de séries, sont énoncées.

Entre 1821 et 1829, Cauchy publie trois ouvrages, et en particulier le « Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal » (1823), dans lesquels l'idée de limite y est clairement explicitée. Il dit : « lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ».

Il donne une des premières explications de l'infiniment petit. Il écrit : « on dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro ».

De ce fait, Cauchy détermine la dérivée d'une fonction continue, par l'approche des limites de cette fonction. Il n'a cependant pas vu le rapport qui existait entre dérivée et dérivabilité, ce que fera Dirichlet en 1829.

Partie 1

Chapitre 2

Dérivabilité

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Déterminer, chaque fois, le nombre dérivé de f en x_0 en utilisant la définition :

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = (-1)$

d) $f(x) = 5$, $x_0 = 3$

2) Donner, pour chaque résultat trouvé, l'approximation affine de f en x_0.

2 Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.

a) Déterminer le nombre dérivé de g en $x_0 = 1$.

b) Donner une approximation affine du réel $\sqrt{1{,}0001}$.

c) En déduire une valeur approchée du réel $\sqrt{10001}$.

3 Le plan est muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$

a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe représentative C_f en son point d'abscisse 1.

b) Tracer (C_f) et la tangente (T).

Nombre dérivé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de I.

On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \quad \text{ou encore}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$$

Le réel ℓ , est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I.

* Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) dont une équation cartésienne est $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$..

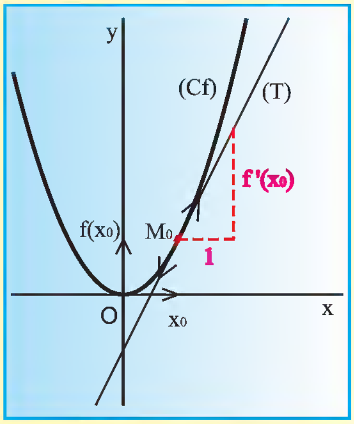
* En posant $x = x_0 + h$, on a pour h voisin de zéro, le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0+h)$.

On dit que le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation affine de $f(x_0+h)$. On écrit :

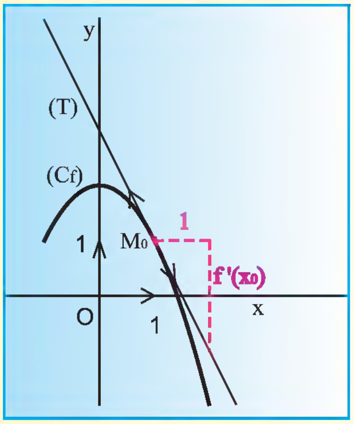
$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$.

Nombre dérivé et interprétation géométrique :

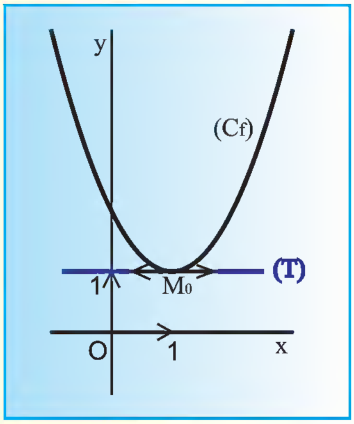
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I.
Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative (C_f) admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix}$



$f'(x_0)>0$.



$f'(x_0)<0$.



$f'(x_0)=0$.

COURS

Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite

Activité 1 (Continuité et dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f est dérivable en un réel x_0 de I. On pose $k(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si $x \neq x_0$

a) Vérifier que pour $x \neq x_0$, on a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0).k(x)$

b) Quelle est la limite de k(x) lorsque x tend vers x_0 ?

c) Trouver alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et conclure.

Théorème
Si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

2) a) Calculer le nombre dérivé à gauche de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.

* On dit que f est dérivable à gauche en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_1 tel que :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_1$$

Le réel ℓ_1, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_g(x_0)$.

* On dit que f est dérivable à droite en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_2$$

Le réel ℓ_2, est alors appelé le nombre dérivé à droite de f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$

Remarques :

* On peut avoir une fonction continue en x_0 mais non dérivable en x_0.
* Si f n'est pas continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 1|$.

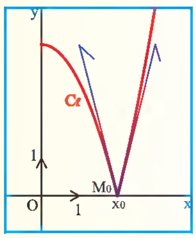
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
   b) En déduire que (C) admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point A(1,0).
   c) Tracer les deux demi-tangentes à (C) en A.
2) a) Montrer que f est une fonction paire.
   b) construire la courbe (C).

Interprétation géométrique du nombre dérivé à gauche et du nombre dérivé à droite

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à gauche en x_0 de I. Le nombre $f'_g(x_0)$ représente la pente de la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de f en son point $M_0(x_0, f(x_0))$.Une équation cartésienne de cette demi tangente est donnée par : $\begin{cases} y = f'_g(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à droite en x_0 de I. Le nombre $f'_d(x_0)$ représente la pente de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f en son point $M_0(x_0, f(x_0))$.Une équation cartésienne de cette demi tangente est donnée par : $\begin{cases} y = f'_d(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$



Lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ la courbe de f admet deux demi-tangentes de directions différentes en $M_0(x_0, f(x_0))$.
On dit alors, que le point M_0 est un point anguleux pour la courbe de f.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$ pour $x \in [2,+\infty[$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.

2) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Commentaires :

Pour $f : x \mapsto \sqrt{2x-4};\ x \in [2,+\infty[$;

On a $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$, on dit alors que la courbe représentative de f possède une demi-tangente verticale au point M_0 (2, f (2)).

Plus généralement : si f est une fonction définie sur D et vérifiant pour x_0 de D,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (\text{ou } -\infty) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (\text{ou } -\infty)$$

alors f n'est pas dérivable en x_0 et sa courbe représentative possède une demi-tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Dérivabilité sur un intervalle Fonction dérivée

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = 8 - \dfrac{16}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles]-∞, 2[et]2, +∞[et calculer f '(x) pour x < 2 et pour x > 2.

3) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0=2$.

b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Dérivabilité sur un intervalle

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x_0 de I. Dans ce cas f possède une fonction dérivée notée f ' définie sur I, qui à tout x de I associe f '(x).
* Soit a un réel.
- La fonction f est dérivable sur [a,+∞[si elle est dérivable sur]a,+∞[et dérivable à droite en a.
- La fonction f est dérivable sur]-∞, a] si elle est dérivable sur]-∞, a[et dérivable à gauche en a.
* Soient a et b deux réels tels que a < b. La fonction f est dérivable sur [a, b] si elle est dérivable sur]a, b[, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Activité 2

Recopier et compléter le tableau suivant

Fonction f	Fonction dérivée f '	Ensemble de dérivabilité de f
$f : x \mapsto x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 6$		
$f : x \mapsto \dfrac{-3x+1}{2x-1}$		
$f : x \mapsto 3\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^3}$		
$f : x \mapsto 2\cos(3x+1)$		
$f : x \mapsto \mathrm{tg}x$		

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	f '(x)
$f : x \mapsto k$	$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax + b$	$f'(x) = a, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n \; ; \; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$f'(x) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$
$f : x \mapsto \sqrt{ax + b}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}, \quad ax + b > 0.$
$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$	$f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}, \quad x \neq -\frac{d}{c}$
$f : x \mapsto \sin(ax+b)$	$f'(x) = a.\cos(ax+b), \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a.\sin(ax+b), \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x)$	$f'(x) = -(1 + \operatorname{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Activité 3

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 4x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune de ces fonctions.

2) Calculer les fonctions dérivées de $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ et g^3.

Opérations sur les fonctions dérivées

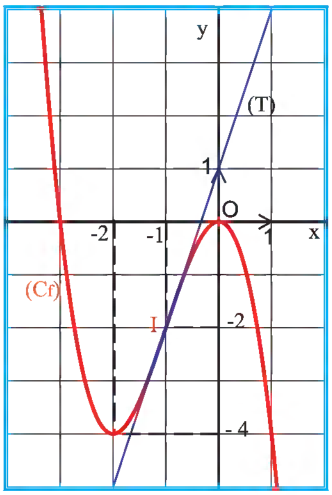
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR.

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$a.f$ (a constante réelle)	$a.f'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$f^n \ (n \geq 2)$	$nf'.f^{n-1}$
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

Dérivée seconde et point d'inflexion

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.



On a représenté la courbe (C_f) de la fonction $f : x \mapsto -x^3 - 3x^2$ et sa tangente (T) au point I d'abscisse (-1) dans le graphique ci-contre :

1) Lire graphiquement la pente de la tangente (T).
2) Déterminer la fonction dérivée f ' de f.
3) Déterminer la fonction dérivée seconde f '' de f.
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T).
   b) Conjecturer graphiquement sur la position relative de (C_f) et (T).
5) Dresser le tableau de signe de f ''(x).

Commentaires :

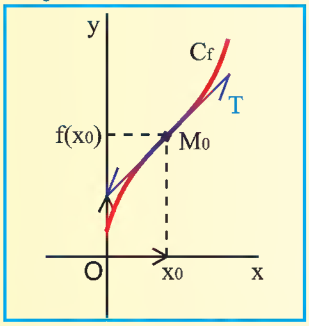
∗ On a $f''(x) = -6x - 6$, qui s'annule et change de signe en $x_0 = -1$.
  Le point I d'abscisse (-1) est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

* On remarque aussi que la courbe (C_f) traverse sa tangente en I(-1, f(-1)).

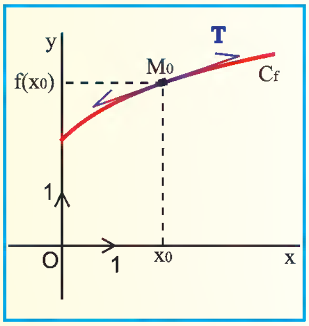
Définitions

Dérivée seconde :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f ' sa fonction dérivée.
Si la fonction f ' est dérivable sur I alors f est dite deux fois dérivable sur I et la fonction dérivée de f ' se note f " et s'appelle fonction dérivée seconde de f.

Point d'inflexion :
Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si (C_f) traverse sa tangente en M_0.



M_0 est un point d'inflexion de C_f



M_0 n'est pas un point d'inflexion de C_f

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et (C) sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. Soit f " la fonction dérivée seconde de f.
Si la fonction f " s'annule et change de signe en x_0 alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C).

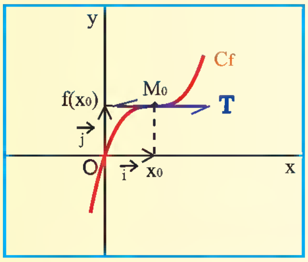
Activité 2

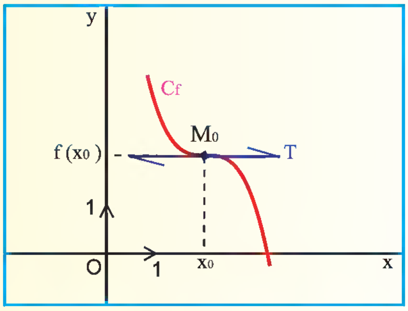
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Calculer f "(x) pour tout x réel.
b) En déduire que (C_f) possède un point d'inflexion d'abscisse x_0 que l'on précisera.
c) Montrer que la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. Soit f ' la fonction dérivée de f. Si la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).





Dérivée et sens de variation

Activité 1

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x$

1) a) Vérifier que pour tout x réel on a $f(x) = (x+1)^2 - 1$.
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$.
2) Calculer f '(x) et étudier son signe sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[-1, +\infty[$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a :

* La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.
* La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.
* La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) = 0$

Activité 2

Etudier le sens de variation de chacune des deux fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto tgx$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. b) $g : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Extrema

Activité 1

Une entreprise fabrique une quantité x d'objets par jour.
Le coût de production de cette fabrication, exprimé en DT,est donné par la formule $f(x) = (0.1).x^2 - 2x + 20$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire la valeur de x qui minimise le coût journalier de production.

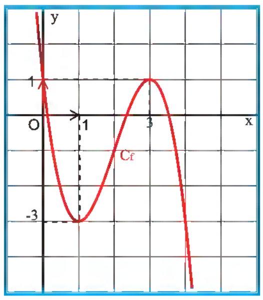
Minimum et maximum d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

* S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 .Le réel $f(x_0)$ est le minimum de f.
* S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0. Le réel $f(x_0)$ est le maximum de f.
* Un minimum ou un maximum de f s'appelle aussi un extremum de f.

Activité 2

On a représenté, ci-contre, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

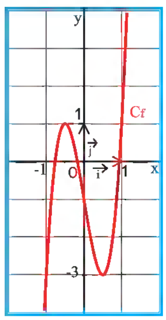


Répondre par vrai ou faux.

a) La fonction f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum en $x_0 = 3$ égal à1.
b) La fonction f admet sur $[0,+\infty[$ un maximum en $x_0 = 3$ égal à -3.
c) La fonction f admet sur $]-\infty,4]$ un minimum en $x_0 = 1$ égal à -3.
d) Pour tout $x \in]-\infty,0]$, $f(x) \geq 1$.
e) Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \leq 1$.
f) Pour tout $x \in]0,4[$, $f(x) \leq f(1)$.

Activité 3

La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$.
On considère la fonction g définie sur l'intervalle$]-1,1[$ par $g(x) = f(x)$.



a) En examinant le graphique, donner le nombre d'extremum(s) de g.
b) Conjecturer les nombres dérivés de g en ces extremums.
c) Dresser le tableau de variation de g.
d) En déduire que g admet un minimum et un maximum .
Préciser ces deux extremums.
e) Soit m le minimum de g sur $]-1,1[$, m est-il un minimum de f sur $\mathbb{R}$?
f) Soit M le maximum de g sur $]-1,1[$, M est-il un maximum de f sur $\mathbb{R}$?
g) Montrer que g est bornée.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
* La fonction f admet un maximum local en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$).
* La fonction f admet un minimum local en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$).

Activité 4

Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x)=x^3$ pour x appartenant à l'intervalle [-1, 1].
a) Que vaut f'(0) ?
b) Est-ce que la courbe de f présente un extremum local en 0 ?
c) Déterminer le signe de f'(x) pour $x>0$ et pour $x<0$.

Remarques :

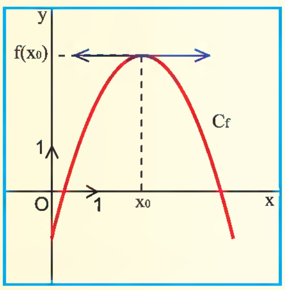
• Si pour tout x de D_f, $f(x) \leq f(x_0)$ alors le réel $f(x_0)$ est appelé le maximum absolu (ou global) de f.
• Si pour tout x de D_f, $f(x) \geq f(x_0)$ alors le réel $f(x_0)$ est appelé le minimum absolu (ou global) de f.

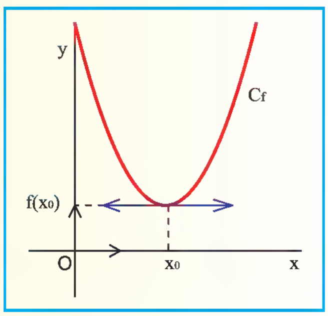
Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
• Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
• Si la fonction dérivée f ' de f s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local égal à $f(x_0)$ en x_0 .

x		x_0	
f '(x)	+	0	−
f	↗	$f(x_0)$	↘

x		x_0	
f '(x)	−	0	+
f	↘	$f(x_0)$	↗



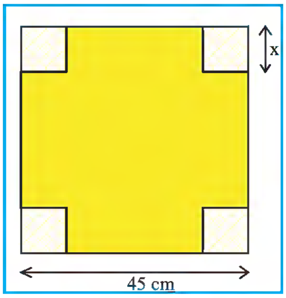


Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
En déduire qu'elle possède deux extremums dont on précisera la nature.

Activité 6

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque carrée de côté 45 cm, on découpe aux quatre coins de la plaque un carré de côté x, (voir figure ci-contre)



a) Montrer que le volume de la boite est
$v(x) = x.\,(45 - 2x)^2$; où $0 < x < 22.5$.

b) En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite soit maximal.

Dérivée d'une fonction composée

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^3$ et $g : x \mapsto -12x + 1$

1) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2) a) Définir la fonction $g \circ f$.
   b) Montrer que $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g \circ f)'(x)$.
   c) Définir la fonction $g' \circ f$ et calculer $(g' \circ f)(x).f'(x)$.
   d) Conclure.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.
Soit g une fonction définie sur f(I).
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :
$(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0).f'(x_0)$.

Activité 2

1) Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{ax + b}$ où a et b sont deux réels.
   Montrer que h est dérivable en tout réel x_0 tel que $ax_0 + b > 0$ et retrouver, en utilisant la dérivée d'une fonction composée, le résultat $h'(x_0) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax_0 + b}}$
2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   On suppose que pour tout x de I, $f(x) > 0$.

Montrer que la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

Corollaire 1

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de et g est une fonction dérivable sur f (I) alors ($g_\circ f$) est dérivable sur I et on a ($g_\circ f$)'= ($g'_\circ f$) x f' .

Corollaire 2

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de et si de plus pour tout x de I, $f(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Activité 3

Préciser, chaque fois, sur quel ensemble f est dérivable et calculer f '(x) lorsqu'il existe.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$;

b) $f(x) = \sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$;

c) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Théorème et Inégalités des accroissements finis

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2-2x-3$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère $O,\vec{i},\vec{j}$.

On donne les points A(1, f(1)) et B(3, f(3)).

1) Préciser le coefficient directeur de la droite (AB).

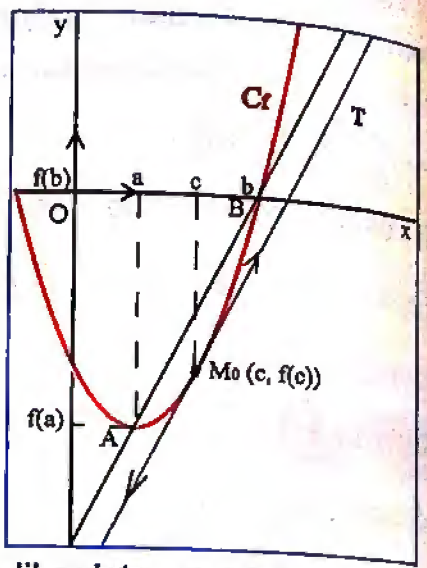
2) a) Montrer que (C) admet une tangente T parallèle à (AB) en un point $M_0(x_0, f(x_0))$ que l'on précisera.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T.

3) Tracer (C), (AB) et T.

Théorème

Théorème des accroissements finis (admis) :
Soient deux réels a et b avec a < b. Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Interprétation géométrique :

- Le réel f '(c) est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe (C_f) en son point d'abscisse c.
- Le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a, f(a)) et B(b,f(b)).

Donc $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ équivaut à T // (AB).

Ainsi, le théorème des accroissement finis affirme qu'il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB).

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives α et β avec α différent de β.
Montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{\alpha + \beta}{2}$ est parallèle à la corde (AB).

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \in [1, 5]$.

1) Montrer que $\forall x \in [1, 5]$ on a $-1 \leq f'(x) \leq -\frac{1}{25}$.

2) a- Montrer que pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle [1, 5], tels que a < b il existe c ∈]1, 5[tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b- En déduire un encadrement du rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Inégalités des accroissements finis (admis) :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes réelles m et M telles que pour tout x de I, $m \le f'(x) \le M$ alors pour tous réels a et b de I, tels que $a < b$ on a : $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

Corollaire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe $k > 0$ tels que pour tout x de I, $|f'(x)| \le k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$.

Activité 4

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[64, 65]$ on a $\frac{1}{18} \le f'(x) \le \frac{1}{16}$

b) En déduire un encadrement de $\sqrt{65}$

2) Montrer que pour tous réels x et y, dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ on a $|\cos^2 x - \cos^2 y| \le \frac{1}{2}|x - y|$

Activité 5

1) Soit la fonction $f : t \mapsto \sin t$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f'(t)| \le 1$.

b) En déduire que pour tous réels a et b on a $|\sin b - \sin a| \le |b - a|$

2) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $x \le \operatorname{tg} x \le 2x$.

RÉSUMÉ DU COURS

• **Dérivabilité en un point :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

* On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \text{ ou encore } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell .$$

Le réel ℓ, est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

* Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$, dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix}$ et dont une équation cartésienne est donnée par :

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

• **Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point :**

* On dit que f est dérivable à gauche en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_1 tel que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_1$$

Le réel ℓ_1, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_g(x_0)$.

* On dit que f est dérivable à droite en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_2$$

Le réel ℓ_2, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit C_f la courbe de f.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

• **Dérivée seconde et point d'inflexion :**

Théorèmes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

* Soit f ' la fonction dérivée de f . Si la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).
* Soit f " la fonction dérivée seconde de f. Si la fonction f " s'annule et change de signe en x_0 alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).

• **Extrema :**

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
* Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
* Si la fonction dérivée f ' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

• **Dérivée d'une fonction composée :**

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit g une fonction définie sur f(I).Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g\circ f)'(x_0) = (g'\circ f)(x_0).f'(x_0)$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g est une fonction dérivable sur f (I) alors $g\circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g\circ f)' = (g'\circ f) \times f'$

Application :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si de plus pour tout x de I, $f(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

• **Théorème des accroissements finis (admis):**

Soient deux réels a et b avec $a < b$.
Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[, tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique :

* Le réel $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe (C_f) en son point d'abscisse c.
* Le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a, f(a)) et B(b,f(b)). Donc $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ équivaut à T//(AB).

• **Inégalités des accroissements finis :**

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes réelles m et M tels que pour tout x de I, $m \le f'(x) \le M$ alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a :

$$m \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le M.$$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe $k > 0$ tels que pour tout x de I, $|f'(x)| \le k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

On considère un cercle de centre C et de diamètre [AB] , AB = 8 cm.
M est un point variable du diamètre [AB]. La perpendiculaire à (AB) qui passe par M coupe l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] en N.
1) M étant placé, calculer l'aire du triangle rectangle AMN à l'aide du logiciel utilisé.
2) Pour quelle position du point M sur [AB] l'aire du triangle AMN est-elle maximale ?

Une stratégie de résolution :

Considérer un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et poser x = AM.

a) Prouver que $x = 8\cos^2\theta$ où $\theta = \widehat{BAN}$

b) Prouver que l'aire du triangle AMN est donnée par la formule

$S(\theta) = 8\cos\theta\sin\theta$, où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

c) En dérivant la fonction S, montrer que l'aire du triangle AMN est maximale quand M est placé au milieu de [CB].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
a) Montrer, en utilisant la définition de la dérivabilité en un point, que f est dérivable en 2.
b) Donner une équation de la tangente T à (Cf) au point d'abscisse 2.
c) Construire T et (C_f).
d) Donner une approximation affine de f en 2.

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que f est dérivable en a, préciser le nombre dérivé de f en a, donner une équation de la tangente à (C_f) en son point d'abscisse a et donner une approximation affine de f en a :

1) $f : x \mapsto x^2 - 3x$; $a = -1$
2) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+4}$; $a = 1$
3) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+5x-4}$; $a = 1$

3 Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en x_0 et donner une (ou des) équation(s) de la (ou des) tangente(s) ou demi tangente(s) à (C_f) en son point d'abscisse x_0.

1) $f : x \mapsto x^2 + |x|$; $x_0 = 0$.
2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; $x_0 = 2$.
3) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$.
4) $f : x \mapsto |x^2 - x|$; $x_0 = 1$.

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3 \end{cases}$; c est un réel.
1) Déterminer le réel c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.
b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = 3 + \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$
1) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$3 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x} + 3$.
b) En déduire la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.
3) Etudier la dérivabilité à gauche de f en (-1) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4) Etudier la dérivabilité de f en 0.

7 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en 0.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f ' (x) lorsqu'il existe :

a) $f : x \mapsto \sin x$; b) $f : x \mapsto \cos x$;
c) $f : x \mapsto |x|$; d) $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 7x + 3$;
e) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$; g) $f : x \mapsto \sqrt{4x-1}$;
h) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

9 Déterminer, pour chaque fonction f, le domaine de définition et préciser sur quelle partie de son domaine elle est dérivable et calculer f '(x).

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$
2) $f : x \mapsto \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$
3) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{2\cos x - 1}$
5) $f : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$
6) $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x^2-1})$
7) $f : x \mapsto x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) En déduire que f admet un minimum global que l'on précisera.
3) Montrer que f est bornée.

11 Soit la fonction f définie sur par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

b) Dresser alors, le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

12 On considère la fonction suivante :

$$f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $]1,+\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable et que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

13 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de
2) Etablir le tableau de variation de f.
3) Soit la fonction g définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ p
g(x) = f(sinx) .
Montrer que g est dérivable et calcu
g'(x).

14 Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \cos^2 x$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2) Soit $g(x) = f(x) - x$.
a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
c) Calculer $g\left(\frac{}{4}\right)$ et $g\left(\frac{}{6}\right)$, en déduire un nouvel encadrement de .
d) Etudier la position relative de la courbe (C) de f et la droite D : $y = x$.

15 Soit la fonction f définie sur

$$\begin{cases} f(x) = 2-\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\\ f(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
1) Montrer que f est continue en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
6) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.
b) Vérifier que $1.5 < \alpha < 1.6$.
7) Etudier les branches infinies et le comportement asymptotique de f puis construire (C_f).
8) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = f(\operatorname{tg}x)$.
a) Calculer $h'(x)$.
b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $h(x) = 1 + \cos x$.

16 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1.$$

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$g'(x) = \frac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}.$$

b) Etablir le tableau de variation de g.
c) Calculer g(1). En déduire une étude de signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$$

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse (-1).

17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}.$$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et en $x_0 = (-1)$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire , dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative C de f. On précisera en particulier les asymptotes à C.

APERÇU HISTORIQUE

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano
(5 Octobre 1781 - 18 Décembre 1848)

Bernard Bolzano était un mathématicien Tchèque de langue allemande, né en 1781 mort en 1848 à Prague. Etudiant en philosophie et mathématiques, il devint prêtre e 1805. Il enseigna alors les sciences de la religion à Prague et consacra le reste de so temps aux mathématiques. Ses travaux portèrent essentiellement sur les fonctions, logique et la théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des principaux contribu teurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie.

Ils est connu pour le théorème de Bolzano, ainsi que pour le théorème de Bolzan Weierstrass, développé conjointement avec Karl Weierstrass.

Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant q les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pe sent.

Après les travaux du mathématicien Tchèque, Bernard Bolzano, qui donne les premi res notions du calcul infinitésimal , le français Augustin Luis Cauchy (1789-185 impose toute sa rigueur à ce calçul.

Précisons que « le calcul infinitésimal » concerne le calcul des dérivées et la dériv bilité.

Ainsi, dans son « cours d'analyse » Cauchy définit d'abord le concept de limites et ce fait identifie le calcul d'une dérivée à celle de la limite arithmétique d'une série.

Il passera à côté du lien qui existe entre la dérivée et la dérivabilité d'une fonction un point. Il rejoindra les pensées de Leibniz et orientera ses recherches vers le calcul d férentiel.

Il aboutit au théorème des accroissements finis, en utilisant la continuité de la dériv d'une fonction sur un intervalle très petit.

Il faudra attendre L'Allemand Dirichlet qui, en 1829, publie les notions fondamen les de dérivées d'une fonction en un point et de ce fait, précise les théorèmes concern la dérivabilité d'une fonction.

Partie 1

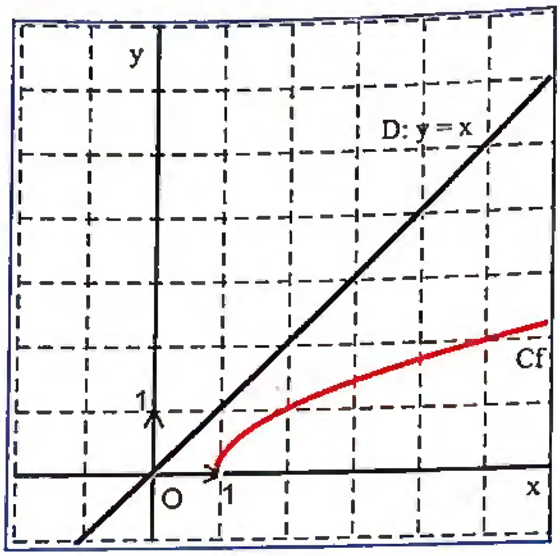
Chapitre 3

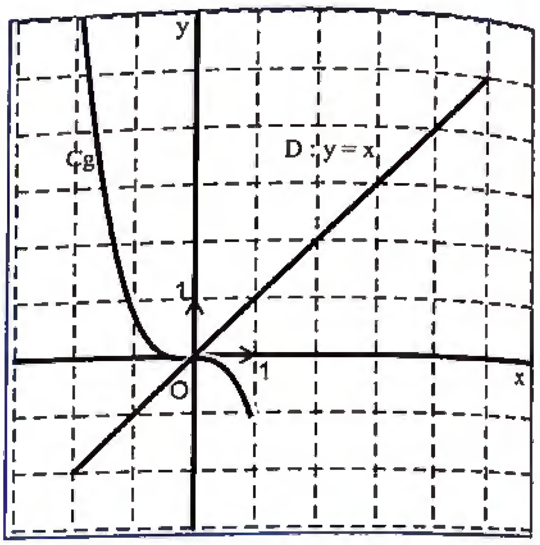
Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 On a représenté dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ du plan, les courbes des fonctions f et g suivantes : $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ pour $x \in [1,+\infty[$; $g : x \mapsto -x^3$ pour $x \in]-\infty,1]$.





1) a) Lire graphiquement le sens de variation de chacune de ces deux fonctions.
   b) Justifier ces résultats.

2) a) Etudier la continuité de chacune de ces deux fonctions.
   b) Déterminer l'image de l'intervalle [1, 5] par f et l'image de l'intervalle]-1, 1] par g.

3) On désigne par S_D la symétrie axiale d'axe la droite D : y = x.

a) Reproduire les deux graphiques précédents.

b) Construire, avec C_f, la courbe $(C_1) = S_D(C_f)$. Expliquer le procédé de construction.

c) Construire, avec C_g, la courbe $(C_2) = S_D(C_g)$.

2 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

a) Montrer que le taux d'accroissement de f entre deux réels distincts a et b est strictement positif. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

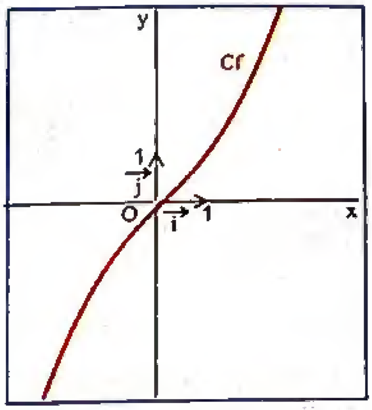
b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = -\sqrt{x}$.

a) En utilisant le taux d'accroissement de g entre deux réels strictement positifs, montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $g'(x) < 0$.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sin x$ et représentée dans le graphique ci-contre :



1) a) Montrer que pour tout réel x on a $2x-1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

4 Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le sens de variation sur l'intervalle I :

a) $f : x \mapsto x^3$; $I =]-\infty,+\infty[$; b) $g : x \mapsto \frac{1}{x}$; $I =]0,+\infty[$;

c) $h : x \mapsto \cos(-2x)$; $I = \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$; d) $k : x \mapsto \sin x$; $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

e) $u : x \mapsto \operatorname{tg} x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; f) $v : x \mapsto \operatorname{cotg} x$; $I =]0,\pi[$.

COURS

Restriction d'une fonction

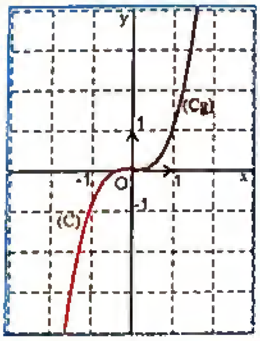
Activité 1

Le plan est muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Tracer la parabole (P), représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$
2) On désigne par (C_1) l'ensemble des points de (P) d'abscisses appartenant à l'intervalle [0, 3],et par g la fonction dont la représentation graphique est la courbe (C_1).
a) Colorier (C_1) et donner l'expression de g(x).
b) Déterminer g([0, 3]).

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C) sa représentation graphique dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
Soit I une partie de D.
On appelle restriction de la fonction f à I, la fonction g définie sur I par g(x) = f(x), pour tout $x \in I$.
La représentation graphique de g est formée par les points M de (C), de coordonnées (x, f(x)) où $x \in I$.



$f(x) = x^3$; $x \in \mathbb{R}$; g est la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

Activité 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$.
   a) Vérifier que g(x) = 2 - x.
   b) En déduire que g est continue sur $]-\infty, 1]$.
   c) Déterminer le sens de variation de g.
2) Construire la représentation graphique C de f dans le plan muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Activité 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.
Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$ et qui est représentée par le graphique ci-contre :
Quel est le sens de variation de g ? Justifier.

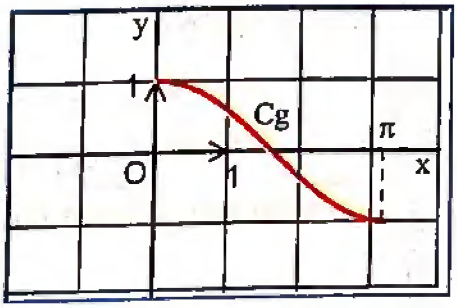


Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

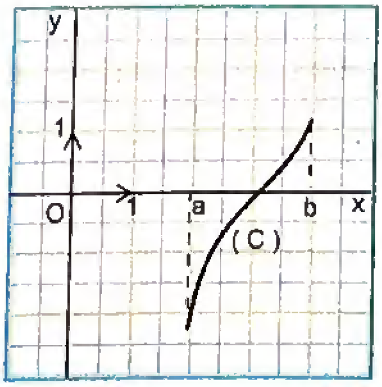
Activité 1

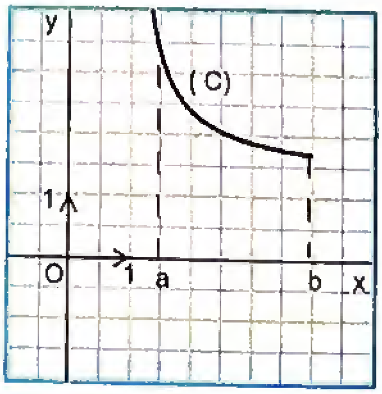
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
   b) Déterminer le sens de variation de f sur [1, 3].
   c) Représenter l'intervalle f ([1, 3]).
2) a) Tracer la courbe (C') représentative de la fonction g définie par $g(x) = \frac{3}{x+1}$.
   b) Vérifier que g est continue sur l'intervalle [-4, -2] puis déterminer le sens de variation de g sur cet intervalle.
   c) Représenter l'intervalle g ([-4, -2]).
3) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 3x - 1$.
   a) Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Conjecturer sur l'image de $[0, +\infty[$ par h.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Reproduire les deux graphiques ci-dessous et représenter, chaque fois, l'intervalle f([a, b]):





Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$).

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f(]a, b]) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\, , f(b)]$	$f(]a, b]) = [f(b)\, , \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$
$f([a, b[) = [f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$	$f([a, b[) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\,]$
$f(]a, b[) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$	$f(]a, b[) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ (où a est un réel donné).

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f(]-\infty, a]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(a)]$	$f(]-\infty, a]) = [f(a), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$
$f([a, +\infty[) = [f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$f([a, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$
$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

Activité 3

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{tg}x$.

a) Déterminer l'ensemble de continuité de f et montrer que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) Déterminer l'image de chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par f.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto -x^3 + 2$.

a) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par f.

Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ et soit g sa restriction à l'intervalle $I=[0,+\infty[$.

1) Tracer la courbe (C) représentative de la fonction g.
2) a) Montrer que g est continue et strictement croissante sur I.
   b) Déterminer l'intervalle J = g (I).
3) Soit y un réel positif. Prouver que l'équation g(x) = y admet une solution unique dans I.
4) On note h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=2\sqrt{x}$.

a) Tracer la courbe (C') représentative de la fonction h dans le même repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que $M(x, y)\in(C)$ équivaut à $M'(y, x)\in(C')$.

c) En déduire que la courbe (C') est symétrique de la courbe (C) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

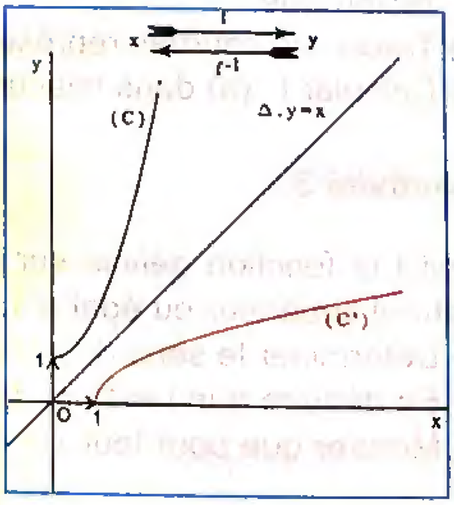
d) Etudier la continuité et le sens de variation de la fonction h.

Commentaire : La fonction h s'appelle la fonction réciproque de la fonction g.
On note $h = g^{-1}$.
La fonction g est une bijection de I sur g(I).

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors on a :

1) f est une bijection de I sur f (I).
2) La fonction réciproque f^{-1}, de f, est strictement monotone sur f (I) et plus précisément elle a le même sens de variation que f.
3) Pour tout x de I et pour tout y de f (I), $y = f(x)$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$.
4) Si de plus, f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur l'intervalle J = f (I).
5) Les courbes représentatives (C) et (C') de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$ du repère.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que f est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
3) Soit y un réel.
   a) Résoudre, dans I, l'équation f(x) = y où x est l'inconnue.
   b) En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$.
4) Tracer, dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Fonction réciproque de la fonction $f : x \rightarrow x^n$; $x \geq 0$ et $n \geq 1$

Activité 1

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) Préciser sa fonction réciproque.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3$.

1) Déterminer le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
2) En déduire que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On note f^{-1} sa fonction réciproque.
3) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1}.
4) Calculer $f^{-1}(a)$ dans chacun des cas suivants : i) $a = 1$; ii) $a = 8$; iii) $a = \dfrac{1}{125}$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1) Déterminer le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
2) En déduire que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
3) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f \circ f^{-1}(x) = x$

Remarques et commentaires

* On a f (0) = 0. On pourra ainsi, poser ff $^{-1}(0)=0$ et par la suite le domaine de définition de f^{-1} sera $[0, +\infty[$.

* Pour tous réels x et y appartenant à $[0, +\infty[$ on a $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = y^n$.

On note $y = \sqrt[n]{x}$ .C'est-à-dire $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Plus généralement, on a le théorème qui suit.

Théorème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
La fonction $f: x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
Sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $[0, +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

(On note également, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ et pour n = 2 , $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$).

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^n$ où n désigne un entier naturel supérieur à 1 et soit sa fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.
1) Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1}.
2) a) Que peut-on dire des courbes de f et de f^{-1} ?

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = 0$.

3) Tracer, dans le repère $(o,\vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions suivantes:

$g: x \mapsto \sqrt{x}$; $h: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $k: x \mapsto \sqrt[4]{x}$ $(x \in [0, +\infty[)$.

Propriétés

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

Soit la fonction $f : x \mapsto x^n$ définie sur $[0, +\infty[$ et soit sa fonction réciproque f^{-1}définie sur $[0, +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. On a :

La fonction f^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Dans un repère orthonormé $(o,\vec{i}, \vec{j})$ du plan, les courbe de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$ du repère.

Propriétés

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

- Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \to \ell} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\ell}$ $(\ell > 0)$

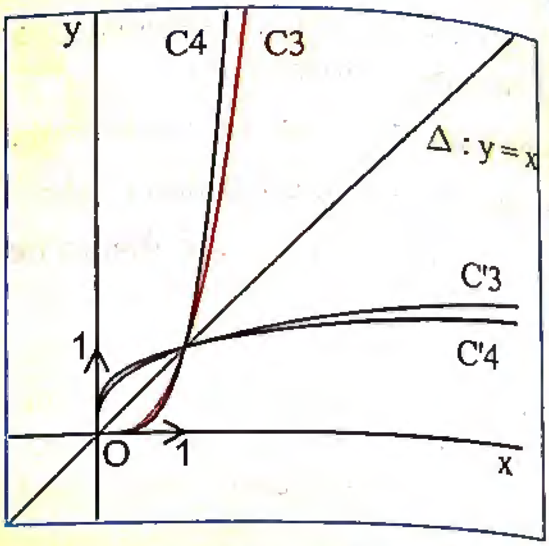
  $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = 0$

C3 : courbe de $f(x) = x^3$

C'3 : courbe de $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

C4 : courbe de $g(x) = x^4$

C'4 : courbe de $g^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$



Activité 5

Soient les fonctions u, v et f définies par $u(x) = x^2$; $v(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $f = v \circ u$ $(x \geq 0)$

a) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Calculer les images de 0 et 1 par f.

Notation : Pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) = v \circ u(x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}$ qu'on note plus simplement $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Plus généralement, pour tous entiers naturels p et q supérieurs à 1 et pour tout réel $x \geq 0$, on pose $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ pour $x \in [0, +\infty[$.

1) Prouver que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et définir sa fonction réciproque f^{-1}.
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.
3) Soit y_0 un élément de $]0, +\infty[$ et soit x_0 l'élément de $]0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

   Vérifier que $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $J = f(I)$; soit x_0 un réel de I et $y_0 = f(x_0)$.
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x - 3$. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[-2, +\infty[$.

1) Montrer que g est une bijection de $[-2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.
   a) Etudier la dérivabilité à droite de g^{-1} en $y_0 = (-7)$.
   b) Déterminer $g^{-1}(-3)$ et montrer que g^{-1} est dérivable en (-3) et calculer $(g^{-1})'(-3)$.
3) Quelle est la partie de J sur laquelle g^{-1} est dérivable ?

corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $J = f(I)$.
Si f est dérivable sur I et f ' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Remarque : Si f est dérivable en un point x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$.

Activité 3 **(Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes)**

1) a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
   b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer de deux manières sa fonction dérivée.
2) Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{n.x}$
3) Soit la fonction $h : x \mapsto \text{tg}x$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer $h^{-1}(1)$ et $h^{-1}(\sqrt{3})$.
   c) Montrer que h^{-1} est dérivable en 1 et en $\sqrt{3}$ et calculer $(h^{-1})'(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{3})$.
   d) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et prouver que pour tout réel x on a $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

RÉSUMÉ DU COURS

Restriction d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C) sa représentation graphique dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Soit I une partie de D.
On appelle restriction de la fonction f à I, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.
La représentation graphique de g est formée par les points M de (C), de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in I$.

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b $(a < b)$

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f(]a, b]) =]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)]$	$f(]a, b]) = [f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$f([a, b[) = [f(a) \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$f([a, b[) =]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$f(]a, b[) =]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$f(]a, b[) =]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)[$

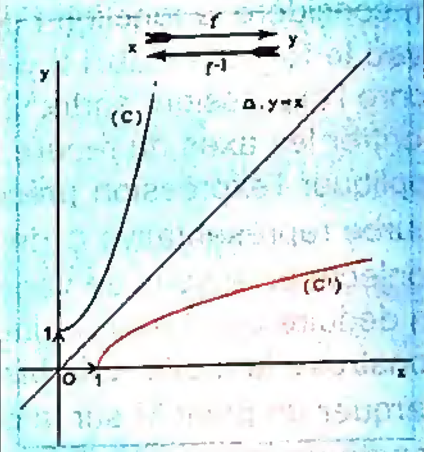
- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f(]-\infty, a]) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(a)]$	$f(]-\infty, a]) = [f(a), \lim_{x\to-\infty} f(x)[$
$f([a, +\infty[) = [f(a), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$f([a, +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)[$

Théorème de la bijection :

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors on a :

1) f est une bijection de I sur f (I).
2) La fonction réciproque f^{-1}, de f, est strictement monotone sur f (I) et plus précisément elle a le même sens de variation que f.
3) Pour tout x de I et pour tout y de f (I), y = f(x) équivaut à $x = f^{-1}(y)$.
4) Si de plus, f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur l'intervalle J = f (I).
5) Les courbes représentatives (C) et (C') de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$ du repère.



Dérivée d'une fonction réciproque :

Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur J = f(I) ; soit x_0 un réel de I et $y_0 = f(x_0)$.
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur J = f(I).
Si f est dérivable sur I et f ' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

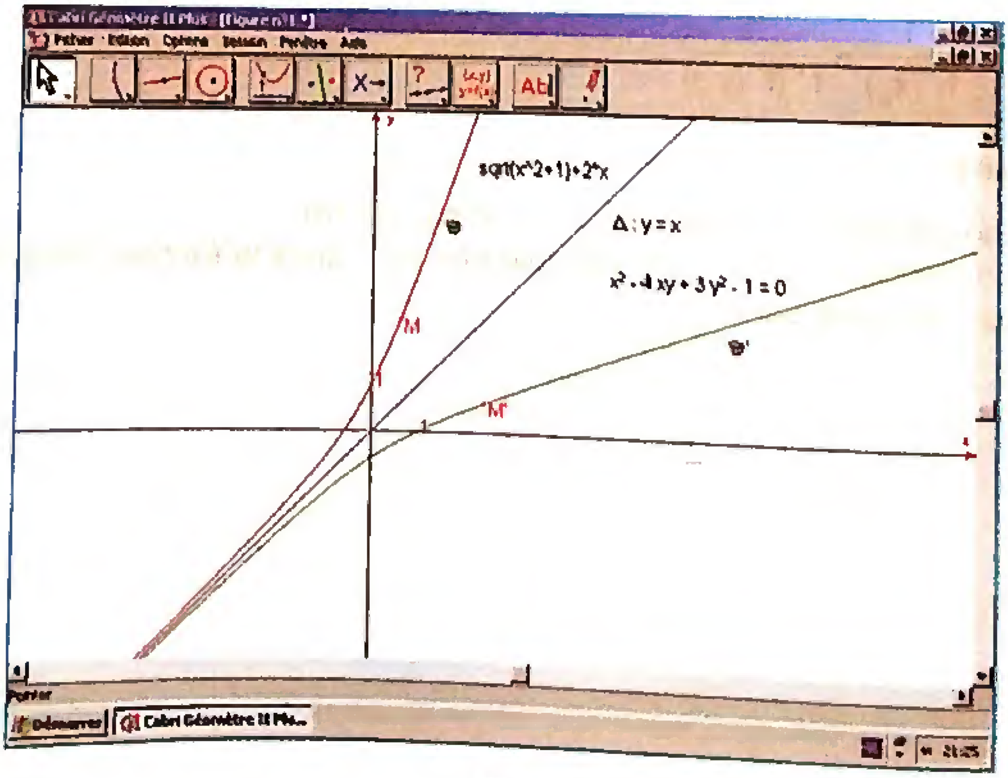
AVEC L'ORDINATEUR

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}+2x$.
Avec le logiciel Cabri II plus,
Ecrire l'expression sqrt(x^2+1) + 2x.
Montrer les axes du repère.
Appliquer l'expression précédente sur l'un des axes du repère. On obtient ainsi, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.
Conjecturer le sens de variation de f.
En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Construire la droite Δ, la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$, où A(0, 1) et B(1, 0).
Marquer un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ (point sur objet).
Construire le point M' l'image de M par la symétrie axiale S_Δ.
Tracer le lieu $\mathcal{C}$ ' du point M' quand M varie sur $\mathcal{C}$. Que représente la courbe $\mathcal{C}$ ' ?
Utiliser **coordonnées ou équation** du logiciel pour afficher l'équation (E') de la courbe $\mathcal{C}$ '.

Montrer que (E') $\Leftrightarrow$ f(y) = x $\Leftrightarrow$ $y \in \left\{\dfrac{2x+\sqrt{x^2+3}}{3};\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{3}\right\}$

Déplacer le point M jusqu'à le point A et conjecturer que B est un point de la courbe $\mathcal{C}$ '.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition J.

b) Calculer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(3)$.

c) Donner le sens de variation de f^{-1} et préciser sur quel ensemble elle est dérivable.

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}.

2 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = -1+\sqrt{x}$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Préciser le domaine de définition J de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de g et g^{-1}.

3 On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \frac{1}{x}$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque, et préciser le domaine de définition J de h^{-1}.

2) Calculer $h^{-1}(x)$ pour x élément de J.

3) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de h et h^{-1}.

4 On considère la fonction suivante :

$$f: \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{tg} x$$

1) Montrer que f est bijective.

2) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}.

5 Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-1+2x}{6+3x}$

a) Donner le sens de variation de f sur $]-2, +\infty[$.

b) En déduire que f réalise une bijection de $]-2, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x élément de I.

d) Construire les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé du plan.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

1) a) Montrer que f est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J qu'on précisera.

b) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

c) Tracer les courbes (C) de g et (C') de g^{-1} dans un repère orthonormé.

7 On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \frac{2}{\sin x}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $g^{-1}(4)$.

3) Construire dans un repère orthonormé les courbes de g et g^{-1}

8 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^5$.
a) Montrer que f admet une fonction réciproque qu'on précisera.
b) Construire les courbes de f et f^{-1}.

9 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$

par $g(x) = 2\sqrt[3]{x}+1$
a) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-1}{x}$.
Interpréter le résultat obtenu.
c) Dresser le tableau de variation de g.
d) En déduire que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
e) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.
f) Construire les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un repère orthonormé du plan .

10 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

b) Dresser alors, le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.
c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
d) Déterminer le réel positif x tel que

$f(x) = \dfrac{1}{2}$

e) Calculer f(4) et $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})$.

2) On pose $g(x) = f(x) - x$.
a) Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.
b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α dans $[0,+\infty[$.
c) Montrer que $0 < \alpha < 1$.

11 On considère la fonction

$$g:[0,\pi]\to[-1, 1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

1) Montrer que g est une bijection.
2) Déterminer les images des réels $0, \frac{1}{2}$, 1 et $-\frac{1}{2}$ par la fonction g^{-1}.
3) Construire les courbes de g et g^{-1}.
4) Soit x un réel de [-1, 1].
a) Calculer $\cos(g^{-1}(x))$ et $\sin(g^{-1}(x))$ en fonction de x.
b) Montrer que $g^{-1}(-x) = \pi - g^{-1}(x)$.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x-\sin x$.
1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
b) Vérifier que $2,2 < \alpha < 2,4$.
3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = 2+\dfrac{1}{2}\sin x$.

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.
b) Montrer que pour tout réel x on a

$|g'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que pour tout réel x on a :

$|g(x)-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

13 On considère la fonction suivante :

$$f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]1, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.
3) Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans]1, +∞[.

5) Montrer que pour tout x de]1, +∞[on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

6) En déduire que pour tout x de]1, +∞[on a $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

14 Soit la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 2-\sqrt{-2x+1}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, calculer f '(x) et dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.

3) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

4) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

15 Soit la fonction h définie par $h(x)=\frac{x}{|x|-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h et montrer que h est une fonction impaire et préciser les asymptotes a sa courbe.

2) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit g la restriction de h à l'intervalle]0, 1[.

a) Montrer que g réalise une bijection de]0, 1[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

c) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour x élément de J.

d) Construire les courbes de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé.

16 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 possède dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et vérifier que $-1.7 < \alpha < -1.6$.

c) Déterminer le signe de g(x) dans chacun des intervalles]-∞, α[et [α, +∞[.

2) Soit f la fonction définie su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1+x}{1-x^3}$.

a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Interpréter ces résultats géométriquement.

b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $f'(x)=\frac{g(x)}{(1-x^3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit h la restriction de f à l'intervalle]1, +∞[.

a) Montrer que h est une bijection de]1, +∞[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer h(2), en déduire $(h^{-1})'(-\frac{3}{7})$.

c) Tracer les courbes de h et h^{-1} dans un même repère orthonormé du plan.

17 Soit g la fonction définie sur [-1, 0] par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 +3$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que g admet une fonction réciproque.

c) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique x_0 appartenant à]-1, 0[.

d) Calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de x_0.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de g et g^{-1}.

18 Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

1) Etablir le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

b) Déterminer $(f^{-1})(1)$ et $(f^{-1})(2)$.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et en 2 et calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(2)$.

d) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) de f en son point d'abscisse 0.5 .

e) Donner une équation de la tangente T' à la courbe (C') de f^{-1} en son point d'abscisse 1.

3) Tracer, dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') et les droites T et T'.

4) Définir f^{-1}.

5) Soit la fonction g définie pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x).

19 Soit la fonction f définie sur [0, 2[par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}.$$

1) Etablir le tableau de variation de f.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition

20 Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1, +\infty[$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

APERÇU HISTORIQUE

Leonhard Euler
Suisse (1707 ; 1783)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
Allemand (1646 ; 1716)

Le concept de fonction - La notation fonctionnelle :

Leibniz (philosophe et savant à l'époque de Louis XIV) a utilisé dans ses écrits et pour la première fois les notations fonctionnelles. Il précise le concept de fonction [en latin : funtio veut dire : accomplissement, exécution] que Newton appela fluxion. Leibniz utilise des lettres grecques pour désigner des fonctions, comme ξ pour désigner une fonction de x. Bernouilli utilisa aussi φx pour la notation φ(x). Les notations f_x puis f(x) sont dues à Euler et cette dernière notation fut particulièrement adoptée par D'Alembert (1750).

« ...Ce qu'on enseigne habituellement en Analyse sur les fonctions, ou quantités déterminées de quelque manière que ce soit par une variable, se réduit aux seules fonctions qu'on appelle continues et dont la formation dépend d'une certaine loi . Cela se voit principalement par la doctrine des courbes, pour lesquelles les ordonnées, en tant qu'elles sont déterminées par les abscisses , tiennent lieu de fonctions. Si bien que la nature de toutes les fonctions peut être très avantageusement représentée par des courbes .

Ainsi, de quelque manière que la quantité y est déterminée par x , c'est à dire quelque fonction y qu'on ait de x, on peut toujours tracer une courbe dont l'ordonnée y corresponde précisément à une abscisse quelconque et estimer que cette courbe représente convenablement la nature de cette fonction .D'où, réciproquement, si l'on pose une courbe quelconque , ses ordonnées exhibent certaines fonctions des abscisses . La nature de ces fonctions est constituée dans la nature même de la courbe .Tant qu'à chaque abscisse, en effet, correspond une certaine ordonnée, on considère à bon droit sa valeur comme une certaine fonction de l'abscisse .Et lorsque l'ordonnée devient imaginaire, ou lorsqu'elle prend simultanément plusieurs valeurs, on distingue parfaitement bien cette particularité à partir de la nature de la fonction ... »

Léonhard Euler
De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse (1765)

Partie 1

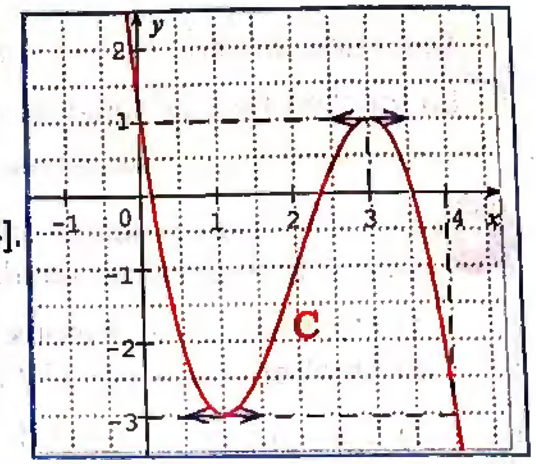
Chapitre 4

Etude de fonctions

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Le plan est muni d'un repère cartésien.
On a représenté ci-contre la courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) a) Préciser les extrema de f dans [0, 4].
b) Préciser le sens de variation de f sur [0, 4].
c) En déduire le signe de la dérivée f ' sur [0, 4].
d) Résoudre graphiquement, dans [0, 4] , l'équation $f(x) = 0$.
2) Sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.
a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois racines dans $\mathbb{R}$.
c) Donner pour chacune des racines un encadrement à 10^{-1} prés.

2 Le plan est muni d'un repère orthogonal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$ et soit C sa courbe représentative dans le repère R.
1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Etudier la continuité de f sur D.
3) Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe C .

Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel et Δ la droite d'équation $x = a$.
La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe C si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit la fonction $f : x \mapsto \sin(4x)$
1) Montrer que f est une fonction impaire.
2) Préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
3) Calculer les images de 0 ; $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{2}$ et π par f.
4) Montrer que la fonction f est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

5) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et construire sa courbe représentative dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel **strictement positif**.

La fonction f est périodique de période T si pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$.

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que pour tout x réel on a : $f(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1) + 1$.
2) Montrer que le point W (1, 1) est un centre de symétrie de C.
3) Donner une équation de C dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$
4) Montrer que le point W (1, 1) est un point d'inflexion de la courbe C.
5) Dresser le tableau de variation de f et construire C .

Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit W(a,b) un point du plan. Le point W est un centre de symétrie de la courbe C, si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

5 1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Etudier la parité de f, en déduire que la droite $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.
b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ puis construire $\mathcal{C}$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + x$. On désigne par $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que g est impaire. En déduire que O est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}'$.
b) Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$ puis construire $\mathcal{C}'$.

6 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$

En déduire que la courbe C admet au voisinage de l'infini une asymptote oblique que l'on précisera. Quelle est la nature de l'autre asymptôte à C ?

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe C.

On dit que la droite Δ : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ (resp. de $+\infty$) lorsqu'on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$

$\left(\text{resp. } \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0 \right)$

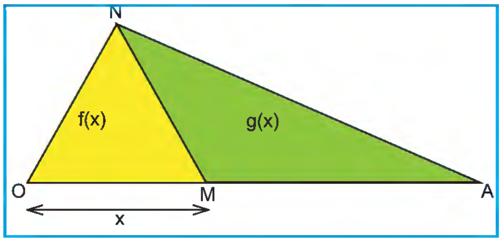
COURS

Etude d'exemples de fonctions polynômes

Activité 1

Dans la figure ci-contre, OA = 8, le triangle OMN est équilatéral, M est un point du segment [OA].

On pose OM = x et on désigne par f(x) l'aire du triangle OMN et par g(x) l'aire du triangle AMN.



1) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.
2) Etudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé du plan.
3) Résoudre graphiquement, puis algébriquement, l'équation f(x) = g(x) et l'inéquation f(x) > g(x).

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Etudier les branches infinies de C.
2) a) Montrer que pour tout réel x on a :
   $f(x) = (x - 1)^3 - 3(x - 1) + 1$.
   b) En déduire que le point I (1,1) est un centre de symétrie de C.
3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C en I.
   b) Montrer que le point I est un point d'inflexion de C.
4) Construire T et C.
5) Déduire la courbe representative C ' de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x^2$ à partir de celle de f.
6) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe representative C " de la fonction $h : x \mapsto |x^3 - 3x^2|$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par g et h les fonctions définies sur D par
$g : x \mapsto f(x) + k$
(k réel fixé) et $h : x \mapsto -f(x)$.
On a alors, les résultats suivants :
*La courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'image par la translation de vecteur $k\vec{j}$ de la courbe C de f.
**La courbe représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'image de la courbe C de f par la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) a) Montrer que f est une fonction paire.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
   c) Préciser les branches infinies de C.
2) a) Tracer C.
   b) Utiliser le graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.
3) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et avec une autre couleur la courbe C' représentative de (-f).

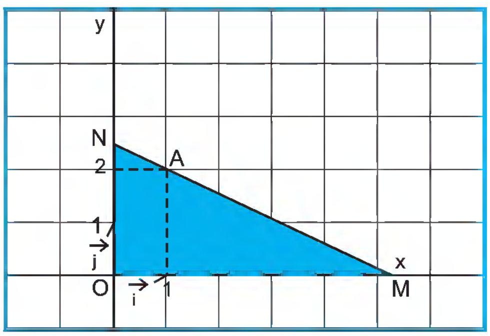
Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$.
1) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f '(x).
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Etude d'exemples de fonctions rationnelles

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (1, 2).
A chaque point M(x, 0) tel que (x >1),
on associe le point N de l'axe (Oy) des ordonnées
de façon que A, M et N soient alignés
(voir figure ci-contre) :



On désigne par S(x) l'aire du triangle OMN.
1) a) Exprimer l'ordonnée de N en fonction de x.
   b) En déduire que $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction S sur $]1, +\infty[$.
   b) En déduire x pour que l'aire de OMN soit minimale.
3) a) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout x > 1, $S(x) = ax + b + \dfrac{1}{x-1}$.
   b) En déduire que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à la courbe représentative (C) de la fonction S au voisinage de $+\infty$.
   c) Tracer Δ et (C) dans le repère .

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 3 + \dfrac{2}{x-1}$ .On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et par W le point de coordonnées (1, 3).

1) a) Donner une équation de C dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) En déduire que W est un centre de symétrie de la courbe C.
2) Etudier les variations de f et construire sa courbe C.

Activité 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 3}$ .On désigne par C la courbe représentative de f.

1) a) Déterminer les réels a et b tels que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$.
   b) En déduire que la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
2) Montrer que la courbe C possède un centre de symétrie que l'on précisera.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = [2 , $+\infty$ [.
   a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.
   Etudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de g^{-1} sur J.
   c) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$ et soit C sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que C admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation cartésienne.
   b) Etudier la position de C par rapport à D.
3) Montrer que la courbe C possède un centre de symétrie I que l'on précisera et donner une équation cartésienne de la tangente à C au point I.
4) a) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, D, T et C.
   b) Construire la courbe représentative C' de la fonction $|f|$ à partir de celle de f et préciser les éléments remarquables de C '.

Activité 5

Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2+4}{x}$ et soit C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de g et étudier sa parité.
2) Etablir le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.
3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - x\right]$. En déduire que C_g admet deux asymptotes que l'on précisera.
b) Etudier la position de la courbe C_g par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
4) Tracer C_g et ses asymptotes.
5) Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2+4}{|x|}$. Construire la courbe représentative de h à partir de celle de g.

Activité 6

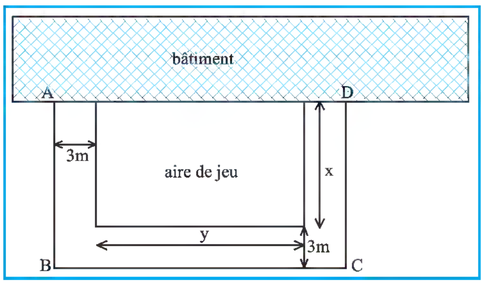
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que C_f admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3) En déduire que C_f admet trois asymptotes que l'on précisera.
4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Tracer C_f.
6) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 30x + 41}{x^2 - 6x + 8}$.

a) Montrer que pour tout x de D, $g(x) = f(x) + k$ où k est une constante réelle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe Cg représentative de g s'obtient de celle de f par une transformation géométrique simple que l'on caractérisera.
c) Tracer C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Dresser le tableau de variation de g.
e) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et avec une autre couleur, la courbe représentative de $|g|$.

Activité 7

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m².
De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à 10 m.
Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le croquis ci-contre :



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture.
On note x et y les dimensions, en mètres, de l'aire du jeu.

1) a) Démontrer que $y = \frac{450}{x}$, puis justifier que $x \in [10,45]$.

b) Exprimer L à l'aide de x.

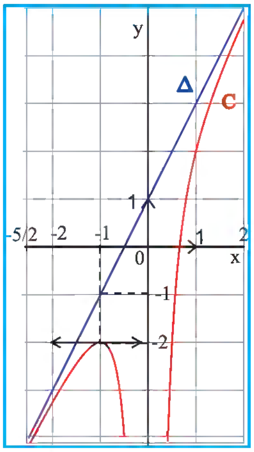
2) Soit f la fonction définie sur $[10,45]$ par $f(x) = 2x + 12 + \frac{450}{x}$

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

c) Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur ?.

Activité 8



Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur]-2,5;2] .

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire le signe de la dérivée f ' sur]-2,5;2] .

c) Préciser le(s) extremum(s) relatif(s) éventuels de f sur]-2,5;2] .

2) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel k, le nombre des solution(s) de l'équation f(x) = k dans]-2,5;2] .

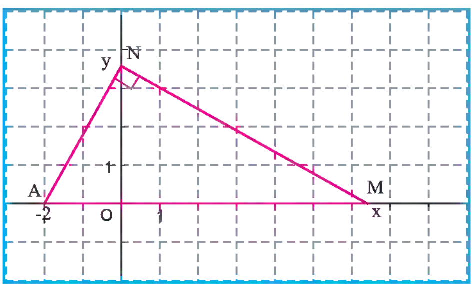
3) Préciser le signe de l'expression [f(x) - (2x + 1)] pour x ∈]-2,5;2].

4) Sachant que pour tout x ∈]-2,5;2] on a $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$, déterminer les réels a, b et c.

Etude d'exemples de fonctions irrationnelles

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (-2, 0).
A chaque point M(x, 0) de l'axe des abscisses, on associe le point N(0, y) de l'axe des ordonnées de façon que le triangle AMN soit rectangle en N ; (voir figure ci-contre) :



1) Exprimer y en fonction de x.

2) On pose y = f(x).
Etudier et représenter graphiquement la fonction f ainsi obtenue.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-4}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.

2) Montrer que la droite $\Delta : x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f(x) = x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f(x) - x = \dfrac{3-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+1}$

d) Montrer que la droite $D : y = x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C.

e) Montrer que C admet une autre asymptote oblique D'.

5) Tracer C et les droites Δ , D et D'.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16}$

1) Montrer que la droite D : y = x + 1 est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
2) Etudier le comportement asymptotique de f au voisinage de $(-\infty)$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
5) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.
6) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et déterminer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier les variations de f.
3) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Etude d'exemples de fonctions trigonométriques

Activité 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$

1) Etudier et construire, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
   a) Montrer que g est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et déterminer
   $g^{-1}(0)$; $g^{-1}(1)$; $g^{-1}(\frac{1}{2})$ et $g^{-1}(-\frac{1}{2})$
   b) Construire la courbe représentative (C ') de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

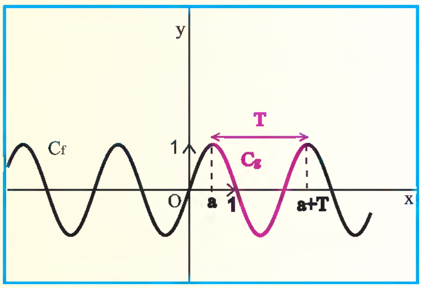
Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 2\sin x - \sin 2x$

1) a) Montrer que $f'(x) = 4(1-\cos x)(\cos x + \frac{1}{2})$
   b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
2) a) Montrer que f est 2π périodique.
   b) Etudier la parité de f. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ et préciser les transformations géométriques qui permettent de tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, 3\pi]$.
3) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.

Théorème

Si f est une fonction périodique de période T et g est sa restriction à un intervalle [a, a+T] où a est un réel, alors sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduit de la courbe représentative de g par des translations de vecteurs $(kT\,\vec{i})$; $k \in \mathbb{Z}$
Il suffit donc d'étudier f sur [a, a+T].



Activité 3

Soit la fonction f définie par f(x) = tgx.

1) a) Préciser l'ensemble de définition et la période de f .
   b) Montrer que f est impaire.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
   b) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivabilité.

3) a) Calculer $g^{-1}(0)$; $g^{-1}(1)$; $g^{-1}(\sqrt{3})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$

   b) Tracer la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) Construire,dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Activité 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{tg}x + \sin(2x)$.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition D de f
   b) Montrer que f est π périodique.
   c) Etudier la parité de f.
   d) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) Etudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sa courbe représentative sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Activité 5

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
   b) Montrer que $\forall x \in D$,$(x+\pi)\in D$ et $f(x+\pi) = f(x)$ .Interpréter ce résultat.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 6

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}x)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition et la période de f.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [0, 2[.
a) Etudier le sens de variation de g .
b) En déduire que g réalise une bijection de [0, 2[sur un intervalle J que l'on précisera.
c) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les courbes représentatives de g et g^{-1}.

RÉSUMÉ DU COURS

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique f et tracer convenablement sa courbe représentative C, il importe d'étudier les propriétés de f telles que **parité, variation, branches infinies,** etc.,. On disposera, également, de moyens tels que : **changement de repère, utilisation de transformations planes ou une transformation d'écriture conduisant à un changement de repère** et permettant d'alléger le procédé de construction de la courbe C.

Plan d'étude : En général, on adopte la démarche suivante (lorsque l'énoncé de l'exercice ne suggère aucun autre plan d'étude) :

1ère étape : Détermination de l'ensemble D sur lequel la fonction f est définie.

2ème étape : Réduction de domaine d'étude :
- si f est paire ou impaire le domaine d'étude de f est $D_e = D \cap \mathbb{R}_+$.
- si f est périodique de période T, il suffit d'étudier f sur un domaine du type $D_e = D \cap [a, a+T]$

3ème étape : Calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition (ou d'étude).

4ème étape : Etude du sens de variation de f et consignation des résultats dans un tableau de variations.

5ème étape : Etude du comportement asymptotique de la courbe C.

6ème étape : Construction de quelques points de la courbe C ainsi que les asymptotes éventuelles ou les éléments de symétrie de C et les tangentes aux points particuliers etc.

7ème étape : Construction de C dans un repère convenablement choisi.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha, +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. (Si b = $+\infty$ ou $-\infty$ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de $+\infty$).

Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type $]-\infty, \alpha]$ et x tendant vers $-\infty$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel et Δ la droite d'équation x = a.

La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe C si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit W(a,b) un point du plan. Le point W est un centre de symétrie de la courbe C, si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

1) Utiliser un logiciel pour :
- tracer un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer le point A(0, 4) dans ce repère.
- tracer le cercle (C) de diamètre [OA] et marquer un point N sur (C) distinct de 0.
- tracer la tangente à (C) en A. Cette tangente coupe la droite (ON) en un point P.
- marquer le point M intersection de la parallèle à (AP) passant par N et de la perpendiculaire à (AP) en P.
- conjecturer l'ensemble des points M , lorsque N varie sur le cercle (C).

2) On désigne par (x,y) les coordonnées du point M.

a) Montrer que $y = \dfrac{64}{x^2+16}$.

b) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{64}{x^2+16}$ et représenter graphiquement l'ensemble des points M.

Activité 2

1) Utiliser un logiciel de géométrie pour :
- construire un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
- placer H le pied de la hauteur issue de A.
- marquer α l'angle $\widehat{HOC}$ (prendre $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$).
- calculer l'aire du triangle ABC.
- faire varier α (en déplaçant par exemple le point C sur le cercle) pour obtenir un triangle ABC ayant la plus grande aire possible S.
- donner une valeur approchée de S et la valeur de α correspondante.

2) a) Calculer BC et AH en fonction de α .
   b) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α .

3) a) Utiliser le repère orthonormé du logiciel pour représenter graphiquement

la fonction $f : \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sin x(1+\cos x)$.

b) Lire sur le graphique une valeur approchée de x pour laquelle f(x) est maximal.

4) a) Montrer que $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$, x un réel de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

d) Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

On désigne par C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.

2) a) Etudier la position relative de C_f et C_g.

b) Construire les courbe C_f et C_g.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe de abscisses $(O, \vec{i})$.

c) Etudier les branches infinies de C.

d) Tracer C.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

a) Etudier les variations de f .

b) Préciser les branches infinies de C_f.

c) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la parité de f, en déduire que O est un centre de symétrie pour C_f.

2) Etudier f et dresser son tableau de variations.

3) a) Déterminer les cordonnées des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

b) Préciser les branches infinies de C_f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en O.

b) Etudier la position de C_f par rapport à T.

c) Tracer T et C_f.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions et donner un encadrement à l'unité prés pour chacune de ces solutions.

3) a) Préciser les branches infinies de C_f.

b) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x^2-4x) - 1$

2) Montrer que le point W(2 ; -1) est un centre de symétrie pour C_f.

3) a) Déterminer l'équation Y = F(X) de C_f dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Etudier la fonction F.

c) Construire C_f.

7 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Préciser le domaine de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2) En déduire que C_f admet trois asymptotes que l'on précisera.
3) Etablir le tableau de variation de f.
4) Tracer C_f.
5) Montrer que C_f admet un axe de symétrie que l'on précisera.

6) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3}$.

a) Montrer que g(x) = f(x) + k où k est une constante réelle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe C_g représentative de g s'obtient de celle de f par une transformation géométrique simple que l'on précisera.
c) Tracer C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Utiliser C_g pour dresser le tableau de variation de g

8 Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}.$$
1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
b) Montrer que f est impaire.
2) Déterminer un prolongement par continuité de f en 0. On notera g ce prolongement .
3)a) Etudier la dérivabilité de g en 0 .
b) Dresser le tableau de variations de g.
4) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de g.
b) Tracer C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 Soit f la fonction définie par
$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x-1}{x+1}$$
et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.
2) Etudier les variations de f et tracer C_f.

10 On considère la fonction f définie par
$$f : x \mapsto \frac{x^4-1}{x^2}$$
1) a) Préciser l'ensemble de définition de f.
b) Dresser le tableau de variations de f.
2) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f.
b) Tracer la parabole P : y = x^2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
c) Calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - x^2\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
d) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit f la fonction définie sur IR par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3} & \text{si } x \in \left]-\infty, 2\right[\\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \in \left[2, +\infty\right[\end{cases}$$
Et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1) a) Préciser le domaine de définition de f et étudier la continuité de f en 2.
b) Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$\forall x \in \left[2, +\infty\right[, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
b) En déduire que C_f admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative de C_f et D.
c) Préciser la branche infinie de C_f au voisinage de puis tracer C_f et D.

12 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer C_f.

4) Discuter, graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de points d'intersection de C_f et la droite D : y = x + m.

13 Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f et étudier la continuité de f sur D_f.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1) et à droite en 3.Interpréter graphiquement les résultats.

c) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2) a) Montrer que :

$\forall x \in D_f - \{-1;3\}$, on a $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Vérifier que :

$$\forall x \in D_f ; f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$

et que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$.

c) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes obliques D et D'.

4) Tracer D, D' et C.

14 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f

2) a) Montrer que D : x = 2 est un axe de symétrie pour C.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite Δ_1 d'équation y = x - 2 est une asymptote à C au voisinage de +∞ et que la droite Δ_2 d'équation y = -x -2 en est une asymptote à C au voisinage de -∞.

3) Tracer D, Δ_1, Δ_2 et C.

15 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que la droite $D : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C.

c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle [0, +∞[.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer f'(x) pour tout x ∈]0, +∞[.

c) Dresser le tableau de variation de f sur]0, +∞[.

3) Montrer que la droite $D : y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à C en +∞ .

b) Etudier la position de C par rapport à D.

c) Déterminer l'équation de l'asymptote D' à C au voisinage de -∞ .

4) Tracer D, D' et C_f.

5) Déduire de C_f la courbe représentative C_g de la fonction $g(x) = 1 - \sqrt{x^2 + |x|}$ et construire C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16 A chaque entier naturel n on considère la fonction f_n définie par

$f_n(x) = x^n\sqrt{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f_n.

2) Donner, pour $n \geq 1$, le tableau de variation de la fonction f_n.

3) Représenter dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions f_0, f_1 et f_2.

17 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

1) Montrer que f est périodique et préciser une période de f.

2) a) Calculer f '(x) et résoudre dans l' intervalle $[0, \pi]$ l' équation f '(x)= 0 .

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

3) Représenter la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) Utiliser la courbe obtenue, pour donner selon la valeur du paramètre réel k, le nombre de solutions de l'équation f(x) = k dans $[0, 2\pi]$.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = sin(2x) - 2sin x.

1) Etudier la parité de f.

2) Quelle est la période de f ?

3) Compléter l'étude de f et représenter la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \cos^2 x$.

1) Montrer que f est 2π -périodique.

2) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Etudier et représenter graphiquement la restriction g de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Tracer la courbe de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

20 Soit la fonction

$$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} , \quad x \mapsto g(x) = \operatorname{tg}x - x$$

1) Etudier les variations de g et déduire le signe de g(x) pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3) Soit h la restriction de f à $]2, +\infty[$.

a) Etudier le sens de variation de h.

b) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

c) Montrer que h est une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle J.

21 Soit la fonction

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+ , \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}x}$$

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2) Montrer que f est une bijection.

3) On pose $g = f^{-1}$.

a) Etudier la dérivabilité de g et déterminer sa fonction dérivée.

b) Calculer g(0) et g(1) et tracer C_g avec C_f.

c) Montrer que :

$$\forall \in \left]0, +\infty\right[, \; g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

4) Soit $h : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $h(x) = g(\frac{1}{\cos(\pi x)})$

a) Montrer que h est dérivable et donner son tableau de variation.
b) Montrer que h est prolongeable par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\cos^2 x + 2\cos x + 1$.
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$$
b) Résoudre, dans $[0, \pi]$, l'équation : $2\sin x(2\cos x - 1) = 0$
c) Dresser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
d) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera.
b) Déterminer le domaine D de dérivabilité de g^{-1}.
c) Soit $t \in J$, calculer $\left(\cos(g^{-1}(t))\right)$ et $\left(\sin(g^{-1}(t))\right)$ en fonction de t, en déduire $\left(g^{-1}\right)'(t)$ pour $t \in D$

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\},\ f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$$
b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
c) En déduire que f' est strictement décroissante et déterminer l'image de $[-1, 1]$ par f'.
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
f) En déduire que .
$$\forall x, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$$
2) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$$
a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(\pi - t) = g(t)$
b) Expliquer comment l'étude et la représentation graphique de la restriction de g à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de g.
c) Prouver que $g'(t) = f'(\sin t) \times \cos t$.
d) Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
e) Calculer la valeur exacte de $g(\alpha)$.
f) Construire la courbe de la restriction de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé convenablement choisi.
4) a) Résoudre graphiquement l'équation $g(t) = t$.
b) Montrer que l'équation $g(t) - t = 0$ admet une solution unique t_0 appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5) Soit la suite réelle (u_n) définie sur N par
$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1-\sin^2(u_n)}{2+\sin(u_n)}$$
a) Montrer que $|u_{n+1} - t_0| \leq \frac{2}{3}|u_n - t_0|$.
b) Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - t_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - t_0|$$
c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

24 Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes dans un repère du plan:
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ et $g(x) = \cos(3x)\cos^2 x$.

25 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

a) Vérifier que pour tout réel x on a :

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b) Etudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x : $g(x) > 0$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a- Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
b- Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c- Dresser le tableau de variation de f.
3) a- Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
b- Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en O et étudier la position de T par rapport à $\mathcal{C}$.
c- Tracer $\mathcal{C}$,T et Δ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on placera les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses -1 et 1).
4) a- Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
b- Calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$ [f^{-1} étant la fonction réciproque de f].
c- Tracer $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(D'après Bac tunisien 2004)

APERÇU HISTORIQUE

René Descartes
Français (1596 ; 1650)

Je pense...donc... je suis !

Statue de Descartes à Descartes (La Haye)

Mathématicien et philosophe français, il est le fondateur du rationalisme moderne. Son œuvre " Le discours de la méthode " se compose d'essais " pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences ".
En optique, Descartes découvrit la loi de la réfraction de la lumière.
En mathématiques, il instaura la géométrie analytique et permit ainsi l'étude des courbes en les définissant par leurs équations relativement à un repère.
Il contribue ainsi à la naissance de la théorie des équations.
La démarche scientifique est le fondement de son œuvre
(Expérimentation, conjecture, doute, recherche d'une certitude ...).

Partie 1

Chapitre 5

Fonctions primitives

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Fonctions primitives d'une fonction continue.
	❖	Opérations sur les fonctions primitives.
	❖	Exemples de calculs de fonctions primitives.
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Tracer la droite (D) : $y = 2x$.

2) Soit A le point de (D) d'abscisse 1 et B le point de coordonnées (1, 0).
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle OAB.

3) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 5$.
Vérifier que $\mathcal{A} = f(1) - f(0) = g(1) - g(0)$.

2 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2) Soit x un réel.

a) En écrivant $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, montrer que $f'(x) = \frac{1}{4}(\cos 2x + 1)^2$.

b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer la fonction dérivée :

a) $f : x \mapsto -\frac{1}{x} + 1$;

b) $g : x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ (k étant une constante réelle).

c) $h : x \mapsto \frac{(x^2+1)^3}{3}$;

d) $k : x \mapsto 2\sqrt{x^2+1} + 3$;

e) $F : x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x + \frac{\pi}{3})$;

f) $G : x \mapsto \frac{1}{3}(\sin(3x) - \cos(3x))$;

g) $H : x \mapsto \text{tg}x - \text{cotg}x$;

h) $K : x \mapsto (x^3 + x^2 + x + 1)\cos x$.

COURS

Fonctions primitives d'une fonction continue

Activité 1

Soit un mobile M qui se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse instantanée $v(t) = 2t - 3$.

1) En supposant qu'à l'instant $t = 0$ (en seconde) $x(0) = 0$, donner l'équation horaire $x(t)$ de ce mobile.
2) Sachant que la vitesse moyenne d'un mobile, se déplaçant en mouvement rectiligne, entre deux instants distincts t_1 et t_2 est donnée par la formule $v_M(t_1; t_2) = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$,

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile M entre les instants 3s et 5s.
b) Calculer la vitesse moyenne du mobile M entre les instants 2s et 3s.
c) Montrer que $v(3) = \lim\limits_{t \to 3} v_M(3;t)$.

Activité 2

Soient f et F les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ et $F(x) = x^3 + x^2 + x + 5$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.
2) Donner deux autres fonctions G et H dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Activité 3

Donner une primitive F de f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

a) $f : x \mapsto 4x^3$; $I = \mathbb{R}$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0,+\infty[$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto -2\sin(2x)$.
1) Vérifier que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
2) Donner la forme générale d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer la fonction primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0.
4) Déterminer la fonction primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 2

Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle I alors f admet une infinité de fonctions primitives sur I et qui sont toutes de la forme F + c où c désigne une constante réelle arbitraire. C'est-à-dire l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$

Activité 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et soit y_0 un réel.
Montrer que f possède une unique fonction primitive sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

Théorème 3

Etant donnés un intervalle I, un réel a de I et un réel b.
Toute fonction f continue sur I admet une unique fonction primitive F sur I telle que F(a) = b.

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = 2x.
a) Tracer la courbe représentative (D) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
b) Pour tout réel positif x, soit A le point de (D) d'abscisse x et soit B le point du plan de coordonnées (x, 0). Calculer, en fonction de x, l'aire S(x) du triangle OAB.
c) Calculer S'(x) ; comparer avec f(x). (S' désigne la fonction dérivée de la fonction S).
d) Donner la fonction primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que F(1) = -2.

Opérations sur les fonctions primitives

Activité 1

Etant données deux fonctions continues f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux réels α et β.
Soient F et G respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I.
Montrer que $(\alpha.F + \beta.G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

Théorème 4

Etant données deux fonctions continues f et g sur un intervaiie I et deux réels α et β.
Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $(\alpha.F + \beta.G)$ est une primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 2\cos(3x) + 3\sin(2x)$
1) Déterminer une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer la fonction primitive F de f sur l'intervalle $I = [-\pi, \pi]$ telle que $F(0) = -1$.

Activité 3

On considère les fonctions f, F et G définies par :
$f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$; $F : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ et $G : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$
1) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2) a) Montrer que F est la primitive de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ s'annulant en un réel a que l'on précisera.
b) Montrer que G est la primitive de f sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ s'annulant en un réel b que l'on précisera.

Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est un intervalle de :	Fonction f définie sur I par :	Fonctions primitives F de f définies sur I par :
	$x \mapsto a$; $(a \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto ax + c$;$(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$;$(c \in \mathbb{R})$.

Activité 4

Recopier et compléter le tableau suivant :

Fonction f	Fonctions primitives F de f	Intervalle I sur lequel les fonctions f et F sont définies
$x \mapsto 3+5x$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto -x-\dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto x^4+x^2+1$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto 3\sin(2x)$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto 6\cos(3x+\dfrac{\pi}{6})$	$x \mapsto$	....
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}+1$	$x \mapsto$	....

Règles générales de détermination des fonctions primitives

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :	Fonction f	Fonctions primitives F de f sur I
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u' + v'$	$u + v + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable sur I.	au' ; a réel.	$au + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'.v + v'.u$	$(uv) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.	$u'.u^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable et strictement positive sur I.	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions telles que v o u soit dérivable sur I.	$(v' \circ u).u'$	$(v \circ u) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).

Exemples de calcul de fonctions primitives

Exemple 1

Une primitive de la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 5x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction

$F: x \mapsto x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x - 2\sqrt{x} + c$ où c désigne une constante réelle arbitraire.

Exemple 2

Soit la fonction $f: x \mapsto x(1-x^2)^2$.

1) En posant $u(x) = (1-x^2)$, vérifier que $f(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^2$

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto -\frac{1}{6}(1-x^2)^3 + c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) En posant $u(x) = (x^2+1)$, vérifier que $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto \sqrt{x^2+1} + c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x-2)^2}$

1) En posant $u(x) = (x^2+x-2)$, vérifier que $f(x) = \frac{2u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}$.

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto \frac{-2}{x^2+x-2} + c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Exemple 5

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}$

1) En posant $u(x) = 5x^3$, vérifier que $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto 2\sqrt{5x^3} + c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exemple 6

Soit la fonction $f : x \mapsto (2x+1)\cos(x^2+x+1)$

1) En posant $u(x) = (x^2+x+1)$ et $v(x) = \sin x$, vérifier que $f(x) = u'(x).(v' \circ u)(x)$.

2) En déduire que la fonction F : $x \mapsto \sin(x^2+x+1)+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7

Soit la fonction $f : x \mapsto (x^2+1)^3$
1) Montrer que $f(x) = x^6+3x^4+3x^2+1$
2) Déterminer alors, la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 1.

Exemple 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f : x \mapsto x^2 - \frac{x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

En écrivant f(x) sous la forme de u'(x) + v'(x) où u et v sont deux fonctions dérivables sur I, déterminer une primitive F de f sur I.

Exemple 9

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x - \cos^3 x$
a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
b) Vérifier que $f(x) = u'(x).u^2(x)$ où u est une fonction dérivable sur I = $]0, \pi[$ et trouver alors, une primitive F de f sur l'intervalle I.

RÉSUMÉ DU COURS

Fonctions primitives d'une fonction continue :

- Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, F '(x) = f (x).
- Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle I alors f admet une infinité de fonctions primitives sur I et qui sont toutes de la forme F + c où c désigne une constante réelle arbitraire.
L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une fonction primitive sur I.
- Etant donné un intervalle I, un réel a de I et un réel b. Alors toute fonction f continue sur I admet une unique fonction primitive F sur I telle que F(a) = b.

Opérations sur les fonctions primitives :

Etant donné deux fonctions continues f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux réels α et β.
Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors la fonction $(\alpha.F + \beta.G)$ est une primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

Règles générales de détermination des fonctions primitives :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :	Fonction f	Fonctions primitives F de f sur I
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u' + v'$	$u + v + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable sur I.	au' ; a réel.	$au + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'.v + v'.u$	$(uv) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.	$u'.u^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).

u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u une fonction dérivable et strictement positive sur I.	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$; ($c \in \mathbb{R}$).
u et v deux fonctions telles que $v \circ u$ soit dérivable sur I.	$(v' \circ u).u'$	$(v \circ u) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

On se propose de déterminer le signe de l'expression $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-1$ à l'aide d'un **grapheur** et du tableur **Excel**.

Pour cela, on considère la fonction $F: x \mapsto \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2-x$

1) Vérifier que F est la primitive de f s'annulant en 0.
2) Utiliser un grapheur pour tracer la courbe représentative de F.
3) Utiliser cette courbe pour s'assurer que F possède trois extremums et donner un encadrement d'amplitude 0.5 pour chacun d'eux.
4) Utiliser le logiciel Excel pour trouver une valeur approchée à deux chiffres aprés la virgule pour chacun de ces trois extremums.
5) Dresser le tableau de signe de f(x).

Activité 2

Calcul de primitives en utilisant le logiciel de calcul formel Derive :

Exemple : Soit à calculer une primitive F de la fonction $f: x \mapsto x\cos x + x^2.\sin x$.

* Ouvrir le logiciel Derive.
* Taper l'expression suivante : x *cos(x) + x^2*sin(x).
* Valider par entrée (l'expression x cos x + x^2 sin x va apparaître sur l'écran)
* Cliquer sur la raccourcie $\int$ f (on obtient une fenêtre où il y'a le nom de la variable x et intégral : définite, indéfinite ; définite intégral constant : 0).
* Cocher intégral indéfinite et simplify.
* Il va apparaître sur l'écran les étapes du calcul et la primitive simplifiée c'est-à-dire : F(x) = (3 - x^2).cos x + 3x.sin x.
  Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Application : Déterminer, en utilisant le logiciel Derive, des primitives des fonctions suivantes :

$f: x \mapsto x^2\sqrt{x+1}$; $g: x \mapsto x^3\sin(3x)$; $h: x \mapsto x\cos(x^2+1)$

(**N.B** : l'expression $x^2\sqrt{x+1}$ s'écrit x^2 * sqrt(x+1) ou encore x ^ 2 * $\sqrt{\ }$ (x + 1)).

1 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une fonction primitive F sur un intervalle que l'on précisera :

1) $f : x \mapsto x^5 - 5x^2 + 2 - \dfrac{3}{x^2}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

3) $f : x \mapsto (2x-1)(x^2 - x - 4)^8$

4) $f : x \mapsto (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)$

5) $f : x \mapsto (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 5)$

6) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$

7) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

8) $f : x \mapsto (2x+1)^3$

9) $f : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

10) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cos(\sqrt{x^2 - 1})$

11) $f : x \mapsto (\cos x) \times \sin^3 x$

12) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3$ et la fonction F définie par :
F(x) = x +2 si x 0

F est elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$?.

4 Soit la fonction

1) Vérifier que pour tout x réel on a :

2) En déduire la primitive F de f sur qui s'annule en (-).

5 Soit la fonction

1) Calculer f '(x) et f ''(x) pour tout x réel.
2) En déduire l'expression générale des primitives de f sur .

6 Soit la fonction

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f on ait .

2) En déduire une fonction primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

7 Soit la fonction

1) Montrer que pour tout ,

2) En déduire la fonction primitive F de f sur qui s'annule en π .

8 **A /** Soit la fonction

1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur $[0,+\infty[$ s'annulant en 0.

2) On pose pour tout
K(x)= F(tgx).

a) Montrer que la fonction K est dérivable sur et déterminer K'(x).

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$K(x) = x$ puis calculer $F(\frac{\sqrt{3}}{3})$ et $F(1)$

3) On pose pour tout réel positif x,

$$U(x) = F(\frac{1}{1+x}) + F(\frac{x}{x+2}).$$

a) Montrer que U est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $U'(x)$.

b) En déduire la valeur du réel

$$F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{3}).$$

B / Soit $g(x) = -f(x)$

1) Montrer que g admet une primitive et une seule G sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

2) Soit la fonction :

$$T : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto T(x) = G(\text{cotg} x)$$

a) Montre que T est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer $T'(x)$.

b) En déduire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \; T(x) = x - \frac{\pi}{2}$$

puis calculer $G(1)$ et $G(\sqrt{3})$

3) On pose :

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, \; V(x) = G(\frac{1}{x}) + G(\frac{x}{x+2})$$

a) Montrer que V est dérivable sur $[0,+\infty[$ et déterminer $V'(x)$.

b) En déduire que : $G(\frac{1}{4}) + G(\frac{3}{5}) = \frac{\pi}{4}$.

9 On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

pour x appartenant à $]0,\pi[$.

1) Etudier et représenter la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé.

2) Soit g la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ vers un intervalle J que l'on , déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.

c) Déterminer une primitive F de la fonction

$$k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ sur } \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$

10 Soit f une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application u qui à tout réel t , associe

$u(t) = \dfrac{1}{2t^2-2t+1}$ et g l'application de

l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = f\left(\frac{1+\text{tg}x}{2}\right)$$

1) Prouver que g est dérivable sur I.

2) Montrer que g est une application affine.

3) Calculer $f(1) - f(0)$.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto 3\sin x - 2\sin^3 x$

1) Trouver deux réels a et b tels que la fonction $: x \mapsto a\cos x + b\cos^3 x$ soit une primitive de f sur l'intervalle $[0,\pi]$.

2) En écrivant $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ retrouver une primitive de f sur $]0,\pi[$.

12 Soit la fonction

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

1) Montrer que f admet une primitive et une seule F qui s'annule en 1.

2) Etudier le sens de variation de F, en déduire que :

$$\forall x \in]0,1[, \; F(x) < 0 \text{ et}$$
$$\forall x \in]1,+\infty[, \; F(x) > 0$$

3) Soit $H(x) = F(ax)$ pour $x > 0$;
(où a est un réel strictement positif donné).
a) Montrer que H est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
b) En déduire que $F(ax) = F(a) + F(x)$.
c) Montrer que $F(\frac{x}{a}) = F(x) - F(a)$.
4) Déterminer, à l'aide de F, la primitive G de la fonction

$$g :]-\infty,0[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ et qui s'annule en } (-1).$$

13 Une automobile roule à la vitesse 60 km/h.
a) Quel est le chemin parcouru en 2h45 mn ?
b) On note x(t) le chemin parcouru par l'automobile pendant le temps t exprimé en heures décimales. Calculer x (t) en fonction de t.
c) Représenter graphiquement les fonction x(t) et v(t) sur un même graphique, v(t) désigne la vitesse, en fonction du temps. On prendra comme unités : en abscisse 4 cm pour 1 h et en ordonnées 1 cm pour 10 km, ou pour 10 km/h.
d) Soient A et B les points d'abscisses 0 et t de la courbe représentative de v et soit le point C (t, 0). Quelle est l'aire du rectangle OABC ?
(L'unité d'aire est l'aire du rectangle formé par les vecteurs unitaires des axes du repère).
Comparer le résultat trouvé avec x(t).

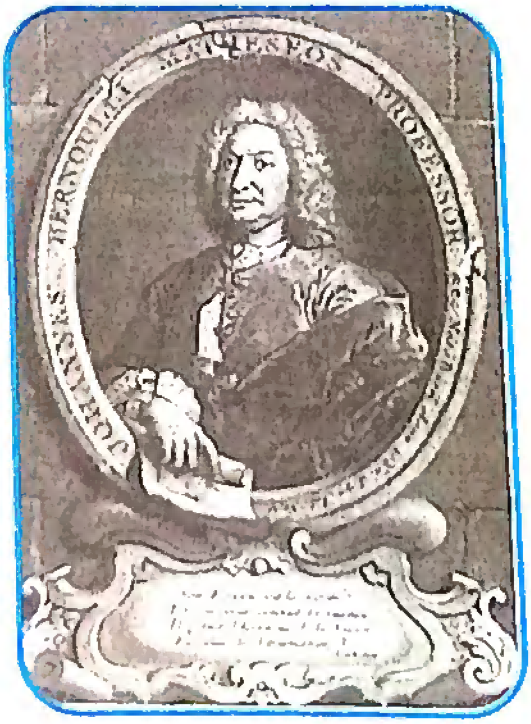
APERÇU HISTORIQUE

Leonhard Euler
Suisse (1707 ; 1783)

Leonhard Euler
Billet de 10 francs suisse

Leonhard Euler est issu d'une famille modeste vivant dans une ville près de Bâle en Suisse. Là, il suit des cours dans une école qui n'offre qu'un enseignement élémentaire et c'est son père qui l'initie aux premiers éléments des mathématiques. A 13 ans, il entre à l'Université de Bâle pour y étudier la philosophie et le droit. Il obtient son diplôme de philosophie à 16 ans mais son père qui souhaite le voir devenir pasteur, le pousse vers des études de théologie.

Très tôt, il devient l'élève de *Johann Bernoulli* (1667 ; 1748) un ami de son père, éminent mathématicien qui remarque son talent pour les maths.



Johann Bernoulli

La suisse ne permettant pas à Euler de faire une carrière ambitieuse dans les sciences, il se voit appelé à Saint-Pétersbourg en 1727 par Catherine II, impératrice de Russie, sur la recommandation de *Daniel* (1700 ; 1782) et *Nicolas Bernoulli* (1687 ; 1759). En 1733, il succède à *Daniel Bernoulli* en qualité de professeur et à partir de 1740 il devient également responsable du département de géographie. *Euler* rencontre la fille d'un artiste russe avec laquelle il aura 13 enfants dont seulement cinq survivront. Il est un père patient et attentionné. Euler raconte avoir fait ses plus belles découvertes avec un bébé dans ses bras et ses enfants jouant à ses pieds.

A 33 ans, il perd un oeil et bientôt il ne peut distinguer que de grands caractères tracés à la craie sur une ardoise.

En 1741, *Frédéric* II le Grand, roi de Prusse, le fait venir à Berlin pour rejoindre l'Académie de sciences. Mais il ne s'entend que moyennement avec ce dernier qui le surnomme le "Cyclope mathématique" en référence à son handicap. Il retourne à Saint-Pétersbourg en 1766, ville qu'il ne quittera plus.

Dans Introductio in analysin infinitorum (1748), il pose les fondements de l'analyse mathématique et de la mécanique analytique. Euler établit la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom : $\gamma = 0{,}5772156649015328606\text{0...}$

Sa nature est un problème ouvert, on ne sait pas s'il s'agit d'un nombre rationnel ou irrationnel. Aujourd'hui près de 108 000 000 décimales de ce nombre sont connues. Le record est détenu par *Patrick Demichel* et *Xavier Gourdon* depuis 1999.

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

Euler fonde ce qu'on appelle aujourd'hui l'**analyse fonctionnelle** en donnant une définition précise de la notion de fonction. Nous lui devons la notation f(x) pour désigner l'image d'un nombre x par une fonction f. Mais ce n'est, de loin, pas la seule notation qu'il introduit dans le langage des mathématiques. Il utilise la lettre grecque Σ comme symbole de sommation. Par exemple, $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ trop long à écrire se note :

$$\sum_{k=1}^{1000} k$$

En théorie des nombres, *Euler* démontre la conjecture de Fermat dans le cas n=3, étudie les nombres parfaits (nombre égal à la somme de ses diviseurs propres) et entretient des correspondances avec Christian Goldbach (1690 ; 1764), célèbre aujourd'hui pour sa conjecture.

Partie 1

Chapitre 6

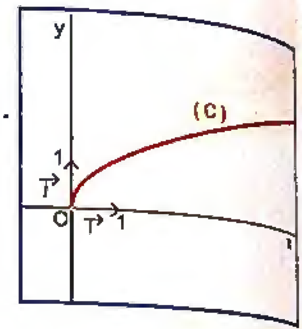
Fonctions logarithmes

Plan du chapitre

❋	**Activités préliminaires**	
❋	**Cours**	
	❖	La Fonction logarithme népérien.
	❖	Dérivée d'une fonction composée du type $(\ln \circ u)$.
	❖	Propriété fondamentale des logarithmes et règles de calcul.
	❖	Etude de la fonction logarithme népérien.
	❖	Etude d'exemples de fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$
❋	**Résumé du cours**	
❋	**Avec L'ordinateur**	
❋	**Exercices et Problèmes**	
❋	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 On a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe (C) de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.



1) Utiliser le graphique pour conjecturer le sens de variation de f et la nature de la branche infinie de (C).
2) Justifier les résultats obtenus.
3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$.
   Que représente cette limite ?
   Interpréter, graphiquement, le résultat obtenu.
4) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A (1, 1).
5) a) Tracer (T).
   b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la position relative de la droite (T) et la courbe (C) ?

2 a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2.
c) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

3 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto x^3$; $I =]-\infty,+\infty[$, $a = 0$; b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0,+\infty[$, $a = 1$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$, $a = 2$. d) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$; $I = [1,+\infty[$, $a = 3$

COURS

La fonction Logarithme Népérien

Activité 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Justifier que f admet au moins une fonction primitive sur l'intervalle I.

2) Soit x_0 un élément de l'intervalle I et F l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Montrer que F est strictement croissante sur I.

Définition

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels strictement positifs par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On appelle fonction logarithme népérien (notée ln) la primitive de f sur $]0,+\infty[$ s'annulant en 1. Ainsi, la fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Activité 2

En utilisant une calculatrice, trouver une valeur approchée à 10^{-2} prés par excès de chacun des réels suivants : $\ln 2$; $\ln 3$; $\ln \pi$; $\ln 5$; $\ln 10$; $\ln \frac{1}{3}$; $\ln \frac{1}{2}$ et $\ln\sqrt{2}$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ définie sur $I =]0,+\infty[$.

Déterminer la fonction primitive F de f sur I telle que F (1) = 1.

Activité 4

Soit $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

a) Préciser l'ensemble de définition D de la fonction g.

b) Montrer que g est dérivable sur D et calculer $g'(x)$ pour $x \in D$.

Propriété fondamentale de la fonction ln
Règles de calcul

Activité 1

On considère la fonction g définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.

1) En remarquant que $g(x) = (\ln \circ u)(x)$ où $u(x) = ax$, montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a : $g'(x) = \frac{1}{x}$.
2) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $g(x) = \ln x + k$ où k est une constante réelle.
3) Calculer g (1).En déduire la valeur de k.
4) Montrer alors, que pour tous réels strictement positifs a et b on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Propriété fondamentale

Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemples numériques :
$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$
$\ln(10) = \ln 2 + \ln 5$

Activité 2

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) En remarquant que $\frac{1}{x} . x = 1$, montrer que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

b) Montrer alors que $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Activité 3

Soit x un réel strictement positif.

1) a) Exprimer $\ln(x^2)$ en fonction de $\ln(x)$ puis montrer que $\ln(x^3) = 3\ln(x)$.
   b) Montrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\ln(x^n) = n.\ln(x)$.
2) a) Montrer que $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\ln(x)$.
   b) Soit n un entier relatif négatif. En posant $n' = -n$, prouver que $\ln(x^n) = n.\ln(x)$

Propriétés

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

* $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$; $\ln\left(x^n\right) = n \cdot \ln x$

* Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ strictement positifs on a : $\ln\left(a_1 \cdot a_2 \ldots a_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$

Activité 4

1) Soit x un réel strictement positif.

a) En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, exprimer $\ln\sqrt{x}$ à l'aide de ln x .

b) Montrer que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a $\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x$.

2) Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

a) Soit a un réel strictement positif quelconque et b le réel tel que $b^q = a^p$. Montrer que $\ln b = r.\ln a$ et $b = \sqrt[q]{a^p}$

b) En déduire que $\ln a^r = r.\ln a$

On notera pour tous $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$:
$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$ et $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

Propriétés

Pour tout réel x strictement positif et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a :
* $\ln x^r = r.\ln x$
* En particulier pour $r = \frac{1}{2}$, on a : $\ln x^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Activité 5

Simplifier l'écriture, puis donner une valeur approchée, de chacun des réels suivants :

$A = \ln 128 - \ln 32 - \ln 8$; $B = \ln 625 - \ln 50 - \ln 75$

$$C = \ln\left(\frac{9^2 \times 4^{-3}}{2^{-5} \times 3^3}\right) ; \quad D = \ln\left(\frac{\left(4^7 \times 3^{-12}\right)^2}{\left(4^{-1} \times 3^8\right)^{-5}}\right) ; \quad E = \ln\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{8}} \times \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Etude de la fonction : $x \mapsto \ln x$

Activité 1

1) a) Prouver que la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a : si $x < 1$ alors $\ln x < 0$ et si $x > 1$ alors $\ln x > 0$.

2) On suppose que la fonction ln est majorée sur $]1,+\infty[$.
a) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ell$ où ℓ est finie.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x)$ .En déduire que $\ell = \ell + \ln 2$.
c) Que peut-on conclure ?

3) Déterminer, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$.

Retenons :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Activité 2

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) Exprimer $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\ln x$.

3) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)$

Retenons :
$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Activité 3

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. La fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

i) Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
* $(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$
* $(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$

ii) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :
* $(\ln x < 0) \Leftrightarrow x \in]0,1[$
* $(\ln x > 0) \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$
* $(\ln x = 0) \Leftrightarrow x = 1$

Activité 4

1) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.
2) En déduire qu'il existe un réel unique e supérieur à 1 et tel que $\ln e = 1$.
3) Vérifier que $2 < e < 3$.
4) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a $\ln e^r = r$.

x	0	1	e	$+\infty$
f '(x)	‖	+		
f(x)	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

Retenons :
$\ln e = 1$.
$\ln 1 = 0$.
$2 < e < 3$.
$e \approx 2,71828$;
$\forall r \in \mathbb{Q}$, on a $\ln e^r = r$
e s'appelle la base du logarithme népérien.

Activité 5

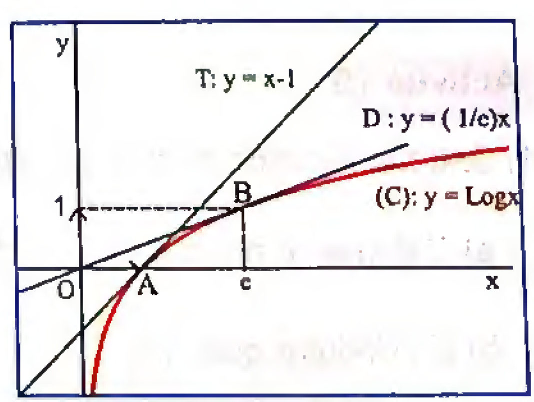
Soit g la fonction définie sur $I = \,]1,+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

1) Montrer que g est dérivable sur I et que $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.
2) En déduire que g est strictement croissante sur I.
3) a) Calculer g(1).
   b) En déduire le signe de g(x) sur I et qu'on a $\forall\, x \in I,\ 2\sqrt{x} > \ln x$.
4) Montrer alors que $\forall\, x \in I,\ 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Retenons :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.



1) Préciser les branches infinies de la courbe (C).
2) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point A (1, 0).
3) Donner une équation cartésienne de la tangente D à (C) au point B(e, 1).
4) Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$.
a) Dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$.
b) En déduire le signe de g(x) puis la position relative de T et (C).
c) Etudier de même la position relative de D et (C).
5) Tracer T, D et (C).

6) a) Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, qu'il existe un réel $c \in]1,e[$ tel que la tangente au point d'abscisse c à la courbe (C) soit parallèle à la droite (AB).

b) Déterminer la valeur de c.

Activité 7

1) En remarquant que $x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ pour x > 0, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x$.

Retenons :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0$

Activité 8

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{x})}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\ln(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1)\ln(x)$

Activité 9

1) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

a) Montrer que $\forall\, x \in]0, +\infty[$ on a : $\frac{1}{r}\ln\left(x^r\right) = \ln x$.

b) Calculer alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r.\ln(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{2}{3}}.\ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x}.\ln(x)$.

On admet que :

$\forall\, r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$

Retenons :

$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r.\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$

Activité 10

1) Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par f(x) = ln x.

a) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^3}$.

Retenons :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Résolution d'équations et d'inéquations

Activité 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :
$1 + \ln x = 0$; $2 - \ln x = 0$; $1 + 3\ln x = 0$;

$\ln(3x-5)=0$; $\ln|3x+7| = \ln 4$; $\ln(x^2+1)=0$; $\ln(x^2-4x+7) = \ln 2$; $\ln\left(\dfrac{3x-4}{x+2}\right) = \ln(x-2)$

Activité 2

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$\ln(2x-3) < \ln(x+5)$; $\ln|4-x| - \ln 2 \geq 0$

$\ln(3x^2+5x-2) > 0$; $\quad \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$;

$2\ln(2+x\sqrt{3}) - \ln(2-x\sqrt{3}) \geq \ln 2$; $\quad \ln(x-1) + \ln(x+2) \leq \ln(x^2-1)$

$$\left[\ln(u(x)) \geq \ln(v(x))\right] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) \geq v(x) \end{cases}$$

Exercice résolu

Une société, dont le chiffre d'affaire est de 600.000 DT, prévoit de l'augmenter de 5% par an.
Au bout de quel nombre d'années peut-on avoir un chiffre d'affaire supérieur ou égal à 900.000 DT ?

Solution :

Soit n le nombre d'années, C_0 le chiffre d'affaire initial et C_n le chiffre d'affaire à l'année n.
On a alors, $C_0 = 600,000$ et $C_{n+1} = C_n + 0,05\, C_n$ ou encore $C_{n+1} = 1,05\, C_n$

La suite (C_n) est géométrique de raison q = 1,05 et de premier terme C_0 .

Donc $C_n = (1,05)^n .C_0$

Ainsi, la résolution du problème posé revient à la résolution de l'inéquation :
$600.000(1,05)^n \geq 900.000$. Donc n est solution de l'inéquation $(1,05)^n \geq 1,5$.
Ce qui équivaut à $(\ln (1,05)^n \geq \ln 1,5)$ équivaut à $n.\ln(1,05) \geq \ln(1,5)$ équivaut à

$$n \geq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} \simeq 8,3$$

Donc, à partir de la 9ème année le chiffre d'affaire de la société sera supérieur à 900.000 DT.

Activité 3

La population d'une ville augmente de 5% par an. En 2000, on compte 80.000 habitants. En quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 100.000 habitants ?
Indication : Désigner par n le rang de l'année après 2000 et vérifier alors qu'on a : $(1,05)^n \geq 1,25$ puis déterminer n.

Dérivée d'une fonction du type : $x \mapsto \ln(u(x))$

Activité 1

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$. En remarquant que $f(x) = (\ln \circ u)(x)$ où $u(x) = x^2 - 2x + 5$, montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $g(x) = \ln|x|$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{1}{x}$.

3) On considère une fonction u dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur D par $f(x) = \ln|u(x)|$. Montrer que f est dérivable sur D et que $\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème

* Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

* Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) \neq 0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x) = \ln|u(x)|$ est dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Activité 2

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|x^2 - 1|$. Déterminer l'ensemble D sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

2) Soit g la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. Déterminer la primitive G de la fonction g sur I telle que $G(\sqrt{2}) = 0$

Retenons:
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$, alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = \ln|u(x)| + k$,où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 3

1) Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$; $I =]-\infty,+\infty[$, $a = 0$ b) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$; $I = [-1,1]$, $a = 0$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x.\ln x}$; $I =]1,+\infty[$, $a = 2$ d) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0,+\infty[$, $a = 1$

2) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}(x^2-1)$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Etude d'exemples de fonctions du type : $x \mapsto \ln (u(x))$

Activité 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(1 + x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de g.

2) Montrer que g est dérivable sur D et qu'on a $\forall x \in D$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

3) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis donner une approximation affine de $\ln(1 + h)$ pour h «voisin de zéro ».

4) Donner une valeur approchée pour chacun des réels suivants : $\ln(1,01)$; $\ln(0,99)$ et $\ln(0,97)$.

Retenons :

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

* Pour x « voisin de 0 » on a :

x est une approximation affine de $\ln(1+x)$.

Activité 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \; ; \; \lim_{x\to 0^+} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(x+1)} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-3x+1)}{x}$$

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1)$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier le sens de variation de f.
3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.
   b) Prouver que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.
4) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.(On prendra 4cm pour unité graphique).
5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
   b) Tracer la courbe représentative C' de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 4

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de D.
2) Etudier les variations de g sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]0, +\infty[$.
3) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés par défaut.
4) Etudier les branches infinies de la courbe représentative C de g.
5) Construire C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 5

I - Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x.\ln x - x$.

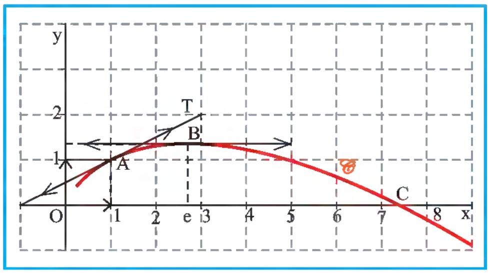
1) a) Montrer que f est dérivable et calculer f '(x) pour x > 0.
   b) En déduire la primitive F de la fonction ln s'annulant en 1.
   c) Donner le sens de variation de f.
2) Calculer les limites de f(x) quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.
3) a) Résoudre l'équation f(x) = 0.
   b) En déduire le signe de f(x).

II - Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 0$ et pour x > 0, $g(x) = 2x^2.\ln x - 3x^2$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité à droite de g en 0.
   b) Calculer g'(x) pour x > 0.
   c) Déduire, de **I**-, le sens de variation de g.
   d) Calculer la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$ et dresser le tableau de variation de g.
2) a) Résoudre l'équation g(x) = 0.
   b) Construire la courbe C de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Retenons :
Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est du type $x \mapsto x.\ln x - x + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 6



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe C d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. T est la tangente à C au point A(1, 1).

1) Par lecture graphique :
   a) Donner le coefficient directeur de T.
   b) Donner f(1), f '(1) et f '(e) .
   c) Déterminer les réels x de $]1, +\infty[$ qui vérifient f '(x) < 0.

2) Sachant que f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2}\left[2 - \ln x\right]$;
   a) Retrouver par le calcul l'ordonnée du point B où la fonction f admet un extremum global.
   b) Déterminer l'abscisse du point C, autre que O, où la courbe représentative de f rencontre l'axe des abscisses.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   d) Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0 que l'on précisera.
   e) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   f) Dresser le tableau de variation de g et tracer, en utilisant une autre couleur, sa courbe représentative C ' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 7

Soit $g(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

1) Préciser l'ensemble D de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de D.
2) Dresser le tableau de variation de g et calculer g(10).
3) En déduire que g réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer les branches infinies de la courbe représentative C de g.
5) Construire C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 8

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\sqrt{|x^2+2x-3|}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que la droite Δ : x = -1 est un axe de symétrie pour la courbe C .
3) Montrer que f est dérivable sur D et déterminer sa fonction dérivée.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Préciser les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses et écrire une équation de la tangente à C en chacun de ces points.
6) Tracer C.

Exercice résolu

Soit $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

1) Préciser l'ensemble D de définition de f.
2) Etudier les variations de f sur D.
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur g(I) puis construire les courbes représentatives de g et de g^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ du plan.

b) Calculer g(e) et $\left(g^{-1}\right)'(\dfrac{1}{2e})$.

Solution :

1) f est définie en tout réel x strictement positif tel que $1+\ln x\neq 0$.

$1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$. D'où l'ensemble de définition de f est :

$D=\left]0,\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$

2) f est dérivable sur D et on a $\forall x\in D,\ f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x)=x(1+\ln x)$.

Donc : $\forall x\in D,\ f'(x)=\dfrac{-2-\ln x}{[x(1+\ln x)]^2}$. Ainsi, pour tout x de D, f '(x) possède le même signe que -2 - ln x .

$-2-\ln x>0 \Leftrightarrow -2>\ln x \Leftrightarrow \ln e^{-2}>\ln x \Leftrightarrow e^{-2}>x$

donc $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left(x<\dfrac{1}{e^2} \text{ et } x\in D\right)$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{e^2}\right[$ et elle est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

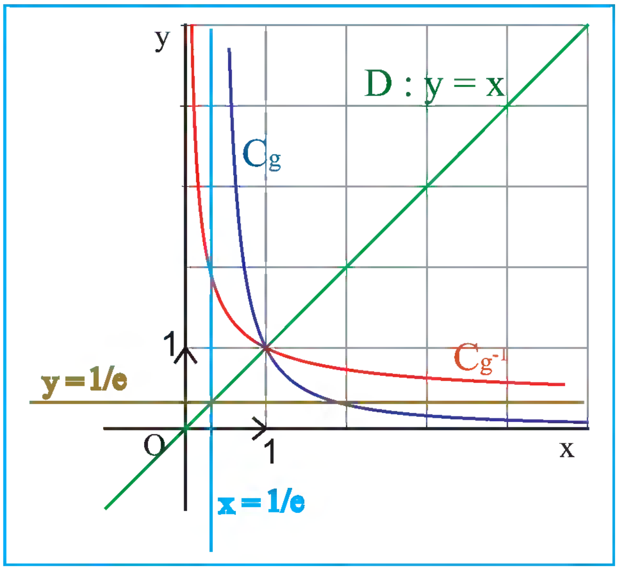
3) a) La restriction g de f à l'intervalle $I = \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ est continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$g(I) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)\right[= \left]0, +\infty\right[.$$

b) $g(e) = \frac{1}{2e}$, par conséquent $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{g'(e)} = -\frac{4}{3}e^2.$

Courbes représentatives de g et de g^{-1} :

On a : $C_{g^{-1}} = S_D(C_g)$ où D est la droite d'équation y = x.



Activité 9

Soit f la fonction définie par f (x) = x + ln(2x - 1) et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et montrer que la courbe C admet une branche parabolique de direction la droite Δ : y = x puis étudier la position relative de C par rapport à Δ.

2) a) Monter que f réalise une bijection de D sur un intervalle J que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet, dans D, une solution unique α et vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et les courbes C et C' représentatives respectives de f et f^{-1} .

RÉSUMÉ DU COURS

La fonction logarithme népérien (notée ln):

La fonction ln est une fonction strictement croissante et dérivable sur]0, +∞[.
Elle réalise une bijection de]0, +∞[sur $\mathbb{R}$ et pour tout x ∈]0, +∞[on a :
$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$; ln 1 = 0 ; ln e = 1; (e ≈2,72).

Pour tout x ∈]0, +∞[on a :	Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
• $(\ln(x) < 0) \Leftrightarrow x \in]0,1[$ • $(\ln(x) > 0) \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$ • $(\ln(x) = 0) \Leftrightarrow x = 1$	• $(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$ • $(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$

Propriétés :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

• $\ln xy = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$; $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

• $\ln x^r = r.\ln x$, $(r \in \mathbb{Q})$. En particulier, pour $r = \frac{1}{2}$, on a : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

Limites usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0^+} x.\ln x = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Pour x « voisin de 0 » on a : x est une approximation affine de ln (1+x).

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \ \lim_{x \to 0^+} x^r.\ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

Résolution d'équations et d'inéquations :

$$[\ln(u(x)) = \ln(v(x))] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases} ; \quad [\ln(u(x)) \geq \ln(v(x))] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) \geq v(x) \end{cases}$$

Fonction logarithme décimale :

C'est la fonction, notée log , définie sur]0, +∞[par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0{,}43 \ln x$.

Dérivée d'une fonction du type $x \mapsto \ln(u(x))$:

Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D, \ u(x) \neq 0$

alors la fonction f définie sur D par $f(x) = \ln|u(x)|$ est dérivable sur D et on a :

$\forall x \in D, \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Primitive d'une fonction du type $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ **:**

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$, alors les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions définies sur I par $F(x) = \ln|u(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$

Une primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ est du type :

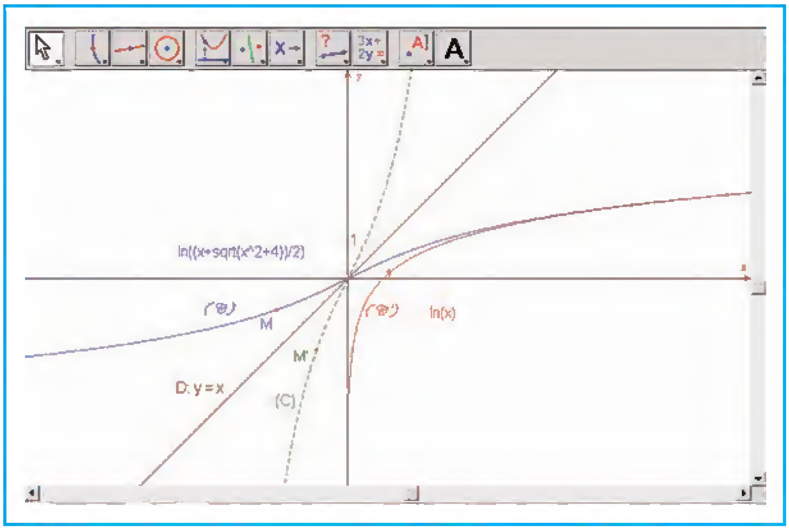
$x \mapsto x\ln(x) - x + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$ et g(x)= ln(x). On désigne par ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On se propose d'étudier la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').

I - Avec le logiciel Cabri II plus,
(Ressource sur Internet : http://www.cabri.com/v2/pages/fr/index.php)
- Ecrire les expressions ln ((x+ sqrt(x^2+4)) / 2) et ln(x).
- Montrer les axes du repère.
- Appliquer chacune des expressions précédentes sur l'un des axes du repère pour obtenir les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').
- Conjecturer sur la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').
- Conjecturer, l'ensemble de définition de f , le sens de variation de f et le(s) élément(s) de symétrie de ($\mathscr{C}$).
- En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Construire, avec une autre couleur la courbe (C) représentative de f^{-1}.



II - 1) a- Calculer, pour x réel, l'expression $\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

b- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+4} > 0$ et que $D_f = \mathbb{R}$. Montrer que f est impaire.

2) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, $f(x)-g(x) > 0$.

5) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-\ln(x)) = 0$ et préciser la position relative de ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soient les fonctions f et g définies sur]0, +∞[par $f(x) = x \ln x$ et $g(x) = x^2 \ln x$.

1) Calculer g'(x) pour x > 0.
2) Vérifier que pour x > 0, g'(x)-x =2 f(x).
3) En déduire une fonction primitive de la fonction f sur]0, +∞[.

2 Déterminer l'ensemble D sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f '(x) pour x ∈ D.

1) $f(x)=\ln(2x+1)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

3) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

5) $f(x)=\ln(x^2-3x)$; 6) $f(x)=\ln\left|x^2+x-2\right|$

7) $f(x)=\ln\left|\cos x\right|$; 8) $f(x)=\ln^2(2x+1)$

9) $f(x)=\ln(\ln x)$; 10) $f(x)=\ln(\dfrac{x+1}{1-x})$

11) $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$; 12) $f(x)=x\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$.

3 Dans chacun des cas suivants donner une fonction primitive F de f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$; $I=\left]\dfrac{3}{4},+\infty\right[$;

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$; $I=\left]0,+\infty\right[$;

c) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$; $I=\left]0,+\infty\right[$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x+1)}$; $I=\left]e^{-1},+\infty\right[$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$; $I=\left]1,+\infty\right[$;

f) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x^2+2x+1}$; $I=\left]-\infty,+\infty\right[$;

g) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-1}$; $I=\left]1,+\infty\right[$.

4 1) On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2+4x+7}{x+2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\},\ g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

b) En déduire la fonction primitive G de g sur]-2,+∞[qui s'annule en (-1).

2) Déterminer la primitive F de la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle [0,+∞[telle que F(0) = 0 (indication : écrire, tout d'abord, f(x) sous la forme $\dfrac{\alpha}{(x+1)^2}+\dfrac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels).

5 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(2x-1)=0$; b) $\ln(2x+1)-1=0$;

c) $\ln(x+1)-\ln(2-x)+\ln 2=\ln 7-\ln(4-x)$

d) $\ln^2 x-3\ln x-4=0$; e) $\ln\left|2x+1\right|=2\ln 2$

f) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x+1\right|=\ln\left|x+2\right|$

g) $\ln\left|x+3\right|+\ln\left|x+5\right|=\ln 15$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

$\ln^2 x-\ln\dfrac{1}{x}-2=0$; $1+\ln x=\dfrac{6}{\ln x}$;

$\ln x-2\ln(x-4)+\ln 2=0$; $\ln\left|x+1\right|<1$;

$\ln\left|x\right|<-\ln\left|3x+2\right|$; $2\ln x \geq 1$;

$\ln(2-x)+\ln 2<\ln(x+1)$;

$\ln\left(x^2-4e^2\right)<1+\ln(3x)$.

7 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln^3 x-\ln^2 x+3\ln x-4$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x\ \ln\ x}$;

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}\ln x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$.

8 Soient f et g les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$ et

$g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$.

1) Etudier le sens de variation des fonctions f et g.

2) En déduire que

$\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\ \dfrac{x-1}{x}<\ln x<\ x-1$

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=2x-x\ln|x| & \text{si } x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2)a) Montrer que f est impaire.

b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

10 Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln\left|x^2-1\right|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis étudier la parité de f.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f et tracer C dans un repère orthonormé du plan.

4) Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=x\ln\left(x^2-1\right)+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2x .$$

Montrer que g est une primitive de f sur $]1, +\infty[$

11 Soit $f(x)=\ln\left|\dfrac{3x-6}{x+2}\right|$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f sur chaque intervalle sur lequel elle est définie.

2) Montrer que le point Ω (0,ln3) est un centre de symétrie de C.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes du repère.

4) Tracer C.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle]-2. 2[.

a) Montrer que g est une bijection de]-2. 2[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable en $y_0 = \ln 3$ et calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.

12 1) Soit $g(x) = x\ln^2 x - 1$

a) Etablir le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à]2 , 3[.

c) Etudier le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Préciser l'ensemble de définition D de f.
b) Montrer que f est continue à droite en 0.
c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
d) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
e) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}$
f) Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à la courbe représentative C de f.
g) Tracer C dans un repère orthonormé du plan. (On prendra $\alpha \simeq 2.5$).

13 Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Calculer f '(x) et f ''(x) lorsqu'ils existent.
3) Etudier les variations de f .
4) Montrer que f réalise une bijection de D sur $]0, +\infty[$.
5) Montrer que la courbe C de f possède un point d'inflexion et déterminer une équation de la tangente à C en ce point.
6) Construire la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

14 Soient f et g les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6 \text{ et } f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$$

1) Etudier le sens de variation de g et déduire le signe de g(x).
2) Etudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3) Déterminer le sens de variation de f.
4) Montrer que la droite D : y = x - 1 est une asymptôte à la courbe C de f.
5) Etudier la position relative de D et C.
6) Tracer D et C dans un repère ortho normé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

15 On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.
a) Etudier les variations de g.
b) Etablir que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique β et que $0.27 < \beta < 0.28$.
3) a) Pour x > 0, calculer f '(x).
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ et interpréter le résultat graphiquement
4) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C de f et C' de la fonction ln.

16 Combien de fois une cellule s'est-elle divisée en 2 si on en compte 10^6 ?
Indication : Désigner par n le nombre de divisions et vérifier, alors, qu'on a : $2^n = 10^6$ puis déterminer n.

17 Le rôle particulier joué par les ions H_3O^+ en solution aqueuse a permis d'introduire la notion de pH. Par définition :

$$pH = -\log\left[H_3O^+\right] = -\frac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10} \quad \text{Où } \left[H_3O^+\right]$$

désigne la concentration (en moles / litre) des ions H_3O^+ dans la solution aqueuse.
1) Calculer le pH correspondant à une concentration $\left[H_3O^+\right] = 2{,}3.10^{-3}$.
2) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution aqueuse de pH = 9,4 ?

18 Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0.1; 6] par :
$y = f(x) = 70{,}228 + 5{,}104\,x + 9{,}222 \ln x$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées).
Compléter le tableau suivant en arrondissant à l'entier le plus proche :

x	0.1	0.3	0.5	1	2	3	4	5	6
y									

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C).
3) Une formule empirique permet d'estimer la taille y = f(x) en cm d'un enfant, de moins de 6 ans, en fonction de son âge x en années.
a) Estimer la taille d'un enfant de deux ans et demi, à 1cm prés.
b) Evaluer l'âge d'un enfant mesurant 1m .

19 Le polonium est un métal radioactif souvent associé au radium dans ses minerais ; élément (Po) de numéro atomique 84. Il se décompose spontanément de la manière suivante :
Tous les 138 jours, sa masse diminue de moitié. Si on a une masse de 10 g au départ, au bout de combien de temps restera-t-il 0,1 g ?
<u>Indication</u> : Désigner par n le nombre de périodes (138 jours) et vérifier alors qu'on a : $(0{,}5)^n = 0{,}01$ puis déterminer n.

20 <u>Etude de la trajectoire d'une balle de golf</u>
1) Soit t le temps (en secondes) écoulé depuis la frappe de la balle par le golfeur et soit h(t) la hauteur (en mètres) de la balle par rapport au sol à l'instant t jusqu'à ce qu'elle retombe. Dans un premier temps, on considère la fonction h définie par : $h(t) = -5t^2 + 20t$; pour $t \geq 0$.
a) A quel instant t, la balle retombera-t-elle sur le sol ?
b) A quel instant t, la balle atteint-t-elle sa hauteur maximale ? Préciser cette hauteur.
2) Si on tient compte de la résistance de l'air et du matériau constituant la balle, on estime que la hauteur de la balle en fonction du temps t est donnée plus précisément par $h(t) = -5t^2 + 11t - 2\ln(t+1)$.
a) Calculer h (0). Interpréter le résultat.
b) Etudier les variations de h.
c) A quel instant la balle atteint-t-elle sa hauteur maximale ? Préciser la valeur approchée au mètre prés de cette hauteur maximale.
d) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de l'instant où la balle retombe sur le sol.

21 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :
$u : x \mapsto \sqrt{x^2+1} + x$
$v : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$
1) a) Calculer u(x) . v(x), en déduire que u(x) et v(x) sont de même signe.
b) Montrer que pour tout réel x, u(x) et v(x) sont strictement positifs.
indication : vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}\text{ , on a } \sqrt{x^2+1} \geq |x|$$
2) a) Calculer u'(x).
b) En déduire la fonction primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ telle que F(0) = 0.
3) a) Montrer que F est une fonction paire.
b) Etudier le sens de variation de F.
c) construire la courbe représentative C de F dans un repère orthonormé du plan.

d- Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de F en son point d'abscisse 0.

22 **I**- Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = x + (x - 2) ln x.

1) a) Montrer que $g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x$.

b) En déduire que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$

2) a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que, pour tout réel x >0 on a $g(x) \geq 1$.

II- Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.

1) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudier les variations de f.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

a) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]0, +∞[par h(x)=x-1-ln x. En déduire le signe de h(x) pour x > 0.

c) Montrer que f(x) - x = (lnx -1).h(x) et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à T.

3) Tracer $\mathscr{C}$, T et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1}.

(D'après Bac Tunisien 1995)

23 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 1 + \ln\left[x(2-x)\right]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 4 cm.

1) a) Montrer que l'ensemble de définition de f est]0,2[.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite $(O, \vec{i})$. On notera x_0 la plus petite.

3) Soit φ la fonction définie sur]0,2[par φ(x) = f(x) - x.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ .

b) En déduire que l'équation φ(x) =0 admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α . Vérifier que :

$x_0 < \alpha < 0{,}3$ et que $\ln\left[\alpha(2-\alpha)\right] = \alpha - 1$

c) Préciser le signe de φ (x) et en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ : y = x .

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ (on prendra 0,2 comme valeur approchée de x_0).

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle I =]0, 1] .

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J ; (g^{-1} étant la fonction réciproque de g).

(D'après Bac Tunisien 1996)

24 1) Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = -1 + x + 2 ln x.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) Calculer g(1) puis déterminer le signe de g(x) sur]0, +∞[.

c) En déduire que :

si $x > 1$ alors $g(\frac{1}{x}) < 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g(\frac{1}{x}) > 0$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est dérivable à droite en zéro.

b) Montrer que pour tout x > 0 on a

$f'(x) = x.g(\frac{1}{x})$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0, +\infty[$ exactement une solution α telle que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

3) a) Vérifier que la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point O a pour équation y = x.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique : 2cm]

(D'après Bac Tunisien 2000)

25 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D d'équation y = x. La partie représentée de $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en O et deux asymptotes d'équations respectives x = -1 et x = 1.

I- Dans cette partie, utiliser le graphique pour répondre aux questions.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f dans [-2, 2]. (On ne cherchera pas à déterminer f(2) ni f(-2)).

c) Donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = x dans [-2, 2]. On désigne par α celle qui appartient à]0, 1[.

2) Soit g la restriction de f à [0, 1[.

a) Vérifier que g réalise une bijection de [0, 1[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Soit $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction réciproque de g. Tracer $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II- On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ on a $f(x) = ax + b + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

1) a) Montrer que $f'(x) = a - \frac{2}{x^2 - 1}$.

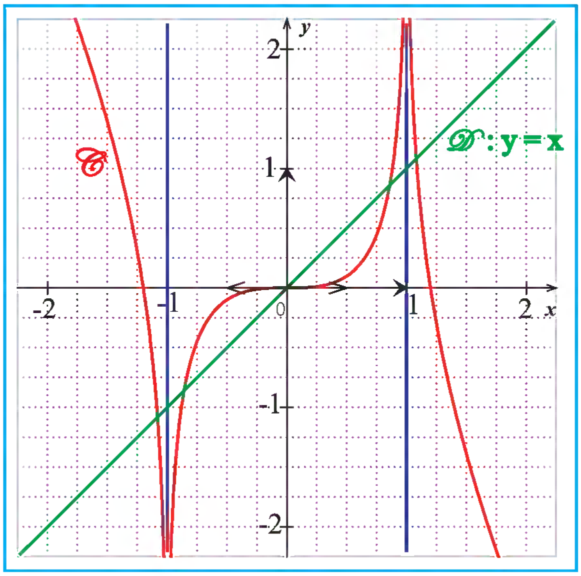
b) Montrer que a = -2 et b = 0.

2) On suppose dans la suite du problème que : $f(x) = -2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

a) Montrer que f est impaire.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite Δ d'équation y = -2x est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f.



4) Tracer Δ et compléter le graphique donné pour obtenir la courbe $\mathscr{C}$.

(D'après Bac Tunisien 2004)

APERÇU HISTORIQUE

John Neper ou Napier, baron de Merchiston (1550 - 1617) Mathématicien Ecossais

John Napier (ou Neper), né en 1550 au château de Merchiston prés d'Edimbourg est sans contestation le père des logarithmes qui, désormais, portent le nom de logarithmes népériens.

Après des études très moyennes à l'école de Saint-André, il effectue quelques voyages en Europe et rejoint sa famille en 1571.

Alors qu'il travaillait à simplifier les calculs trigonométriques des astronomes, il fut amené à généraliser les travaux de Nicolas Chuquet et Michael Stifel sur les similitudes entre progressions arithmétiques et géométriques (typ. 1,2,3,…et 10,100,1000…).

Partant de la relation : $2\sin(A)\sin(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ dans laquelle le produit de deux fonctions trigonométriques s'exprime comme somme de deux autres fonctions, Neper cherche une suite de nombres telle que le produit de deux de ces nombres puisse s'exprimer à l'aide de leur somme : pour cela, il construit , à l'aide de la cinématique, deux suites de nombres telles que l'une croît dans une progression arithmétique pendant que l'autre décroît dans une progression géométrique.

C'est ainsi que naquit la théorie des logarithmes népériens (1614). Il publia une méthode de calcul des logarithmes et des tables qui connurent un succès immédiat car la demande était forte. Il perfectionna ensuite sa méthode avec le mathématicien anglais **Henry Briggs** en introduisant la notion de logarithmes décimaux, plus utile en pratique. Par la suite Briggs continua l'œuvre de Neper et les tables logarithmes furent ainsi mises au service des mathématiciens.

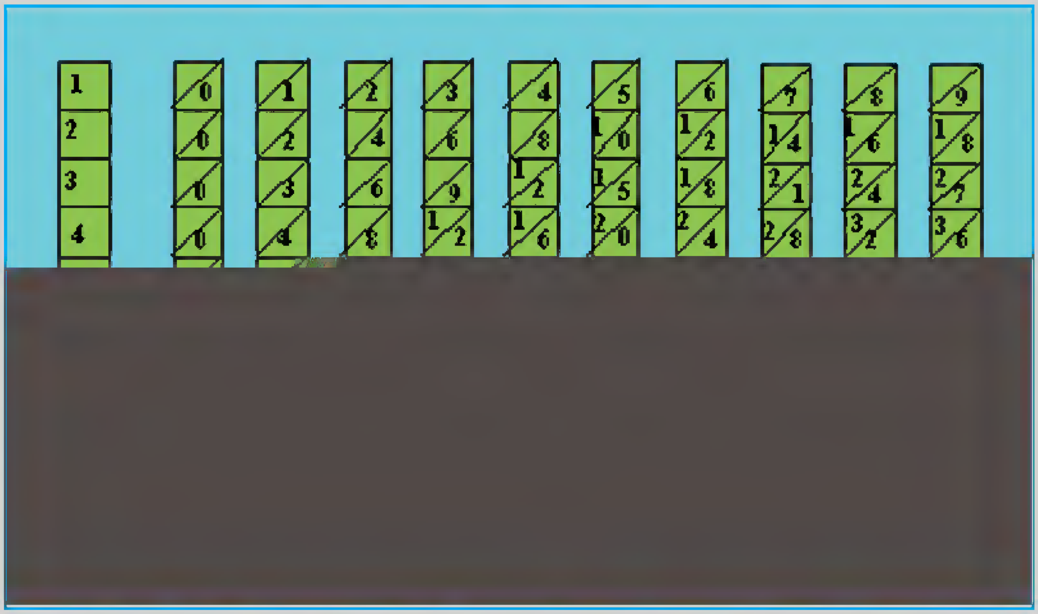
Parallèlement à la découverte de Neper, le suisse **Burgy** invente lui aussi les logarithmes mais ne nous a laissé aucune trace de ses méthodes de calcul.

Neper publie un livre sur l'Apocalypse et acquiert en même temps une certaine réputation de magicien. Il met au point un système de réglettes qui permet d'effectuer les multiplications d'une manière plus simple que d'habitude.

Réglettes de Neper.- Instrument de calcul, inventé par le mathématicien écossais Neper en 1617 et utilisé pour la multiplication et la division. Il est composé de 10 réglettes qui contiennent les neuf premiers multiples des nombres de 0 à 9. Dans chaque petit carré, le chiffre des unités est en bas d'une diagonale et celui des dizaines est en haut.

Une réglette maîtresse placée à gauche et contenant les entiers de 1 à 9 sert à lire le multiplicateur.

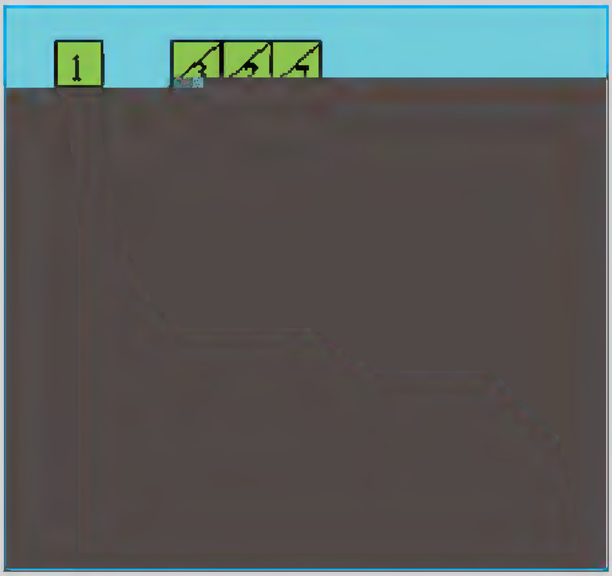
…/ …



La multiplication est ramenée à l'addition, parallèlement à la diagonale des carrés, **comme dans la multiplication arabe**. La division est ramenée à la soustraction.

Par exemple, pour faire la multiplication de 327 et de 546, on prend d'abord les réglettes 3, 2 et 7 ; on lit le résultat des produits par 5, 4 et 6 ; on place les résultats dans le bon ordre comme il est illustré à droite et on additionne en oblique.

2 = 2 on note 2 ; 8 + 4 + 2 = 14 on note 4 et on retient 1 ; 1+ 5 + 2 + 8 + 1 + 8 = 25 on note 5 et on retient 2 ; 2 + 3 + 0 + 2 + 1 = 8 on note 8 ; 1 + 5 + 1 = 7 on note 7 ; 1 = 1 on note 1. Le résultat de la multiplication de 327 par 546 est donc 178 542.



Bâtons de Neper ou tablettes de Neper

Partie 1

Chapitre 7

Fonctions exponentielles

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Soit la fonction $f : x \mapsto 1-\sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.
a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis expliciter $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.
b) Citer les différentes propriétés de f^{-1}
2) Représenter les courbes de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
a) $\ln x = 1$; b) $\ln x = 0$; c) $\ln x = 2$; d) $\ln x = -3$; e) $\ln x = -1$; f) $\ln x = 0.5$

3 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$:
2) En déduire la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$.

4 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$; $I =]-1,+\infty[$, $a = 0$; b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x.\ln x}$; $I =]1,+\infty[$, $a = e$.

5 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble D sur lequel elle est dérivable et calculer $f'(x)$ pour x élément de D.

a) $f : x \mapsto \ln(x+1)^2$; b) $f : x \mapsto \ln\sqrt{x^2+x-2}$; c) $f : x \mapsto \ln|x^2-x|$

COURS

La fonction exponentielle de base e

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2) On note f^{-1}la fonction réciproque de f. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.
3) Prouver que la fonction f^{-1}est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

Théorème et définition

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction exponentielle de base e, notée exp, qui est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \left]0, +\infty\right[$;
$(\ln)^{-1} = \exp$ et $(\exp)^{-1} = \ln$; $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$.

Activité 2

Montrer que pour tous nombres réels x et y tels que y > 0, on a :

a) $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$
b) $\ln\left[\exp(x)\right] = x$
c) $\exp\left(\ln y\right) = y$

Retenons :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, y \in \left]0,+\infty\right[$ on a :
$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$
$\ln\left[\exp(x)\right] = x$ et $\exp\left(\ln y\right) = y$

Activité 3

1) Montrer que pour tous nombres réels x et y on a :
   a) $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$
   b) $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$
2) En déduire que pour tout réel a on a :
   a) $a < 0 \Leftrightarrow 0 < \exp(a) < 1$.
   b) $a > 0 \Leftrightarrow \exp(a) > 1$.

Retenons :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, y \in \mathbb{R}$ on a :
$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$
$\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

Activité 4

Simplifier l'écriture de chacun des réels suivants :

$m = \exp\left(3\ln 2\right)$; $n = \exp\left(-3\ln 2\right)$; $p = \ln\left[\exp\left(\frac{1}{3}\right)\right]$; $q = \ln\left[\dfrac{e}{\exp\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$; $r = \ln\sqrt{\exp(-3)}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

a) $\ln^2 x + \ln x - 12 = 0$ b) $\dfrac{2\exp(x) - 3}{\exp(x) + 1} = \dfrac{5}{3}$ c) $\exp(3x-1) < 1$

d) $\exp\left(2x^2 + x + 1\right) \geq \exp(1 - x)$.

Théorème fondamental - Règles de calcul

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels. On pose $x = \exp(a)$ et $y = \exp(b)$.
1) Exprimer à l'aide de a et b, $\ln x$ et $\ln y$.
2) Vérifier que $a + b = \ln(xy)$.
3) En déduire que $\exp(a + b) = \exp(a) \,.\, \exp(b)$

Théorème fondamental

Quels que soient les nombres réels a et b, on a : $\exp(a + b) = \exp(a) \,.\, \exp(b)$

Activité 2

1) Soit a un réel.
   a) Calculer de deux façons $\exp(a + (-a))$.
   b) En déduire que $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
2) Soient a et b deux réels, montrer que $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Propriétés

Quels que soient les nombres réels a et b, on a :

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Activité 3

Soit r un rationnel .

a) Calculer $\ln(e^r)$ et $\ln[\exp(r)]$.

b) Conclure.

Propriétés

* Quel que soit le rationnel r, on a : $\exp(r) = e^r$.
* D'une façon générale, on étend la notation précédente à tous les nombres réels, donc pour tout x réel on a : $\exp(x) = e^x$.
* Ainsi, pour tous réels a et b on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
* $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Activité 4

Soit a un réel et r un rationnel .

Montrer que $\left(e^a\right)^r = e^{ar}$

Propriété

Pour tous a réel et r rationnel on a : $\left(e^a\right)^r = e^{ar}$

Activité 5

1) Soit a un réel. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

$$A = \left(e^a + e^{-a}\right)^2 - \left(e^a - e^{-a}\right)^2 \quad ; \quad B = \frac{(e^a)^2}{e \times e^{a^2}}$$

2) On considère les équations suivantes :

(E) : $e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x} = 0$

(F) : $e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x = 0$

a) Vérifier que :

$e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x} = e^{-x}(e^{-x} - 1)^2$

$e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x = e^x(e^x + 1)^3$

b) Résoudre alors, dans $\mathbb{R}$, les équations (E) et (F).

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x-4} \leq 1$.

Etude de la fonction : $x \mapsto e^x$

Activité 1

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(e^x)$.

1) En utilisant la dérivabilité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a : $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

3) a) Prouver que pour tout réel x, $g'(x) = 1$.
   b) En déduire que pour tout réel x on a $f'(x) = f(x)$.
   c) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Retenons :

* La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est elle-même.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$.
* La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Activité 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
   a) Etudier les variations de f et calculer f (0).
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
   c) Prouver alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Retenons :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

2) En utilisant la formule $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Activité 3

On se propose de calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

Retenons :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

a) En posant $y = e^x$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\frac{\ln y}{y}} \right)$

b) Conclure.

Activité 4

1) Etablir le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto e^x$.
2) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions ln et exp.
3) Donner les équations des tangentes à la courbe de la fonction exp aux points A(0 ;1) et B(1 ;e).

Le tableau de variations de $f : x \mapsto e^x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$	0	1	e	$+\infty$

* $\forall x \in \left]-\infty, 0\right]$ on a : $0 < e^x \leq 1$.
* $\forall x \in [0,1]$, on a : $1 \leq e^x \leq e$.
* $\forall x \geq 1$, $e^x \geq e$.

Courbes représentatives de $f : x \mapsto e^x$ et $f^{-1} : x \mapsto \ln x$

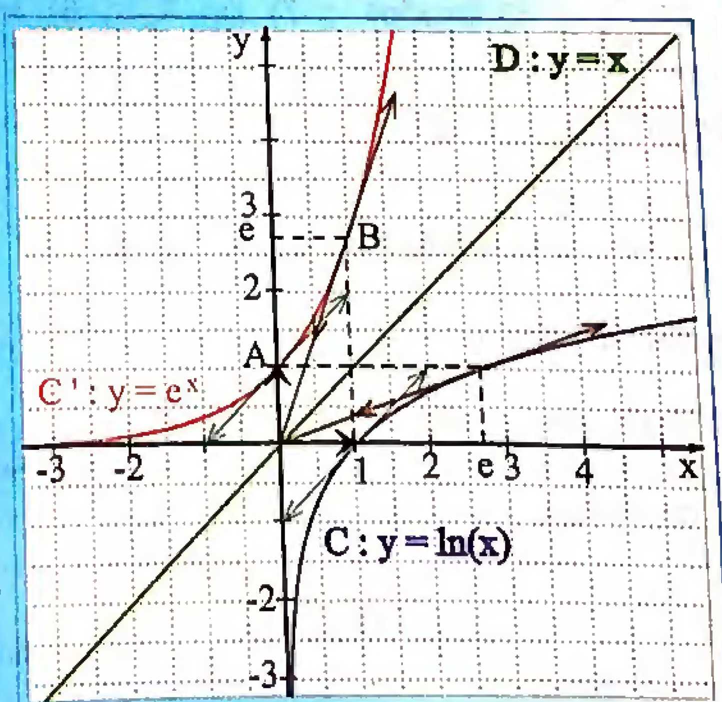
$C' : y = e^x$;

$C : y = \ln x$;

$D : y = x$;

On a : $C' = S_D(C)$

- Une équation de la tangente à C' au point A(0, 1) est : $y = x + 1$;
- Une équation de la tangente à C' au point B(1, e) est : $y = ex$.



Activité 5

1) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. (On pourra poser $X = -x$).

2) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x,

$$x^n e^x = \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n.$$

b) En déduire $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x$.

3) Soit r un rationnel positif et x un réel strictement positif.

a) Exprimer $\ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right)$ à l'aide de x, r et ln x.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right)$.

c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r}$.

Retenons :

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \forall r \in \mathbb{Q}_+$

Activité 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} xe^x$; 2) $\lim_{x\to+\infty} x - e^x$; 3) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$; 4) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x).e^{-x}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$; 6) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$; 8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

Activité 7

Soit $f : x \mapsto e^x$.

1) a) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 0$.

b) En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2) a) Ecrire une approximation affine de f en $x_0 = 0$.

b) En déduire qu'il existe une fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ définie sur un intervalle contenant zéro telle qu'on ait : $e^x = 1 + x + x\varphi(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$.

Retenons : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Pour x « voisin de 0 » on a : 1+ x est une approximation affine de e^x.

Activité 8

1) Donner une valeur approchée pour chacun des réels suivants :

$e^{0.01}$; $e^{0.1}$; $e^{-0.03}$ et $e^{10^{-6}}$.

2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

Dérivée de e^u - Primitive de $u'.e^u$ où u est une fonction dérivable

Activité 1

1) Soit u une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la fonction f définie sur D par $f(x) = e^{u(x)}$
Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$.

2) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = e^{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)}$.
Déterminer l'ensemble D sur lequel g est dérivable puis calculer $g'(x)$ pour x appartenant à D.

Retenons :
Si u est une fonction numérique dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur D et pour tout x de D on a : $f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$.

Activité 2

Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble D sur lequel f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

1) $f(x) = e^{x^2}$; 2) $f(x) = xe^{x}$; 3) $f(x) = \ln(e^{x}-1)$; 4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; 5) $f(x) = e^{\sin x}$

Activité 3

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f : x \mapsto e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit u une fonction numérique dérivable sur un intervalle I. Déterminer les fonctions primitives de la fonction $g : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sur I.

Retenons :
Si u est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors les primitives sur I de la fonction $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 4

Déterminer, dans chaque cas, une fonction primitive de f sur l'intervalle I :

1) $f(x) = xe^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$ 2) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$ 3) $f(x) = e^{2x}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$; $I =]0,+\infty[$ 5) $f(x) = (e^x - 1)^2$; $I = \mathbb{R}$ 6) $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$; $I = \mathbb{R}$.

Fonctions puissances

Fonctions du type : $x \mapsto a^x$ où $a \in]0, +\infty[$

Activité 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.

1) Simplifier $\ln(a^r)$ et $\ln\left(e^{r.\ln a}\right)$.

2) En déduire que $a^r = e^{r.\ln a}$.

Définition

Soit a un réel strictement positif.

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x.\ln a}$

Activité 2

a étant un réel strictement positif. Soit la fonction $f : x \mapsto a^x$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f '(x).

2) Dresser le tableau de variation de f ; distinguer les trois cas : $0 < a < 1$, $a > 1$ et $a = 1$.

3) Etudier les variations de chacune des fonctions $g : x \mapsto 2^x$ et $h : x \mapsto (0,5)^x$ et tracer leurs courbes représentatives dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 3

a est un réel strictement positif ; x et y sont deux réels et r est un rationnel.

Montrer les formules suivantes : $a^{x+y}=a^x.a^y$; $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$; $\left(a^x\right)^r=a^{r.x}$.

Activité 4

Ecrire plus simplement chacun des réels suivants :

$a=(3,1)^{2\sqrt{3}}\times(3,1)^{1-\sqrt{12}}$; $b=(0,5)^{\frac{3}{4}}\times(0,5)^{-\frac{7}{4}}$; $c=\dfrac{3^{\pi-2}\times 9}{27^{\frac{1}{3}}}$; $d=\dfrac{\left((1,5)^{-\frac{2}{7}}\right)^3}{(1,5)^{-\frac{7}{6}}}$.

Activité 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $2^x=16$; b) $3^x=5$; c) $10^x=5$; d) $(0,5)^x=8$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a) $5^x>10$; b) $2^x<5$; c) $3^x\geq 1$; d) $(0,5)^x\leq 8$.
3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2-5X+4=0$.
   b) En déduire la résolution, dans $\mathbb{R}$, des équations suivantes :
   $2^{2x}-5\times 2^x+4=0$; $3^{-2x}-5\times 3^{-x}+4=0$.

Fonctions du type : $x\mapsto x^r$ où r est un rationnel.

Activité 1

Soit $x>0$; comparer $x^{\frac{1}{2}}$ et $e^{\frac{1}{2}\ln x}$

Définition

Soit r un rationnel. La fonction $f:x\mapsto x^r$ est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=e^{r\ln x}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f:x\mapsto 3x^{\frac{1}{3}}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$ on a : $f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}$
   puis dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que $\forall x\in[1000;1001]$ on a: $(10,1)^{-2}\leq f'(x)\leq 10^{-2}$.
4) En déduire que $10,0032\leq\sqrt[3]{1001}\leq 10,0033$; (utiliser les inégalités des accroissements finis).

Etude d'exemples de fonctions du type : $x \mapsto \exp(u(x))$

Activité 1

Soit $f(x) = e^{-x^2}$

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.
2) a) Etudier la parité de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
   c) Montrer que $f''(x) = e^{-x^2}.P(x)$ où P(x) est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
   d) Etudier les points d'inflexion de la courbe représentative C de f.
3) Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 2

Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

a) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.

Exercice résolu

Soit $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Solution :

a) $D = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

$$\text{On a } \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

$$\text{De même on a : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

b) $\text{On a } \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0 = f(0).$

Donc f est continue en $x_0 = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \dfrac{x}{x-1} = 0$ car

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) e^{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{T \to -\infty} T e^{T} = 0$. Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$.

c) Puisque f est du type $x \mapsto e^{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonctionb f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f' : x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^4} e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $(-x^2 + 2x)$ et par conséquent le tableau de variation de f est :

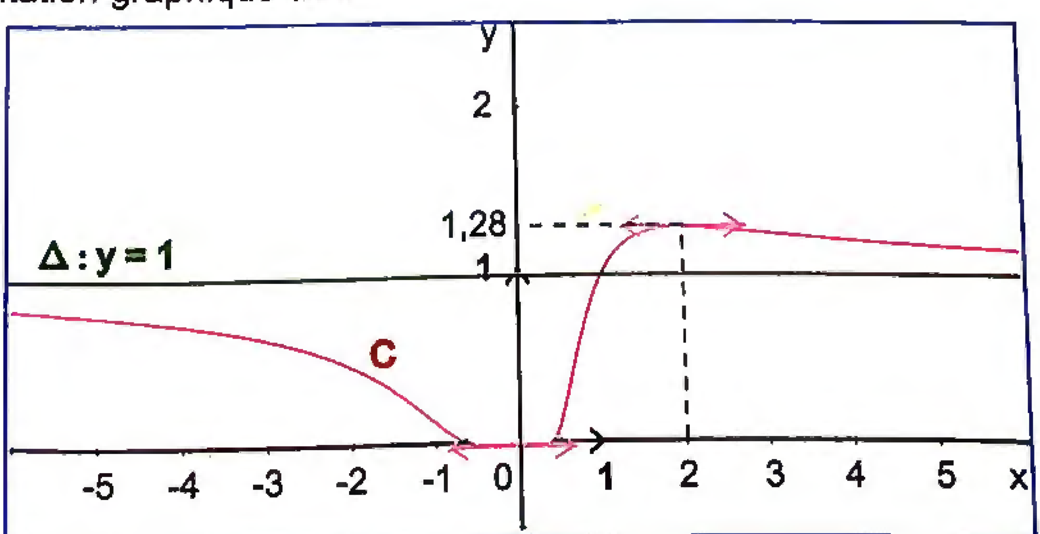
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f(x)	1	↘	0	↗	$e^{\frac{1}{4}}$	↘	1

$f(2) = e^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}28$.

La droite Δ d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative C de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

La courbe C est en dessous de la droite Δ au voisinage de $-\infty$ et elle est au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

d) Représentation graphique de f :



Activité 3

Soit f la fonction définie sur [-2, +∞] par $f(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$ si $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en (-2).

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Préciser l'asymptote et la demi-tangente éventuelles à la courbe représentative C de f.

d) Tracer C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

1) Montrer que f est périodique de période 2π.

2) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

3) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Activité 5

En l'absence de facteurs inhibiteurs, l'accroissement d'une population est proportionnel à la population et à la durée. La croissance d'une population est une fonction exponentielle du temps.

Supposons par exemple que le taux annuel d'accroissement de la population mondiale est égal à 2%, on aura : $P(x+1) - P(x) = 0{,}02 P(x)$ et par suite on obtient, approximativement, $P(x) = P(x_0).e^{0{,}02(x-x_0)}$.

Si l'on sait que $P(1996) = 3 \times 10^9$ alors on a : $P(x) = 3 \times 10^9.e^{0{,}02(x-1996)}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction P sur [1996; 2008] .

2) Donner une estimation de la population mondiale en l'an 2500.

RÉSUMÉ DU COURS

La fonction exponentielle :

* La fonction exponentielle de base e, notée exp, est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Ainsi, $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$; $(\ln)^{-1} = \exp$ et $(\exp)^{-1} = \ln$
$x \mapsto \exp x = e^x$

* La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et on a :	Pour tous réels a et b on a :
• $(0 < e^x < 1) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$ • $(e^x > 1) \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$ • $(e^x = 1) \Leftrightarrow x = 0$	• $(e^a = e^b) \Leftrightarrow (a = b)$ • $(e^a > e^b) \Leftrightarrow (a > b)$

Propriétés :

Pour tous réels x et y, on a :

- $e^{x+y} = e^x . e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$, (quel que soit $r \in \mathbb{Q}$). En particulier, pour $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$.

Résolution d'équations et d'inéquations :

$e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

$e^{u(x)} \leq e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \leq v(x)$

Limites usuelles :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Pour x « voisin de 0 » on a : $e^x \simeq 1 + x$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty; \forall r \in \mathbb{Q}_+$

Dérivée d'une fonction du type $x \mapsto e^{u(x)}$ **:**

Si u est une fonction numérique dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur D et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$

Primitive d'une fonction du type $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ **:**

Si u est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors les fonctions primitives sur I de la fonction $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Fonctions puissances : Soit a un réel strictement positif et r un rationnel.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x.\ln a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^r = e^{r.\ln x}$

AVEC L'ORDINATEUR

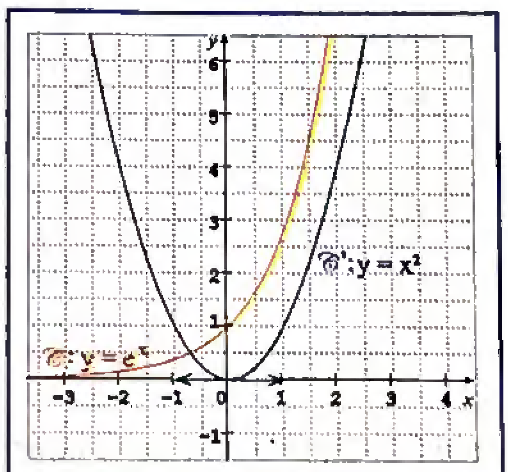
Activité 1

Soit f_1 et f_2 les fonctions définies par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = x^2$. On désigne par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes représentatives respectives de f_1 et f_2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On se propose d'étudier la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

1) Avec le logiciel **Sine qua non**, Ressource sur Internet : (http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm).

- Montrer les axes du repère.
- Définir les fonctions $f_1(x)$ = exp(x) et $f_2(x)$ = x^2 (choisir deux couleurs différentes pour les courbes)
- Valider avec OK pour obtenir les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de f_1 et f_2 .
- Conjecturer sur la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
- En déduire qu'il existe un réel $a \in]-1, 0[$ tel que pour tout $x > a$, $e^x > x^2$
- Prouver alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.



2) Soit $\varphi(x) = e^x - x^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée φ' et la fonction dérivée seconde φ'' de φ.

b) Etudier le signe de $\varphi''(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction φ'.

c) En déduire que pour tout réel x, $\varphi'(x) > 0$ et que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. En déduire que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans [-1; 0] puis déterminer, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée de α.

f) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

g) Donner la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

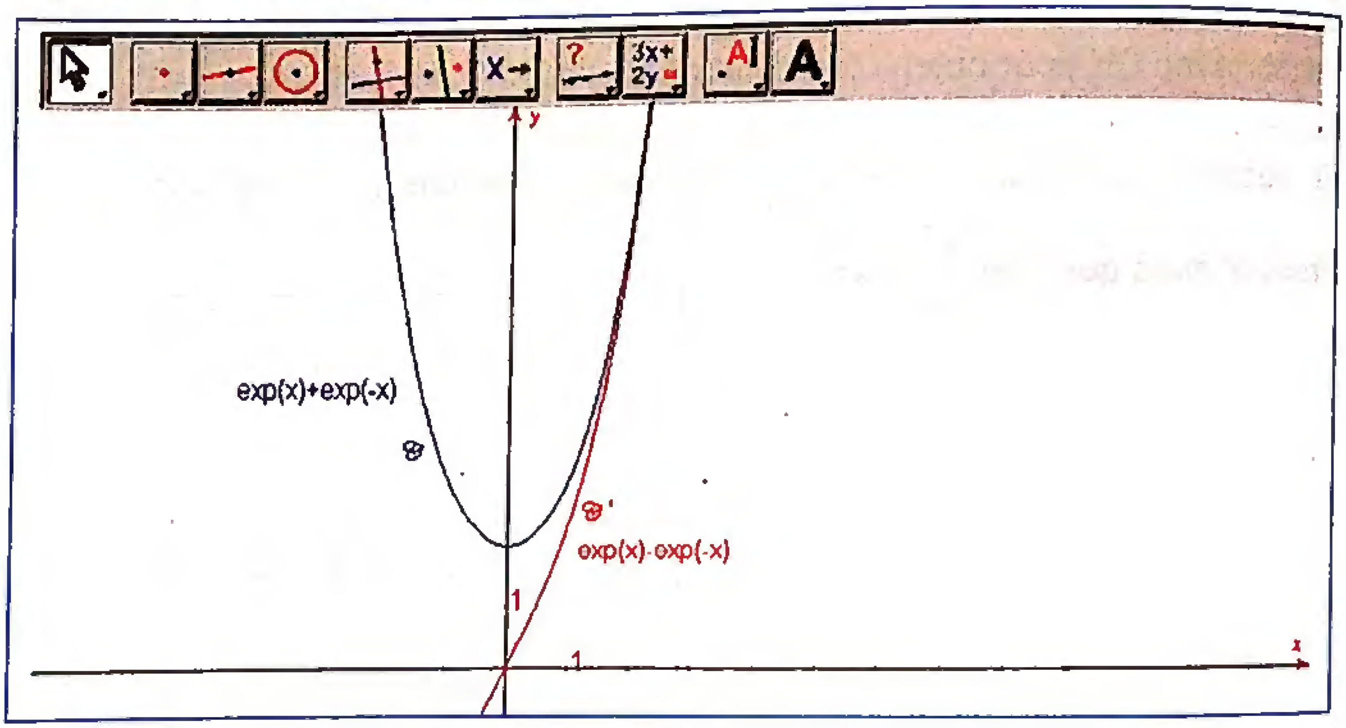
Activité 2

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ et $g(x)=e^{x}-e^{-x}$. On désigne par (C) et (C ') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On se propose d'étudier la position relative des courbes (C) et (C ').

1) Avec le logiciel Cabri, Ressource sur Internet :
(http://www.cabri.com/v2/pages/fr/index.php) :

- Ecrire les expressions exp(x) + exp(-x) et exp(x) - exp(-x).
- Montrer les axes du repère.
- Appliquer les expressions précédentes sur l'un des axes du repère. On obtient ainsi, les courbes (C) et (C ').
- Conjecturer sur la position relative des courbes (C) et (C ')



2) Sur l'intervalle [-2; 2], la partie de la courbe (C) de f s'appelle une chaînette parce qu'elle correspond à la forme obtenue lorsqu'on laisse pendre une chaîne maintenue aux deux extrémités. Galilée pensait que cette courbe devait être une parabole .Nous allons voir que ce n'est pas le cas.

Soit h la fonction définie sur [-2; 2] par $h(x) = ax^2 + b$.

a) Montrer que lorsque $h(0) = f(0)$ et $h(2) = f(2)$ alors $b = 2$ et $4a + b = e^2 + e^{-2}$.

b) Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} prés.

c) En déduire une valeur approchée de $f(1) - h(1)$ à 10^{-2} prés.

d) Conclure.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Simplifier chacune des expressions suivantes :

$a=\ln\sqrt{e^3}$; $b=\ln e^{\sqrt{3}}$; $c=e^{-\ln 3}$; $d=e^{\ln 2-\ln 5}$

$A=\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$;

$B=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^x=-3$; $e^x=e$; $3e^x=e^{-x}$;

$e.e^{3x-1}=1$; $e^{2x}-3e^x+2=0$;

$e^{2x}-5e^x+6=0$; $e^{x^2}=\dfrac{1}{9}$;

$e^{-x^2-12x-35}=1$; $e^{x^2-5x}=e^{-6}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^x<1$; $e^x>e$; $e^{x+2}<e^{2x-1}$; $e^{3x-1}<2$

$e^{-x^2}>e^{-1}$; $e^{-x}>3$; $e^{2x}-3e^x+2>0$

4 Simplifier chacune des expressions suivantes :

$e^{\ln|x|}$; $e^{|\ln x|}$; $\ln\left(e^{|x|}\right)$

5 Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

1) Montrer que 3 est une racine de P puis déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x) = 0.

3) En déduire la résolution de l'équation

$(E): e^{3x}-3e^{2x}-4e^x+12=0$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=2$; $e^{3x+4}=4$; $e^x-e^{-x}=\dfrac{15}{4}$

$e^{2x}+3e^x-4=0$; $e^{2x}-4e^x-5>0$;

$\left|e^{x-1}-1\right|\le 3$; $2e^{3x-1}-3e^{2x-1}+e^{x-1}\le 0$

7 Soient les deux fonctions :

$f:x\mapsto xe^{-x}$; $g:x\mapsto x^2e^{-x}$

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.

2) Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan les courbes de f et g et préciser leurs positions.

8 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-2e^x\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-x}{2x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+2x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x\ln 2}-1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x+1}-e}{x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}$

9 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité puis calculer f '(x).

1) $f : x \mapsto e^{-x^2+2x}$;

2) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$;

3) $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2-x-2}}$;

4) $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$;

10 Soit $f(x)=2e^{2x}-e^{x}$

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier le sens de variation de f.
3) Résoudre l'équation f(x) = 0.
4) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle

$$I=\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right),+\infty\right[$$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble J de définition.
b) Tracer la courbe représentative C' de g^{-1} dans le repère .
c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.
6) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en ln (0,5).

11 Soit $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que f est une fonction paire.
3) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
4) Soit g la fonction définie par
g(x) = ln (tan(x))
Montrer que g est une bijection de

$I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

5) Soit h l'application réciproque de g.
a) Quel est le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$?
b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée h' est égale à f.
c) Retrouver alors, le sens de variation de h.

12 Soit $f(x)=2x+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$ .On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) a) Montrer que le point I(0 ; 0,5) est un centre de symétrie de C.
b) Etudier les variations de f et construire C.
3) Soit k un paramètre réel. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
(E) : $2x.e^{x}+(1-k)e^{x}-2x+k=0$
(indication : montrer que (E) est équivalente à f(x) = k).

13 Soient les deux fonctions :

$f: x \mapsto e^{x} + e^{-x} - 2;\quad g: x \mapsto e^{x} - e^{-x}$

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.

2) Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les courbes de f et g.

3) a) Montrer que g admet une fonction réciproque et construire, dans le repère, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de g^{-1}.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $(g^{-1})'(1,5)$.

4) Montrer que la restriction de f à $[0, +\infty[$ est une bijection. Etudier et représenter graphiquement son application réciproque.

14 Soit $f(x) = x - 1 + e^{-x}$.

1) Etudier et représenter graphiquement f.

2) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α comprise entre 1 et 2.

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en zéro.

2) Etudier la dérivabilité de f en zéro.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Préciser les branches infinies de la courbe C représentative de f.

5) Tracer C dans un repère orthonormé du plan.

16 Soit $f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f puis montrer que :

$$x \in D - \{0\},\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)}$$

2) calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Etudier les variations de f.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble E de définition.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à E.

c) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de f et f^{-1}.

5) Soit $g(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x} - 1\right)$.

a) Montrer que :

$\forall x \in D - \{0\},\ g(x) = \ln(f(x))$

b) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

17 Soit $g(x) = -x - 1 + e^{x}$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que :

$\forall x \in]-1, +\infty[$ on a : $e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$.

3) Soit $f(x) = \ln(1 + x) + e^{-x}$.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition $I =]-1, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C de f au point d'abscisse zéro.

d) Construire T et C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

18 Une lame de verre absorbe 4 % de la lumière qui la traverse.

1) Quelle est la proportion de la lumière incidente qui traverse 20 lames identiques superposées ?

2) Combien faut-il de lames pour absorber 40 % de la lumière incidente ?

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^x$.

1) Etudier et représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $3^x \leq 6$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

1) Etudier et représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 5$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}.\sin(2x)$.

1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \ -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2) Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(x+\frac{\pi}{2})$ en fonction de f(x).

3) Etudier la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et la représenter graphiquement dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

22 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$.

a) Etudier les variations de g .

b) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe C_g.

c) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions réelles de l'équation

(E) : $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$

a) Montrer que $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

b) Montrer alors que la droite D : y = 2x est une asymptote à la courbe représentative C de f.

c) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

d) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_f . (On précisera la tangente à C_f en son point d'ordonnée nulle).

23 On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}\,.e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

5) Tracer $\mathscr{C}$.

(D'après Bac Tunisien 2004)

24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2e^{-x} + 1 > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont l'une est nulle ; on notera α l'autre solution et on vérifiera que : $1,5 < \alpha < 1,6$.

3) a) Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $(+\infty)$.
b) Préciser la nature de la branche infinie de la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $(-\infty)$.
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) à l'origine O.
b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2e^{-x} + 2x - 2$. Etudier le sens de variation de g et déduire le signe de g(x).
c) En déduire la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à T.
5) Tracer Δ , T et ($\mathscr{C}$) .
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2,+\infty[$ et h^{-1} la fonction réciproque de h.
a) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
b) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère .

(D'après Bac Tunisien 2005)

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité : 2 cm].
1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout réel x on a :
$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que le point I $(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point I.
2) a) Montrer que pour tout réel t on a :
$f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.
b) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$.
c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à (T).
3) Tracer (T) et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
b) Soit $y \in]0, 1[$.
Déterminer le réel x tel que f(x) = y.
c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0, 1[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

(D'après Bac Tunisien 2002)

26 Pour effectuer un examen médical, On injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant t = 0 (t est exprimé en heures).
Expérimentalement, on montre que la quantité Q(t) de substance, exprimée en cm^3 , présente dans le sang à l'instant t est donnée par : $Q(t) = \dfrac{1}{3}\, t \, . \, e^{3-t}$

1) Quel volume du médicament reste présent dans le sang au bout de 90 minutes ?
2) Quel volume du médicament le patient a-t-il éliminé au bout d'une demi heure ? d'une heure ?
3) Déterminer Q'(t) et dresser le tableau de variation de Q sur $[0 , +\infty[$
4) Montrer que la tangente T à la courbe (C) de la fonction Q dans le repère orthogonal au point d'abscisse 2, a un coefficient directeur approximativement égal à (-0,9).
5) Tracer T et (C).
6) Déterminer graphiquement, au bout de combien de temps la quantité de médicament dans le sang est inférieur à 0,5 cm^3.

APERÇU HISTORIQUE

C'est à partir des progressions numériques de **Stifel** (1487 - 1567) que **Neper** peut, après vingt ans de travail, inventer les logarithmes qui portent le nom de « logarithmes népériens » . Neper prend comme base la limite du nombre $\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n}$ quand n devient de plus en plus grand, c'est à dire quand n tend vers $+\infty$. Il trouve un nombre sensiblement égal à 2,718 … **Euler** (1707 - 1785) appelle ce nombre « le nombre de Neper » qu'il baptise « e ».

Ainsi, la fonction logarithme était née et c'est sa réciproque que l'on appelle désormais « la fonction exponentielle ».

Il est fréquent de traduire par : « croissance exponentielle » un phénomène qui croit rapidement ; la croissance logarithmique est, quant à elle, plus lente et progressive.

La plupart des réactions biologiques (exemple : écoulement des liquides dans l'organisme) suivent des variations logarithmiques ou exponentielles

Euler propose le célèbre π pour le nombre *Pi,* la lettre **i** pour une racine carrée de -1 et le fameux e base des logarithmes népériens.

Il établit à ce sujet, une formule liant ces trois nombres : $e^{i\pi}+1=0$ et une seconde mettant en relation la trigonométrie et l'analyse complexe : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Dans Institutiones calculi intégralis (1768/70), **Euler** développe également le calcul différentiel de Wilhelm Gottfried von **Leibniz** (1646 ; 1716) et la méthode des fluxions d'Isaac **Newton** (1642 ; 1727). Il prolonge les travaux de **Bernoulli** et met en place la notion d'équation aux dérivées partielles et le calcul des variations par la recherche des extrema sur les courbes.

En 1755, il publie Institutiones calculi differentialis, cum ejus usa in analysin infinitorum ac doctrinis serierum qui renferme ses recherches sur les séries.

Dans Vollständige Anleitung zur Algebra (Introduction complète à l'algèbre), publié en allemand en 1770, il présente ses travaux d'algèbre élémentaire et démontre des théorèmes fondamentaux.

En géométrie, il démontre une formule due à René Descartes (1596 ; 1650) et qui porte aujourd'hui son nom :

$$S - A + F = 2$$

où S, F et A désignent respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes d'un polyèdre convexe.

Partie 1

Chapitre 8

Calcul intégral

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{12x+6}{(x+2)^2}$.

a) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ on a : $f(x) = \dfrac{a}{(x+2)^2} + \dfrac{b}{x+2}$

b) En déduire la forme générale des fonctions primitives de f sur l'intervalle]-2,+∞[.

2) Déterminer les primitives de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ sur l'intervalle]-2,+∞[.

2 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner une primitive F de f sur I :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $I =]0,+\infty[$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $I =]-\infty,0[$

3) $f : x \mapsto 2e^{2x}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}+1$; $I = \mathbb{R}$

3 Soit la fonction $F : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

1) Prouver que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en zéro.

3) a) Trouver un encadrement de f(x) pour $x \in [0,1]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a : $1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$.

c) En déduire que $\forall x \in [0,1]$ on a : $0 \leq F(x) < \dfrac{1}{2}$.

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et c est une constante réelle arbitraire :

Fonction f (définie sur I)	**Primitive F de f** (définie sur I)
u' + v'	u + v + c
au' ; a réel.	au + c
u'v + v'u	u.v + c
$u'u^n$; $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ et $u(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$
$\dfrac{u'}{u^2}$; $(u(x) \neq 0 \quad \forall x \in I)$	$-\dfrac{1}{u}+c$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$; $(u(x) > 0 \quad \forall x \in I)$	$2\sqrt{u}+c$
$\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$; $v(x) \neq 0 \ \forall x \in I$	$\dfrac{u}{v}+c$
$(v' \circ u).u'$	$v \circ u + c$
$\dfrac{u'}{u}$; $(u(x) \neq 0 \quad \forall x \in I)$	$\ln\lvert u\rvert + c$
$u'e^u$	$e^u + c$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1) a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=-1+2\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

b) En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que F(0) = 0.

2) a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}$.

b) Retrouver les résultats de la question1).

5 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

b) Montrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = -3x + 7.

1) Tracer la droite Δ représentant f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

2) Pour $x\in\left[0,\dfrac{7}{3}\right]$, on désigne par M et N les points de Δ d'abscisses respectives 0 et x.

Soit B le point du plan de coordonnées (x,0) et distinct de l'origine O.

a) Calculer, en fonction de x, l'aire S (x) du trapèze OMNB.

b) On désigne par S' la fonction dérivée de la fonction S. Calculer S'(x) et comparer le résultat obtenu avec f(x).

3) Reprendre les questions a) et b) de la deuxième question pour x réel négatif.

COURS

Intégrale d'une fonction continue

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans la figure ci-contre, D est la droite d'équation $y = \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$ et a et b sont deux réels positifs tels que b > a.

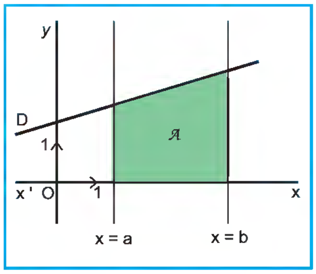
On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par :

D, (x'x) et les droites d'équations : x = a et x = b.

1) Calculer $\mathcal{A}$.

2) Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ = F (b) - F (a).



Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On désigne par F et G deux primitives de f sur I.

Soient a et b deux éléments de I. Montrer que G (b) - G (a) = F (b) - F (a).

Théorème et définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.

Le réel F(b) - F(a) ne dépend pas de la primitive choisie de f sur I. Ce réel s'appelle intégrale de a à b de f et se note $\int_a^b f(x)dx$. Ainsi ,

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Activité 3

1) a) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_1^e \frac{1}{x}dx$

b) Calculer I.

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 e^x\,dx \;;\; \int_2^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)dx \;;\; \int_1^5 \quad dx$$

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx \;;\; \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin y\,dy \;;\; \int_{-1}^{-2} \frac{2t^2+1}{t^2}\,dt$$

Retenons :

* Si f est une fonction continue sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe.

* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(s)\,ds = \ldots$

* $\int_a^b 1\,dt = b - a$; $\int_a^b x\,dt = x(b - a)$, (x réel).

3) Soit la fonction $f : x \mapsto \left|x^3\right| + 1$

a) Montrer que f est continue sur [-1, 1] .
b) Calculer les intégrales suivantes:

$\int_0^1 f(x)dx$; $\int_{-1}^0 f(x)dx$

Propriétés de l'intégrale

Activité 1

1) a) Calculer $\int_1^1 x^2dx$.

b) Calculer $\int_0^1 x^2dx$ et $\int_1^0 x^2dx$ et comparer les résultats obtenus.

c) Calculer $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ et $\int_{\pi}^0 \sin x\, dx$ et comparer les résultats obtenus.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.

a) Calculer $\int_a^a f(x)\, dx$.

b) Comparer les intégrales $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_b^a f(x)\, dx$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Alors on a : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Activité 2

1) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Sur quel ensemble f est-elle continue ? Prouver que la fonction $G : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$ est une primitive de f sur]0, +∞[.

b) Calculer alors, les réels $m = \int_1^4 g(x)dx + \int_4^9 g(x)dx$ et $n = \int_1^9 g(x)dx$ puis comparer m et n.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I.
Soient a, b et c trois éléments de I. Montrer, en utilisant F, qu'on a :

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b et c trois éléments de I alors on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Activité 3

Soit l'intégrale $I = \int_{-2}^{3} \left(|x+1| + |x-2|\right) dx$.

a) Ecrire sans valeur absolue l'expression $|x+1| + |x-2|$.
b) En déduire la valeur de I.

Si f est une fonction continue sur [a, b]
et c et d deux éléments de [a, b] alors on a :
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$.

Activité 4

1) Calculer $\int_0^1 3(x+1).e^{\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)} dx$.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et soient a et b deux éléments de I. Montrer, en utilisant F, que pour tout réel k on a :
$\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

3) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit F une primitive de f et G une primitive de g sur I. Soient a et b deux éléments de I.

Montrer, en utilisant F et G, que $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Soit k un nombre réel. Alors on a :

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(k_1 f(t) + k_2 g(t)\right) dt = k_1 . \int_a^b f(t)dt + k_2 . \int_a^b g(t)dt$, pour tous réels k_1 et k_2.

Activité 5

1) Calculer les intégrales

$\int_0^1\left(3t^2+2e^{2t}\right)dt$; $\int_0^{\pi}\left(2\sin t+\cos t+3\right)dt$; $\int_2^3\left(3t^2-\frac{2}{t^2}\right)dt$; $\int_1^e\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

2) Soit l'intégrale $I=\int_2^3\frac{dx}{x^2-1}$

a) Justifier l'existence de I.

b) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout réel x différent de -1 et 1

on a : $\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

c) Calculer alors, l'intégrale I.

3) Soit l'intégrale $J=\int_0^1\frac{2t-3}{2t+1}dt$

a) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout réel t différent de $-\frac{1}{2}$,

on a : $\frac{2t-3}{2t+1}=a+\frac{b}{2t+1}$

b) Calculer alors, l'intégrale J.

4) a) Montrer que $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

b) Calculer alors, l'intégrale $K=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 x\,dx$

Activité 6

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2+1$, $g : x \mapsto \sin 2x$ et $h : x \mapsto x^3$.

1) a) Etudier la parité de f et h.

b) Etudier la périodicité de g.

2) a) Calculer les intégrales $I=\int_{-2}^{2}f(t)dt$; $J=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}g(t)dt$ et $K=\int_{-a}^{a}h(t)dt$ $(a\in\mathbb{R})$.

b) Calculer $2\int_0^2 f(t)\,dt$ et comparer le résultat obtenu avec la valeur de I.

c) Calculer $\int_0^{\pi}g(t)\,dt$ et comparer le résultat obtenu avec la valeur de J.

1) Soit f une fonction continue sur [-a, a].

* Si f est paire sur [-a, a] alors on a : $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
* Si f est impaire sur [-a, a] alors on a : $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

2) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout réel a on a : $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$.

Activité 7

Calculer :

$I = \int_{-5}^{5} \left(x^3 + x\right)dx$; $J = \int_{-1}^{1} \left(t^4 + t^2 - 1\right)dt$; $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2t)\,dt$; $L = \int_{0}^{1004\pi} \left|\sin t\right| dt$.

Activité 8

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x - 1$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$ on a: $f(x) \geq 0$.

b) Calculer et préciser le signe du réel $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

2) a) Etudier les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - x$.

b) Comparer f(x) et g(x) dans $[0,1]$ et vérifier que $\int_{0}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{0}^{1} g(x)\,dx$.

Activité 9

1) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a, b] (a ≤ b) et soit F une primitive de f sur [a, b] .
Montrer que F est croissante sur [a, b] . En déduire que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] (a ≤ b). Montrer que :

Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq 0$.

3) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a, b] et telles que

$\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$.

a) Quel est le signe du réel $\int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\,dx$?

b) En déduire que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$.

Intégration et inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Activité 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] (a ≤ b).

a) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

b) En utilisant les inégalités : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$, montrer qu'on a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Activité 11

1) Soit x un réel positif.

a) Montrer que $\forall t \geq 0,\ e^t \geq 1$.

b) Montrer, en intégrant les deux membres de l'inégalité précédente dans $[0, x]$ qu'on a : $e^x \geq 1 + x$

2) Montrer que $\forall\, x \in [0,+\infty[$ on a : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ et retrouver alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

3) Soit x un réel positif.

a) Montrer que pour tout réel positif t on a : $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

b) En déduire qu'on a: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

c) Donner un encadrement de chacun des réels suivants : $\ln\dfrac{11}{10}$ et $\ln\dfrac{101}{100}$.

Inégalités de la moyenne - Théorème de la moyenne

Activité 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Montrer que s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a, b],\quad m \leq f(x) \leq M$

alors on a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$; m et M sont deux réels.

Si $\forall x \in [a,b],\quad m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. On rappelle que l'image de l'intervalle fermé $[a,b]$ par f est un intervalle fermé et on pose $[m, M] = f([a,b])$.

a) Montrer que $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

b) En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème de la moyenne

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$, alors il existe au moins un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Activité 3

1) a) Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur $[0,1]$. On note μ cette valeur

b) Résoudre, dans $[0,1]$, l'équation f(x)= μ

2) Soit la fonction $g : x \mapsto x^2$. Résoudre, dans $[-2,2]$, l'équation g(x) = λ ; où λ désigne la valeur moyenne de g sur $[-2,2]$.

Activité 4

La vitesse instantanée d'un mobile en mouvement rectiligne est donnée par $v(t) = 3(2 + t^2)$ où t est la variable temps, exprimée en secondes (s),et v(t) est exprimée en m/s.
On suppose qu'à t = 2 s l'abscisse x(t) = 80m et à t = 4 s l'abscisse x(t) =148 m.
Calculer, de deux façons, la vitesse moyenne du mobile dans l'intervalle de temps $[2,4]$.

Théorème d'intégration par parties

Activité 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux éléments de I.

a) Montrer que u'v = (uv)' - v'u.

b) En déduire que $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$

c) Calculer $\int_0^1 x\,e^x\,dx$ et $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$.

Théorème d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux éléments de I.

On a alors, $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$.

Vocabulaire : Cette formule s'appelle formule d'intégration par parties.

Activité 2

1) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales :

$$I=\int_1^e x\ln x\,dx \;;\; J=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\,e^{-x}\,dx \text{ et } K=\int_1^2 x^2\ln x\,dx.$$

2) En intégrant par parties deux fois successives, calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\ln 2} x^2e^x dx \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\,dt \;;\; \int_1^{e^2} x(\ln x)^2dx.$$

Activité 3

Pour tout réel strictement positif x, on pose $F(x)=\int_1^x t\ln t\,dt$.

1) Justifier l'existence de F(x) et calculer F (1).

2) En posant u'(t) = t et v(t) = ln t , dans la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculer F(x) en fonction de x.

3) a) Montrer alors, que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer F'(x).

b) En déduire le sens de variation de F sur $]0,+\infty[$.

Retenons :
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a pour tout x de I, F'(x) = f (x).
La fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exercice résolu

Soit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f '(x).

2) En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.

3) Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

Solution :

1) La fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout x de $]0,+\infty[$ $f'(x)=g(x)=\frac{e^x}{x}$.

2) On a $\forall x \in]0,+\infty[$ $e^x > 0$ et $x > 0$ d'où $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3) On a f(1) = 0 et comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ on en déduit que :
- pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) < f(1)$ donc $f(x) < 0$.
- pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f(x) > f(1)$ donc $f(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
f '(x)		+	
f (x)	↗ -	0	+ ↗

Calcul d'aires planes - Calcul des volumes de solides de révolution

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$.

1) Tracer la droite Δ représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$.

2) Soient A, E et F les points de Δ d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$; 1 et $-\frac{1}{2}$. On considère les points : B (1 , 0) ; C (0 , 1) et G $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

a) Calculer en cm² les aires A_1 du triangle ABE et A_2 du triangle AFG.

b) Calculer les intégrales $I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$.

c) On désigne par a l'aire du rectangle OBEC. Vérifier que $A_1 = I_1 . a$ et $A_2 = - I_2 . a$

Activité 2

Le graphique ci-dessous illustre une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les droites T_A ,T_B et T_N sont les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A, B et N d'ascisses respectives 0,1 et $\frac{1}{2}$ de cette courbe.

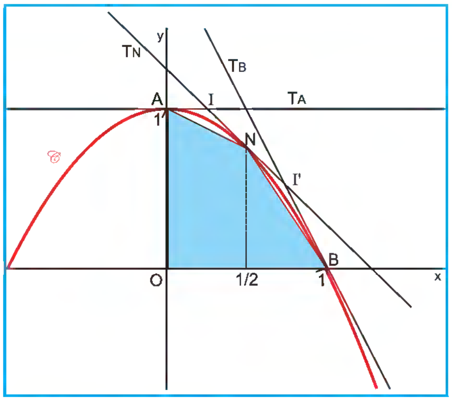
On note I le point d'intersection de T_A et T_N et I' le point d'intersection de T_B et T_N.

1) Calculer l'aire A_1 du polygone OANB.

2) Donner les équations des tangentes T_A, T_B et T_N.

3) a) Déterminer les coordonnées des points I et I'.
b) Déterminer l'aire A_2 du polygone OAI I'B . (On pourra décomposer ce polygone en deux trapèzes convenablement choisis).

4) a) En déduire un encadrement de l'aire A de la région du plan délimitée par la coube C et les axes du repère.
b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\,dt$ et vérifier que $A_1 \leq I \leq A_2$.
c) Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^1 f(t)\,dt$. Conjecturer sur l'interprétation graphique de J



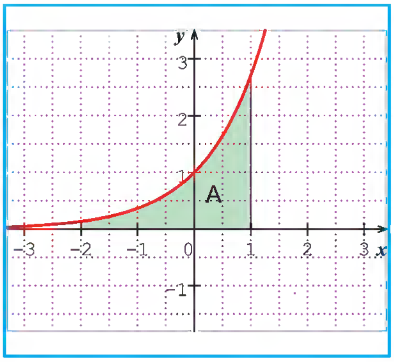
Interprétation géométrique de l'intégrale

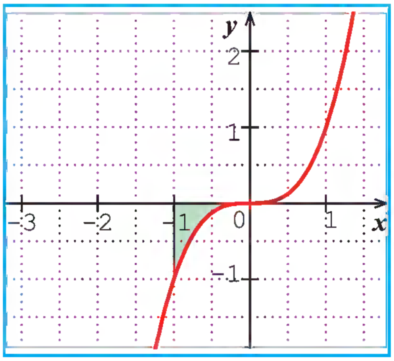
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire (u.a) est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$. Soit C la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et a et b deux réels tels que a < b.

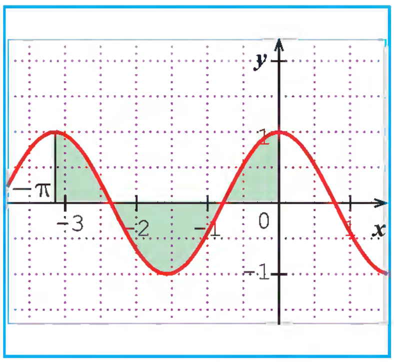
• Si f est continue sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ (u.a) est égal à l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b.

• Si f est continue sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b est le réel positif $\int_a^b (-f(x))\,dx$ (u.a).

• Plus généralement, si f est continue sur $[a,b]$ et ne garde pas un signe constant sur $[a,b]$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b est égale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (u.a).







$f(x) = e^x$

$A = \int_{-2}^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-2}^1$

$= e - e^{-2}$ (u.a)

$f(x) = x^3$

$A = \int_{-1}^0 -x^3\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0$

$= \frac{1}{4}$ (u.a)

$f(x) = \cos 2x$

$A = \int_{-\pi}^0 |\cos 2x|\,dx$

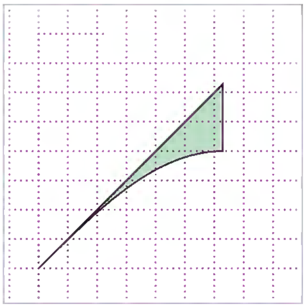
$= 2$ (u.a)

Activité 3

1) Calculer les intégrales suivantes et interpréter graphiquement chacune d'elles.

2) Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$ définie sur $[0, \pi]$
   a) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm.
   b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$, $x = \pi$.

Activité 4



Soit le graphique ci-contre, où P et Q

1) Déterminer l'aire du triangle OPQ
2) Calculer, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe d'équation $y = \sin x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x =$
3) a)En déduire l'aire A de la région du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x =$

   b) Comparer le résultat avec

Activité 5

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a et b deux éléments de I tels que a < b.

• Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a : $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations x = a et x = b est égale au nombre positif $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$ (u.a).

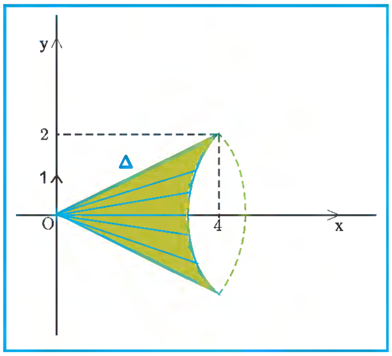
• Plus généralement, l'aire de la partie D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations x = a et x = b est égale à $\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$ (u.a).

Activité 6

Soient f et g les fonctions définies sur IR par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Construire ces courbes et étudier leur position relative.
2) Calculer l'aire de la région du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives : x = -2 et x = 2.

Activité 7



Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$. On désigne par Δ sa courbe représentative dans le repère R et par D la région du plan limitée par la droite Δ, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x = 4. On note S le cône de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe $(O,\vec{i})$.
   a) Calculer le volume V du cône S.
   b) Calculer l'intégrale $\int_0^4 \pi (f(t))^2\, dt$ et le comparer avec V.
2) Soit a et b deux réels tels que a < b et soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par g(x) = 2. Soit C_g la courbe représentative de g dans le repère R. On considère les points A(a, 0), B(a, 2), C(b,2) et D(b,0) et on désigne par S le solide engendré par la rotation du rectangle ABCD autour de l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$.
   a) Quelle est la nature du solide S ?
   b) Déterminer, le volume V de S en fonction de a et b.
   c) Calculer l'intégrale $\int_a^b \pi (g(t))^2\, dt$ et comparer le résultat obtenu avec V.

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a < b) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère la partie P du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b. Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses. Alors on a : $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (u.v) (unité de volume)

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
2) Calculer l'aire du domaine D du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.
3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses. (On rappelle que pour tout réel x on a: $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$)

Activité 9

Soit $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ où R est un nombre réel strictement positif donné et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que : $M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 = R^2,\ -R \le x \le R \text{ et } y \ge 0\right)$.
   b) Reconnaître alors $\mathscr{C}$.
   c) Tracer $\mathscr{C}$ (On choisira une valeur de R comprise entre 1 et 3).
2) Soit D le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -R et x = R. Soit V le volume de la boule engendrée par la révolution de D autour de l'axe $(O,\vec{i})$

   Montrer que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Activité 10

Soit $f(x) = \ln x$.

1) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) Calculer l'aire A de la portion P du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e.
3) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la portion P au tour de l'axe des abscisses.

RÉSUMÉ DU COURS

Intégrale d'une fonction continue :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de a à b de f le réel $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I

Propriétés de l'intégrale :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c sont des éléments de I. Alors on a :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles) .
- Pour tous réels k_1 et k_2 on a : $\int_a^b \left(k_1 f(t) + k_2 g(t)\right) dt = k_1 \int_a^b f(t)\,dt + k_2 \int_a^b g(t)\,dt$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- Si f est paire sur $[-a,a]$ alors on a: $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est impaire sur $[-a,a]$ alors on a : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.
- Si f est périodique de période T alors on a : $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

Inégalités de la moyenne - Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a < b) alors il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ et cette valeur moyenne est atteinte par f sur $[a,b]$, au moins une fois en c.

Théorème d'intégration par parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soit a et b deux éléments de I. On a :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx .$$

(c'est la formule d'intégration par parties).

Fonction définie à l'aide d'une intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a :

Pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$. La fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Application de l'intégrale au calcul d'aires planes :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité d'aire (u.a) est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

* Si f est continue sur $[a,b]$ et $a < b$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (u.a).

* Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit C_f et C_g les courbes représentativesde f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

l'aire $\mathscr{A}$ de la région D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale au nombre réel positif $\int_a^b |g(x)-f(x)|\,dx$ (u.a) .

Application de l'intégrale au calcul des volumes de solides de révolution :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$du plan.On considère la partie P du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

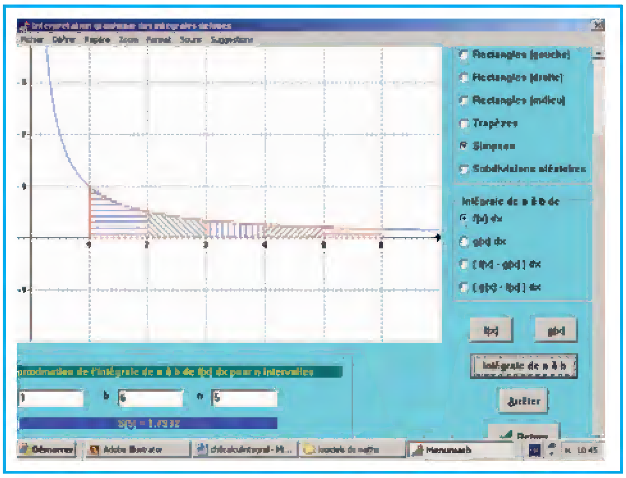
Le volume du solide engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses est $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (unité de volume).

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

1) On se propose de déterminer une approximation S(n) de l'intégrale $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ pour n subdivisions de $[1 , 6]$ par l'une des méthodes proposées par le logiciel Menumath ; (Ressources utiles sur Internet : www.edunet.tn ; www.evt.edunet.tn; http://www.clickteam.com ; http://thot.cursus.edu/rubrique.asp?no=11863)

- Utiliser le logiciel et choisir, dans Troisième niveau (1) la rubrique relative aux intégrales définies puis choisir interprétation graphique.
- Dans le menu Définir ; choisir définir f et écrire l'expression de f(x) = 1/x, et prendre a = 1 et b = 6
- Dans le menu Repère, prendre les précautions nécessaires pour obtenir une courbe représentative convenable de f : (par exemples : prendre $x_{min} = -3$; $x_{max} = 7$; $y_{min} = -2$; $y_{max} = 5$; etc.)
- Taper f(x) pour voir la courbe de f puis cocher, par exemple, Simpson pour la méthode d'approximation utilisée et taper intégrale de a à b puis lire S(n) pour n = 5.
- Calculer $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ .En déduire une valeur approchée de ln 6 . Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.
- Donner, d'autres valeurs pour n et lire, chaque fois S(n).
- Reprendre le travail précédent avec les autres méthodes (Rectangles, Trapèzes, etc.)



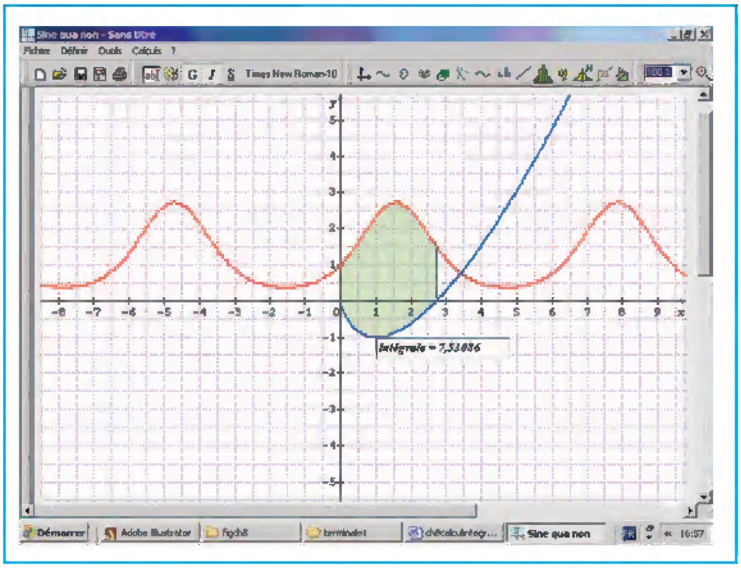
2) Utiliser le logiciel Menumath pour déterminer des approximations des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \ln(t+1)\,dt;\;\; J = \int_{-2}^{5} \sqrt{t^2+1}\,dt;\;\; K = \int_{-1}^{3} t^2\cos(t+1)\,dt.$$

Activité 2

CALCUL D'UNE INTÉGRALE AVEC UN LOGICIEL

1) Utilisation du Logiciel Sine qua non :
(Ressources sur Internet: http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm)
Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :
$f(x) = e^{\sin(x)}$ et $g(x)=x \ln x - x$. Utiliser le logiciel Sine qua non pour :
• Afficher les axes du repère orthonormé et utiliser le menu Définir (ou bien l'icône correspondante) pour écrire les expressions exp(sin(x)) de f(x) et x*ln(x)-x de g(x).
• Choisir des couleurs différentes pour les courbes de f et g et valider avec OK. Ainsi, les courbes représentatives de f et g vont apparaître sur l'écran.
• Choisir l'icône correspondante au calcul d'intégrales et calculer l'aire A de la région du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations respectives x = 0 et x = e.



2) Utilisation du Logiciel Dérive : pour calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} x^3 \ln(1+x^2)dx$

• Ouvrir le logiciel Dérive et taper l'expression suivante : $x \wedge 3 * \ln(1+x \wedge 2)$ puis valider par entrée : l'expression $x^3.\ln(1+x^2)$ va apparaître sur l'écran . Après, cliquer sur la raccourcie $\int f$ et cocher **intégral définit** puis écrire les bornes -1 et 2 et taper **simplify**.
• Il va apparaître sur l'écran les étapes du calcul et la valeur de l'intégrale I : c'est à-dire on trouve $I = \frac{15}{4}\ln 5 - \frac{9}{8}$.

Utiliser le logiciel Dérive pour calculer les intégrales

$$I = \int_{0} t^2 \sin t dt;\ J = \int_{-2}^{5} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt;\ K = \int_{1}^{3} t^2 \ln t dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^1 (2x+1)dx \; ; \; \int_1^2 (x^2-2x+3)dx$$

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx \; ; \; \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx \; ; \; \int_0^2 (1-|x-1|)dx \; ;$$

$$\int_2^3 \frac{1}{3x+2}dx \; ; \; \int_0^1 e^{2x}dx \; ; \; \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \; ; \; \int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

2 On considère les fonctions numériques suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{3x-5}{2x-1}; \; g : x \mapsto \frac{x^2+2x-5}{x+4}$$

$$\text{et} \quad h : x \mapsto \frac{e^x-2}{e^x+1}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que

$f(x) = a + \dfrac{b}{2x-1}$ puis calculer $\int_1^2 f(x)dx$

2) Déterminer les réels a, b et c tels que

$g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+4}$ puis calculer $\int_{-3}^0 g(x)dx$

3)Déterminer les réels a et b tels que

$h(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x+1}$ puis calculer $\int_0^1 h(x)dx$

3 1) Montrer que pour tout x différent de -1 on a :

$\dfrac{x^2+2x}{x+1} = x+1-\dfrac{1}{x+1}$ puis calculer $\int_0^1 \dfrac{x^2+2x}{x+1}dx$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 (t+1)\ln(t+1)dt$$

4 On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel strictement positif x on a :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

2) Soit $\alpha \in]1,+\infty[$

a) Calculer $\int_1^\alpha f(t)dt$

b) Calculer $A(\alpha) = \int_1^\alpha \dfrac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

c) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

5 Calculer par intégration par parties :

$$\int_0^1 xe^x dx \; ; \; \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx \; ; \; \int_1^x \ln t dt ;$$

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx \; ; \; \int_1^e x(\ln x)^2 dx$$

6 On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cos x)^2 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$$

1) Calculer $I+J$

2) Calculer $I-J$ en utilisant une intégration par parties.

3) En déduire les valeurs de I et J.

7 Vérifier que pour tout réel non nul x on a :

$$\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$$

2) a) Calculer l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{e^t}{e^t-1}dt$

b) Calculer alors, l'intégrale

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t-1}dt$$

3) Soit l'intégrale $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t - 1} dt$

Calculer $K - I$, en déduire la valeur de K.

8 Soit $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que pour tout réel x on a : g(x) > 0.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = xe^{-x} + x$

On désigne par C la courbe représentative f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$du plan.

1) a) Montrer que f est dérivable sur$\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, f '(x) = g(x).
b) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à C au voisinage de$+\infty$.
b) Etudier la position de C par rapport à D.
c) Donner une équation de la tangente T à C en son point d'abscisse 1.
d) Tracer T, D et C.
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par l'aire de la partie du plan limitée par C, D et les droites d'équations x = 0 et x = α.
Calculer $A(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.
4) Pour x < 1, on pose $h(x) = \ln(g(x) - 1)$.
a) Vérifier que $h(x) = -x + \ln(1-x)$.
Et que $\frac{-x}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x}$.
b) Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{0} \ln(1-t)dt$.
c) En déduire l'intégrale $J = \int_{-1}^{0} h(t)dt$.

9 Soit $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$; (x > 0) .

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
2) Calculer l'aire A de la région du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e

10 Soit f la fonction définie dans $[0,+\infty[$par :

$f(x) = x\ln(x+2)$ On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$du plan.(unité graphique : 3 cm).

1) Dresser le tableau de variation de f .
2) Soit la droite Δ : y = x ; étudier la position relative de C par rapport à Δ puis tracer Δ et C .
3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition et construire, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C 'de f^{-1}.
b) Vérifier que pour x distinct de -2 on a :
$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$
c) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{e-2} f(t)dt$
d) Calculer, en cm² l'aire A de la région du plan comprise entre les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

11 (Intensité et quantité d'électricité)

Pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$; $t_1 \le t_2$ un courant continu d'intensité I transporte la quantité d'électricité $Q = I.(t_2 - t_1)$. Lorsque l'intensité est une fonction I (t) du temps t alors la quantité d'électricité transportée dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$est$Q = \int_{t_1}^{t_2} |I(t)| dt$.Soit un courant alternatif d'intensité maximale I_m de pulsation ω, de phase φ tel que :

$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

Calculer la quantité d'électricité transportée à chaque demi-période et la valeur moyenne de l'intensité correspondante.

12 (Puissance et Énergie)

Pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$; $t_1 \le t_2$ un courant continu d'intensité I fournit, dans une portion de circuit ayant à ses bornes une différence de potentiel U, une énergie :
$W = U.I.(t_2 - t_1)$. Lorsque I et U sont des fonctions du temps, t, alors :

$W = \int_{t_1}^{t_2} U(t).I(t)dt$

Soit un courant alternatif d'intensité
$I(t) = I_m \cos(\omega t)$ dans une résistance R.
La différence de potentiel aux bornes de la résistance est alors :

$$U(t) = R.I(t) = U_m \cos(\omega t)$$

Calculer l'énergie fournie pendant une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

13 Soit $f(x) = \sin^2 x ; \ x \in [0,\pi]$.

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
2) Linéariser $\sin^2 x$ et $\sin^4 x$.
3) Calculer l'aire A de la portion D du plan formée des points M (x, y) tels que:
$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$
4) Calculer le volume du solide obtenu par rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.

14 Soit $f(x) = 1 + 2\cos^2 x ; \ x \in [0,\pi]$

1) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
2) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
3) On désigne par D le domaine du plan limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.
a) Calculer l'aire A du domaine D.
b) Calculer le volume du solide de révolution engendrée par la rotation de D autour de l'axe (O,i).

15 A- Soit k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) a) Déterminer les limites de k en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudier le sens de variation de k puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que l'équation k(x) = 0 admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1,+\infty[$ qui sera notée α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3) En déduire le signe de k(x) sur $\mathbb{R}$.

B-Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1};$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan sont notées C_f et C_g ; (unité graphique : 2cm)
1) Démontrer que les deux courbes passent par le point A (0 ;1) et admettant en ce point la même tangente.
2) a) Démontrer que pour tout réel x on a :
$f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)k(x)}{x^2+x+1}$ où k est la fonction étudiée dans la partie A- .
b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.
3) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$ est une primitive de la fonction $f - g$.
b) Calculer l'aire A de la partie du plan limité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

16 I- Soit g la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = (1-x)e^{-x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2) a) Dresser le tableau de variation de g.
b) En déduire que pour tout $x \ge 0$ on a: $g(x) \le 1$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x.\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ x.(2 - e^{-x}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite puis à gauche en 0.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

3) a) Montrer que pour tout x > 0 on a :

$f'(x) = 2 - g(x)$,

en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x < 0.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right)$, en déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne.

b) Montrer que (C) admet une branche parabolique dont on donnera la direction.

5) a) Calculer f (-1) puis tracer la courbe (C).

b) Tracer, dans le même repère que (C), la courbe (C') symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

III- Soit $\alpha \in]-1,0[$ et soit $A(\alpha)$ l'aire, en cm², de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = -1$.

1) Calculer $\int_1^{\alpha} f(t)dt$ (effectuer une intégration par parties).

2) En déduire, l'aire $A(\alpha)$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} A(\alpha)$.

b) Interpréter graphiquement la valeur de cette limite

17 I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x) > 0$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par:

$f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1) a- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que C admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation cartésienne.

b- Etudier la position relative de C et Δ .

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, on considère les points M(x, f(x)) et N (x, x + 2).

a- Vérifier que la distance MN est égale à $\dfrac{\ln x}{x}$.

b- Pour quelle valeur x_0 de x la distance MN est-elle maximale ?

c- Montrer que la tangente T à au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ .

4) Tracer Δ , T et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) a- Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations respectives :

$y = x + 2,\ x = 1$ et $x = e$

b- Soit α un réel strictement supérieur à e. Déterminer α pour que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et les droites d'équations respectives :

$y = x + 2,\ x = e$ et $x = \alpha$ soit égale à A.

(D'après bac tunisien 2003)

APERÇU HISTORIQUE

Leibniz

Henri Léon Lebesgue
(1875 - 1941)

Dans « Nouveaux essais sur l'entendement humain » (1705), Leibniz présente une classification des nombres. Il distingue ainsi l'entier, le rompu (nombre rationnel), le sourd (nombre irrationnel) et le transcendant. Le terme de « rompu » est issu de la traduction du mot « kasr » utilisé par les mathématiciens arabes et signifiant « brisé ».

C'est dans ce journal qu'il publie, en 1684, la plus importante et la plus controversée de ses découvertes, celle du calcul différentiel et intégral.

Ses premiers travaux sur les séries infinies le mènent de fil en aiguille à prolonger les découvertes passées du calcul infinitésimal (calcul dans l'infiniment petit) à partir de la géométrie des courbes, en particulier de leurs tangentes.

Leibniz n'obtient pourtant pas la paternité du calcul différentiel et intégral car au même moment, le très célèbre mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac Newton (1642 ; 1727) établie la même découverte.

Henri Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée originalement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902.
Élève brillant dès l'école élémentaire, Lebesgue étudia plus tard à l'École normale supérieure. Il a enseigné au lycée de Nancy et à Rennes. Il se fera alors connaître par sa théorie de la mesure, laquelle prolonge les premiers travaux importants d'Émile Borel, l'un de ses professeurs et plus tard son ami.
Il mit au point une théorie des fonctions mesurables (1901) en se basant sur les résultats d'Émile Borel : les tribus boréliennes.
Lebesgue a révolutionné et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration (1902-1904) est extrêmement commode d'emploi, et répond aux besoins des physiciens. En effet, elle permet de rechercher et de prouver l'existence de primitives pour des fonctions « irrégulières » et recouvre différentes théories antérieures qui en sont des cas particuliers :

* fonctions en escalier et fonctions continues de Riemann
* fonctions bornées de Darboux
* fonctions à variation bornée de Stieltjes

Il a également été professeur à la Sorbonne, puis au collège de France. Il sera élu à l'Académie des sciences en 1922.

Partie 1

Chapitre 9

Suites réelles

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

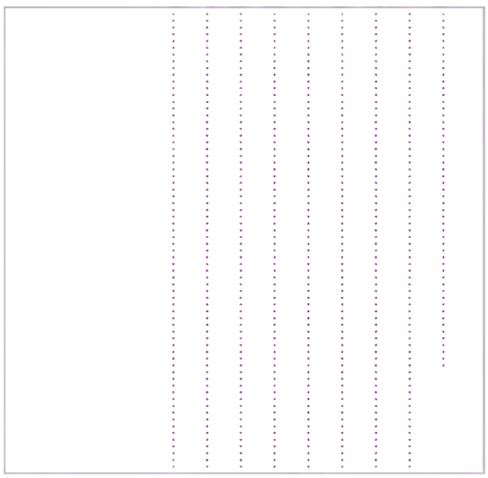
1 On considère un entier naturel non nul N. Si N est pair, on le divise par 2, sinon on le multiplie par 3 et on lui ajoute 1. En appliquant la même loi à chaque nombre ainsi formé, on obtient une suite de nombres entiers et on convient de s'arrêter, dès que le nombre 1 apparaît dans la suite.
1) Déterminer tous les termes de la suite engendrée par l'entier N = 20.
2) Déterminer tous les termes de la suite engendrée par l'entier N = 19.

2 Un couple de lapins engendre chaque mois, à partir du deuxième mois de son existence, un nouveau couple et les nouveaux couples se reproduisent suivant la même loi.
1) Vérifier que les nombres de couples engendrés par le couple né à la date 0 et ses descendants sont à chaque “mois anniversaire” 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … et forment la suite (v_n) de **Fibonacci** définie sur $\mathbb{N}$ par la formule de récurrence :
$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_0 = v_1 = 1$.
2) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
a) Vérifier qu'on a : $u_0=1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par recurrence, que $\mathbb{N}$
3) On a représenté dans la figure ci-contre la droite $\Delta : y = x$ et une partie de la courbe C de la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
a) A l'aide d'une lecture graphique conjecturer sur l'intersection de C avec la droite Δ.
b) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = x$.

Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, P(n) est une propriété dépendant d'un entier naturel .
Lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois :
- $P(n_0)$ est vraie.
- Pour $n \geq n_0$ si P(n)est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

Alors la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.



3 Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n} \ ; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
Que peut-on conjecturer sur (u_n)?
2) Démontrer ce résultat par récurrence.

4 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 1} \ ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$.
2) Soit la suite réelle (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Exprimer v_n à l'aide de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
c) Calculer la somme :
$S(n) = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S(n)$.
d) Déterminer l'expression de u_n à l'aide de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \ ; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.
2) On considère la suite (v_n) définie

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

$\begin{pmatrix} (u_n) \text{ est} \\ \text{constante} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = u_n)$.

Soit (u_n) une suite réelle de premier terme u_0.
(u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q\, u_n$.
Le réel q est la raison de la suite (u_n) et on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$;

1) $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$$= \begin{cases} u_0 \left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)\, u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

2)

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 < 0 \\ u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

(u_n) n'admet pas de limite si $q \leq -1$.

Soit (u_n) une suite réelle de premier terme u_0.
(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est la raison de la suite et on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n\, r$.

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (1+n)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } r = 0 \\ +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$.

sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer v_n à l'aide de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c) En déduire u_n à l'aide de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} v_k$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Notation :

$\sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$\sum\limits_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ pour $p \leq n$

COURS

Sens de variation d'une suite réelle

Activité 1

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2n + 5$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

a) Etudier le sens de variation de f.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} \geq u_n$.

Activité 2

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$.

a) Calculer $u_{n+1} - u_n$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} \leq u_n$.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur l'ensemble $K = \{ n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0 \}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.
On dit que :

- (u_n) est croissante (resp. strictement croissante) sur K si et seulement si $\forall\, n \in K$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$) .
- (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) sur K si et seulement si $\forall\, n \in K$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) .
- (u_n) est constante sur K si et seulement si $\forall\, n \in K$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est monotone sur K si elle est croissante ou décroissante sur K.
- (u_n) est stationnaire sur K s'il existe un entier p de K tel que $\forall\, n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Activité 3

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + E\left(\dfrac{2}{n}\right)$ où E désigne la fonction partie entière.
Montrer que (u_n) est une suite stationnaire.

2) Soit la suite réelle (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = (-1)^n$.

a) Quel est l'ensemble des valeurs de t_n ?

b) La suite (t_n) est-elle monotone ?

La suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = (-1)^n$ est une suite alternée.

Activité 4

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

a) Calculer $u_{n+1} - u_n$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Activité 5

Soit (a_n) la suite réelle définie par $\begin{cases} a_0 = 16 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \ ; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer les termes a_1, a_2 et a_3.

2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

Activité 6

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

2) En déduire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Techniques d'étude de la monotonie d'une suite

Pour étudier la monotonie d'une suite réelle (u_n) on peut utiliser l'une des techniques suivantes :

- Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- Utiliser un raisonnement par récurrence ;
- Comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, dans le cas où tous les termes de (u_n) sont non nuls et de même signe. Par exemple, pour une suite (u_n) à termes strictement positifs :
  - Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors (u_n) est croissante.
  - Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors (u_n) est décroissante.

Exercice résolu :

Etudier la monotonie de chacune des suites numériques suivantes :

a) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n^2}{3^n}$.

b) (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

c) (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = e^{-n}$.

Solution :

a) $v_n = \frac{n^2}{3^n}$, $v_0 = 0$; $v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{4}{9}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} - \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}}(n^2 + 2n + 1 - 3n^2) = \frac{1}{3^{n+1}}(-2n^2 + 2n + 1) < 0 \ \forall n \geq 2$$

(Le trinôme $-2n^2 + 2n + 1$ est de signe de a=-2, à l'extérieur de ses racines).

Donc (v_n) est une suite strictement décroissante sur l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} \, ; \, n \geq 2\}$.

b) On a $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Donc (w_n) est strictement croissante sur .

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $t_n > 0$ et $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$ alors (t_n) est strictement

décroissante.

Autrement :

La fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) = -e^{-x} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $(t_n) = (f(n))$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Activité 1

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$.

Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$.

En utilisant la question précédente, montrer que : $\forall \, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{5} \leq u_n \leq 2$.

Définition

Soit n_0 un entier naturel donné et (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble
$K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$. On dit que

- (u_n) est majorée sur K lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in K, u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée sur K lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in K, u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée sur K lorsqu'il existe des réels m et M tel que $\forall\, n \in K$, $m \leq u_n \leq M$.

Activité 2

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n + \cos n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq 2$.
b) En déduire que (u_n) est une suite bornée.

Théorème admis

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble $K=\{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) est bornée sur K si et seulement si il existe un réel M tel que $\forall\, n \in K, |u_n| \leq M$.

Activité 3

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \;;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 7.

Limite d'une suite réelle

Activité 1

Pour chacune des suites réelles suivantes, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

a) $u_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$ b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ c) $u_n = 2n^2 - 1$

d) $u_n = \dfrac{-3n^2+2}{n+5}$ e) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ f) $u_n = n\,e^{-n}$.

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

- (u_n) est dite convergente si et seulement si il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Dans ce cas on dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
- (u_n) est dite divergente lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou (u_n) na pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$, et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité2

1) Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite (u_n) et comparer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$ lorsqu'elles existent.

a) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$; b) $u_n = 2^n$; c) $u_n = \frac{2n-1}{e^{2n}}$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

a) Montrer que (v_n) est convergente et préciser sa limite.

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 1$.

Des limites de référence

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$.

Propriétés

- Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$.
- Si une suite (u_n) converge, alors elle est bornée.

Opérations sur les limites de suites

Activité1

1) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2e^n+1}{e^n+5}$.

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Soit la suite réelle (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \cos\left(\dfrac{-}{n}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3) On considère la suite réelle (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$.

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4) Soit la suite réelle (b_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $b_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Opérations sur les limites des suites réelles

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
$a\in\mathbb{R}$	$b\in\mathbb{R}$	$a+b$	$a\times b$	$\dfrac{a}{b}$ si $b\neq 0$
0	0	0	0	F.I
$a\in\mathbb{R}$	0^+	a	0	$+\infty\times\text{signe}(a)$ si $a\neq 0$
$+\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty\times\text{signe}(b)$ si $b\neq 0$	$+\infty\times\text{signe}(b)$ si $b\neq 0$
$+\infty$	0^-	$+\infty$	F.I	$-\infty$
$+\infty$	0^+	$+\infty$	F.I	$+\infty$
$-\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty\times\text{signe}(b)$ si $b\neq 0$	$-\infty\times\text{signe}(b)$ si $b\neq 0$
$-\infty$	0^-	$-\infty$	F.I	$+\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$	F.I	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$+\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	F.I
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I
$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty\times\text{signe}(a)$ (F.I si $a=0$)	0
$a\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty\times\text{signe}(a)$ (F.I si $a=0$)	0

F.I désigne une forme indéterminée, pour laquelle une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

Exercice résolu :

Dans chacun des cas suivant calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

a) $u_n = \cos(2n\pi)$; b) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{-n^2 + 3}$; c) $u_n = n^2\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Solution :

a) On a $u_n = \cos(2n\pi) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b) On a : $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{-n^2 + 3} = f(n)$; $\left(f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{-x^2 + 3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{-x^2} = -2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$

c) On a $u_n = n^2\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}$ et en appliquant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Activité2

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 ; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$.

b) Montrer par récurrence que (u_n) est une suite décroissante.

2) Montrer que (u_n) est minorée par 2.

3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. En déduire que (u_n) est convergente.

4) Soit la suite réelle (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2^n}$.

a) Montrer que (w_n) est une suite croissante .

b) Montrer que $w_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$ et qu'on a alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Théorème admis

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 3

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

2) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 2 cm).

a) Etudier les variations de f et tracer (C).

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$. En déduire les points d'intersection de (C) et de la droite $\Delta : y = x$.

c) Représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n).

d) Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c) Montrer alors,que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Activité 4

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Soit la suite réelle (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{u_n + 2} - \sqrt{u_n + 1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) Soit la suite réelle (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_n = 2^n$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b) Soit la suite réelle (y_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $y_n = \dfrac{2^{n+1} - 15}{2^n + 1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Théorème admis

Soit f une fonction définie sur D et (u_n) une suite numérique définie sur $I=\{n\in\mathbb{N}\,;\,n\geq n_0\}$ où $n_0\in\mathbb{N}$ telle que $\forall\, n\in I$, $u_n\in D$. Soit $\ell\in D$.

- Si (u_n) est telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ et converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors $f(\ell)=\ell$.
- Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors la suite (v_n) définie sur I par $v_n=f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ alors la suite (v_n) définie par $v_n=f(u_n)$ converge vers ℓ.

Exercice résolu :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

b) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution :

a) $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$; $u_0=3$; $u_1=2$; $u_2=\sqrt{3}$. Utilisons un raisonnement par récurrence pour montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. On a $u_1-u_0=-1<0$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_{p+1}-u_p<0$ et montrons que $u_{p+2}-u_{p+1}<0$?

On a : $u_{p+2}-u_{p+1}=\sqrt{1+u_{p+1}}-\sqrt{1+u_p}=\dfrac{u_{p+1}-u_p}{\sqrt{1+u_{p+1}}+\sqrt{1+u_p}}<0$.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n<0$ et (u_n) est une suite strictement décroissante.

b) On a : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\sqrt{x+1}$. On a montré que (u_n) est une suite strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. En plus elle est minorée par zéro (tous ses termes sont positifs), donc (u_n) est une suite convergente vers un réel $\ell\geq 0$ tel que $f(\ell)=\ell$. $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell=\sqrt{1+\ell} \Leftrightarrow \ell^2=1+\ell$. La racine positive de cette dernière équation est $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui représente la limite de (u_n).

Activité 5

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=(u_n)^2+\dfrac{3}{16};\forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

2) Montrer que (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est convergente.

4) Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

a) Résoudre, dans $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, l'équation $x^2 + \frac{3}{16} = x$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Théorèmes de comparaison

Activité1

1) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos n - 3n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 - 3n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 3n)$. Que peut-on dire sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

2) On considère la suite réelle (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^n + 2 \sin n$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,$v_n \geq e^n - 2$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^n - 2)$.

Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$?

Théorème

(u_n) et (v_n) sont deux suites réelles définies sur $K = \{n \in \mathbb{N} \; ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un entier p tel que $\forall\, n \geq p$, $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$..

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

Théorème

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles définies sur $K = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un entier p tel que $\forall\, n \geq p,\ v_n \leq u_n \leq w_n$.
Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ alors (u_n) converge aussi vers ℓ.

En particulier : s'il existe un entier p tel que $\forall\, n \geq p,\ |u_n| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Activité3

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \dfrac{3n+\cos n}{2n}$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3n-1}{2n} \leq t_n \leq \dfrac{3n+1}{2n}$.

2) En déduire que (t_n) est convergente et préciser sa limite.

Activité4

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3. (On exprimera les résultats sous forme irréductible).

b) Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) aux quatre premiers termes de la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n$.

2) Soit la suite réelle (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b) Soit $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ pour n entier non nul.
Exprimer la somme S_n à l'aide de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Activité5

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Vérifier que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) En déduire la valeur de u_0.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

b) En déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que $\forall \in [0,1]$ on a: $1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) Déterminer alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité6

1)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c)Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}9 < \alpha < 1$.

c) Etudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de la courbe C et la droite $\Delta : y = x$.

d) Tracer C et Δ.

3) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) et conclure.

c) Sachant que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$.

d) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \left|\dfrac{1}{2} - \alpha\right|$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice résolu :

Soit la suite réelle (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{n.t}}{1+e^t}\,dt$.

1) Calculer I_1.

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.

b) En déduire que (I_n) est convergente.

3) a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ I_n \leq \frac{1}{n}(1-e^{-n})$.

b) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Solution :

On a $I_n = \int_{-1}^{0}\frac{e^{n.t}}{1+e^t}dt$.

1) $I_1 = \int_{-1}^{0}\frac{e^t}{1+e^t}\ dt = \left[\ln(1+e^t)\right]_{-1}^{0} = \ln2 - \ln(1+e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

2) a) La fonction f définie par $f(t) = \frac{e^{n.t}}{1+e^t}$ est continue et positive sur $[-1,0]$ donc $I_n \geq 0$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{0}\frac{e^{(n+1).t}}{1+e^t}dt - \int_{-1}^{0}\frac{e^{n.t}}{1+e^t}dt = \int_{-1}^{0}\left[\frac{e^{(n+1).t}}{1+e^t} - \frac{e^{n.t}}{1+e^t}\right]dt = \int_{-1}^{0}\frac{e^{n.t}}{1+e^t}(e^t-1)\,dt.$$

On a $\forall\ t\in[-1,0], e^t - 1\ \leq 0$ $\left(\text{car}\ \forall\ t\in\left]-\infty,0\right], e^t\leq 1\right)$ donc $\forall t\in[-1,0]$,

$\frac{e^{nt}}{1+e^t}(e^t-1)\leq 0$ par conséquent $\int_{-1}^{0}\frac{e^{n.t}}{1+e^t}(e^t-1)\,dt \leq 0$. C'est-à-dire $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et positive.

b) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

3) a) On a : $\forall\ t\in\ [-1,0],\ e^{-1}\leq\ e^t\leq 1\ \Leftrightarrow\ 1+e^{-1}< e^t+1\leq 2\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1}{e^t+1}\leq\frac{1}{e^{-1}+1}\leq 1$.

Donc $\forall\ t\in\ [-1,0]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{e^{nt}}{2}\leq\frac{e^{nt}}{e^t+1}\leq e^{nt}$. Par conséquent,

$I_n = \int_{-1}^{0}\frac{e^{n.t}}{1+e^t}dt \leq \int_{-1}^{0}e^{n.t}\,dt$ ou encore $I_n \leq\left[\frac{1}{n}e^{n.t}\right]_{-1}^{0} \Leftrightarrow I_n\leq\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n}e^{-n}$

$\Leftrightarrow I_n \leq\frac{1}{n}(1-e^{-n})$.

b) On a : $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}(1-e^{-n})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(1-e^{-n}) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

RÉSUMÉ DU COURS

Sens de variation d'une suite numérique :

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

On dit que :

- La suite (u_n) est croissante (resp. strictement croissante) sur K si et seulement si $\forall n \in K,\ u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$) .
- La suite (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) sur K si et seulement si $\forall n \in K,\ u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) .
- La suite (u_n) est constante sur K si et seulement si $\forall n \in K,\ u_{n+1} = u_n$.
- La suite (u_n) est monotone sur K si elle est croissante ou décroissante sur K.
- La suite (u_n) est stationnaire sur K s'il existe un entier p de K tel que .
  $\forall n \in K$ et $n \geq p,\ u_n = u_{n+1}$

Techniques d'étude de la monotonie d'une suite :

Pour étudier la monotonie d'une suite numérique (u_n) on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- Utiliser un raisonnement par récurrence ;
- Comparer le rapport $\underline{u_{n+1}}$ à 1, dans le cas où tous les termes de sont non nuls et de même signe.u_n

Suite minorée, suite majorée, suite bornée :

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ .On dit que :

- La suite (u_n) est majorée sur K lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n \in K,\ u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée sur K lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in K,\ u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée sur K lorsqu'il existe des réels m et M tels que

  $\forall n \in K,\ m \leq u_n \leq M$.

Limite d'une suite :

* Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur l'ensemble $\{n \in \quad ; n \geq n_0\}$ où .

La suite est dite convergente si et seulement si il existe un réel tel que

.

Dans ce cas on dit que la suite converge vers

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.
• Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit f une fonction définie sur D et (u_n) une suite numérique définie sur $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, telle que $\forall n \in K$, $u_n \in D$. Soit $\in D$.

• Si (u_n) est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers et f est continue en alors $f(\ell) = \ell$.

• Si (u_n) converge vers et f est continue en alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(\ )$.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers .

Théorèmes de comparaison :

* Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$

On suppose qu'il existe un entier p tel que $\forall n \geq p,\ u_n \leq v_n$.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

* Soient (u_n) ; (v_n) et (w_n) trois suites réelles définies sur $K = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe un entier p tel que $\forall n \geq p,\ v_n \leq u_n \leq w_n$.

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers le même réel alors (u_n) converge aussi vers .

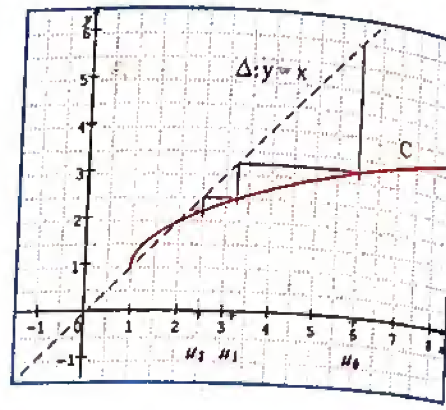
En particulier : s'il existe un entier p tel que $n \geq p$, $|u_n| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Représentation graphique d'une suite réelle :

Pour représenter les termes de la suite : $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 6$ sur l'axe des abscisses où $f(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$



- Tracer la courbe représentative de f ainsi que la droite $\Delta : y = x$
- Placer le premier terme de u_0 sur l'axe des abscisses et construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- Utiliser la droite Δ pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses et réitérer le procédé afin d'obtenir les termes u_2, u_3, u_4 etc.

Il y'a des logiciels permettant de faire le travail décrit précédemment. Parmi eux, on cite le logiciel **Sine qua non:**

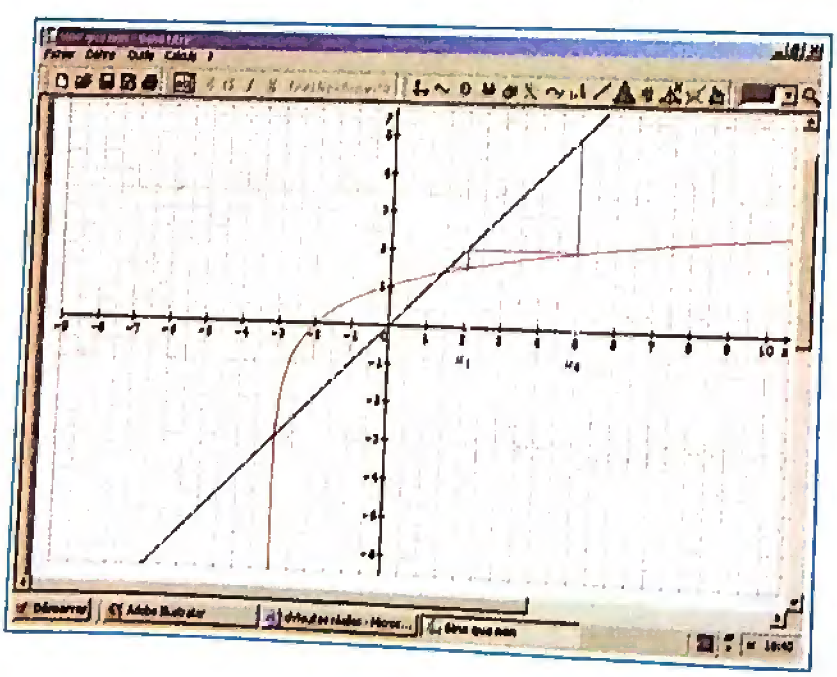
(Ressource sur Internet : http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm)

Utilisons, ce logiciel pour représenter graphiquement la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \end{cases}$$

.Pour cela,

- Ouvrir la fenêtre Suites réelles du logiciel (en tapant sur l'icône correspondante).
- Ecrire l'expression $\ln(x+3)$ de f (x), puis donner la valeur 5 pour u_0 et cocher, successivement sur les points correspondant à $u_n = f(u_{n-1})$; le format de la courbe, le format de la suite, etc. Enfin valider OK pour obtenir la représentation graphique suivante :



Activité 2

Etude de la convergence d'une suite récurrente :

Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

1) Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :

- Placer n dans A_1 ; u (n) dans B_1 et u(n+1) dans C_1.
- Placer 0 dans A_2 et écrire 1 dans B2 puis la formule = 1+ 1/ B_2 dans C_2.
- Ecrire la formule = C_2 dans B_3 et la formule = 1 + 1/ B_3 dans C_3 ;
- Sélectionner, simultanément, les deux cellules B_3 et C_3 puis étendre le « + » qui apparaît en bas du coin droit de C_3 jusqu'à la ligne 25. Ainsi, on voit apparaître les valeurs des termes successifs de la suite .

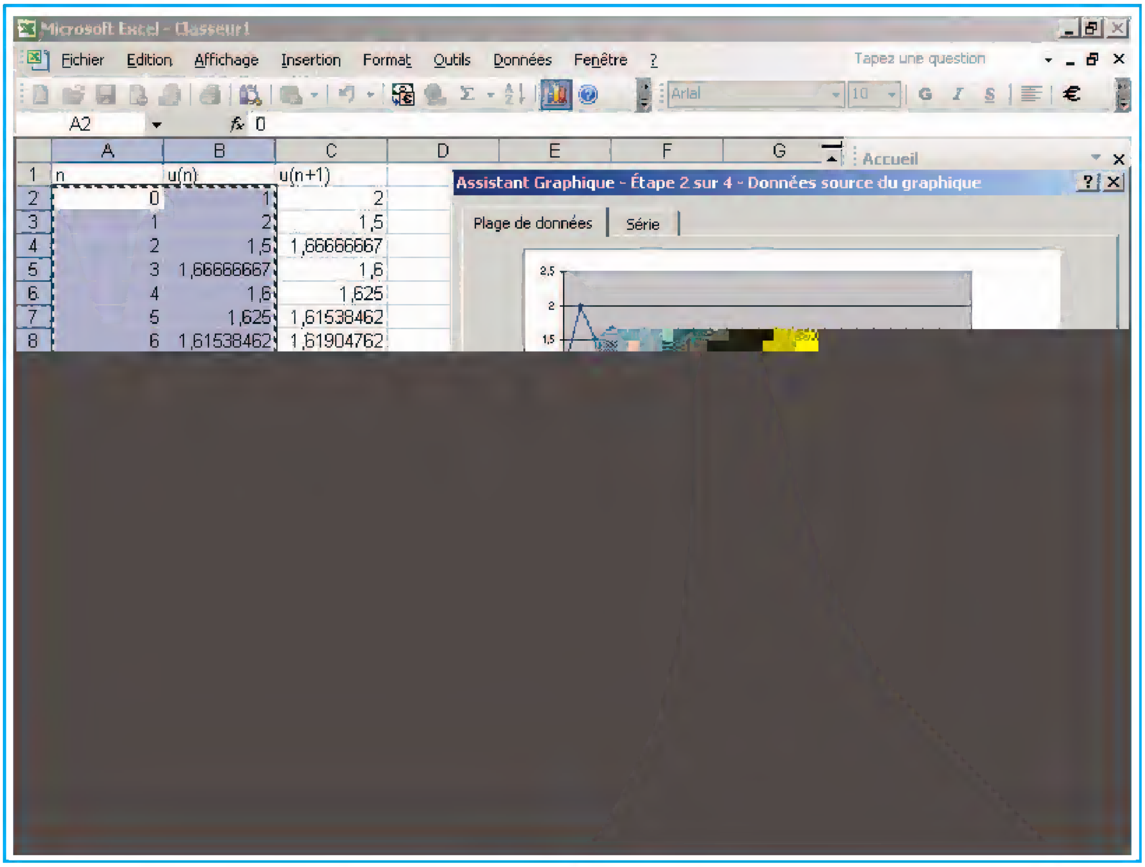
- Conjecturer sur le sens de variation et sur la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
- Compléter, dans la colonne A, les indices 2 ; 3 ;… ; 23 des termes de $\left(u_n\right)$.

2) a) Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 25.

b) Choisir successivement dans les menus suivants :

Avec Excel : insertion- Graphique- Nuage de points - Terminer.

c) Utiliser le graphique pour conjecturer sur le sens de variation et sur la limite de la suite $\left(u_n\right)$.



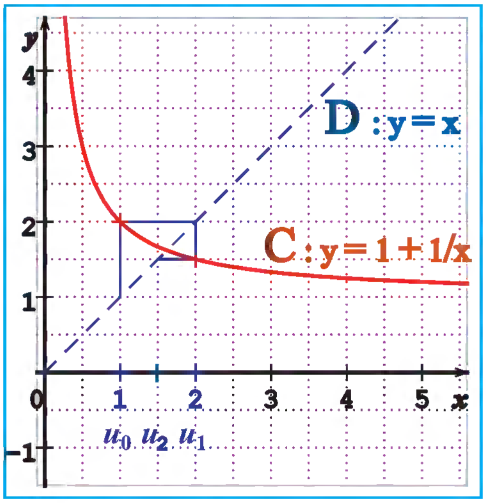
3) On a représenté graphiquement, dans la figure ci-dessous, la suite (u_n).
Sachant que la suite (u_n) est convergente, utiliser le graphique pour donner une valeur approchée de la limite de cette suite.

4) Soit le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Montrer que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

b) Vérifier que les termes $u_3; u_4; u_5; \ldots$ sont des valeurs approchées de φ.

5) Déterminer la limite de la suite (u_n).



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 6}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n < 1$.
2) Etudier le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 b) En déduire v_n et u_n à l'aide de n.
 c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
 d) Calculer, à l'aide de n, la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} v_k$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

2 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
 b) Montrer que (u_n) est croissante.
 c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
 b) En déduire v_n à l'aide de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
 c) Exprimer u_n à l'aide de n.
 d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
 b) Montrer que (u_n) est croissante.
 c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
 c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{12}{u_n + 3}$
 b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 3$.
 c) Montrer que (u_n) est monotone ; conclure.
2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que dont on précisera le premier terme et la raison.
 b) Donner v_n et u_n à l'aide de n.
 c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n - 3$
 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1}| \leq \dfrac{2}{3}|w_n|$
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
 c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et retrouver alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(D'après Bac Tunisien 2004)

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(x + \ln n)\,dt$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que: $f(x + \ln n) = \dfrac{n\,e^x}{1 + n\,e^x}$.

b) Calculer u_n à l'aide de n.

c) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + n\,e^n)}{n} = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + n)}{n} = 0.$$

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

7 Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier naturel p non nul tel que $p \leq n$, on a :

b) Justifier alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \sqrt{n}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

8 Soit $f(x) = \ln(x + 3)$.

1) Etablir le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

2) Soit $h(x) = f(x) - x$. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1, 2[$.

3) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

9 Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^{\ 2} + 1}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall n \in$.

b) Montrer que est croissante.

c) En déduire est convergente

2) Soit la suite définie sur par

.

a) Montrer que est une suite géométrique que l'on caractérisera.

b) En déduire à l'aide de n.

c) Calculer et

d) Calculer, à l'aide de n, la somme

e) Déterminer .

10 Soit (K_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$K_n = \int_0^1 (x+1)e^{-n.x}\,dx$ .Soit $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

1) a) Calculer les intégrales K_0 ; I ; $(K_1 - I)$ et K_1.

b) Montrer que (K_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (K_n) est convergente.

2) a) Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-n.x} \leq (x+1)e^{-n.x} \leq 2e^{-n.x}$

b) Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1-e^{-n}}{n} \leq K_n \leq 2\dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$.

11 On considère la suite réelle (J_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$J_n = \int_0^1 \dfrac{e^{n.t}}{1+e^t}\,dt$.

1) a) Calculer $J_0 + J_1$ et J_1.

En déduire la valeur de J_0.

b) Montrer que la suite (J_n) est croissante.

2) a) Montrer que .

$\forall t \in [0,1]$ on a: $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1+e^t} \leq \dfrac{1}{2}$

b) En déduire un encadrement de J_n .

c) Montrer que la suite (J_n) est divergente.

12 On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant $0 < U_0 < V_0$. et :

$$\begin{cases} U_n . V_n = U_0 . V_0. \\ V_n = \dfrac{1}{2}\left(U_{n-1} + V_{n-1}\right);\ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Un < Vn$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et (v_n) que est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$V_n - U_n < \dfrac{1}{2}\left(V_{n-1} - U_{n-1}\right)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

c) Calculer cette limite commune.

13 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq 1$.

b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$V_n = \dfrac{1}{U_n^2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b) Calculer v_n ; puis u_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$.

14 On considère la suite réelle (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ et pour $n \geq 1$,

$I_n = \int_0^1 \dfrac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

1) a) calculer $I_0 + I_1$ sachant que

$\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4}$, en déduire I_1 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$ puis calculer I_2 et I_3 .

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0.

d) Conclure.

2) a) Montrer que

$$\forall t \in [0,1] \text{ on a: } 0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

15 Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère la suite d'intégrales $(I_n(a))$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n.e^{-t}}{n!}dt$.

1) Calculer $I_1(a)$.

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall t \geq 0 \text{ on a: } 0 \leq \frac{t^n e^{-t}}{n!} \leq \frac{t^n}{n!}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a: } 0 \leq I_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) a) En intégrant par parties, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geq 2, \text{ on a: } I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

b) Prouver que la suite $(I_n(a))$ est convergente.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$$

4) Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$, justifier alors que :

$$e^a = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}.$$

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1-x) + \frac{1}{4} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{e^x}{x^2+4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) Préciser les branches infinies de C et tracer C.

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \text{ on a : } \frac{x^2 - 2x + 4}{(x^2+4)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

b) En déduire que

$$\forall x \in [0,1] \text{ on a : } 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$

3) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g sur $[0,1]$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $[0,1]$ et comparer f(x) et x dans $[0,1]$.

4) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\alpha \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone et conclure.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } \alpha \leq u_n \leq \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

APERÇU HISTORIQUE

Déjà **Archimède** (287-212 Avant J.C) utilisait les suites numériques pour mesurer un arc de parabole ou de toute autre courbe. Sans propriétés bien précises et démontrées, il approchait la mesure cherchée en se servant de séries de nombres .

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, en Égypte au 1er siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie. Les égyptiens utilisaient les suites numériques pour établir l'évolution de leur population, les variations des productions du blé…etc.

Al karagi (fin du Xème siècle - début du XIème siècle) originaire de la ville de Karaj, située entre Téhéran et Kaswin, est l'auteur de plusieurs ouvrages très importants comme EL KAFI sur la science de l'arithmétique, AL BADI, livre d'analyse et AL FAKHRI sur l'algèbre.

Al karagi démontre (algébriquement et géométriquement) que : $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right)^2$

L'utilisation des suites est aujourd'hui cultivée avec beaucoup de succès surtout dans l'approximation des quantités irrationnelles ainsi que dans le calcul approché des aires planes. Certains nombres irrationnels peuvent s'exprimer géométriquement en longueurs, d'autres ne peuvent s'exprimer que par des suites infinies de longueurs.

Nommé très jeune professeur à l'école d'artillerie de Turin en 1755, **Lagrange** y fonde en 1758 l'Académie de Turin qui publie ses premiers travaux. Il est admis à l'Académie de Berlin par Euler, à qui il succède comme président. Transféré à Paris, où il avait fait publier sa Mécanique analytique (1787), peu avant la révolution française, il doit à son génie d'échapper aux mesures de répression contre les étrangers. Des arrêtés spéciaux du Comité de salut public lui permettent de continuer d'exercer ses fonctions. Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en Mécanique. L'astéroïde (1006) Lagrangea a été nommé en son honneur. Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et le théorème de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit le théorème de Lagrange sur la théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange, la fonction de Lagrange ainsi que les équations de Lagrange en mécanique analytique.

LAGRANGE :(25 janvier 1736, Turin - 10 avril 1813, Paris)

Notation indicielle : on doit à Joseph Louis de Lagrange la notation indicielle “ U_n ” pour désigner le terme de rang n d'une suite numérique.

Léonard de Pise - FIBONACCI

(1170 - 1240)

Il faut attendre Léonard de Pise, appelé **Fibonacci (1170 - 1240)**, pour voir apparaître la notion de **suite récurrente**.

Fils d'un commerçant toscan (Bonaccio, d'où son surnom), il est amené à voyager beaucoup, notamment au Proche-Orient. Fasciné par **la numérotation arabe** qu'il découvre, il l'introduit dans le monde occidental en rédigeant un ouvrage d'explication à son retour (Liber abaci). Ceci lui permet d'étudier plus facilement les équations d'ordre 1 et 2 et, comme on le voit dans l'historique des records, de calculer quelques décimales de Pi (3,1418...).

Il étudiait une population de lapins, et face aux résultats qu'il obtenait, fut le premier à préciser la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_0 = v_1 = 1$ entre les termes consécutifs d'une suite numérique v qui converge vers le « nombre d'or » particulièrement utilisé en architecture.

Résultat concernant la suite de Fibonacci :

Etant donné une suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 > 0 \text{ et } U_1 > 0 \text{ (quelconques)} \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

(Si $U_0 = U_1 = 1$ on retrouve la suite de Fibonacci).

On montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad \pi = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} \right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}} \right)^{2k+1} \right]$$

Partie 2

Chapitre 1

Nombres Complexes

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, P est le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1 On donne les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 3 + 4i$.
Calculer $z + z'$, $z z'$, z^2, $\frac{1}{z}, \frac{z}{z'}$.

2 1) Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, $(1-i)^2$, $(1-i)^3$, $(1+i)(1-i)$ et $\frac{1+i}{1-i}$

2) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2+1}$ dans chacun des cas suivants : a) $z = 1+i$; b) $z = 1-i$

3 Placer, dans le plan complexe les images respectives des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = \frac{1}{i}$, $z_4 = 2$ et $z_5 = -3-4i$

4 1) Calculer i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8. Que peut-on conjecturer pour i^{12} ?
2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $i^n = i^r$ où r désigne le reste de la division euclidienne de n par 4.
3) En déduire i^{745} ; i^{1972} ; i^{2008} et i^{-2007}.

5 Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z et de coordonnées (x,y), on associe le nombre complexe $Z = z^2$.
1) Exprimer, en fonction de x et y, les réels Re(Z) et Im(Z).
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
a) Z soit réel
b) Z soit réel négatif
c) Z soit imaginaire pur.

6 On donne les nombres complexes $u = 1-i$ et $v = 1+i\sqrt{3}$
1) Déterminer le module et un argument pour chacun des deux nombres complexes u et v.
2) Écrire u et v sous forme trigonométrique.

COURS

Opérations algébriques sur les nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

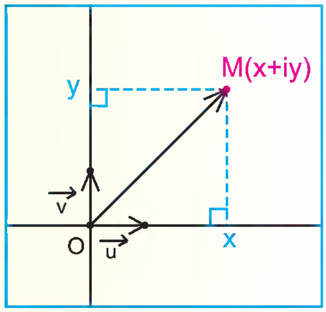
Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme algébrique suivante :
$z = a + ib$ où a et b sont des réels et i est un nombre complexe tel que : $i^2 = -1$.
a s'appelle la partie réelle de z. On la note $a = \mathrm{Re}(z)$;
b s'appelle la partie imaginaire de z. On la note $b = \mathrm{Im}(z)$
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

- Soit M(x,y) un point de P. On appelle affixe de M, le nombre complexe noté aff(M) ou z_M tel que : $\text{aff}(M) = z_M = x + iy$.
- M(x,y) est le point image du nombre complexe $z = x + iy$.
- Pour tous points A et B appartenant au plan, on appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le complexe $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β on a :

$$\text{aff}\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = \alpha\,\text{aff}\left(\vec{u}\right) + \beta\,\text{aff}\left(\vec{v}\right)$$



Activité

Soient, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A(2+i), B(1-i), C(i) et D(-1-i).

1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2) En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

Définition

Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe donné sous forme algébrique.
On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par : $\bar{z} = a - ib$

Activité 2

On donne, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct ,
les points A(-2-i) , B(1+3i) et le point I milieu du segment [AB].

1) a) Placer les points A , B et I.
   b) Déterminer et construire l'ensemble D des points M(z) du plan tels que

   c) Vérifier que les points A et B appartiennent à D.

2) Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M(z) du plan tels que
   a) Caractériser $\mathscr{C}$ par une équation cartésienne.
   b) Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB].

Activité 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct .

A tout point M d'affixe z différent de i, on associe le point M'(z') tel que .

1) Déterminer les coordonnées du point A' associé au point A(1+2i).
2) Déterminer les coordonnées du point B auquel est associé le point B'(0,-2).
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.

Activité 4

Soient, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A(2+i) , B(1-i) , C(i) et D(-1-i).

1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe. On appelle module de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

Le module de l'affixe $z = a + ib$ d'un point M(a,b) du plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est la distance OM. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Activité 1

1) Calculer les modules des nombres complexes suivants :

i ; -3 ; $(1 + i)^2$; $3 - i\sqrt{3}$ et $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2) Calculer $\left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 \left(2 - i\sqrt{2}\right)^7\right|$ et $\left|\dfrac{1}{(1 + 2i)^2} - \dfrac{i + 2}{1 - i}\right|$

3) a) Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes alors :

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

b) Dans quels cas a-t-on $|z + z'| = |z| + |z'|$?

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

$|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et z' , tels que $z' \neq 0$, On a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Activité 2

Dans le plan complexe, on donne les points A(1),

$B\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Pour tous points M et N du plan complexe, on a : $MN = |z_N - z_M|$

Activité 3

Soit a un nombre complexe différent de -i.

Montrer que $\frac{1+ai}{1-ai}$ est de module 1 si et seulement si a est réel.

Activité 4

Dans le plan complexe, on donne les points A(-2+i), B(-3i) et C(i).

À tout point M(z) tel que $z \neq -3i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+2-i}{3-iz}$.

1) a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.
   c) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que $|z'| = 1$.

2) a) Montrer que $|z' - i| \cdot |z + 3i| = 2\sqrt{5}$ avec $z \neq -3i$.
   b) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Activité 5

Déterminer l'ensemble Δ des points M(z) du plan complexe tels que : $|z| = |\overline{z} - 2|$.

Soit z un nombre complexe.
On a : $|z| = |\overline{z}|$

Argument d'un nombre complexe non nul

Activité 1

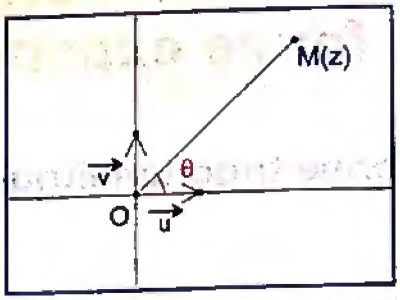
1) Construire, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $Z_1 = 1+i$, $Z_2 = -i$ et $Z_3 = 2$.

2) Déterminer une mesure de chacun des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$; $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OC})$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle **argument** de z et on note arg (z), toute mesure ,en radian, de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. On a donc :

$$\arg(z) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$$



Cas Particuliers :

Si z est un nombre réel strictement positif alors $\arg(z) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Si z est un nombre réel strictement négatif alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $z = ib$ avec b réel strictement positif alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $z = ib$ avec b réel strictement négatif alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Activité 2

Soient z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

1) a) Déterminer la nature de l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point $M'(\bar{z})$.

b) En déduire $\arg(\bar{z})$ en fonction de arg(z).

2) a) Déterminer l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(-z).

b) En déduire arg(-z) en fonction de arg(z).

3) Soit α un réel non nul,déterminer $\arg(\alpha.z)$ en fonction de arg(z). (discuter selon le signe de α)

4) Déterminer les arguments des nombres complexes suivants :
1 ; -1 ; i ; -i ; 1 + i ; 1 - i ; -1 + i ; -1 - i.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

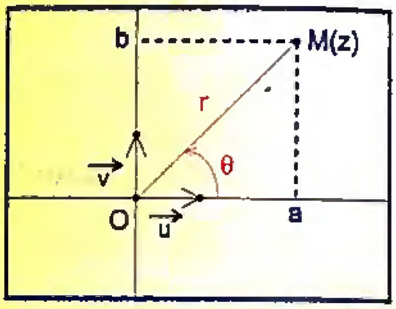
$\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul. En notant r le module de z et θ un argument de z, on a :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
L'écriture de z sous la forme
$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in IR$, est appelée forme trigonométrique de z.
Pour tout $r > 0$ et $\theta \in IR$, on note
$r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
r et θ sont les coordonnées polaires du point M d'affixe z.

Soit $z = a + ib = [r, \theta]$ un complexe non nul. On peut représenter graphiquement le point M image de z par ses coordonnées algébriques a et b ou bien par ses coordonnées polaires r et θ. On a alors
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.



Activité 1

1) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, On note
$r = |z|$ et $\theta = Arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de a , b et r.

2) Soit $\theta \in IR$. Écrire, sous forme trigonométrique, les complexes suivants :
$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$;
$z_2 = \sqrt{3} - i$; $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_4 = -3 + i\sqrt{3}$; $z_5 = \cos\theta - i\sin\theta$
$z_6 = -\cos\theta - i\sin\theta$ et $z_7 = \sin\theta + i\cos\theta$

Activité 2

1) Soit $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in IR_+^*$, $r' \in IR_+^*$, $\theta \in IR$ et $\theta' \in IR$
Déduire de la forme trigonométrique de z et de z', les formes trigonométriques des complexes suivants : $\bar{z}$; $z.z'$; $\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^n $(n \in \mathbb{Z})$ et $\lambda.z$ $(\lambda \in IR^*)$

) Applications : On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$.

a) Écrire sous forme trigonométrique les complexes z_1 ; z_2 ; $\overline{z_1}$; $\overline{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$ et z_1^6 .

b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

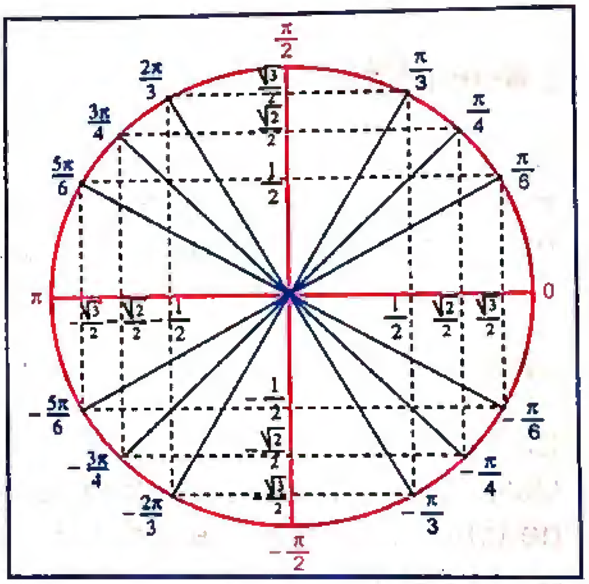
Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in IR_+^*$, $r' \in IR_+^*$, $\theta \in IR$ et $\theta' \in IR$. On a pour tout entier n :

$\overline{z} = [r, -\theta]$; $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}, -\theta\right]$; $z.z' = [r.r' , \theta + \theta']$; $\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$; $z^n = [r^n, n\theta]$

Activité 3

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, $b = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $c = a + b$ et $d = b - a$.

1) Écrire a, b et $\dfrac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.
En déduire la nature du triangle ABO.
2) Placer les points A, B , C et D dans le plan et montrer que OACB est un carré.
3) En déduire la forme trigonométrique de c et d.
4) Déterminer alors les valeurs de
$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.



Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Pour tout $\theta \in IR$, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Soit $z = [r, \theta]$ un nombre complexe non nul, l'écriture $z = r\,e^{i\theta}$ avec r un réel strictement positif est la forme exponentielle de z.

Activité 1

1) Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$(-1+i)^4 \;;\; \left(-1+i\sqrt{3}\right) \;;\; \left(3-i\sqrt{3}\right) \;;\; \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^5}.$$

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$, écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$z_1 = 1 + e^{i\theta}$; $z_2 = i - e^{i\theta}$

$z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$; $z_4 = \sin\theta + i\left(1+\cos\theta\right)$

$z_5 = \dfrac{z_4}{z_3}$

3) Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, écrire sous forme exponentielle les complexes suivants : $\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ et $\dfrac{1}{i+\mathrm{tg}\,\alpha}$

Formules d'Euler

Pour tout réel θ on a :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

Activité 2

Soit x un réel.
Exprimer cos(3x) et sin(3x) en fonction des puissances de cos x et sin x.

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Activité 3

Soit x un réel.
Utiliser les formules d'Euler pour écrire les expressions suivantes comme sommes de termes de la forme a cos (nx) et b sin (nx) où a et b désignent deux réels et n un entier naturel :

$\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin^4 x$ et $\cos^3 x \cdot \sin^4 x$

Nous disons que nous avons linéarisé ces expressions.

Formule du Binôme

Pour tous réels a, b et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

Colinéarité et Orthogonalité de deux vecteurs

Activité 1

Soit $z = e^{2i\theta}$ où θ est un réel de $]0, 2\pi[$.

1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe

$$z' = \frac{(1-z)^2}{\overline{z}\,(1+z)}.$$

2) Donner la valeur de θ pour laquelle z' est un réel

Soit z un nombre complexe on a

$$(z \text{ est réel}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\arg(z) = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou}\quad z = 0\end{array}\right)$$

$$(z \text{ est imaginaire pur}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ (k \in \mathbb{Z})\end{array}\right)$$

Activité 2

Dans le plan complexe, on considère les points A(1) et B(-i).
Soit l'application f de P \ { B } dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que

$$z' = \frac{\overline{z} + 2i}{\overline{z} - i}$$

1) Vérifier que $z' - 1 = \frac{3i}{\overline{z} - i}$.

En déduire que

$BM \cdot AM' = 3$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

2) a) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 3 alors M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ que l'on précisera

b) Montrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tous points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Activité 3

Dans le plan complexe on considère les points A(1) et B(-1). A tout point M(z) tel que $z \neq 1$ on associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1) Montrer que $|z'| = 1$.

2) Etablir que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

3) Interpréter géométriquement les résultats précédents.
En déduire une construction géométrique de M' connaissant M.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z et z', on

$\left(\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont colinéaires}\end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est réel

$\left(\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont orthogonaux}\end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur

Activité 4

Soient les nombres complexes

$$z_1 = (1+i)\left(\frac{-1+5i}{2}\right) ; z_2 = \frac{-9+7i}{2-3i} \text{ et } z_3 = 2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

1) Placer dans le plan complexe les points $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(z_3)$,
2) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
3) a) Déterminer l'affixe du milieu I du segment [BC].
   b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré.

Activité 5

Dans le plan complexe, on donne les points :

$A(-2-i)$, $B(1+3i)$, $D\left(-\frac{5}{2}i\right)$ et $C\left(3+\frac{3}{2}i\right)$

1) a) Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
   b) Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle C de diamètre [AB].
2) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

RÉSUMÉ DU COURS

Forme Algébrique d'un nombre complexe

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

* L'écriture $z = a + i\,b$, où a et b sont deux réels, est la forme algébrique de z.

$$\begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \text{ est la partie réelle de } z \\ b = \mathrm{Im}(z) \text{ est la partie imaginaire de } z \end{cases}$$

* Si $z = a + i\,b$ est la forme algébrique de z, alors le point M (a , b) est appelé image de z dans le plan complexe P.
* Si $M(x,y) \in P$ alors le nombre complexe $x + i\,y$ est l'affixe du point M.
Il est noté : $\mathrm{aff}(M) = Z_M$
* Pour tous points A et B du plan on a $\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$
* Pour tous réels α et β et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$$\mathrm{aff}\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = \alpha\,\mathrm{aff}\left(\vec{u}\right) + \beta\,\mathrm{aff}\left(\vec{v}\right)$$

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels, on appelle conjugué de z, le complexe $\bar{z} = a - ib$

On a : $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z . z'} = \bar{z} . \bar{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z' \neq 0)$

et $\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $(z \neq 0)$.

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels .
On a : $z + \bar{z} = 2a$; $z - \bar{z} = 2ib$ et $z . \bar{z} = a^2 + b^2$

Formes Trigonométrique et Exponentielle d'un nombre complexe

* Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}^*$ et M son image dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
On appelle module de z le réel positif défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Pour tous points A et B du plan on a : $AB = |z_B - z_A|$

* On a pour tous complexes z et z' :

$|z|^2 = z\,.\,\bar{z} = a^2 + b^2$ et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

* Un argument de z est défini par $\arg(z) = (\widehat{\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}}) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

* Pour tout nombre complexe z non nul on a : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la forme trigonométrique de z.

* Soit $z = a + ib = [r,\theta]$. On a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$

* Pour tous complexes non nuls $z = [r\,,\,\theta]$ et $z' = [r'\,,\,\theta']$, on a :

$\bar{z} = [r\,,-\theta]$ ce qui entraîne $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$z\,.\,z' = [rr'\,,\,\theta + \theta']$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z\,.\,z'| = |z|\,.\,|z'| \\ \arg(z\,.\,z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}\,,-\theta\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'}\,,\,\theta - \theta'\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$z^n = [r^n, n\theta]$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) = n\,.\,\arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Pour tout réel $\lambda > 0$, $\lambda\,.\,z = [\lambda r\,,\,\theta]$ ce qui entraîne :

$\begin{cases} |\lambda\,.\,z| = \lambda\,|z| \\ \arg(\lambda\,.\,z) = \arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Pour tout réel $\lambda < 0$, $\lambda.z = [-\lambda r, \theta + \pi]$ ce qui entraîne :

$$\begin{cases} |\lambda . z| = -\lambda |z| \\ \arg(\lambda . z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

* Soit z un nombre complexe, on a :

z est réel $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $z = 0$.

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\text{Re}(z) = 0$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

et $z \neq 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(\cos\theta + \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$;

(Formule de Moivre)

* L'écriture $z = re^{i\theta}$ (où r est le module de z et θ un argument de z) est la forme exponentielle de z.

* Pour tout réel θ, on a $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$

(Formules d'Euler)

Colinéarité et Orthogonalité de deux vecteurs du plan complexe

* Pour tous points A, B, C et D du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$\left(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives z et z'.

On a :

$$\left(\begin{array}{c} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont colinéaires} \end{array}\right) \Leftrightarrow \frac{z}{z'} \text{ est réel}$$

$$\left(\begin{array}{c} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont orthogonaux} \end{array}\right) \Leftrightarrow \frac{z}{z'} \text{ est imaginaire pur}$$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Soient les points M, M_1, M_2 et M' d'affixes respectives les nombres complexes :

$z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = z^2$, $z_2 = 2z$ et $z' = 2z - z^2$

En utilisant un logiciel de construction géométrique :

* Construire le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
* Placer un point M(z) sur l'arc de sens direct $[\widehat{AB}]$.
* Construire les points M_1 et M_2 correspondants.
* Construire le point M' de sorte que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un parallélogramme.
* Construire la tangente (D_M) à $\mathscr{C}$ en M.
* Faire varier le point M sur l'arc $[\widehat{AB}]$. Quelle conjecture peut-on émettre sur les positions des points A et M' par rapport à la droite (D_M) ?
* Déterminer graphiquement la valeur de θ pour que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un rectangle.

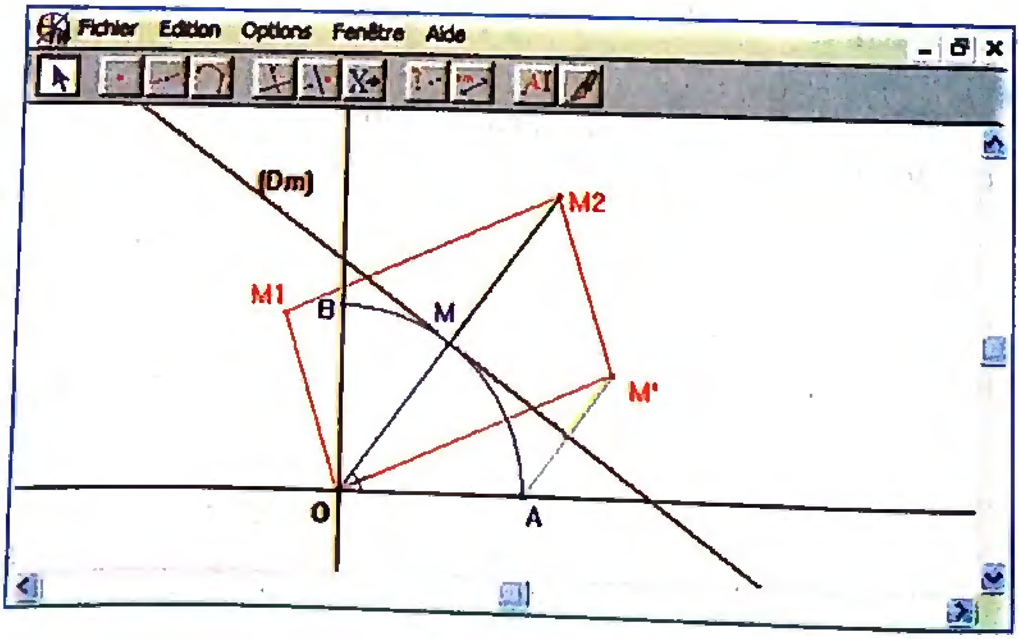
Une stratégie de justification de la conjecture :

a) Montrer que AM = MM'.

b) Montrer que $\dfrac{z'-1}{z}$ est un réel.

c) Justifier alors la conjecture.

d) Déterminer la valeur de θ pour que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un rectangle.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

$\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}$, $(-1-i)^2(1-i\sqrt{3})$, $(\frac{1}{i}+i)$ et $(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

2 Soit le nombre complexe

$$j = \cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}$$

1) Calculer j^2, j^3 et j^4

2) Que peut-on conjecturer pour j^n pour n entier naturel non nul ?

3) Montrer que $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$

4) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$

5) Démontrer que , quels que soient les complexes a, b et c on a l'équivalence

$a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c = j(c - b)$

3 Pour tout nombre réel m, on pose $z=(m-i)[(10-m) + (2+m)i]$

1) Déterminer m pour que z soit réel.

2) Préciser, dans ces cas, les valeurs correspondantes de z.

4 Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2

2) En déduire le module et un argument de chacun des complexes

z_1^2, z_1z_2, z_1^3, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$

5 Soit φ un réel de $[0,\frac{\pi}{2}]$. On donne le complexe $Z = \cos2\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi$

Déterminer φ pour que Z soit nul.

Ces valeurs étant exclues, déterminer les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle de $\frac{1}{Z}$.

6 Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, on note M_1, M_2 et M les points d'affixes respectives

$z_1 = e^{i\theta} - i$; $z_2 = e^{-i\theta} + i$ et $z = 2\cos\theta$

1) Ecrire z_1 sous forme exponentielle, en déduire que $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$.

2) Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange et préciser la valeur de θ pour laquelle ce quadrilatère est un carré.

7 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.

On donne le point M d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z| = |z - 1|$

2) Montrer que si $|z| = |z - 1|$ alors

$\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) = \pi\ [2\pi]$

8 Soit $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

1) Déterminer le module et un argument de z.

2) Ecrire z sous forme algébrique.

3) En déduire $tg(\frac{\pi}{12})$

9 Dans le plan complexe on considère un triangle ABC et a, b et c les affixes respectives des points A, B et C. On note M le milieu du segment [BC] et m l'affixe de M. On construit les triangles BAB' et C'AC de sorte qu'ils soient directs, rectangles et isocèles de sommet principal A.

1) Déterminer les affixes des points B', C' et M.

2) En déduire que :

a) B'C' = 2.AM

b) Les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires.

10 Dans le plan complexe, on considère les points A(i), B(-i). à tout point M(≠B) d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{1 - z}{1 - iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $z' + i = \dfrac{-1 + i}{z + i}$

b) En déduire que $BM.\,BM' = \sqrt{2}$.

c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

11 1) Calculer cos3x et sin5x en fonction de cos x et sin x.

2) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^3 x$, $\cos^2 x.\sin x$, $\sin^2 x \cos^3 x$.

3) Soient α et β deux réels. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}$ (on donnera, au préalable, une condition pour que z soit défini.)

12 Soient les points A et B d'affixes respectives 1 et (- 2 i) et f l'application de P\{B} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{\bar{z} + 4i}{\bar{z} - 2i}$

1) Vérifier que $z' - 1 = \dfrac{6i}{\bar{z}_A - 2i}$

2) En déduire que $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

3) a) Montrer que si $M \in \zeta_{(B,3)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Montrer que si M ∈ (AB) alors M' appartient à une droite à préciser.

13 Soit le point A(1). à tout point M(z) on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2z - z^2$

1) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M(z) tels que $\arg(z') - 2\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et 2z.

a) Trouver l'ensemble E_2 des points M(z) tels que O, M_1, M_2 soient alignés

b) On suppose que $M(z) \notin E_2$. Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

14 Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z, et z^2 soient alignés.

15 Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que le nombre complexe $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

16 Soit le nombre complexe $Z = \cos\dfrac{2}{5} + i\sin\dfrac{2}{5}$.

1) a) Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$

b) En utilisant la formule $Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$, montrer que $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

2) a) Exprimer Z^4, Z^3 et Z^2 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités $Z + Z^4 = 2\cos\dfrac{2}{5}$ et $Z^2 + Z^3 = 2\cos\dfrac{4}{5}$

3) a) Établir la relation :
$$2\cos\frac{4}{5}+2\cos\frac{2}{5}+1=0$$
b) En déduire de ce qui précède que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation
$$4X^2+2X-1=0$$
c) Déterminer alors la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

17 P étant le plan complexe. Soient les deux points A(i) et $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$.

Soit l'application f qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=(1-i)z-1$.

1) a) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $|z'|=2\sqrt{2}$.

b) Soit $\theta\in[0,\pi]$. On suppose que
$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+i\sin\theta).$$
Déterminer suivant les valeurs de θ, la forme trigonométrique de z'.

2) a) On suppose $M\neq B$. Montrer que
$$\operatorname{Arg}(z')\equiv-\frac{\pi}{4}+\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}}\right)[2\pi]$$
b) En déduire l'ensemble F des points M(z) tels que z' soit réel négatif et le construire.

3) a) On suppose $M\neq A$. Montrer que le triangle AMM' est rectangle en M et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)$.

b) En déduire une construction du point $M'=f(M)$ connaissant M dans P.

18 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2.

A tout point M du plan d'affixe z ($z\neq2$) on associe le point M' d'affixe z' défini par
$$z'=\frac{z-i}{iz-2i}$$
1) a- Montrer que $|z'|=\frac{AM}{BM}$

b- En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose $z\neq i$ et $z\neq2$.

a- Montrer que :
$$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})=(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}})-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$
b- En déduire, que si M appartient à la droite (AB) le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

(D'après Bac Tunisien 1995).

19 Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. C est le cercle trigonométrique et t est l'affixe d'un point M du cercle C, t est un nombre complexe ayant pour argument un réel α de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Soit $u=t^3$ et $v=2t$.

Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous forme trigonométrique.

2) Soit $w=2t-t^3$ et A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.

a. Placer, dans le plan P, les points A, B et C dans le cas où α est égal à $\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer les réels α pour lesquels les points O, A et B sont alignés.

3) On suppose, dans la suite, que α appartient à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

b. Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

(D'après Bac Tunisien 1994).

APERÇU HISTORIQUE

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Cauchy, baron Augustin (1789-1857)

En résolvant des équations du second degré comme $x^2 + 1 = 0$, Jérôme Cardan et ses confrères italiens du XVIe siècle font intervenir ce qu'ils appelaient les «nombres impossibles ou imaginaires» et ils n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$ où a est un réel strictement positif. Par exemple, le nombre réel 40 peut s'exprimer sous la forme de $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})$. Ces racines carrées de nombres négatifs, que Descartes nomme «racines imaginaires», sont utilisées par la plupart des mathématiciens du XVIe siècle.

En 1722, le Britannique Abraham de Moivre découvre la formule qui porte, depuis, son nom $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$. Cette relation, qui relie fonctions exponentielles et fonctions trigonométriques, est à rapprocher des formules établies par Euler

(XVIIIe siècle) : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

De ces formules découle la célèbre identité $e^{i\pi} = -1$, qui relie trois nombres fondamentaux en mathématiques (e, i et pi).

Les nombres imaginaires sont utilisés comme symboles purement formels. Ce n'est qu'avec Gauss et Cauchy, qu'ils trouveront leur représentation. On doit à Gauss le premier exposé complet sur la représentation des ces nombres par des points du plan muni d'un repère orthonormé. Il appela ces nombres «nombres complexes» et utilisa la lettre i pour désigner une racine carrée du nombre (-1). Cauchy découvrit qu'effectuer des calculs sur les nombres complexes revient à appliquer les règles de calcul dans IR en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

C'est à l'aide des nombres complexes que Gauss, dans sa thèse de doctorat parue en 1799, donne la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, selon lequel tout polynôme de degré n possède exactement n racines, non nécessairement distinctes. Il est également le premier à établir la correspondance entre les nombres complexes et les points du plan. En 1801, Gauss introduit les nombres dits entiers de Gauss, de la forme a + ib, avec a et b entiers.

Cauchy poursuit l'étude des nombres complexes en introduisant les fonctions à une variable complexe en 1814.

Les nombres complexes ont de nombreuses applications en physique ; le nombre i apparaît ainsi de manière explicite dans l'équation fondamentale de Schrödinger qui décrit la nature ondulatoire des particules.

Partie 2

Chapitre 2

Equations à coefficients complexes

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Racines carrées d'un nombre complexe
	❖	Équations du second degré à coefficients complexes
	❖	Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe
	❖	Exemples d'équations dans $\mathbb{C}$ de degré supérieur à 2
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, P est le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1 Résoudre, dans IR, les équations suivantes :

1) $3x^2 + 7x + 4 = 0$
2) $5x^2 - 3x + 1 = 0$
3) $-\sqrt{3}\,x^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)x + 1 = 0$
4) $x^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$
5) $4x^2 - 13|x| + 9 = 0$
6) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$ (on remarquera que 1 est une solution de cette équation

2 Résoudre, dans $\mathbb{C}$,les équations suivantes (on posera, à chaque fois, $z = x + iy$ où x et y sont deux réels) :

1) $\left(1 + 2i\right)z + (1-i)\,\overline{z} = 2i$
2) $z\,\overline{z} + z - \overline{z} = 5 + 4i$
3) $z^2 + 9 = 0$
4) $z^2 - 2i\,\overline{z} = 0$

3 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^2 = -2i$

b) $$\frac{2i}{\overline{z} + 2i} = \overline{z} + 2i$$

4 a) Calculer $(1 - 3i)^2$.

b) Vérifier que $4z^2 - 4iz = (2z - i)^2 + 1$.

c) Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $4z^2 - 4iz + 7 + 6i = 0$

COURS

Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit Z un nombre complexe donné.
On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe z vérifiant $z^2 = Z$

Exemples :
Les nombres complexes i et - i sont les racines carrées de -1.
On a : $(1+i)^2 = 2i$ donc 1+i est une racine carrée du nombre complexe 2i.

Activité 1

1) Soit $Z = a + i\,b$ un nombre complexe non nul donné et soit l'équation (E) : $z^2 = Z$ d'inconnue complexe z. On pose $z = x + i\,y$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente au système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

b) Montrer que $(z^2 = Z)$ entraîne $(x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2})$.

c) Résoudre alors l'équation (E), puis en déduire que Z admet deux racines carrées opposées.

2) Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :
$z_1 = -3 - 4i$ et $z_2 = 7 + 24i$

3) Soit $Z = -8 + 6\,i$. En écrivant $Z = 1 + 2.3\,i - 9$, déduire les racines carrées de Z.

Soit $Z = a + i\,b$ un nombre complexe non nul.
L'équation $z^2 = Z$ avec $z = x + iy$ est

équivalente au système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

Un nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Activité 2

1) Soient λ un réel strictement positif, α un réel et $Z = \lambda\, e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = Z$

(on posera $z = r\, e^{i\theta}$ où θ et r sont deux réels tels que $r > 0$)

Donner les solutions sous forme exponentielle.

2) Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

-3 ; 16 ; $-2i$; $1-i$ et $1+i\sqrt{3}$.

Soit $Z = \lambda\, e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.
L'équation $z^2 = Z$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions opposées :

$$z_1 = \sqrt{\lambda}\,.\,e^{i\frac{\alpha}{2}} \;;\; z_2 = -z_1$$

Les solutions z_1 et z_2 sont les racines carrées de Z.

Équation du second degré à coefficients complexes

Définition

Soient a, b et c trois nombres complexes donnés tels que $a \neq 0$. L'équation $a z^2 + b z + c = 0$ s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

Activité 1

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

b) En posant $\Delta = b^2 - 4ac = \lambda^2$ avec λ une racine carrée de Δ , résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^2 - (1-i)z + 2 - 2i = 0$

b) $iz^2 - (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

c) $z^2 + \cos\theta\,.\,z + \dfrac{1}{4} = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Soit L'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ et z l'inconnue complexe.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé discriminant de l'équation (E)

- Si $\Delta \neq 0$ alors L'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions distinctes :
$z' = \frac{-b-\lambda}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\lambda}{2a}$ avec λ une racine carrée de Δ.
- Si $\Delta = 0$ alors (E) possède une racine double $z' = z'' = \frac{-b}{2a}$.

Remarque :
Lorsque $b = 2b'$, on a $\Delta = 4\Delta'$ où $\Delta' = b'^2 - ac$, appelé discriminant réduit de l'équation (E).
On a :

- Si $\Delta' \neq 0$ alors L'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions distinctes :
$z' = \frac{-b'-\lambda'}{a}$ et $z'' = \frac{-b'+\lambda'}{a}$ avec λ' une racine carrée de Δ'.
- Si $\Delta' = 0$ alors (E) possède une racine double $z' = z'' = \frac{-b'}{a}$.

Activité 2

Soient dans $\mathbb{C}$ les fonctions polynômes suivantes:
$Q_1(z) = z^2 + 3(1+i)z + 5i$, $Q_2(z) = z^2 + 3(1-i)z - 5i$
et $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1) Montrer que pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a :
$P(z) = Q_1(z). Q_2(z)$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Q_1(z) = 0$
b) Montrer que si z est solution de (E) alors $\bar{z}$ est solution de l'équation $Q_2(z) = 0$.
c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.
3) Montrer que P(z) est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.
Si z' et z'' sont les racines dans $\mathbb{C}$ de L'équation du second degré (E) :
$a z^2 + b z + c = 0$
alors on a :
$a z^2 + b z + c = a(z-z')(z-z'')$

Activité 3

Soit L'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ et z l'inconnue complexe.

1) Exprimer, en fonction des constantes a, b et c, la somme S et le produit P des solutions de (E). (envisager les deux cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$).

2) Soit l'équation (E) à coefficients complexes :

$z^2 - (1 + 2i) z + i - 1 = 0$.

a) Vérifier que i est une solution de (E) .

b) Sans calculer Δ, trouver l'autre solution de (E).

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.
Si z' et z" sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré
(E) : $a z^2 + b z + c = 0$
alors on a :

$$\begin{cases} z' + z'' = -\dfrac{b}{a} \\ z' \cdot z'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Activité 4

1) Soit l'équation du second degré à coefficients réels (E) : $a z^2 + b z + c = 0$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Montrer que si $\Delta < 0$ alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées.

b) Montrer que si l'équation $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, d'inconnue z, admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées alors α et β sont des réels.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations :
$z^2 + z + 1 = 0$ et $z^2 - 2z + \cos^2 \varphi = 0$
où $\varphi \in \mathbb{R}^*$.

Soient a ,b et c trois réels, a non nul.
L'équation du second degré :
$a z^2 + b z + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0$, les solutions sont réelles distinctes
- Si $\Delta = 0$, les solutions sont réelles confondues
- Si $\Delta < 0$, les solutions sont complexes conjuguées

$$z' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z'' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Activité 5

1) Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 2i \\ z_1 \cdot z_2 = -1 + i \end{cases}$

2) Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 , écrits sous forme exponentielle, tels que

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 + e^{2i\theta} \\ z_1 \cdot z_2 = 1 - e^{3i\theta} \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$$

Soient S et P deux nombres complexes donnés.
Les nombres complexes z' et z"
tels que : $\begin{cases} z' + z'' = S \\ z' \cdot z'' = P \end{cases}$
sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré
$z^2 - S z + P = 0$.

Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe non nul

Définition

Soient n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe non nul.
On appelle racine $n^{ième}$ de Z, tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.
Si Z = 1 alors on dit que z est une racine $n^{ième}$ de l'unité.

Exemples :

* Les nombres complexes 1, -1, i et - i sont les racines quatrièmes de 1.
* Vérifier que $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = 8$. En déduire que $\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ est une racine cubique de 8 .

Activité 1

Soient, dans $\mathbb{C}$, le nombre complexe $Z = r\,e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in$ IR et l'équation (E) : $z^n = Z$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geq 2$).

1) Montrer que : $(z^n = Z) \Leftrightarrow \left(z = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} ; k \in \mathbb{Z}\right)$

2) On pose $z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ avec k entier relatif.

a) Vérifier que z_k est une solution de (E).

b) Montrer que $z_0 = z_n$ et que $z_1 = z_{n+1}$.

c) Montrer que $z_k = z_{k'} \Leftrightarrow k - k'$ est multiple de n.

d) En déduire que l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, exactement n solutions distinctes.

3) Montrer que les images M_k des solutions z_k de (E) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Indication : Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right) = \frac{2\pi}{n} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

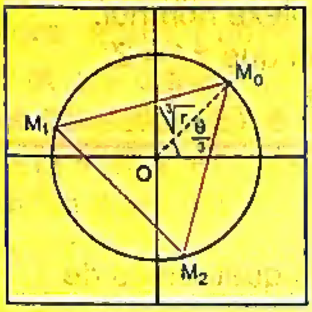
Soient r un réel strictement positif, θ un réel et $Z = r\,e^{i\theta}$ un nombre Complexe.
L'équation (E) : $z^n = Z$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ admet, dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes :

$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Les images M_k des solutions z_k de (E) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

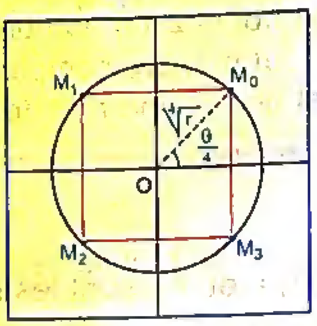
Soient r un réel strictement positif, θ un réel et $Z = r e^{i\theta}$ un nombre complexe. On note M_k Les images des solutions z_k de l'équation (E) : $z^n = Z$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. On a :

Si n = 3



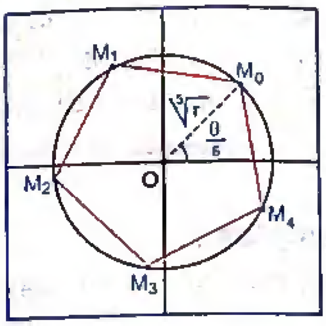
$M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral

Si n = 4



$M_0M_1M_2M_3$ est un carré

Si n = 5



$M_0M_1M_2M_3M_4$ est un pentagone régulier

Activité 2

Soit le nombre complexe $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

1) Écrire j sous forme exponentielle.

2) Montrer que $j^3 = 1$; $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

3) Déterminer les racines cubiques de l'unité et construire leurs images dans le plan complexe.

Activité 3

Soit $U = e^{i\theta}$, où θ est un réel de $\left]0, 2\pi\right[$.

1) Déterminer le nombre complexe z tel que $\dfrac{z - i}{z + i} = U$.

2) Déterminer les racines cinquièmes de l'unité.

3) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $\left(z^2 + 1\right)^5 - \left(z + i\right)^{10} = 0$.

Équations de degré supérieur à 2 dans $\mathbb{C}$

Activité 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (3 - i)z + 4 = 0$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (On note z_1 et z_2 les solutions telles que $Im(z_1) > 0$).

b) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') : $3z^3 + (-9 + i)z^2 + (14 + 6i)z - 8i = 0$.

a) Vérifier que $z_0 = \frac{2}{3}i$ est une solution de (E').

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :
$3z^3 + (-9 + i)z^2 + (14 + 6i)z - 8i = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre alors l'équation (E').

Activité 2

Soit, dans C, l'équation (E) : $z^3 - (3 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 4i = 0$.
Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure puis résoudre (E).

Activité 3

Résoudre dans C l'équation $z^4 + 2i z^2 + 3 = 0$.

Activité 4

On considère l'équation (E) : $4z^4 + 4\cos\theta\left(1 + \cos\theta\right)z^2 + \left(1 + \cos\theta\right)^2 = 0$, avec $\theta \in [0, \pi]$.

1) On suppose que $\theta = \pi$, résoudre l'équation (E).

2) On suppose que $\theta \in [0, \pi[$ et on pose $z^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right)Z$.

a) Résoudre l'équation (E') obtenue ou l'inconnue est Z.

b) Déterminer le module et l'argument de chacune des racines de (E')

3) En déduire le module et un argument de chacune des racines de (E).

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

RÉSUMÉ DU COURS

* Soit $Z = \lambda e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul avec λ réel strictement positif.
Les racines carrées du Z sont les nombres complexes opposés :

$z_1 = \sqrt{\lambda} \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_2 = -z_1$

* Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul écrit sous forme algébrique.
L'équation $z^2 = Z$ avec $z = x + iy$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

* Soit L'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ et z l'inconnue complexe.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé discriminant de l'équation (E)
Si $\Delta \neq 0$ alors L'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions distinctes :

$z' = \dfrac{-b-\lambda}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\lambda}{2a}$ où λ est une racine carrée de Δ .

Si $\Delta = 0$ alors (E) possède une racine double $z' = z'' = \dfrac{-b}{2a}$

* Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Si z' et z'' sont les racines dans $\mathbb{C}$ de L'équation du second degré (E) $a z^2 + b z + c = 0$ alors on a : $a z^2 + b z + c = a(z-z')(z-z'')$
* Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Si z' et z'' sont les racines dans $\mathbb{C}$ de L'équation du second degré (E) $a z^2 + b z + c = 0$ alors on a : $\begin{cases} z' + z'' = -\dfrac{b}{a} \\ z' \cdot z'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Soient S et P deux nombres complexes donnés. Les nombres complexes z' et z'' tels que : $\begin{cases} z' + z'' = S \\ z' \cdot z'' = P \end{cases}$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 - Sz + P = 0$.

* Soient r un réel strictement positif, θ un réel et $Z = r e^{i\theta}$ un nombre complexe.
L'équation (E) : $z^n = Z$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ admet, dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes :

$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Les nombres complexes z_k sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z.
Les images M_k des solutions z_k de (E) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle C de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

AVEC L'ORDINATEUR

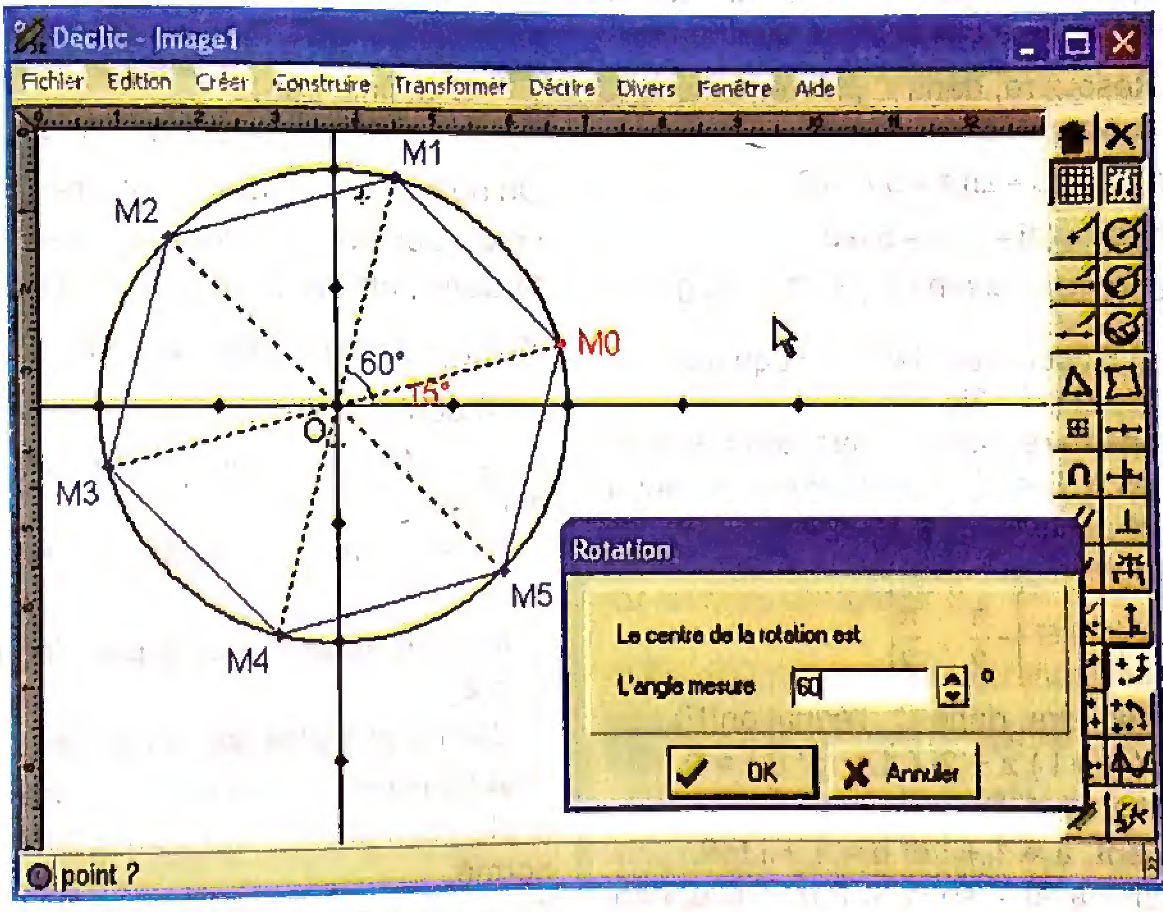
Activité

Utiliser un logiciel de géométrie pour construire un hexagone régulier de sommets les images des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue complexe z : $z^6 = 64.i$

1) Résoudre cette équation.

2) Choisir un repère orthonormé direct.

* Construire le point M_0 d'affixe $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.
* Construire le point M_1 image du point M_0 par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
* Construire le point M_2 image du point M_1 par la rotation R.
* Achevez la construction des sommets de l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$.
* Construire enfin l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$.
* Déterminer le périmètre et l'aire de cet hexagone.
* Utiliser le logiciel pour contrôler votre réponse.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$3-4i$; $2i$; $-5-12i$; $\dfrac{2i-1}{i+2}$; $1-i\sqrt{3}$ et $1+i$.

2 Déterminer les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants : $8i$; $\sqrt{3}+i$ et $-i$

3 a) Vérifier que $2-i$ est une racine cubique de $2-11i$

b) En déduire les deux autres racines cubiques de $2-11i$.

4 a) Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $-7-24i$

b) Représenter géométriquement dans le plan complexe ces racines quatrièmes.

5 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^2-(3+2i)z+5+i=0$

b) $iz^2+(4i-3)zi-5=0$

c) $(4-3i)z^2-(10+5i)z+3+5i=0$

6 a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2)(z^2-3iz+4)=0$

b) Construire dans le plan complexe les images A, B et C des solutions de l'équation et prouver que le triangle ABC est rectangle.

7 Soit $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation(E) :
$z^2-2(1+i)z+2i(1+tg^2\theta)=0$
Soient z' et z'' les solutions.

2) Soient $a=1+i$ et $b=1+i\,tg\theta$.

a) Ecrire a et b sous la forme exponentielle.

b) Exprimer z' et z'' à l'aide de a et b.

c) En déduire le module et un argument de chacun des nombres complexes z' et z''.

8 Soit $\theta \in]0, \pi[$ et l'équation complexe
(E_θ): $z^2-e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)z+e^{i3\theta}=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$.

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle de sommet B.

b) Prouver que ABC est équilatéral si et seulement si $\left|1+e^{i\theta}\right|=1$.

3) a) Déterminer le module et un argument du complexe $1+e^{i\theta}$.

b) En déduire les valeurs de θ pour que ABC soit équilatéral.

9 Soit $\theta \in [0, \pi]$ et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par :
$(1-i)z^2-2(\text{Cos}\,\theta+\text{Sin}\,\theta)z+1+i=0$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\text{Im}(z_1)$ positive pour tous les réels θ.

1) Sans calculer z_1 et z_2 montrer que $z_2=\dfrac{i}{z_1}$ Trouver alors une relation entre les modules et les arguments de z_1 et z_2.

2) a) Vérifier que $1-\sin(2\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)^2$ puis calculer z_1 et z_2.

b) Ecrire alors sous forme exponentielle z_1 et z_2.

c) Préciser la valeur de θ pour laquelle $z_1=z_2$.

3) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $(\text{Cos}\theta+i\,\text{Sin}\theta)$ et $(\text{Sin}\theta+i\,\text{Cos}\theta)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.

Trouver l'ensemble $\mathcal{C}_1$ décrit par M_1 et l'ensemble $\mathcal{C}_2$ décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0, \pi]$.

10 Soient $\theta \in]0,\pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$,

$(E): z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta \cdot i\cos\theta = 0$

1) a) Vérifier que :
$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ et résoudre (E).
(On notera z' la solution de partie imaginaire positive et z'' l'autre solution)

b) Montrer que : $z' = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

et $z'' = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Soient M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''.

a) Calculer $\frac{z''}{z'}$ et en déduire que le triangle OM'M'' est rectangle en O.

b) Déterminer θ pour que le triangle OM'M''soit isocèle.

3) Montrer que lorsque θ décrit $]0,\pi[$, le point M' varie sur un cercle $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

11 Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i$

1) a)Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre alors l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère ON, on considère les points A, B, C d'affixes respective 2, $1+i$, $3+3i$.

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un rectangle.

3) Pour tout point M de P d'affixe z tel que $z \neq (1+i)$ on associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.

a) Montrer que $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) En déduire la nature du triangle BMM'.

12 Ou considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0$.

1) a) Vérifier que $z_0 = 3i$ est une solution de L'équation (E).

b) Montre que (E) est équivalente à l'équation $(z-3i)[(z-3)^2 - 6i] = 0$.

2) a) Résoudre dans C l'équation
$U^2 = 6i$ d'inconnue U.

b) Déduire les antres solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

3) Soit dans le plan complexe P les points M_0, M_1 et M_2 images respectives de $3i$, $3+\sqrt{3}(1+i)$ et $3-\sqrt{3}(1+i)$

Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$ et I son centre.

a) Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.

b) Trouver l'affixe de I.

13 1) Soit l'équation (E) :

$$z^3 + \left(\sqrt{3} + i\right) z^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right) z + i = 0$$

Vérifier que (- i) est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonomé direct. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -i$, $z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et $z_C = \overline{z_B}$

a) Représenter les points A, B et C.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

c) En déduire la nature du triangle ABC

14 Pour tout nombre complexe z on pose :

$$f(z) = z^3 + 2\left(i - \sqrt{3}\right) z^2 + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right) z + 8i$$

1) Montrer que l'équation f(z) = 0 possède une racine imaginaire pure z_0. En déduire les autres racines z_1 et z_2. (On notera z_1 la racine dont la partie imaginaire est négative).

2) On pose $w = \frac{z_1}{z_0}$.

a) Donner la forme exponentielle de w.

b) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct. A tout nombre complexe z on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, wz et w^2z. Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

15 Soit θ un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

On considère l'équation d'inconnue z, (E) :

$$(1 + iz)^3(1 - i\,\text{tg}\,\theta) = (1 - iz)^3(1 + i\,\text{tg}\,\theta)$$

1) Soit z une solution de (E).

a) Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b) En déduire que z est réel.

2) a) Ecrire $\frac{1 + i\,\text{tg}\,\theta}{1 - i\,\text{tg}\,\theta}$ sous forme trigonométrique.

b) Soit z un nombre réel, on pose z = tg α avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ecrire l'équation portant sur α traduisant (E) et la résoudre. Déterminer alors les solutions de (E).

16 1) Déterminer les racines cubiques de $u = 4\sqrt{2}\,(-1 + i)$

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Ecrire $\frac{1}{1 - e^{i\theta}}$ sous la forme cartésienne.

3) Résoudre, dans C, l'équation (E) :

$$(2z - 1)^3 = 4\sqrt{2}\,(-1 + i)\,z^3$$

17 1) a) Déterminer la forme trigonométrique de $\lambda = (1+1)(1+i\sqrt{3})$

b- En déduire $\text{Cos}(7\pi/12)$ et $\text{Sin}(7\pi/12)$

2) Déterminer les racines cubiques de chacun des complexes a = 2 + 2 i et $b = \overline{a}$ puis placer les images des complexes trouvés dans un repère ON (unité : 2 cm).

3) Soit $P(z) = z^6 - 4z^3 + 8$ et l'équation (E) : $P(z) = 0$.

a) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

b) Résoudre dans C l'équation (E).

4) En déduire une factorisation de P(z) en produit de polynômes du second degré à coefficients réels.

18 Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par (E) :

$i z^2 + (2\text{Sin}\,\theta)\,z - 2i\,(1 + \text{Cos}\,\theta)$

1) a) Vérifier que :

$\text{Sin}^2\theta - (1 + \text{Cos}\,\theta) = -(1 + \text{Cos}\,\theta)^2$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).

2) Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct. Les points M' et M" d'affixes respectives

$z' = 1 + \text{Cos}\,\theta + i\text{Sin}\,\theta$ et

$z' = -1 - \text{Cos}\,\theta + i\text{Sin}\,\theta$.

a) Montrer que $z'' = -\overline{z'}$. En déduire que les points M' et M" sont symétriques par rapport à une droite que l'on déterminera.

b) Ecrire z' sous forme exponentielle, en déduire que $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)}$

c) En déduire que le triangle OM'M" est isocèle et déterminer les valeurs de θ pour les quelles le triangle OM'M" est équilatéral.

19 Soit $\theta \in]0, \pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$

(E) : $z^3 + 4z^2 + \left(5 - e^{2i\theta}\right)z - 4i\,\text{Sin}\,\theta\, e^{i\theta} = 0$

1) a) Prouver que $e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1 + 2i\text{Sin}\,\theta\; e^{i\theta}$.

b) Montrer que $z_0 = -2$ est une solution de (E) puis la résoudre.

2) On donne les points A(-2), $M_1\left(z_1 = -1 + e^{i\theta}\right)$ et $M_2\left(z_2 = -1 - e^{i\theta}\right)$

a) Mettre sous forme exponentielle z_1 et $\frac{z_1}{z_2}$

b) Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I.

c) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M_1 quand θ varie puis déduire Γ_2 l'ensemble des points M_2 et les construire.

d) Montrer que OM_1AM_2 est un rectangle puis déterminer la valeur de θ pour laquelle on obtient un carré.

20 θ étant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :
$z_1 = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{3i\theta}$.

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe : $z_3 = 1 + e^{i\theta} + e^{3i\theta}$
(On rappelle que
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(E_\theta) : z^2 - (2 + e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.

21 α étant un réel de $]0,\pi[$ et z un nombre complexe. On pose
$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1) a) Calculer P(1).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et écrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$U^3 = e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

3) Vérifier que pour tout réel θ, on a :
$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

4) Résoudre dans C l'équation :
$$(z-1)^6 + 2\sin\alpha\,(z-1)^3 + 1 = 0$$

22 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :
$z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) θ étant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation dans $\mathbb{C}$,
$E_\theta : z^2 - (2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta}) = 0$.

a- Vérifier que 1 est une solution de E_θ .

b- En déduire l'autre solution de E_θ .

3) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a- Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b- Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

b- Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

(D'après Bac Tunisien 2000).

23 1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :
$z^2 - 2iz - 2 = 0$.

b- Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$, on considère l'équation d'inconnue z complexe : (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}.z + e^{2i\theta} - 1 = 0$.
Résoudre l'équation (E).

3) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_1 = 2e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$.

a- Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

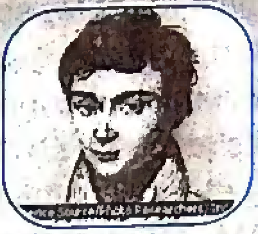
b- Montrer que OBAC est un rectangle.

c- Déterminer le réel θ de $]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carré.

(D'après Bac Tunisien 1999).

APERÇU HISTORIQUE

Niels Abel



Évariste Galois

En 1545, le mathématicien italien **Jérôme Cardan** publie une méthode de résolution algébrique développée par **Niccolò Tartaglia** des équations du troisième degré où la racine est exprimée en fonction de leurs coefficients. L'élève de Cardan, **Ludovico Ferrari**, et Tartaglia découvrent une solution algébrique pour des équations du quatrième degré.

En 1629, le mathématicien français, **Albert Girard**, admet la possibilité qu'une équation ait des racines négatives ou des racines complexes. Il est ainsi en mesure de compléter les découvertes partielles de **François Viète** concernant les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique. Viète avait découvert que si a et b sont les racines de $x^2 - px + q = 0$, alors $p = a + b$ et $q = a \times b$.

Plus généralement, Viète démontre que, si le coefficient de plus haut degré de l'équation $p(x) = 0$ est 1, alors l'opposé du coefficient d'ordre suivant est égal à la somme de toutes les racines ; le troisième coefficient suivant est égal à la somme de tous les produits de deux racines, et l'opposé du quatrième coefficient est égal à la somme de tous les produits de trois racines. Si le degré de l'équation est pair, le dernier coefficient est le produit de toutes les racines ; s'il est impair, l'opposé de ce coefficient est égal au produit de toutes les racines. Viète apporte également une contribution importante aux méthodes numériques d'approximation des racines d'équations.

En 1635, **René Descartes** publie un texte sur la théorie des équations, avec notamment une règle des signes permettant de déterminer le nombre de solutions positives et négatives d'une équation. Quelques décennies plus tard, **Isaac Newton** indique une méthode itérative pour trouver les racines d'une équation, elle est connue aujourd'hui sous le nom de méthode de **Newton-Raphson.**

À la fin du XVIIIe siècle, le mathématicien allemand **Carl Friedrich Gauss** démontre que toute équation polynômiale a au moins une solution. Il reste cependant à déterminer si cette racine peut s'exprimer à l'aide d'une formule algébrique faisant intervenir les coefficients de l'équation, comme c'est le cas pour les équations de premier, second, troisième et quatrième degré. Dans le cadre de cette recherche, le Français **Joseph Lagrange** développe une méthode de permutation des racines d'une équation. Cette idée est reprise par l'Italien **Paolo Ruffini**, le Norvégien **Niels Abel** et le Français **Évariste Galois.** Les travaux de ces quatre mathématiciens conduisent à une théorie complète des racines des polynômes. D'après cette dernière, une équation polynômiale peut être résolue à l'aide d'une formule algébrique générale, seulement si le degré du polynôme est inférieur à cinq. Les travaux de Galois donnent également la réponse à deux célèbres problèmes posés par les Grecs : Galois démontre qu'en utilisant seulement un compas et une règle, il est impossible de partager un angle quelconque en trois parties égales et de construire un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné.

Partie 2

Chapitre 3

Droites et plans dans l'Espace

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(2, 3,0), B(3,2,-3) , C(4,-1,2) et D(3,0,-2).

1) Montrer que les quatre points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

2) a) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I,J,K et L des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Quelle conséquence peut-on tirer au sujet du quadrilatère IJKL ?

3) On désigne par M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{NL}$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{NK}$.

2 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(-1,2,3) , B(4,1,-2) et C(3,4,-5)

1) a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

b) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2) Déterminer les coordonnées du point M tel que ABCM soit un parallélogramme

3 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On donne les points A(-1,2,4) et B(5,-2,2)

1) Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB]

2) Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

4 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-m\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\4-m\\m-3\end{pmatrix}$; m est un réel.

Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

5 Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(2,2,2), B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1).Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

6 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de ces trois vecteurs.

b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

7 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On donne les points A(0,-3,-4), B(6,1,-3) et C(-8,-9,4)

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [AB] et [AC]

3) a) Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{IJ}$

b) Prouver que les points A, C et K sont alignés et préciser leurs positions relatives.

$\mathscr{W}$ est muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a :

$$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix} = 0\right) \text{ où } \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix} = 0\right)$$

$$\text{où } \begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}$$

COURS

Equations de droites dans l'espace
Positions relatives de deux droites

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

1) Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ et un point A de l'espace $\mathscr{E}$.

Soit D la droite définie par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Montrer qu'un point M appartient à D si et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{u}$

2) On considère la droite D = D (A, $\vec{u}$) où A(x_0, y_0, z_0) et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit M(x, y, z) un point de l'espace. Montrer que M$\in$D si et seulement si, il existe un réel λ tel que : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ constitue une **représentation paramétrique** de la droite D dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Activité 2

On considère les points A(1, 2, -1) et B(4, -3, 0) de l'espace $\mathscr{E}$. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

Activité 3

Soit la droite D passant par A(1, -1, -3) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite D.
b) Soit M(x, y, z) un point de l'espace . Montrer que M appartient à D si et seulement si on a : $\begin{cases}3x+2y-1=0\\5x+2z+1=0\end{cases}$

On dit que ce système constitue une **représentation cartésienne** de la droite D dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Activité 4

Soit la droite D de l'espace $\mathscr{E}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-5t;\ t\in\mathbb{R}\\z=1-t\end{cases}$

Déterminer une représentation cartésienne de la droite Δ passant par le point A(3, -2, 1) et parallèle à D.

Activité 5

On considère les deux droites D et D' de l'espace $\mathscr{E}$ de représentations paramétriques respectives : $D:\begin{cases}x=3\alpha-2\\y=-2\alpha+1,\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$ et $D':\begin{cases}x=-3t+1\\y=-t+2\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=4t-3\end{cases}$

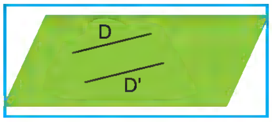
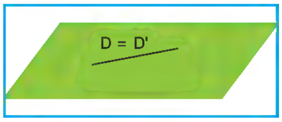
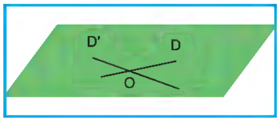
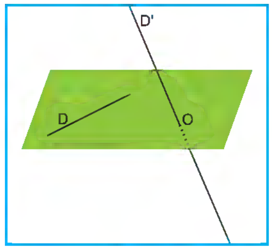
1) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{v}$ de D'.
2) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.
3) Les droites D et D' sont-elles coplanaires ? Justifier la réponse.

Activité 6

On considère les droites D_1 et D_2 de l'espace $\mathscr{E}$ définies par :

$D_1:\begin{cases}x=3z-5\\y=\dfrac{2}{3}z+1\end{cases}$ et $D_2:\begin{cases}x=9z+2\\y=2z-7\end{cases}$

1) Donner une représentation paramétrique pour chacune de ces deux droites.
2) Etudier la position relative, dans l'espace, des droites D_1 et D_2.

<table>
<tr><th colspan="4">Positions relatives de deux droites D et D' de l'espace</th></tr>
<tr>
<td>Les vecteurs directeurs de D et D' sont colinéaires.
D ∩ D' = Ø .
D et D' sont strictement parallèles. (D // D')</td>
<td>Les vecteurs directeurs de D et D' sont colinéaires.
D ∩ D' = D = D'.
D et D' sont confondues.
(D // D').</td>
<td>Les vecteurs directeurs de D et D' ne sont pas colinéaires
$D \cap D' = \{O\}$.
D et D' sont sécantes en O.</td>
<td>Les vecteurs directeurs de D et D' ne sont pas colinéaires et D ∩ D' = Ø.</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">D et D' sont coplanaires</td><td>D et D' ne sont pas coplanaires</td></tr>
</table>

Activité 7

On considère les trois droites D, D' et Δ de l'espace $\mathscr{E}$ telles que:

$$D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \; ; \quad D' : \begin{cases} x = -2\beta \\ y = -\beta - 1 \\ z = \beta + 4 \end{cases}, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \Delta : \begin{cases} x - y + 3z + 3 = 0 \\ x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la position relative des droites D et D'.
2) Donner une représentation paramétrique de Δ.
3) Etudier la position relative des droites D et Δ.

Equations de plans dans l'espace
Positions relatives de deux plans

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

Soit un plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, défini par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires. Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

1) Montrer que M appartient à P si et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

2) En déduire que $M \in P$ si et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \; ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$ constitue une **représentation paramétrique** du plan P dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 2

Donner un système d'équations paramétriques du plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, passant par le point A(4, 1, 1) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Activité 3

On considère les points A(-1, -2, 5), B(1, 7, 1) et C(3, 4, 1) de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Montrer que ces trois points ne sont pas alignés.

2) Donner un système d'équations paramétriques du plan Q passant par les points A, B et C.

Activité 4

On considère les points A(2, 3, 1), B(1, 0, 2) et C(1, 1, 3) de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan de l'espace $\mathscr{E}$.

2) Soit M(x, y, z) un point de l'espace et soit P le plan passant par A, B et C.

a) Calculer à l'aide de x, y et z le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que M appartient à P si et seulement si 4x - y + z - 6 = 0

L'équation 4x - y + z - 6 = 0 est une **équation cartésienne** du plan P dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

3) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ soit un vecteur du plan P

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

- Tout plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
- Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est celle d'un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
- Soit P : $ax + by + cz + d = 0$ un plan de l'espace et soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. $\vec{u}$ est un vecteur du plan P, si et seulement si, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Activité 5

On considère le plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, passant par les points A(2, -4, -3) et B(-3, 2, 1) et parallèle à la droite $D(O,\vec{u})$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de P.

Activité 6

Soient P et Q deux plans de l'espace $\mathscr{E}$ définis par P : $x + 2y - 4z + 1 = 0$ et Q : $\frac{1}{2}x + y - 2z + 1 = 0$.

Montrer que P et Q sont parallèles.

Activité 7

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit le plan P défini par P : $x - 2y + z + 3 = 0$.

1) Donner un point et deux vecteurs directeurs de P.
2) En déduire une représentation paramétrique du plan P.
3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par l'origine O.

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Deux plans P et P' de $\mathscr{E}$ sont parallèles si et seulement si, tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.

Soient P : $ax + by + cz + d = 0$ et P' : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ avec a', b' et c' trois réels non nuls. On a : $\left(P // P'\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$

Activité 8

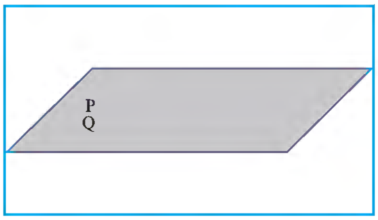
L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

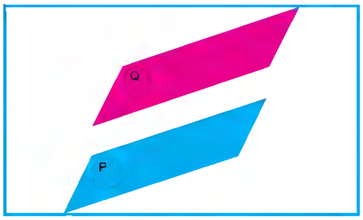
1) Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

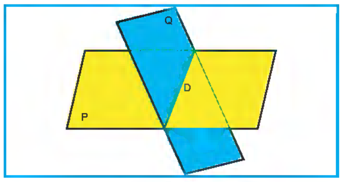
2) Donner une équation cartésienne de la droite d'intersection des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

3) Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A (1, 2,- 3) et parallèle au plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

4) Déterminer l'intersection du plan Q : y = 2 et du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives de deux plans P et Q de l'espace</th></tr>
<tr>
<td>

les plans P et Q
sont confondus
P = Q</td>
<td>

les plans P et Q
sont disjoints
$P \cap Q = \emptyset$</td>
<td>

les plans P et Q
sont sécants suivant
une droite D
$P \cap Q = D$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">P et Q sont parallèles :
Tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.</td>
<td>P et Q sont sécants :
Il existe au moins un vecteur de l'un qui n'est pas de l'autre.</td>
</tr>
</table>

Activité 9

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Etudier la position relative des deux plans P et Q et déterminer $P \cap Q$, dans chacun des cas suivants :

a) P : x - 2y + z + 5 = 0 ; Q : -2x + 4y - 2z + 7 = 0.

b) P : x - 2y + z + 1 = 0 ; Q : 3x + 4y - 2z + 5 = 0.

c) P : 2x - 3y + 2z - 4 = 0 ; Q : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 5 - 4\lambda + 2\mu \end{cases}$; $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Activité 1

1) Rappeler les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et illustrer chaque position par une figure.
2) L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ On donne le plan P et la droite D définis par P : $3x - 2y + z - 5 = 0$ et $D : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + 2t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -6 - 5t \end{cases}$

a) Montrer que D est incluse dans le plan P.
b) Montrer que D est strictement parallèle au plan $Q: x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$.

Soit D une droite et P un plan de l'espace. On a :
- D est parallèle à P si et seulement si un vecteur directeur de D est un vecteur de P.
- D est parallèle à P ou bien D est sécante avec P.

Activité 2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par le point A(2, -1, 0) et de vecteur directeur $\vec{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P passant par le point B(1, -2, 2) et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Etudier la position relative de D et P dans l'espace.

Activité 3

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le plan P et la droite D définis par :

$$P : x - 2y - z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad D : \begin{cases} 3x + y - 10 = 0 \\ 2x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que D est sécante à P.

2) Déterminer le point d'intersection de D et P.

Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ On considère les trois plans P, Q et R définis par : $P : x - y + z + 1 = 0$; $Q : x + y - z + 1 = 0$; $R : x + 2y + z - 1 = 0$.

1) Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D dont on donnera une représentation paramétrique.
2) Etudier la position relative de la droite D et du plan R.
3) En déduire l'intersection des trois plans P, Q et R.

Activité 5

On considère un tétraèdre ABCD .Soit P un point de [AB], Q un point de [AC] et R un point de [CD] tels que les droites (PQ) et (BC) soient sécantes en un point M.
1) Déterminer l'intersection des plans (PQR) et (BCD).
2) Déterminer l'intersection des trois plans (PQR), (BCD) et (ABC).
3) On suppose que ABCD est un tétraèdre régulier de côté α et que l'espace est muni du repère cartésien $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ et on considère les points $P(0, 0, \frac{3}{4}\alpha)$; $Q(\frac{1}{2}\alpha, 0, \frac{1}{2}\alpha)$ et $R(\frac{1}{4}\alpha, \frac{3}{4}\alpha, 0)$
   a) Donner une équation cartésienne de chacun des plans (BCD) et (ABC).
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $6x + 4y + 12z - 9\alpha = 0$.
   c) Déterminer les coordonnées du point M.
   d) Démontrer que $(PQR) \cap (BD) = (MR) \cap (BD)$.
   e) Soit S le point d'intersection des droites (MR) et (BD).Déterminer les coordonnées de S.
   f) Que représente le quadrilatère PQRS pour le tétraèdre ABCD ? Justifier la réponse.

RÉSUMÉ DU COURS

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\mathscr{W}$ muni de la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et A, B, C et D quatre points de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à (A, B, C et D appartiennent à un même plan).

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On a :

  ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$).

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$).

* Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

  Une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ est de la forme

  $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

  $D(A, \vec{u})$ et $D(A', \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace $\mathscr{E}$.

Une représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \ ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

* Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est celle d'un plan. Et tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

* Soit $P : ax + by + cz + d = 0$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$\vec{u}$ est un vecteur du plan P, si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Soient deux plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

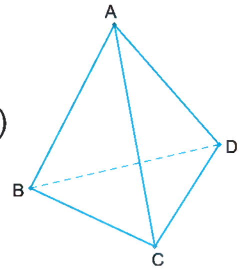
avec a', b' et c' trois réels non nuls. On a $(P // P') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$.

* Deux plans sont parallèles si tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.
* Deux plans sont sécants si et seulement si il existe un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.
* Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est un vecteur de ce plan.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

ABCD est un tétraèdre régulier de côté a. Soit M un point du segment [BC] et P le plan perpendiculaire à [BC] passant par M. La section du tétraèdre par ce plan est un triangle MNP. Soit G le centre de gravité du triangle MNP. Il s'agit de déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].



Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Définir un réel a libre dans [0,10] et les points A, B, C et D sachant que le repère orthonormal R_{xyz} est le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par : O est le centre de gravité de la face BCD.

$\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ et de même sens.

$\vec{j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$ et de même sens.

$\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens.

Créer / Solide / Polyèdre convexe / Défini par ses sommets : permet de construire le tétraèdre ABCD nommé P_y.

Après avoir placé un point libre M sur le segment [BC], en sélectionnant :

Créer / Plan / perpendiculaire à une droite, définir le plan Q passant par M et orthogonal à [BC].

Créer / Ligne / Polygone convexe / Section d'un polyèdre par un plan : permet de visualiser la section du tétraèdre ABCD par le plan.

En déplaçant le point M sur le segment [BC], préciser :

a) La nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan Q.

b) La section de ABCD par le plan Q lorsque M est le milieu I de [BC].

On suppose que le point M est sur le segment [BI].

Définir les points N et P, intersections du plan Q avec les segments [AD] et [AB]. Construire G en sélectionnant : Créer / Point / Centre divers / Centre de gravité.

En sélectionnant Divers / Modifier, modifier M comme point libre sur le segment [BI].

En utilisant Créer / Ligne / Courbe / Lieu de points : tracer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BI].

En utilisant les symétries de la figure, conjecturer l'ensemble des points G.

Une stratégie de justification de la conjecture :

On se place dans le repère cartésien $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$. Si le point M est sur le segment [BI], il a pour coordonnées (x,0,0) avec $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Montrer que G a pour coordonnées $\left(\frac{x}{3}, \frac{2x}{3}, \frac{2x}{3}\right)$ puis que : $\overrightarrow{BG} = \frac{2x}{3}\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

Soit G_1 le centre de gravité du triangle IAD. On a : $\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$

Montrer que, pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{BG} = 2x\,\overrightarrow{BG_1}$.

En déduire l'ensemble des points G lorsque M est un point du segment [BI].

Déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs :

$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{u'} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$

$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v'} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$

$\vec{w} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w'} = -5\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ soient colinéaires.

b) Déterminer les réels α et β tels que $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ soient colinéaires.

c) Déterminer les réels λ et μ tels que $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ soient colinéaires.

2 l'ensemble $\mathscr{W}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

3 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

on donne les points

A(1,-1,1) ; B(2,-2,2); C(1,0,1) et D(0, 0,3).

Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) dans l'espace.

4 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on donne les points

A(1, 0, 2) ; B(-1, 1, 4) ; C(5,-1, 2).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Donner une représentation paramétrique du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Soit le point D(2, 3, 3).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD).

b) Etudier la position relative de la droite (AD) et du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

5 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ définis par :

$\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$

et le point A(1, 1, 4) de $\mathscr{E}$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par A et qui admet le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ comme vecteurs directeurs.

2) Existe-t-il des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$? Justifier la réponse .

6 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points A(1, -2, 1) ; B(2, -1, -2) et C(1,0, 1).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P de l'espace $\mathscr{E}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P

c) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P.

2) Déterminer, dans chacun des cas suivants, la position relative de la droite D avec le plan P :

a) $D = D(A, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

b) $D = D(O, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

c) $D = D(B, -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$

7 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient D et D' les droites définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \quad , \beta \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$$

a) Donner un vecteur $\vec{u}$ directeur de D et un vecteur directeur de D'.

b) Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.

c) Déterminer l'intersection de D et D' et conclure sur la position relative de ces deux droites.

8 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P' :

a) P: $x - y + z + 1 = 0$; P': $-x + y - z = 0$

b) P: $2x + y + z - 2 = 0$; P': $x - y - z = 0$

c) P: $2x - y + z + 1 = 0$; P': $x + 2y + 3z - 1 = 0$

d) P: $x + 2z - 1 = 0$; P': $y - 2z + 4 = 0$

e) P: $2x - 3y + 2z - 4 = 0$

$$P' : \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 1 - 2t + s ; \ (t,s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = t + 3s \end{cases}$$

f) $$P : \begin{cases} x = 1 + m - p \\ y = 2 - m - p \quad ; (m,p) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -1 + m - 2p \end{cases}$$

$$P' : \begin{cases} x = -2 - 2t + 2s \\ y = 5 + 2t + 2s \quad ; (t,s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 4 - 2t + 4s \end{cases}$$

9 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points :
A(1,0, 2) ; B(-1, 2, 1) ; C(0, 1, 1).

a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle au plan (ABC) et passant par le point I(0, 2 , -3).

10 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Déterminer l'intersection de la droite D et du plan P dans chacun des cas suivants

a) $$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

$P : x + y + z + 4 = 0$

b) $P: x - y + z - 2 = 0$

et $D : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$

c) $D:\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=-2\alpha \\ z=-\alpha+1 \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$;

$P:\begin{cases} x=3+2\alpha+3\beta \\ y=\alpha-4\beta \\ z=2+\alpha+\beta \end{cases}, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

d) $D:\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$;

$P: x-y+z+1=0$

11 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) Déterminer l'intersection deux à deux des trois plans suivants :

$P: 2x-y+z-3=0$;

$Q: x+2y+z-1=0$ et $R: 3x+y-z+2=0$

2) Déterminer l'intersection de ces trois plans.

APERÇU HISTORIQUE

La notion d'espace a évolué au fil des siècles.

Les mathématiciens ont longtemps considéré l'espace géométrique comme identique à l'espace physique dans lequel nous nous mouvons .Le postulat d'**Euclide** (qui stipule que « par un point non situé sur une droite ne passe qu'une droite et une seule parallèle à la première ») suffisait pour démontrer n'importe quel théorème de géométrie. Mais avec l'apparition des géométries non euclidiennes (au 19ième siècle), la notion d'espace s'est trouvée complètement bouleversée et aboutit au concept d'hyperespace (espace de dimension supérieure à 3).

D'autre part, l'avènement de la géométrie projective (**Jean Victor Poncelet** : mathématicien français 1788 - 1867, auteur de « traité des propriétés projectives des figures ») a permis d'envisager d'autres procédés de description de l'espace.

La géométrie dans l'espace constitue une base incontournable de nombreux domaines des mathématiques, de l'astronomie et de la navigation (Mesure, repérage etc.).

Euclide : mathématicien grec du 3ième siècle av.J.C. Ses Éléments, considérés comme le livre de géométrie par excellence, constituent une vaste synthèse de la géométrie classique grecque. La géométrie **euclidienne**, relative à Euclide et à sa méthode, qui se repose sur le postulat des parallèles d'Euclide. Les géométries non euclidiennes, quant à elles, ce sont des géométries dans lesquelles l'axiome correspondant à l'ancien postulat des parallèles est remplacé par un autre. Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Euclide entouré par des étudiants

Partie 2

Chapitre 4

Produit scalaire, Produit vectoriel et Produit mixte dans l'espace

Plan du chapitre

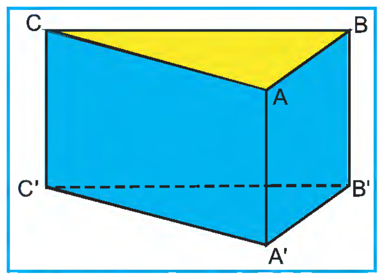
ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

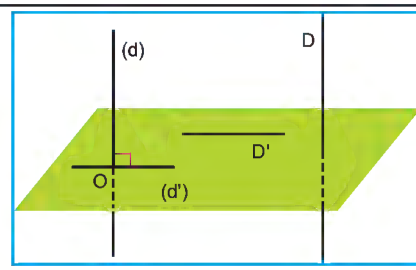
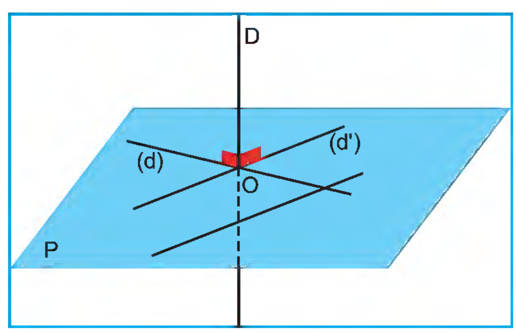
1 Soit un tétraèdre ABCD et I, J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].
Montrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=4\,\overrightarrow{IJ}$.

2 Soit un parallélépipède ABCDA'B'C'D' .Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

3 Soit le prisme droit ABCA'B'C' tel que les quadrilatères ABB'A' et BCC'B' soient deux rectangles.



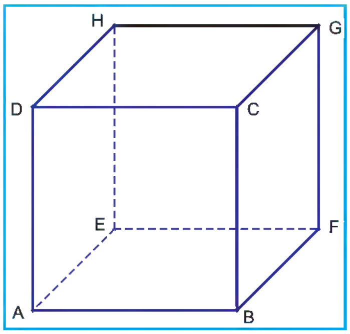
1) Montrer que la droite (BB') est perpendiculaire au plan (ABC).
2) On suppose que le triangle ABC est rectangle en A.
a) Montrer que (A'B') est orthogonale aux deux droites (CA) et (CC').
b) En déduire que la droite (A'B') est perpendiculaire au plan (ACC').

Deux droites D et D' de l'espace sont orthogonales, et on note D ⊥ D', lorsque leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires.	
Une droite D est perpendiculaire à un plan P, et on note D ⊥ P, lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan. **Point méthode :** Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.	

4 Soit un tétraèdre ABCD tel que les triangles ABC et ABD soient isocèles et de même base .Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

5 On considère un cube ABCDEFGH d'arête a ;

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$



Soit I le centre de gravité du triangle CFH.

1) a) Montrer que le triangle CFH est équilatéral.

b) Montrer que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur du segment [CH] et au plan médiateur du segment [CF].

c) En déduire que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2) On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P' le plan contenant les droites (AD) et (FG). Déterminer $P \cap P'$.

6 Soit un cube ABCDA'B'C'D' d'arête mesurant 1.

1) Vérifier que $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'})$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) Déterminer les coordonnées des sommets de ce cube dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'})$.

COURS

Dans toute la suite, l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k} \\ \left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1 \end{cases}$$

Exploitation du produit scalaire dans l'espace

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de l'espace $\mathscr{E}$. On a

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

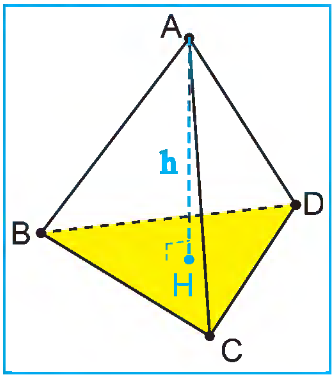
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$; A, B et C trois points de $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini comme suit :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

Activité 1

Soit a un réel strictement positif et ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a.



1) Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
   a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABH)
   b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle BCD.
   c) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AH}$.

2) a) Développer le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)^2$ et le calculer à l'aide de a.
   b) En déduire AH à l'aide de a.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ et pour tout réel α on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Activité 2

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme 1 et sont orthogonaux.

2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée de $\mathscr{W}$.

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{W}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

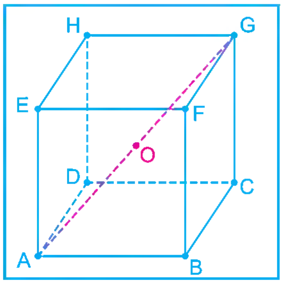
Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête a.

1) Calculer à l'aide de a les expressions suivantes :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{FB}$.

2) a) Montrer que les droites (DB) et (EB) sont orthogonales à la droite (AG).



b) En déduire que B, D et E ont même projeté orthogonal I sur la diagonale [AG] et que C, F et H ont même projeté orthogonal J sur [AG].

3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$.

Indication : On pourra considérer le repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{j} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AE}\ .$$

Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A(1,-2,1) et dont un vecteur normal est $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$.

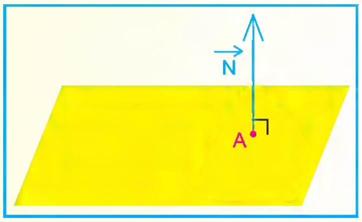
2) Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan Q : $2x + y - 3z + 7 = 0$ et passant par le point B(3,-2,5).

3) Soient C(-1,2,3) et D(0,4,-1) deux points de $\mathscr{E}$. Déterminer une équation cartésien du plan médiateur du segment [CD].

4) Trouver les coordonnées du point d'intersection du plan P : $2x + 3y + 6z = 117$ avec la droite (D) perpendiculaire à P et passant par le point E(5,3,0).

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{N}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que

$\overrightarrow{AM} . \vec{N} = 0$



L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit le plan P d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$.

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Activité 5

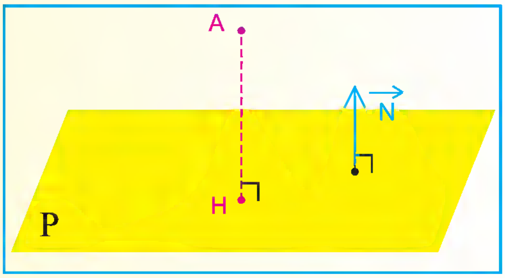
L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point B(0,-1,5) et de vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

2) Calculer la distance du point A(-2,3,-1) au plan P.

Distance d'un point à un plan

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$
Soient le plan P : $a x + b y + c z + d = 0$,
$A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P.



La distance du point A au plan P est le réel positif AH noté d (A, P) et tel que :

$$AH = \frac{\left| a x_A + b y_A + c z_A + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Activité 6

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On donne les points A(1,2,-1) , B(0,3,-2) et E(-1,3,-1) de $\mathscr{E}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   (On notera α le paramètre)
2) Vérifier que E n'appartient pas à la droite (AB).
3) Soit H (x_H , y_H , z_H) le point d'intersection de (AB) avec le plan passant par E et perpendiculaire à (AB). H est appelé le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).
   a) Calculer les coordonnées du point H.
   b) Calculer la distance EH, appelée distance du point E à la droite (AB).
4) Soit M(x,y,z) un point quelconque de la droite (AB).
   a) Exprimer x, y et z en fonction du paramètre α.
   b) Calculer, en fonction de α, la distance EM^2.
   c) Déterminer la valeur minimale de EM^2. Retrouver alors la distance de E à (AB).

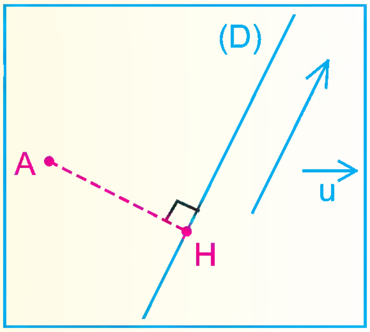
Distance d'un point à une droite

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit (D) une droite de l'espace $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D), A un point de $\mathscr{E}$ et H son projeté orthogonal sur (D).

La distance du point A à la droite (D) est le réel positif AH, noté d(A, (D)).

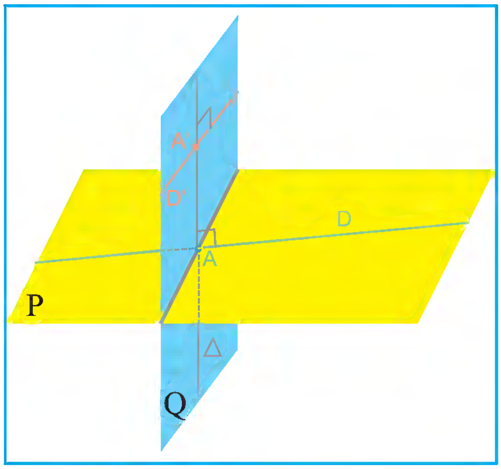
Le point H vérifie les conditions : $\begin{cases} H \in (D) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$.



Activité 7

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. D et D' désignent deux droites définies par $D : \begin{cases} x - z - 1 = 0. \\ 2z - y + 1 = 0. \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x = -4 + 2\beta. \\ y = \beta. \\ z = 3. \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D.
   b) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.
2) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P contenant D et parallèle à D' est : $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
   b) En déduire un vecteur directeur $\vec{w}$ d'une droite orthogonale à la fois à D et D'.
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q contenant D' et perpendiculaire à P est : $3x - 6y - 5z + 27 = 0$.



4) a) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de D et Q.
   b) La droite Δ qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ coupe D' en A'. Calculer les coordonnées du point A'.
   c) Calculer la distance AA' appelée distance des droites D et D'.

Soient, dans l'espace $\mathscr{E}$, deux plans P : $ax + by + cz + d = 0$ et P' : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

D (A, $\vec{u}$) et D (B, $\vec{v}$) sont deux droites de l'espace on a :

$P \,//\, P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires	$P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{N'}$
$D(A, \vec{u}) \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{N}$	$D(A, \vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires
$D(A, \vec{u}) \perp D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$	$D(A, \vec{u}) \,//\, D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exploitation du produit vectoriel dans l'espace

Activité 1

On considère un cube ABCDA'B'C'D' d'arête 1.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD'}\right)$ sont deux bases orthonormées directes de $\mathscr{W}$.

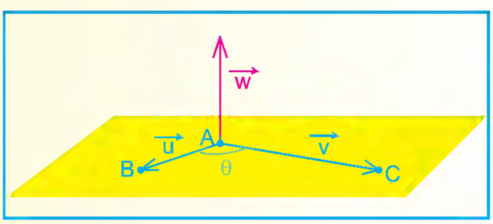
2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{D'D}\right)$ sont deux bases orthonormées indirectes de $\mathscr{W}$.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté et A, B et C trois points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
* Si non $\vec{w}$ est l'unique vecteur tel que

$$\begin{cases} 1/\ \vec{w} \text{ est normal au plan (ABC)} \\ 2/\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W} \\ 3/\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \left| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \right| \end{cases}$$



Activité 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right) \wedge \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$; b) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \wedge \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$

c) $\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right) \wedge \left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)$; d) $\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right) \wedge \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)$.

2) Montrer que :

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\|$

3) On suppose maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Montrer que pour tous réels a, b, c et d on a :

$\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right)$ et $\left(c\vec{u} + d\vec{v}\right)$ sont colinéaires si et seulement si $(a d - b c = 0)$.

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α un réel.
On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} .$$

$$\left(\alpha \vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(\alpha \vec{v}\right) = \alpha \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) .$$

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} .$$

$$\vec{w} \wedge \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v} .$$

Activité 3

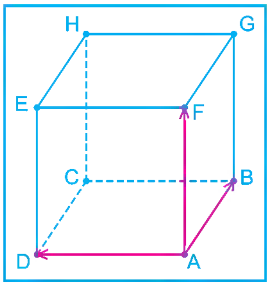
La figure ci-contre représente un cube ABCDFGHE tel que AB = 1.

1) Vérifier que le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right)$ est orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

2) Calculer les produits vectoriels suivants :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$;

$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BH}$.



Expression analytique du produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (yz' - zy')\,\vec{i} - (xz' - zx')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Activité 4

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, on considère les vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}+2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3}+1 \\ 3\sqrt{3}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Déterminer une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Sinus et cosinus de l'angle de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace orienté $\mathscr{W}$.

Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ alors on a :

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} .$$

Activité 5

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$.

a) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) Qu'en déduit-on pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$.

Calculer $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$. Conclure.

3) Soient les points A(2,0,0) , B(0,4,0) et C(0,0,3) de l'espace $\mathscr{E}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$.

b) Qu'en déduit-on ?

Activité 6

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

Donner deux vecteurs $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.

Activité 7

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1) On donne le point A(-3,5,2) et les deux vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Soient B(1,2,1) ; C(3,-1,1) et D(-1,0 ,2) trois points de $\mathscr{E}$.

a) Vérifier que B, C et D ne sont pas alignés.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan passant par les points B, C et D.

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan P, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

Activité 8

Soient A et B deux points de l'espace $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$.

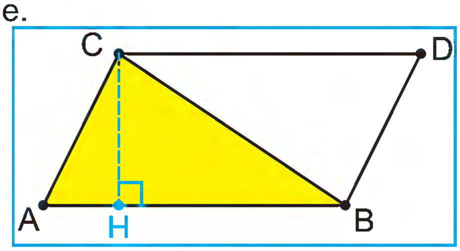
1) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

3) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

Activité 9

Soient un triangle ABC et H le pied de sa hauteur issue de C.
Soit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme ABDC.



1) Montrer que $\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

2) En déduire l'aire du triangle ABC.

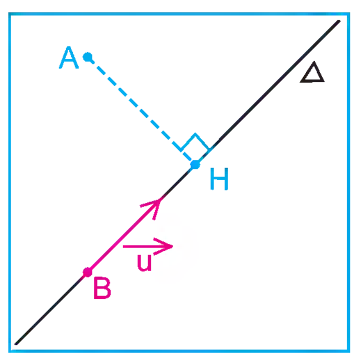
3) Soient les points A(1,2,3) , B(4,2,-1) et C(2,-1,2) de l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Aire d'un triangle

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace $\mathscr{E}$.
L'aire du triangle ABC est égale au réel $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

Activité 10

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère un point A et une droite Δ passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ.



1) Montrer que la distance AH (distance de A à Δ) est donnée par la formule : $AH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

2) Calculer la distance du point A(2,2,1) à la droite Δ passant par B(4,2,0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.

Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite $\Delta = D\left(B, \vec{u}\right)$ est le réel $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Exploitation du produit mixte dans l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le réel $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) . \vec{w}$. On le note $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right)$.

Activité 1

1) Montrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right) = 0$.

2) a) Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(1,1,1) , B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1).
Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{AM}\right) = 0$.

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right) = 0$.

Activité 2

1) Soit $\left(\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3}\right)$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$.
Montrer que la base $\left(\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3}\right)$ est directe si et seulement si $\left(\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3}\right) = 1$.

2) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

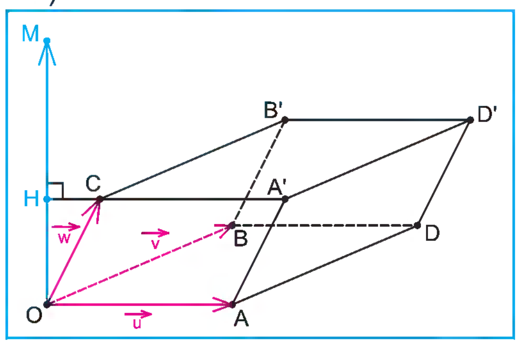
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.

Propriété

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$. On a : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si et seulement si le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$.

Activité 3

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$.
On désigne par O, A, B et C les points de l'espace tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.
Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (OM).



1) a) Montrer que $\left|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right| = OM \cdot OH$

b) En déduire le volume du parallélépipède OADBCA'D'B'.

2) Soit un tétraèdre ABCD. On désigne par υ son volume.

a) Montrer que $\upsilon = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

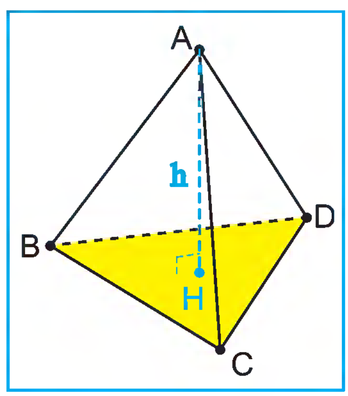
b) Calculer υ si l'on sait que A(1,1,1), B(2,0,0), C(0,3,0) et D(0,0,-2) dans un repère orthonormé direct de l'espace.

Activité 4

Soient ABCD un tétraèdre et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1) Montrer que la hauteur AH est donnée par la formule

$$AH = \frac{\left|\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|}.$$



2) On donne les quatre points A(-1,4,5), B(0,1,1), C(1,4,0) et D(-3,5,0) dans un repère orthonormé direct de l'espace.

a) Calculer la hauteur h issue de A du tétraèdre ABCD.

b) Déterminer une équation du plan (BCD) et retrouver le résultat de la question précédente.

Propriété

* Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède et $\mathcal{V}$ son volume.

On a : $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|$

* Soient ABCD un tétraèdre, υ son volume et h la hauteur issue du point A.

On a : $\upsilon = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$ et $h = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|}$.

Activité 5

Soient deux droites D et D', de $\mathscr{E}$, définies par leurs représentations paramétriques :

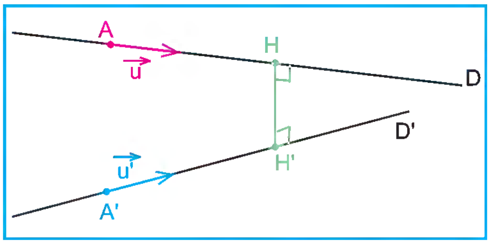
$$D: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 2\beta \\ y = 1 \\ z = -2\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que les droites orthogonales à la fois à D et D' ont toutes la même direction et donner un vecteur directeur de ces droites.
2) Montrer que parmi les droites précédentes une seule droite coupe à la fois D et D'. On la note Δ.
3) Soit H et H' les points d'intersection de Δ avec D et D'. Déterminer les coordonnées de H et H'.
4) Donner la représentation paramétrique de Δ.

Activité 6

Soient deux droites D et D' de $\mathscr{E}$ non coplanaires. D est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ et D' est définie par un point A' et un vecteur directeur $\vec{u'}$.

1) Montrer que pour tout point $M \in D$ et pour tout point $M' \in D'$, on a :
$\left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}\right) = \left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{MM'}\right)$.
2) Soit H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune. Montrer que la distance entre D et D' est : $HH' = \dfrac{\left|\left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\right\|}$.



3) Calculer la distance entre les droites D et D' suivantes :

$$D : \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases} (\alpha \in IR) \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 2\beta \\ y = 3 - 3\beta \\ z = 1 + 3\beta \end{cases} (\beta \in IR)$$

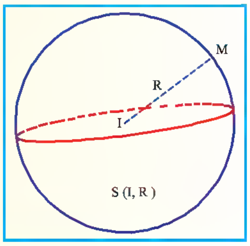
Soient $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u'})$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$.
H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance entre D et D' est $HH' = \dfrac{\left|\left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\right\|}$.

La Sphère

Définition

Soient I un point de l'espace $\mathscr{E}$ et R un réel positif.
On appelle sphère de centre I et de rayon R,
l'ensemble des points M de l'espace tels que IM=R.
On la note S(I,R)



Activité 1

Soient I un point de l'espace $\mathscr{E}$ et a un réel strictement positif.
Déterminer l'ensemble des centres des sphères de rayon a et passant par I.

Activité 2

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$.
Quel est l'ensemble des centres des sphères passant par A et B ?

Activité 3

Soient trois points A, B et C non alignés de l'espace $\mathscr{E}$.
Quel est l'ensemble des centres des sphères passant par A, B et C ?

Activité 4

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a.
Déterminer le centre I et le rayon R de la sphère S passant par A,B,C et D.
S est appelée la sphère **circonscrite** au tétraèdre ABCD.
(indication: étudier l'intersection des trois plans P ; Q et R médiateurs respectis des segments [BC] ; [CD] et [AB]).

Équation cartésienne d'une sphère

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

Soit le point I(1,-2,3) de $\mathscr{E}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels x,y et z pour que le point M(x,y,z) appartienne à la sphère de centre I et de rayon 2.

Activité 2

Soit R un réel positif et I(a,b,c) un point donné de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées x, y et z du point M(x,y,z) pour qu'il appartienne à la sphère de centre I et de rayon R.
2) Réciproquement , on considère l'ensemble (S) des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
   a) Ecrire la relation précédente sous la forme : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = h$. où h est un réel que l'on exprimera en fonction de a, b, c et d.
   b) Déterminer alors, suivant les réels a, b, c et d la nature et les éléments caractéristiques de (S).

Equation cartésienne d'une sphère

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient I (a, b, c) un point de l'espace et R un réel positif.
Une équation cartésienne de la sphère S (I, R) de centre I et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Activité 3

Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace $\mathscr{E}$ dans chacun des cas suivants :

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0$
2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2 = 0$
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3z + 12 = 0$

Activité 4

Soient les points A(1,2,0) et B(-1,0,3) de l'espace $\mathscr{E}$.
a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB].
b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que MA = 2MB.

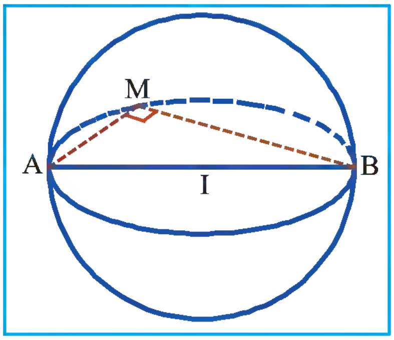
Activité 5

Soient deux points A et B distincts de l'espace $\mathscr{E}$ et I le milieu du segment [AB].

1) Soit M un point de l'espace $\mathscr{E}$. Montrer que

$$(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0) \Leftrightarrow (MI = \frac{AB}{2})$$

2) En déduire l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
3) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB] où A(-1,2,1) et B(-3,1,-2)



Section plane d'une sphère

Activité 1

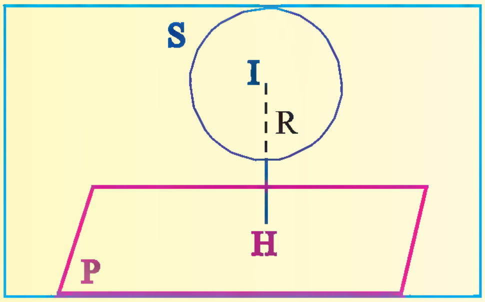
Soit S (I, R) une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
On note H le projeté orthogonal du point I sur P et d = d (I, P)= IH.

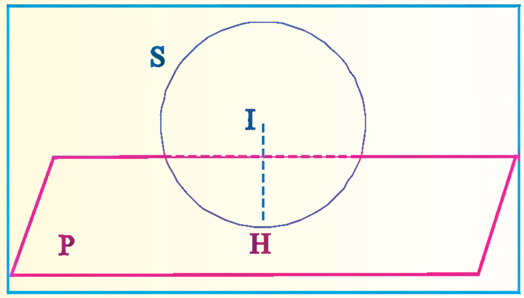
1) On suppose que d > R. Montrer que la sphère S (I, R) et le plan P ne se rencontrent pas.
2) On suppose que d = R. Montrer que le plan P rencontre la sphère S (I, R) en un seul point H.
   on dit que le plan est **tangent** à la sphère S (I, R).
3) On suppose maintenant que d < R.
   a) Soit M un point de P, montrer que M appartient à S (I, R) si et seulement si $HM^2 = R^2 - d^2$.
   b) En déduire que l'intersection de la sphère S (I, R) avec le plan P est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

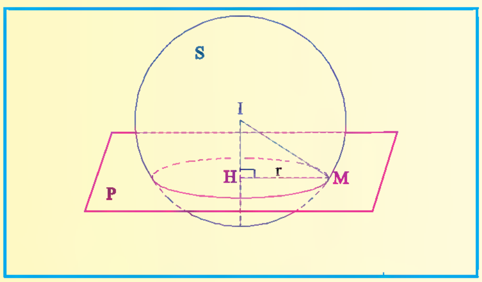
Section plane d'une sphère

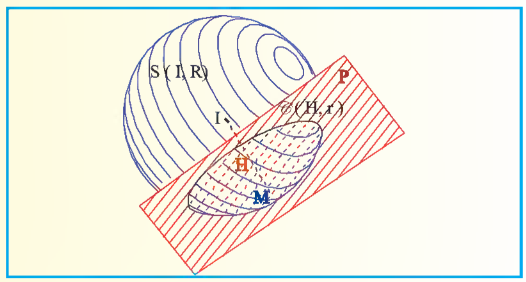
Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH.

* Si $d > R$ alors $P \cap S = \emptyset$ et on dit que P et S sont disjoints.
* Si $d = R$ alors $P \cap S = \{H\}$ et on dit que P et S sont tangents en H.
* Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$









$P \cap S = \mathscr{C}(H,r)$

Activité 2

On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, la sphère S de centre O et de rayon 5. Soit [AB] un diamètre de S, I étant un point de [AB].
On note OI = h et on coupe la sphère S par le plan P perpendiculaire à (AB) en I.
Déterminer l'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P dans chacun des cas suivants :
a) h = 4,8 b) h = 3 c) h = 0 d) h = 5 e) h = 5,1 .

Exercice Résolu

Enoncé :
L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Déterminer l'intersection de la sphère S d'équation cartésienne
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 2 = 0$ avec chacun des plans
$P : x + 3y + z + 10 = 0$ et $Q : x + y + z + 4\sqrt{3} = 0$.

Solution :

On a $(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 2 = 0) \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 4^2$

La sphère S a pour centre le point I(-2,3,-1) et pour rayon R = 4.

On a $d(I, P) = \dfrac{|-2+3x3-1+10|}{\sqrt{11}} = \dfrac{16}{\sqrt{11}} > 4$, il en résulte que $P \cap S = \varnothing$.

D'autre part on a $d(I,Q) = \dfrac{|-2+3-1+4\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 4$, donc Q et S sont tangents au point H

projeté orthogonal de I sur le plan Q.

Déterminons les coordonnées du point H.

Les coordonnées (x, y, z) de H vérifient simultanément les conditions :

$x + y + z + 4\sqrt{3} = 0$. car $H \in Q$

et $\begin{cases} x+2=\alpha \\ y-3=\alpha \\ z+1=\alpha \end{cases}$, $\alpha \in IR$ car $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à Q

D'où $(\alpha - 2) + (\alpha + 3) + (\alpha - 1) + 4\sqrt{3} = 0$. On obtient $3\alpha = -4\sqrt{3}$ c'est-à-dire

$\alpha = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Il en resulte que $H\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 2\,;\, -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 3\,;\, -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 1\right)$.

Activité 3

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Déterminer l'intersection de la sphère S et du plan P dans chacun des cas suivants :

1) S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 25 = 0$ et P : $12x + 5z - 19 = 0$
2) S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ et P : $2x - 3z + 5z + 18 = 0$
3) S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ et P : $x + y + z = 0$

Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Donner une équation cartésienne du plan P tangent à la sphère S de centre I(1,2,0) au point A(1,1,-1).

RÉSUMÉ DU COURS

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$\mathscr{W}$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$.

* Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

* Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Pour tous vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

* Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, le plan P d'équation cartésienne : $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0,0)$ et soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$.

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

La distance du point A au plan P est donnée par la formule :

$$d(A, P) = AH = \frac{\left| a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* Soient les plans $P : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ et $P' : a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$

de vecteurs normaux respectifs $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ On a :

- $P \,//\, P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires.
- $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont orthogonaux.
- $D(A, \vec{u}) \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.
- $D(A, \vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de $\mathscr{W}$ alors le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur nul.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$,

noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par : $\begin{cases} 1/\ \vec{w} \text{ est normal au plan (ABC)} \\ 2/\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W} \\ 3/\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)\right| \end{cases}$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et α un réel . On a :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$; $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$;

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$; $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

* Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, si on a

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (yz' - zy')\,\vec{i} - (xz' - zx')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$. Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors on a :

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}$$

* Si P est un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.
* Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$. L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \vec{w}$ On le note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

* Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$. On a :
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$.

* Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède et $\mathscr{V}$ son volume.

On a : $\mathscr{V} = \left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})\right|$.

* Soit ABCD un tétraèdre, υ son volume et h la hauteur issue de A. On a :

$$\upsilon = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| \quad \text{et} \quad h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|}.$$

* Soient $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u}')$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$.
H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance entre D et D' est $HH' = \dfrac{\left|\left(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\right\|}$.

* La distance d'un point A à une droite $\Delta = D\left(B,\vec{u}\right)$ est le réel $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

* Soient I(a,b,c) un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et R un réel positif. Une équation cartésienne de la sphère S(I,R) de centre I et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

* Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace. On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH.
  * Si $d > R$ alors $P \cap S = \varnothing$ et on dit que P et S sont disjoints.
  * Si $d = R$ alors $P \cap S = \left\{H\right\}$ et on dit que P et S sont tangents en H.
  * Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et on dit que P et S sont sécants suivant ce cercle.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soient S1 et S2 deux sphères de même centre o et de rayons respectifs 3 et 5.
P est le plan d'équation cartésienne Z = m où m est un paramètre réel tel que -3 < m < 3.
C1 est l'intersection du plan P avec S1 et C2 est l'intersection du plan P avec S2.
A1 désigne l'aire de C1 et A2 désigne l'aire de C2. On note A = A2 - A1 et on se propose de montrer que la valeur de A est constante.

Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Afficher le repère R_{xyz} du logiciel.
Créer /Solide/ sphère : S1 de centre o et de rayon 3.
Bis / S2 de centre o et de rayon 5
Créer /Numérique variable réelle libre m dans un intervalle -3 __ 3.
Créer/ le plan P définie par son équation Z - m =0.
Créer / ligne / cercle / la section C1 de la sphère S1 par le plan P.
Bis : P ; S2 ; C2.
Créer / numérique / mesure géométriques / l'aire A1 du convexe C1.
Bis : A2 du convexe C2.
Créer / numérique / calcul algébrique A2 - A1 et nommer cette différence A.
Créer / affichage / valeur déjà défini A1 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff0.
Bis A2 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff1.
Bis A ; (3 chiffres après la virgule) ; aff2.
Piloter avec les flèches de direction du clavier. Que peut-on conjecturer ?

Une stratégie de justification de la conjecture :

Déterminer, en fonction de m, la distance de o au plan P.
Calculer, en fonction de m, les rayons r_1 et r_2 respectifs des cercles C1 et C2.
Calculer, en fonction de m, les aires respectives A1 et A2 des cercles C1 et C2.
En déduire que l'aire A de la couronne est indépendante de m et donner sa valeur.

Activité 2

Soit A(-1 ; -1 ; 1) ; B(-1 ; 2 ; -2) et P : X + Y + Z - 2 = 0. Pour tout réel m on considère la sphère S_m de centre I(-1 ; m ; -m) et de rayon $R_m = \sqrt{m^2 - m + 1}$.
On se propose de vérifier que le point I_m décrit la droite (AB) et puis étudier suivant les valeurs de m la position relative de P et S_m.

Utiliser le logiciel Geospace W pour :

Créer /point / repérer dans l'espace/ A de coordonnées : -1 -1 1.
Bis / B de coordonnées : -1 2 -2.

Créer / le plan P défini par son équation X + Y + Z - 2 = 0.
Créer / point libre dans un plan P : nommer ce point C (Bis pour D, E et F)
Créer / ligne / polygone défini par ces sommets C D E F (déplacer ces points pour avoir la forme d'un parallélogramme illustrant le plan P et hachurer ce quadrilatère)
Créer /numérique / variable réelle libre dans l'intervalle -8 8 et la nommer m.
Créer / point repéré dans l'espace/ de nom I et de coordonnées : -1 m -m.
Créer / numérique / calcul algébrique / l'expression R_m égale à Rac(m^2 - m+1).
Créer / solide / sphère / de centre I de rayon R_m et de nom S_m.
Créer / ligne / cercle / la section C_m de la sphère S_m par le plan P.
Piloter avec les flèches du clavier et donner une conjecture puis la justifier.

EXERCICES ET PROBLÈMES

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1 Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

2 On donne un tétraèdre régulier ABCD (toutes ses arêtes ont même longueur que l'on notera a où a est un réel strictement positif)

1)Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ et que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

2) a)Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b)Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) , (AC) et (BD) , (AD) et (BC) ?

3) a)En écrivant $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}$.

b)Que représente la droite (IJ) pour le couple de droites (AB) et (CD) ?

c)Calculer les distances des droites (AB) et (CD) ; (AC) et (BD) ; (AD) et (BC) .

3 Donner une équation cartésienne du plan passant par A(1,-2,3) et de vecteur normal

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

4 Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A(0,1,-2) et perpendiculaire à la droite (CD) telle que C(-1,1,-1) et D(0-3,2).

5 Donner un système d'équations paramétriques de la droite perpendiculaire au plan P : 2x - 3y + z = 0 et passant par le point I(4,-2,0).

6 Ecrire une équation cartésienne du plan P sachant que le projeté orthogonal de l'origine O du repère sur ce plan est le point D (1,-2,3)

7 Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P'

P : x - y + z + 1 = 0 et P' : -x + y - z = 0

P : 2x + y + z - 2 = 0 et P' : x - y - z = 0

8 1) Donner une équation cartésienne d'un plan admettant le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur normal.

2) a) En déduire que les deux plans d'équations respectives x = 1 et y = 0 sont perpendiculaires.

b)Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

9 Calculer la distance du point A au plan P dans chacun des cas suivants :

A(1, 0, 2) et P : 2x - y + z - 2 = 0

A(0, 0, -3) et P : 2x - 2y + z + 5 = 0

A(-1, 1, 1) et P passant par les points B(0, 1, 0) et C(1, 0, 0) et D(0, 0, 1)

10 Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.

Déterminer $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}$ et $\vec{j}\wedge\vec{k}$

11 1) Montrer que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.
2) Montrer alors que les points A(1,0,1), B(1,1,0) et C(0,1,1) définissent un plan.
3) Donner une équation cartésienne de ce plan.

12 On donne les plans
$P : x + y + z + 1 = 0$
et $P' : x - y + 2z - 1 = 0$
1) préciser deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ normaux respectivement aux plans P et P'
2) Calculer le produit vectoriel $\vec{w}$ de ces deux vecteurs.
3) Déterminer la droite d'intersection de P et P'

13 Soient deux vecteurs orthogonaux. $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Démontrer que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 . \vec{v}$

14 Montrer que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée puis déterminer son sens.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{-4}{9} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad \vec{w}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

15 Soient A et B deux points distincts et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

1) $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AB} = 0$
2) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
3) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \overrightarrow{AB} = 0$
4) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

16 Soit un cube ABCDEFGH tel que AB = 1.
Calculer l'aire des triangles CEH, CFH et CDF.

17 Soit O un point de l'espace et $\vec{F}$ une force appliquée à un point A d'un solide indéformable.
On appelle moment de la force $\vec{F}$ au point O et on note $M_O(\vec{F})$, le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$
1) La droite (d) définie par $(A, \vec{F})$ est appelée support de la force.
a)Soit H le projeté orthogonal de O sur (d), montrer que $\|M_O(\vec{F})\| = OH.\|\vec{F}\|$.
b)En déduire que deux forces de même vecteur et de même support ont même moment en tout point de l'espace.
2) Soit O' un point de l'espace, montrer que le moment de $\vec{F}$ en O' est égal à la somme du moment de $\vec{F}$ en O et du vecteur $\vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.
3) Montrer que si trois forces ont une résultante nulle et si le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point quelconque de l'espace, alors les supports des forces sont coplanaires.

18 Soient P et Q les plans définis par
$P : x + 2y - 3z = 0$
et $Q : 2x - y + z - 3 = 0.$
1) Montrer que P et Q sont sécants. Soit D leur droite d'intersection.
2) Déterminer un vecteur directeur de D.
3) Donner une équation cartésienne du plan R passant par l'origine O du repère et perpendiculaire à D.
4) Préciser les coordonnées du point I intersection de R avec D.

19 Soient les quatre points A, B, C et D de coordonnées
$A(1, 0, \sqrt{2})$, $B(-1, 0, \sqrt{2})$, $C(0, -1, 0)$ et $D(0, 1, 0)$.
1) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
2) Quelle est la nature du tétraèdre ABCD ?
3) Calculer la hauteur de ce tétraèdre.
4) Soit a un réel de $[0,\sqrt{2}]$ et P_a le plan d'équation cartésienne $z = a$.
a) Montrer que P_a rencontre les droites (AC), (AD) , (BD) et (BC) en quatre points F, G, H et I.
b) Préciser la nature du quadrilatère FGHI.
5) a) Calculer le périmètre p(a) et l'aire s(a) du quadrilatère FGHI.
b) Préciser les extremums de p(a) et de s(a).

20 On donne les plans
$P : 3x - 2y + 5z - 1 = 0$
et $Q : 2x - 3y + 2z - 2 = 0$.
1) Montrer que P et Q se rencontrent suivant une droite D.
2) Soient a et b deux réels non tous nuls.
a) Montrer que la relation :
$a(3x -2y + 5z - 1) +b(2x -3y + 2z - 2) = 0$
est l'équation cartésienne d'un plan contenant la droite D.
b) En déduire une équation cartésienne du plan R passant par le point I(2,5,0) et contenant la droite D.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan S perpendiculaire à P et contenant D.
4) a) Calculer les distances du point A aux plans P et S et à la droite D.
b) Etablir une relation entre ces trois distances.

21 Ecrire une équation de la sphère de centre I et de rayon R dans chacun des cas suivants :
1) I(1, 2, 3) et R = 1
2) I(-1, 0, 3) et $R = \sqrt{2}$

22 Ecrire une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB]
1) A(-1, 3, 0) et B(0, 0, -2)
2) A(1, -2, 2) et B(1, -1 , -2)

23 Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que :
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 12 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z + 2x + 2y + 6z - 8 = 0$

24 Etudier dans chacun des cas suivants la position relative de la sphère S et du plan P :
a) $P : x - y = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x -2y - 2z = 0$
b) $P : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$
c) $P : x + y = 0$ et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

25 Soit D la droite définie par ses équations paramétriques
$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda\, ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$
et A(0,2,2) un point de l'espace.
1)Ecrire des équations cartésiennes de deux plans dont D est l'intersection.
2)a)Ecrire les équations paramétriques du plan P passant par A et contenant D.
b)Donner une équation cartésienne de P.
3)Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par le point B(0,0,1)
4)a)Ecrire une équation cartésienne du plan R contenant D et perpendiculaire à P.
b) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans R et P.
c) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans P et Q.

26 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

on donne les points A(1,1,1) ; B(3,1,0) et C(-1,0,1)

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan déterminé par les points A, B et C. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

c) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + 2z + 1 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont sécants.

2) Soit t un réel et le point I_t (1, -1, t)

a) Vérifier que la distance du point I_t au plan P est égale à la distance du point I_t au plan Q.

b) Montrer que si $t = -1$, alors le point I_t appartient à P et Q.

c) Montrer que si $t \neq -1$, alors il existe une sphère S_t de centre I_t et tangente à la fois aux plans P et Q. Quel est son rayon en fonction de t ?

3) Soit $t = 2$.

Déterminer les coordonnées du point H de contact de la sphère S_2 avec le plan Q.

(D'après Bac Tunisien, juin 2005)

APERÇU HISTORIQUE

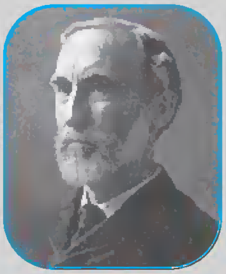
Hamilton William Rowan, Irlandais : 1805-1865

Hamilton étudie et pratique dès l'âge de 5 ans les langues anciennes : latin, grec, hébreu, entre 8 et 10 ans, il aura appris le français, l'italien et l'arabe et commence l'apprentissage du persan ! La rencontre avec un calculateur prodige lui donne le goût des mathématiques. Il entre au Trinity Collège de Dublin et dévore mathématiques et astronomie. Hamilton n'a que 17 ans lorsqu'il soumet à l'Académie royale de Dublin un correctif à la Mécanique céleste de Laplace... Astronome titulaire, à 22 ans, de la chaire d'astronomie à ladite Académie, il publia des travaux en optique géométrique et rénova la mécanique analytique (*mécanique hamiltonienne*, fondement de la mécanique quantique). Il se consacrera finalement aux mathématiques et tout particulièrement aux structures algébriques (groupe de transformations, espace vectoriel, algèbre, corps). Par son essai Elementary *Essay on Algebra as the Science of Pure Time* (1837), il est aussi à l'origine de la partition des rationnels qui amena Dedekind à la construction des nombres réels par les "coupures".

En 1843, Hamilton inventa les quaternions qui permettent de définir le produit vectoriel. Indépendamment et à la même période (1844) Grassmann définissait dans *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik* un « produit géométrique » à partir de considérations géométriques ; mais il ne parvient pas à définir clairement un produit vectoriel. Puis Grassmann lit Hamilton et s'inspire de ses travaux pour publier en 1862 une deuxième version de son traité qui est nettement plus claire. De même, Hamilton a lu les travaux de Grassmann et les a commentés et appréciés. Plus tard Maxwell commença à utiliser la théorie des quaternions pour l'appliquer à la physique. Après Maxwell, Clifford modifia profondément le formalisme de ce qui devenait l'analyse vectorielle. Il s'intéressa aux travaux de Grassmann et Hamilton avec une nette préférence pour le premier. En 1881, Gibbs publia *Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students of Physics* s'inspirant des travaux déjà réalisés notamment ceux de Clifford et Maxwell. Si les physiciens se sont empressés d'utiliser le formalisme de Gibbs, celui-ci ne fut accepté en mathématiques que bien plus tard après plusieurs modifications.

Elément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant.

Roberto Marco Longo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donne le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.



Josiah Willard Gibbs
New Haven,
11 février 1839
28 avril 1903

Josiah Willard Gibbs est un physico-chimiste américain. Il est aussi un des fondateurs de l'analyse vectorielle.

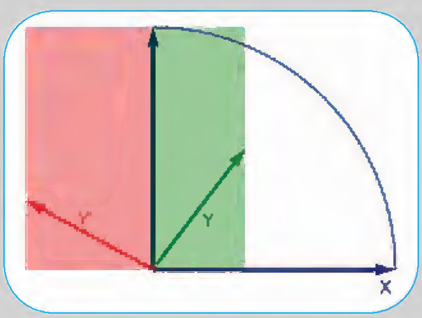
Gibbs passe son doctorat en 1863 à l'Université de Yale, où il devient membre de la société secrète Skull and Bones. Il étudie ensuite à Paris, Berlin et Heidelberg.

Parallèlement à Heaviside, il introduit l'analyse vectorielle en séparant la partie réelle et la partie vectorielle du produit de deux quaternions purs, ceci dans le seul but d'une utilisation en physique.

Gibbs écrit un premier ouvrage sur le sujet à l'usage de ses étudiants, et devant le succès obtenu, étaye l'analyse vectorielle dans une série de cours qui seront rassemblés et publiés en 1901 par son élève Wilson.

La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances ou en algèbre linéaire pour munir un espace vectoriel d'une distance. On peut, à la suite de Peano, voir le produit scalaire comme une aire. Si on oriente le plan de **x** vers **y**, le produit scalaire des vecteurs **x** et **y** est égal à l'aire orientée du parallélogramme construit grâce aux vecteurs **y** et $\mathbf{x}_r$. Le vecteur $\mathbf{x}_r$ est l'image du vecteur **x** par une rotation d'angle droit direct. Le produit scalaire peut donc se calculer à l'aide d'un déterminant : $\mathbf{x} \,.\, \mathbf{y} = \det(\mathbf{y} \,.\, \mathbf{x}_r)$. Sous cette forme, peuvent être retrouvées toutes les propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire.

Sur le dessin ci-dessous, les parallélogrammes ont été déformés en rectangle de même aire par la propriété de cisaillement. L'aire verte correspond à un produit scalaire positif et l'aire rose à un produit scalaire négatif.



Partie 2

Chapitre 5

Probabilité sur un ensemble fini

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Dans un parking de 6 places, combien y-a-t'il de façons de garer trois voitures?

2 Un club de basket-ball comporte 12 joueurs inscrits. Combien d'équipes différentes de 5 joueurs peut-il former?

3 Déterminer le nombre de façons de placer trois objets a, b et c dans deux cases x et y, chaque case ne peut contenir qu'un seul objet.

4 Déterminer le nombre de façons de placer trois objets a, b et c dans deux cases x et y, chaque case ne peut contenir qu'un seul objet.

5

1) On lance une fois une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

2)a)On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir la Dame de cœur ?

b) On tire, du jeu précédent, simultanément 3 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Roi ?

3) On jette, une fois, un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

4) On jette, 3 fois de suite un dé cubique parfait. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre 2, 4 et 6 ?

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)$$

- Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

• Soit E un ensemble de p éléments et F un ensemble de q éléments.
Le nombre d'applications de E dans F est :

$$(\text{card } F)^{(\text{card } E)} = q^p$$

• Soit E un ensemble de n éléments.
Le nombre de parties de E est

$$\text{card } \wp(E) = 2^n$$

• Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

6 On lance, une fois, un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 a 6.
On s'intéresse au numéro de la face supérieure.
Ce dé est truqué de sorte que la probabilité d'apparition de chaque numéro soit proportionnelle à ce numéro.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.

2) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : “ Obtenir un numéro pair “ ; B : “Obtenir un numéro impair “

C : “ Obtenir un numéro supérieur ou égal à 2 “ ; D : “ Obtenir un numéro premier “

COURS

Probabilité sur un ensemble fini

Langage des probabilités

• On appelle univers (ou univers des possibles), l'ensemble des résultats (ou éventualités) possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble se note Ω.
• Toute partie A de Ω est appelée événement.
• Si $A = \varnothing$, on dit que A est l'événement impossible.
• Si $A = \Omega$, on dit que A est l'événement certain.
• Si A est une partie contenant un seul élément de Ω, on dit que A est un événement élémentaire.
• L'évènement $A \cap B$ est l'évènement « A et B ». Il est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés simultanément.
• L'événement $A \cup B$ est l'évènement « A ou B ». Il est réalisé si l'un au moins des deux événements A et B est réalisé.
• L'ensemble $\Omega \setminus A$, qu'on note $\overline{A}$, est l'événement contraire de A. Il est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. C'est-à-dire si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
• Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $A \subset B$ alors $B \setminus A$ désigne l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.

Activité 1

Dans un lycée, 40% des élèves pratiquent des activités sportives ; 35% des élèves pratiquent des activités culturelles et 10% pratiquent des activités culturelles et sportives.
Un élève est choisi au hasard.
1) Quelle est la probabilité pour qu'il pratique des activités culturelles ou sportives ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il ne pratique ni des activités culturelles ni des activités sportives ?
3) Quelle est la probabilité pour qu'il pratique des activités culturelles et non sportives ?

Définition d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité définie sur l'ensemble $\wp(\Omega)$ des parties de Ω, toute application p de $\wp(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :

- $p(\Omega) = 1$.
- Pour tous événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Propriétés

Soient Ω un univers fini, $\wp(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, p une probabilité sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements. On a :

- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est A.
- $0 \leq p(A) \leq 1$
- Si $A \subset B$ alors $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$ et $p(A) \leq p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(\varnothing) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Activité 2

À la sortie d'un atelier de production, une vérification est faite sur la qualité des pièces produites et on a constaté la présence de deux types de défaut pouvant les rendre impropres à la vente : Un défaut dû à la conception et un défaut dû au montage.
Des statistiques ont montré que :
5% des pièces présentent un défaut dû à la conception parmi lesquelles 25% présentent aussi un défaut dû au montage.
Parmi les pièces ne présentant pas de défaut dû à la conception, 3% présentent un défaut dû au montage.
On désigne par A et B les évènements suivants :
A : " la pièce choisie présente un défaut dû à la conception "
B : " la pièce choisie présente un défaut dû au montage " .
a) Calculer $p(A)$
b) Calculer $p(A \cap B)$
c) Calculer $p(\overline{A} \cap B)$
d) En déduire $p(B)$.
e) Calculer $p(A \cup B)$.
f) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut.

Activité 3

Dans le tableau ci-dessous, on a consigné des informations concernant 1000 entrées dans un musée :

	Visiteurs tunisiens	Visiteurs étrangers	Total
Hommes	100	250	
Femmes	90		
Enfants	220	70	
Total			

1) Recopier et compléter le tableau.
2) On suppose que chacun des visiteurs présente un billet à l'entrée qu'il remet à la sortie.
Un billet est pris parmi les billets remis.
   a) Déterminer la probabilité des événements suivants :
      A : « Le billet est celle d'une femme ».
      B : « Le billet est celle d'une personne de nationalité étrangère ».
      C : « Le billet est celle d'un enfant tunisien ».
   b) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
   c) Le billet choisi est celle d'un homme, quelle est la probabilité pour qu'il soit tunisien?

Probabilité uniforme

Définition

Soient $\Omega = \{ w_1, w_2, w_3, ..., w_n \}$ et p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$.
Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit que p est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité.
Dans ce cas on a :

- $p(\{w_1\}) = p(\{w_2\}) = ... = p(\{w_n\}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{card } \Omega}$
- Pour tout évènement A on a : $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ (C'est le quotient du nombre des cas favorables à la réalisation de A par le nombre des cas possibles).

Activité 1 (résolue)

On lance simultanément deux dés cubiques non truqués A et B dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un produit égal à 6 ?

Solution :

a) Ω est l'ensemble des couples (a,b) avec a et b deux entiers compris entre 1 et 6 donc Card Ω = 36

Une somme égale à 7 peut s'obtenir de six façons différentes : (1, 6) ; (6 , 1) ; (2 , 5) ; (5 , 2) ; (3 , 4) ; (4 , 3). Si on désigne par A l'événement: « obtenir une somme égale à 7 » alors card A = 6 et par suite $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

b) Un produit égal à 6 s'obtient de 4 façons différentes : (1 ,6) ;(6,1) ;(2,3) ;(3,2). Si on désigne par B l'événement: « obtenir un produit égal à 6 » alors p(B)= $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Activité 2 (résolue)

D'un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un roi?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un valet ou un pique ?

Solution :

2) Le nombre des résultats possibles est égal au nombre de façons de choisir 3 objets parmi 32. On a donc $\text{card}\,\Omega = C_{32}^{3} = 4960$.

a) Pour qu'il y ait un as parmi les 3 cartes, il faut choisir un des 4 as et 2 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. Si on note C l'événement « obtenir un as » alors

$$p(C)=\frac{C_4^1\times C_{28}^2}{C_{32}^3}=\frac{189}{620}\approx 0,30 .$$

b) Si on désigne par D l'événement « obtenir au moins un roi » alors $\overline{D}$ est réalisé si on n'obtient pas de rois.

On a : $p(\overline{D})=\frac{C_{28}^3}{C_{32}^3}=\frac{819}{1240}\approx 0,66$ donc : $p(D)=1-p\left(\overline{D}\right)=\frac{421}{1240}\approx 0,33$.

c) L'événement E «obtenir un valet ou un pique» est réalisé si on obtient un, parmi les huit piques ou un valet trèfle ou un valet cœur ou un valet carreau

$$p(E)=\frac{C_{11}^1\times C_{21}^2}{C_{32}^3}=\frac{231}{496}\approx 0,47$$

Activité 3

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules blanches et deux boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : " Obtenir trois boules rouges "
B : " Obtenir trois boules de même couleur "
C : " Obtenir au moins une boule rouge "
D : " Obtenir les deux boules noires "

Activité 4

Un sac contient quatre boules blanches numérotés : 1, 2, 2, 2 et trois boules noires numérotés : 1, 1, 2.

1) On tire au hasard, successivement et avec remise, trois boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " Tirer trois boules de même couleurs ".
   B : " Tirer une seule boule blanche ".
   C : " Tirer deux boules qui portent le numéro 2 ".
   D : " Tirer au moins une boule blanche ".
   E : " Tirer une seule boule blanche et une seule boule qui porte le numéro1 ".
2) On tire successivement trois boules dans les conditions suivantes :
   - Si la boule tirée porte le numéro 1 ; elle n'est pas remise dans le sac.
   - Si la boule tirée porte le numéro 2 ; elle est remise dans le sac.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   F : " Tirer trois boules blanches".
   G : " Tirer une seule boule qui porte le numéro 1 ".
   H : " Tirer une seule boule qui porte le numéro 2 ".

Activité 5

Un sac contient 8 jetons : trois jetons rouges numérotés : 1, 1, 0 ; trois jetons jaunes numérotés : 1, 0, -1 et deux jetons verts numérotés : 2, -1. On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " Tirer trois jetons portant le même numéro "
   B : " Tirer trois jetons de la même couleur "
   C : " Tirer exactement deux jetons rouges et un seul jeton portant le numéro 0 "
   D : " Tirer exactement deux jetons jaunes ou deux jetons portant des numéros positifs ".
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   S : " Tirer trois jetons portant des numéros de somme nulle "
   N : " Tirer trois jetons portant des numéros de produit égal à 0 "
3) Calculer la probabilité de tirer trois jetons portant des numéros de produit égal à 0 sachant que leur somme est nulle.

Tirage de p jetons d'un sac contenant n jetons ($p \leq n$)

Type de tirages :	Successifs et avec remise	Successifs et sans remise	Simultanés
Ordre :	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Un cas possible :	Un p-uplet avec possibilité de répétition	Un p-uplet d'éléments deux à deux distincts	Une partie de p éléments
Card Ω :	n^p	A_n^p	C_n^p

Probabilité conditionnelle

Définition et propriétés

Activité 1

Dans une entreprise, la répartition des 100 agents d'encadrement est donnée dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Cadres administratifs	10	20
Cadres techniques	50	20

On choisit, au hasard, une personne parmi ces 100 agents.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " La personne choisie est un cadre administratif ".
   B : " La personne choisie est un homme ".
   C : " La personne choisie est un cadre administratif sachant que c'est un homme".

2) a) Calculer $p(A \cap B)$

   b) Comparer $p(C)$ et $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Activité 2

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
Soit A l'événement :« La carte tirée est un roi ou un as » et B l'événement: « La carte tirée est un cœur ».
1) Calculer p(A), p(B) et $p(A \cap B)$.
2) On suppose que l'on sait (parce qu'une personne nous l'a dit) que la carte tirée est un cœur.
a) Quelle est la probabilité P pour que ce soit un roi ou un as ?
b) Comparer P et $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Définition

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B et on lit :
" Probabilité de A sachant B ", le nombre réel : $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
On note aussi $p(A/B) = p_B(A)$.

Activité 3

On jette simultanément, une fois, deux dés cubiques parfaits non identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés. Soient les évènements suivants :
A : “ Les nombres amenés par les deux dés sont différents ”.
B : “ La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 7 ”
C : “ La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 4 ”.
D : “ La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 12 “.
1) Calculer p(A), $p(A \cap B)$; $p(A \cap C)$; $p(A \cap D)$ et $p(B \cap C)$.
2) Calculer $p(\Omega / A)$; p(B / A) ; p(C / A) et p(D / A) .
3) Calculer $(B \cup C / A)$ et comparer le résultat avec p(B / A) + p(C / A).
4) Calculer $p(\overline{B}/ A)$ et comparer le résultat avec 1 - p(B / A).

Propriétés

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.
- On a: $p(\Omega /B) = 1$.
- Pour tous évènements incompatibles A_1 et A_2 on a:
$p(A_1 \cup A_2 / B) = p(A_1/B) + p(A_2/B)$.
- Pour tout événement A on a: $p(\overline{A} / B) = 1 - p(A / B)$,

Activité 4

Une boîte contient trois boules rouges et sept boules blanches indiscernables au toucher. On tire, simultanément et au hasard, trois boules de la boîte.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « Obtenir une boule rouge »

   B : « Obtenir au moins une boule blanche »

2) a) Calculer $p(A / B)$ et $p(B / A)$

   b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge sachant qu'au moins deux boules blanches sont tirées.

3) Comparer $p(A / B)$ à $p(A)$ et $p(B / A)$ à $p(B)$.

Évènements Indépendants

Activité 1

On lance simultanément, deux dés parfaits non identiques et on appelle A l'évènement: « Le premier dé amène un nombre pair » et B l'évènement: « Le deuxième dé amène un nombre impair ».

a) Calculer $p(A)$; $p(B)$ et $p(A \cap B)$.

b) Comparer $p(A \cap B)$ au produit $p(A) . p(B)$.

c) Calculer $p(A / B)$

Définition

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements. A et B sont dits indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) . p(B)$

Ce qui équivaut à : $p(A / B) = p(A)$ si $p(B) \neq 0$.

Remarque :

Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Activité 2

Soient Ω un univers et A et B deux événements de probabilités non nulles.

Montrer que : (A et B sont indépendants) équivaut à ($\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants)

Activité 3

On lance, une fois, un dé cubique dont les faces numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 sont blanches et la face numérotée 6 est rouge. Soient A et B les événements définis par :

A : « La face supérieure porte un nombre pair ».

B : « La face supérieure est rouge ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

Activité 4

Considérons une famille ayant n enfants et notons l'ensemble des différentes répartitions possibles des sexes des enfants (en respectant l'ordre de naissance). On suppose que toutes les répartitions possibles sont équiprobables.
Soient M et F les évènements définis par :
M: « La famille a des enfants des deux sexes ».
F : « La famille a au plus une fille ».
1) Pour n = 2, montrer que les évènements M et F ne sont pas indépendants.
2) Pour n = 3, montrer les évènements M et F sont indépendants.

3) a) Montrer que pour $n \geq 2$; $p(M) = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$, $p(F) = \dfrac{n+1}{2^n}$ et $p(M \cap F) = \dfrac{n}{2^n}$

b) En déduire que M et F ne sont indépendants que dans le cas d'une famille de 3 enfants.

Activité 5

Un sondage révèle que 20% des individus lisent des revues hebdomadaires, 30% lisent des revues mensuelles et 10% lisent les deux types de revues.
1) Un individu interrogé est choisi au hasard. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants :
   A : « L'individu lit des revues mensuelles »
   B : « L'individu lit des revues hebdomadaires »
2) Calculer la probabilité pour qu'un individu interrogé lise des revues mensuelles sachant qu'il lit des revues hebdomadaires.
3) Calculer la probabilité pour qu'un individu interrogé lise des revues hebdomadaires sachant qu'il lit des revues mensuelles.

Principe des probabilités composées

Activité 1

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur Ω et A et B deux événements de Ω.
1) Vérifier que si $p(A) = 0$ alors $p(A \cap B) = 0$.
2) On suppose que $p(A) \neq 0$. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B / A)$
3) Vérifier que si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A) \,.\, p(B/A) = p(B) \,.\, p(A/B)$
4) Soient A , B et C trois évènements de Ω tels que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$

En utilisant $p\left(C/A \cap B\right) = \dfrac{p(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)}$, montrer que:

$$p\left(A \cap B \cap C\right) = p(A) \,.\, p\left(B/A\right) \,.\, p\left(C/(A \cap B)\right).$$

Principe des probabilités composées

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A, B et C trois événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. On a:

- $p(A \cap B) = p(B) . p(A / B) = p(A) . p(B / A)$
- $p\left(A \cap B \cap C\right) = p(A) . p\left(B/A\right) . p\left(C/(A \cap B)\right)$.

Activité 2

Le personnel d'une entreprise est composé de 32% de femmes. Parmi celles-ci 70% ont moins de 30 ans. Quelle est la probabilité pour qu'un employé, choisi au hasard, soit une femme et ait moins de 30 ans ?

Activité 3 (résolue)

Dans une usine de fabrication de boulons, une machine M assure 40% de la production totale. Une étude a révélé que 10% des boulons produits par la machine M sont défectueux. On choisi au hasard un boulon, quelle est la probabilité pour que le boulon choisi provienne de la machine M et soit défectueux ?

Solution :

On note A l'évènement: « Le boulon choisie provient de la machine M » ; B l'évènement : « Le boulon est défectueux » et C l'évènement :« Le boulon choisi provient de la machine M et est défectueux ».On demande de calculer p(C).

On peut dire que $p(C) = p\left(A \cap B\right) = p(A) . p\left(B / A\right) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$.

Activité 4

On dispose de trois boîtes B_1 ; B_2 et B_3 d'apparence identiques qui contiennent respectivement deux ; trois et quatre fiches, dans chacune des boîtes une seule fiche est marquée.

Une épreuve consiste à désigner, au hasard, une boîte et tirer également, au hasard, une fiche de cette boîte. Si la fiche tirée est marquée le joueur reçoit un cadeau.

Soient les évènements suivants:

A_1 :«Désigner la boite B_1 et tirer une fiche marquée»;

A_2:« Désigner la boite B_2 et tirer une fiche marquée » ;

A_3 :« Désigner la boite B_3 et tirer une fiche marquée » ;

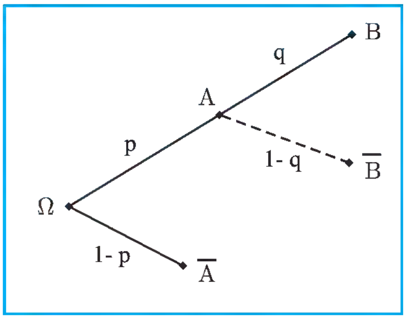
A : « la fiche tirée est marquée ».

1) a) Calculer $p(A_1)$; $p(A_2)$ et $p(A_3)$.
   b) Calculer p(A).
2) Le joueur a tiré une fiche marquée. Quelle est la probabilité que ce soit celle de la boîte contenant deux fiches ?

Principe « Stochastique fini »

Ce principe s'intéresse à une **succession finie** d'expériences aléatoires.
Par exemple :
• Choisir une urne parmi trois urnes numérotées.
• Puis, dans l'urne choisie, tirer une boule, parmi des noires et des blanches.
Soient A: « L'urne choisie est de numéro 1 » et B: « La boule tirée est noire ».
On s'intéresse à l'évènement (A puis B) c'est-à-dire à l'évènement K : « La boule tirée est noire et provient de l'urne n°1». Ainsi, $p(K) = p(A \cap B) = p(A).p\left(B/A\right)$.
Si on connaît la probabilité de A et la probabilité de B lorsque A est réalisé alors on peut tirer la probabilité de l'évènement K.
Dans ce type d'expériences aléatoires successives, il est parfois commode d'utiliser un **diagramme en arbre** : les « branches » successives traduisent la succession des évènements, et sur chacune des branches on peut marquer la probabilité associée (on obtient ainsi, un **arbre pondéré**).

Si p(A) = p et p(B/A) = q alors
p(K) = p(A puis B) = p.q ;
De même p(A puis $\overline{B}$) = p.(1-q) .



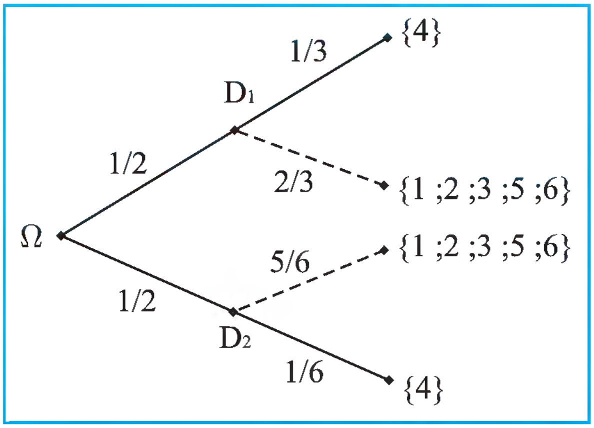
Remarques :

* Cette technique s'applique également, pour calculer la probabilité de (A puis B puis C) etc.
* La somme des nombres associés à toutes les branches de même origine est égale à 1.

Activité 5 (résolue)

On dispose de deux dés cubiques en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué.
Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.
On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance une fois.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Choisir le dé truqué et obtenir la face portant le chiffre 4 » ;
B : « Choisir le dé parfait et obtenir la face portant le chiffre 4 » ;
C: « Obtenir la face portant le chiffre 4 ».

Solution : On pourra utiliser un **diagramme en arbre**.
En effet, il y'a deux étapes successives : le choix du dé puis obtenir la face portant le chiffre 4 lors du lancer du dé qui a été choisi.
« choisir le dé truqué D_1 » et « choisir le dé parfait D_2 » sont deux évènement de même probabilité égale à 0,5.



La probabilité de A est donc :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

La probabilité de B est :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

L'évènement C est la réunion des deux évènements incompatibles A et B. Donc

$$p(C)=p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

Activité 6

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.
La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est égale à 0,9.
On fait subir à chaque appareil fabriqué un test avant sa livraison. On constate que:
- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut-être néanmoins accepté, avec une probabilité $\frac{1}{11}$.

On note A l'événement :« L'appareil est accepté à l'issue du test »
et F l'évènement: « L'appareil fonctionne parfaitement ».
- Calculer la probabilité de A.
- Sachant que l'appareil est accepté à l'issue du test, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne parfaitement.

Principe des probabilités totales Formule de Bayes

Activité 1

Soient Ω un univers et A et B deux événements de Ω tels que $p(B) \neq 1$ et $p(B) \neq 0$:

a) En remarquant que $A = A \cap \Omega$ et $B \cup \overline{B} = \Omega$ montrer que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

b) En déduire que $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

c) Prouver alors, que $p(A) = p(B) \,.\, p(A / B) + p(\overline{B}) \,.\, p(A / \overline{B})$

d) Montrer que $p(B / A) = \dfrac{p(B).p(A / B)}{p(B).p(A / B) + p(\overline{B})p(A / \overline{B})}$

Principe des probabilités totales

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$. On a :

$$p(B) = p(A) \,.\, p(B / A) + p(\overline{A}) \,.\, p(B / \overline{A})$$

Plus généralement :

Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ (pour tous i et j tels que $i \neq j$)

et $\forall k \in \{1,2,...,n\}, p(A_k) \neq 0$ alors pour tout évènement B on a:

$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k).p(B / A_k).$$

Formule de Bayes

Soient Ω un univers et A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$

et $p(A) \neq 0$. On a : $p(B / A) = \dfrac{p(B).p(A / B)}{p(B).p(A / B) + p(\overline{B}).p(A / \overline{B})}$

Activité 2 (résolue)

Dans une population un individu sur 200 est atteint par une maladie.
Une personne de cette population passe un test pour dépister cette maladie ; ce test s'avère positif. On sait que :

- Chez les personnes malades, le test est positif dans 98% des cas.
- Chez les personnes non malades, le test est négatif dans 94% des cas.

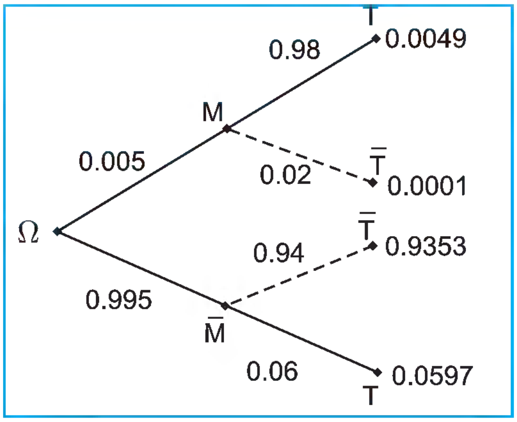
Déterminer la probabilité que la personne soit réellement malade.

Solution :

On considère l'arbre pondéré ci-contre :

Où M désigne l'évènement: « La personne est malade » et T désigne l'évènement: « Le test est positif ».

La probabilité que la personne soit réellement malade est alors,



$$p(M/T) = \frac{p(M).p(T/M)}{p(M).p(T/M) + p(\overline{M}).p(T/\overline{M})}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{0.005 \times 0.98}{0.005 \times 0.98 + 0.995 \times 0.06} = \dfrac{0.0049}{0.0646} \simeq 0.076$

On pourra calculer cette probabilité autrement : elle est égale

$$1 - p(\overline{M}/T) = 1 - \frac{p(T \cap \overline{M})}{p(T)} = 1 - \frac{0,0597}{0,0049 + 0,0597} \approx 0,076.$$

Activité 3

On considère un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit l'un de ces deux jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame.

Montrer que la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes est égale $\dfrac{13}{21}$.

Activité 4

Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes.

On tire une première boule, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur et on tire une seconde boule de l'urne.

On désigne par :

R : « Tirer une boule rouge au premier tirage »;
V : « Tirer une boule verte au premier tirage »;
A : « Tirer une boule rouge au deuxième tirage ».

1) Calculer $p(R)$, $p(V)$, $p(A/R)$ et $p(A/V)$.
2) En déduire $p(A \cap R)$, $p(A \cap V)$ puis $p(A)$.
3) Calculer $p(R/A)$.
4) R et A sont-ils indépendants ?

Activité 5

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 .
U_1 et U_2 contiennent chacune : deux boules rouges et trois boules noires.
U_3 contient quatre boules rouges et une boule noire.
On choisit deux urnes au hasard et on extrait une boule de chaque urne.

1) On considère les évènements suivants :
   A : " Les deux urnes choisies ont la même composition "
et B : " Tirer deux boules noires ".
   a) Calculer $p(A)$ puis $p(\overline{A})$
   b) Calculer $p(B / A)$ puis $p(B \cap A)$
   c) Calculer $p(B \cap \overline{A})$ puis $p(B)$.
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   C : " Tirer deux boules de même couleur "
   D : " Tirer deux boules de couleurs différentes "
3) On vient de tirer deux boules de même couleur. Quelle est la probabilité d'avoir choisi deux urnes de même composition ?

Activité 6

On choisit un dé au hasard parmi un lot de 100 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Parmi ces dés 25 sont pipés.

Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$.

On lance une fois le dé choisi et on obtien la face numérotée 6.
a) Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
b) On relance alors ce dé et on obtient à nouveau la face numérotée 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
c) On procède à des répétions successives de l'expérience et on désigne par S_n l'évènement: « Obtenir 6 aux n premiers lancers » et par A, l'évènement: « Le dé est pipé».

Montrer que $p(S_n / A) = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{3})^{n-1}}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(S_n / A)$.

RÉSUMÉ DU COURS

Soient Ω un univers fini, $\wp(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω , p une probabilité sur $\wp(\Omega)$ et A, B deux événements. On a :

* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, lorsque A et B sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$).

* Si p est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité on a $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$
* Soient A et B deux évènements tels que $p(B) \neq 0$. **La probabilité conditionnelle de** A **sachant** B est le nombre réel $p(A / B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

* A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) . p(B)$

Le principe des probabilités composées :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors on a :
  $p(A \cap B) = p(B) . p(A / B) = p(A) . p(B / A)$
* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors on a :
  $p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B / A).p(C / A \cap B)$

Le principe des probabilités totales :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors on a :
  $p(B) = p(A) . p(B / A) + p(\overline{A}) . p(B / \overline{A})$

La formule de Bayes :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors

on a : $p(B / A) = \dfrac{p(B).p(A / B)}{p(B).p(A / B) + p(\overline{B}).p(A / \overline{B})}$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Un sac contient 500 boules indiscernables au toucher dont n boules sont blanches ($n \geq 2$) et les autres sont noires. Une épreuve consiste à tirer, au hasard, successivement deux boules du sac.

Soit A l'évènement: « Les deux boules tirées sont de même couleur »

a) Sachant que le tirage est avec remise, calculer en fonction de n, la probabilité p de A.

b) Elaborer un programme permettant :

- la saisie de n.
- le calcul de p.
- l'affichage du résultat.
- faire varier n et déterminer la valeur de n pour laquelle p est voisin de 0,5.

Activité 2

Simulation, par l'ordinateur, de plusieurs lancers d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) Simulation de 100 lancers du dé :

-Préparer une feuille Excel et taper, dans la cellule A_1 la formule:

= 1+ENT (ALEA ()*6) puis taper **entrée** pour obtenir un chiffre k porté par une face du dé.

- **Copier** la cellule A_1. **Sélectionner** la plage de la cellule A_1 jusqu'à E_{20} puis **coller.** On obtiendra 100 nombres (aléatoires) choisis au hasard par l'ordinateur.

- Cliquer sur une cellule vide en dehors de la plage $A_1 : E_{20}$ et taper plusieurs fois sur la touche **Suppr** du clavier. On remarque que cela relance une génération de 100 nombres aléatoires k tels que $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Cliquer successivement, dans le menu **Outils / Option / Calcul / Ordre** (dans le but d'éviter la réactualisation de la feuille de calcul à chaque modification).

Pour afficher, les pourcentages successifs d'apparition des numéros : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 C'est-à-dire les probabilités respectives d'obtenir les faces 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé lors des 100 lancers simulés par l'ordinateur,on utilisera la formule:

= NB.SI(A1 : E20 ; k) pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Par exemple : pour comptabiliser le nombre d'apparition de 1, on tape dans une cellule vide la formule = NB.SI (A_1 : E_{20} ; 1) puis on tape Entrée.

- Compléter alors, le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparition de k						
Probabilités : p_k						

- 2) Simuler, par l'ordinateur, 1000 lancers du dé.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On lance un dé pipé tel que $p_1 = p_3$; $p_2 = p_4$ et $p_5 = p_6 = 2p_1 = 3p_2$ où pi est la probabilité d'apparition de la face portant le chiffre i.

1) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face.

2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : " la face apparente porte un nombre pair ".

B : " la face apparente porte un nombre supérieur ou égal à 5 ".

2 Dans un sac on place 3 boules rouges, 5 vertes et 7 jaunes. On tire successivement 2 boules du sac avec remise de la boule après le premier tirage.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : "les deux boules tirées sont rouges "

B : " les deux boules tirées sont jaunes "

C : " le tirage est unicolore "

D : " le tirage est bicolore "

3 Une urne contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7.

1) On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : " Les deux boules tirées portent des numéros impairs "

B : " Les deux boules tirées sont de la même couleur "

C : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs et sont de la même couleur".

D : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs ou sont de la même couleur ".

2) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : "Les deux boules tirées sont de parités différentes".

F : "Obtenir au moins une boule noire ".

4 Une urne contient quatre boules blanches et deux boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher.

On effectue n tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : Si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne ; si elle est blanche on ne la remet pas.

1) Dans cette question on prend n = 3.

Pour chaque entier $k \in \{1, 2, 3\}$, on note E_k l'événement :

"Seule la $k^{ième}$ boule tirée est blanche ".

a) Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{8}{75}$.

b) Calculer $p(E_2)$ et $p(E_3)$.

c) En déduire la probabilité de l'événement

E : "Une seule boule est blanche parmi les trois boules tirées".

d) Sachant que E est réalisé, quelle est la probabilité pour que la boule blanche soit obtenue au 1^{er} tirage ?

2) Dans cette question on suppose que $n \geq 2$.

a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n d'avoir au moins une boule blanche parmi les n boules tirées.
b) Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0,99$?

5 On considère n urnes : $U_1, U_2, \dots U_n$ tels que :
- l'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.
- chacune des urnes $U_1, U_2, \dots U_n$ contient une boule blanche et quatre boules noires.
On tire une boule de U_1 que l'on remet dans U_2 ; puis une boule de U_2 que l'on remet dans U_3 et ainsi de suite jusqu'à tirer une boule de U_n
Soit l'évènement E_k : " la boule tirée de U_k est blanche " $(1 \leq k \leq n)$.

1) Calculer $p(E_1)$, $p(E_2/E_1)$ et $p\left(E_2/\overline{E_1}\right)$

En déduire $p(E_2)$
2) Soit $p_k = p(E_k)$.
a) Montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{6} p_k + \frac{1}{6}$.
b) Montrer que la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = p_n - \frac{1}{5}$ est une suite géométrique.
c) En déduire p_n et $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

6 Un sac contient huit jetons : trois jetons rouges numérotés 1, 1, 0 ; trois jetons jaunes numérotés 1, 0, -1 et deux jetons verts numérotés 2, -1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément trois jetons du sac.
1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
A :"Tirer trois jetons portant le même numéro"
B : "Tirer trois jetons de même couleur"
C : "Tirer exactement deux jetons rouges et un seul jeton portant le numéro 0"
D : "Tirer exactement deux jetons jaunes ou deux jetons portant des numéros positifs".
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
S : "Tirer trois jetons portant des numéros de somme nulle"
N : "Tirer trois jetons portant des numéros de produit égal 0"
3) Calculer p(N / S).

7 Une urne contient 7 jetons : quatre portent le numéro 0, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 2.
Un joueur tire simultanément trois jetons de l'urne et additionne les numéros marqués sur ces trois jetons tirés.
-Si cette somme S n'est pas nulle, il gagne un nombre de points égal à S.
-Si cette somme S est nulle, sans remettre les trois jetons tirés dans l'urne, il procède à un nouveau tirage d'un seul jeton, son gain est alors le numéro marqué sur le nouveau jeton.
On note :
R : "Le joueur est obligé de faire un deuxième tirage" et A : "Le gain est 0".
1) Calculer $p(R)$; $p(A / R)$ et $p(A \cap R)$.

et montrer que $p(A) = \frac{1}{35}$.

2) Déterminer les probabilités des évènements suivants :
a) B : " Le gain est 1 "

b) H : " Le joueur est obligé de faireun deuxième tirage sachant que le gain est 1 point ".

8 Soient A et B deux évènements tels que :

$p(B)=0,06$; $p(A/B)=0,85$; $p(A/\overline{B})=0,40$

1) Calculer $p(\overline{A}/B)$ et $p(\overline{B}/A)$.
2) Etudier l'indépendance entre les évènements A et B, en justifiant votre réponse.

9 Considérons l'expérience suivante : on lance deux fois un dé et on désigne par X et Y les résultats observés. Ce sont des entiers compris entre 1 et 6.
On note A et B les événements " X et Y ont la même parité " et " X = 2 ".
Les événements A et B sont ils indépendants ?

10 Pour prévenir deux défectuosités D_1 et D_2 des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre un échantillon assez grand de pièces à des tests. Les études statistiques menées sur cet échantillon ont montré que :
8% des pièces présentent le défaut D_1 ;
Parmi les pièces atteintes du défaut D_1, 15% ont le défaut D_2.
On choisit au hasard une pièce produite par l'usine et on considère les évènements suivants :
A : " La pièce présente le défaut D_1 ". et
B : " La pièce présente le défaut D_2 ".
1) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente les deux défauts ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente le défaut D_2 ?
3) On sait que la pièce choisie possède le défaut D_2, quelle est la probabilité qu'elle possède le défaut D_1 ?

11 Une maladie atteint 2% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :
• Chez les personnes malades, 98% des tests sont positifs et 2% négatifs.
• Chez les personnes non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.
On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité :
a) qu'elle soit malade et qu'elle ait un test positif.
b) qu'elle ne soit pas malade et qu'elle ait un test négatif.
c) qu'elle ait un test positif.
d) qu'elle ait un test négatif.
e) qu'elle ne soit pas malade, sachant que le test est positif.
f) qu'elle soit malade, sachant que le test est négatif.

12 Sur une machine, on considère que les probabilités de dérèglement électronique et mécanique pour un jour donné sont respectivement : 0,003 et 0,007. Il n'y a pas d'autres possibilités de dérèglement et on sait que la probabilité de dérèglement mécanique sachant qu'il y a un dérèglement électronique est 0,5.
1) Calculer la probabilité que cette machine ait les deux dérèglements un jour donné.
2) Calculer la probabilité que cette machine n'ait aucun dérèglements un jour donné.
3) Aujourd'hui la machine est déréglée, quelle est la probabilité que les causes de ce dérèglement soient à la fois électroniques et mécaniques ?

13 En sortie de fabrication, on a constaté q'une pièce présente deux sortes de défauts (et deux seulement) :

6% des pièces présentent le défaut D_1 au moins ;
12% des pièces présentent le défaut D_2 au moins ;
5% des pièces présentent à la fois les deux défauts D_1 et D_2.
Une pièce sort de fabrication. Calculer la probabilité pour quelle présente un seul défaut.

14 Une enquête auprès d'une population sur l'état de santé et la consommation du tabac, a donné les résultats suivants : 50% de la population ne fument pas et sont en bonne santé et 25% sont malades et ne fument pas. Les résultats de l'enquête ont montré que dans cette population l'état de santé ne dépend pas du fait qu'on est fumeur ou non.
On prend au hasard un individu de cette population.
Déterminer alors la probabilité p_1 qu'il soit fumeur et non malade et la probabilité p_2 qu'il soit fumeur et malade.

15 Des appareils électroniques de même type sont fabriqués par deux entreprises seulement et vendus sur un marché ; la part du marché de la première entreprise est deux tiers.
La fiabilité(la probabilité de fonctionnement sans défaillance) d'un appareil offert sur ce marché est de 95% pour le premier fabriquant, alors qu'elle est de 90% pour le deuxième fabriquant.
Un utilisateur se présente sur le marché et achète un appareil. Déterminer la fiabilité de l'appareil acheté.

16 Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines M_1, M_2 et M_3 plus ou moins récentes.
La fabrication est répartie suivant ces machines, mais, selon leur vétusté, les pièces en sortant présentent parfois des défauts selon le tableau suivant :

Machines	M_1	M_2	M_3
Pièces fabriquées (en %)	50	35	15
Fréquence de défauts (en %)	1	2	6

On considère une pièce venant de l'atelier.
On appelle D l'événement « la pièce est défectueuse » et M_i l'événement «la pièce a été fabriquée par la machine M_i » pour tout $i \in \{1,2,3\}$.
Calculer la probabilité de l'événement D.

17 Pour la fabrication d'un jouet, on utilise (entre autres) une emboutisseuse plastique et un robot peintre.
La probabilité pour que L'emboutisseuse tombe en panne est de 2.10^{-2} pour le robot de 8.10^{-2}.
Etant donné les cadences, la probabilité pour que le robot soit en panne sachant que l'emboutisseuse ne fonctionne plus est de $\frac{1}{4}$. Calculer la probabilité pour que les deux machines soient en panne, puis pour que toutes les deux fonctionnent.

APERÇU HISTORIQUE

Thomas Bayes
1702-1761

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire à l'avance le résultat. Dans une expérience aléatoire, plusieurs issues sont possibles et la répétition de la même expérience dans les mêmes conditions peut donner des résultats différents. L'apparition d'un résultat donné ne peut être anticipé. On dit que l'issue de l'expérience est soumise au **hasard**.

Aléa, aléatoire, sont des mots d'origine latine, aléa, qui veut dire dé et par extension hasard. (« Aléa jecta est. »). **Hasard** est un mot d'origine arabe, az-zahr (ou espagnol azar), qui veut dire également dé. Cette étymologie montre que le hasard est une notion qui s'est révélée à travers les jeux. Les jeux sont aussi à l'origine de la théorie des probabilités dont les initiateurs bien connus, en Europe, sont le Duc de Toscane avec Galilée, mais surtout le Chevalier de Méré avec Fermat et Pascal.

Le Reverand **Thomas Bayes** est né à Londres en 1702 et mourut en 1761 à Tunbridge Wells, Kent. Ce mathématicien a été le premier a avoir utilisé la probabilité par association analogique et par la suite il a établi une base mathématique de probabilité d'indice (un moyen de calculer un grand nombre de fois, un événement qui n'a pas eu lieu, donnera la probabilité, qu'il va certainement existé après plusieurs essais).Il raconta ses trouvails sur la probabilité dans « Essais Vers La Résolution d'un Problème dans la doctrine de Possibilités »(1763), qui ont été par la suite publié dans Les transactions philosophiques de la Société Royale de Londres.Les seuls ouvrages qu'il a publié pendant sa vie, étaient : La Bienfaisance Divine , ou bien La Tentative de Prouver que La fin Primordiale de la Providence Divine et du Gouvernement constituent le Bonheur de ses Etres (1731).

Autres œuvres telle une introduction à la doctrine de Fluxions et la Défense du Mathématicien contre les objections de l'auteur de l'analyste (1736) ,qui a été critiqué par l'évêque Berkeley d'après les fondations logiques des calculs de Newton.

Son bloc note existe toujours ; et contient la méthode de trouver le temps et la place de conjonction entre deux planètes, ainsi que des remarques sur les poids et les mesures qui est une méthode de différentiation et de logarithmes

La contribution de Bayes est immortalisée par sa proposition fondamentale sur la probabilité qui porte son nom : la formule de Bayes.

Texte pris et traduit de " *L'encyclopédie Britanica* "

Partie 2

Chapitre 6

Variables aléatoires réelles

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Variable aléatoire réelle
	❖	Loi de probabilité d'une variable aléatoire
	❖	La loi binomiale
	❖	Exemples de lois continues : La Loi uniforme La Loi exponentielle
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 200 et 300 objets.
M_1 produit 3% et M_2 produit 5% de pièces défectueuses.
Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ?

2 Un sac contient 7 jetons :
quatre blancs numérotés 1, 2, 2, 2
et trois noirs numérotés 1, 1, 2.
1) On tire successivement et avec remise 3 jetons. Calculer la probabilité de chacun des évènements :
A : «Obtenir 3 jetons blancs» ;
B: «Obtenir, parmi les 3 jetons tirés, deux jetons qui portent le n°1».
2) On remet tous les jetons dans le sac et on tire successivement 3 jetons de la manière suivante :
Si le jeton tiré porte le n°1 , il est remis dans le sac, s'il porte le n°2 , il n'est pas remis dans le sac.
Calculer la probabilité de chacun des évènements
A' : «Obtenir 3 jetons blancs »
et B' : «Obtenir, parmi les 3 jetons tirés, deux jetons qui portent le n°1».

* Dans le cas d'une « équiprobabilité », on a $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$, pour tout évènement A.

* Si A et B sont deux événements tels que p (B) ≠ 0 alors on a :

$$p(A \cap B) = p(B)\,.\,p(A/B)$$

* Soient A et B sont deux événements tels que p(B)≠0, p(B)≠1 et p(A)≠0.
On a la formule de Bayes :

$$p(B/A) = \frac{p(B).p(A/B)}{p(B).p(A/B) + p(\overline{B}).p(A/\overline{B})}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} . \left(\frac{2}{3}\right)^{k} = 1$

4 On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres : -1, -1, 0, 0, 1, 1.
On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.
a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements :
A : « Obtenir une somme (a +b) nulle »
B : « Obtenir un produit (ab) nul »
b) Sachant que le produit des deux nombres apparus est non nul, quelle est la probabilité pour que leur somme soit nulle ?

COURS

Dans tout le chapitre, Ω est un univers, $\wp(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω et p est une probabilité sur $\wp(\Omega)$.

Variable Aléatoire Réelle

Définition et loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Activité 1

Une urne contient six boules : 3 rouges, 1 noire et 2 blanches (toutes les boules sont indiscernables au toucher). Un joueur tire, au hasard, une boule et note sa couleur ; si elle est rouge il gagne 1 dinar tunisien ; si elle est noire il gagne 2dinars ; si elle est blanche il perd 3 dinars. On désigne par Ω, l'ensemble des couleurs possibles et par X l'application de Ω vers $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de Ω associe le gain algébrique (positif si le joueur gagne, négatif si le joueur perd).

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? On notera $X(\Omega)$ l'ensemble de ces valeurs.

b) Pour chaque valeur x_i de $X(\Omega)$, on désigne par $(X= x_i)$ l'ensemble des éléments de Ω ayant pour image x_i par l'application X. Calculer les probabilités des évènements suivants : $(X = 2)$, $(X = 1)$ et $(X = -3)$.

c) Vérifier que $\sum_{x_i \in X(\ )} p\,(X= x_i) = 1$

Définition

Soit un univers Ω fini.
On appelle variable aléatoire réelle (ou aléa numérique) définie sur l'univers Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(X = x)$ désigne l'ensemble des éventualités ayant la même image x par X.
C'est-à-dire :
$(X = x) = \{\omega \,;\, \omega \in \Omega \text{ et } X(\omega) = x\}$

Définition

Soit un univers Ω fini.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers Ω. On appelle loi de probabilité de X ou distribution des probabilités de X, l'application qui à chacune des valeurs x_i prises par X, fait correspondre la probabilité $p_i = p(X = x_i)$.

D'une façon générale, si on a $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors on dit que X est **discrète** (ou **discontinue**). La donnée des nombres $p_i = p(X = x_i)$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$ détermine parfaitement la loi de probabilité de la variable aléatoire X qu'on peut résumer dans un tableau appelé tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Activité 2

On tire, au hasard et simultanément, trois articles dans une boîte contenant 12 articles dont 3 sont défectueux. On note X le nombre d'articles défectueux observés.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X.
2) Calculer $p(X \leq 1)$ et interpréter le résultat obtenu.

Activité 3

On considère le jeu suivant :
Le joueur paie 3 Dinars pour participer au jeu puis il lance une pièce de monnaie deux fois et il reçoit en Dinars le triple du nombre de piles obtenus. On désigne par Y le gain net du joueur. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle Y.

Conseil :
Lorsqu'on détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, il est conseillé de vérifier que :

$$\sum_{x_i \in X(\ )} p(X = x_i) = 1$$

Activité 4

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9.
On tire, au hasard, successivement et sans remise, trois jetons du sac.
On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage. Déterminer la loi de probabilité de X.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Activité 1

On lance une fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe la face visible supérieure à l'immobilisation. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre inscrit sur cette face.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = p(X \leq x)$ où $(X \leq x)=\{\omega \in \Omega \ ; X(\omega) \leq x\}$.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer F(x) pour x appartenant à chacun des intervalles suivants :
$]-\infty,1[$, $[1,2[$, $[2,3[$, $[3,4[$, $[4,5[$, $[5,6[$ et $[6,+\infty[$
3) Construire, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction F.
4) a) Quel est le sens de variation de F ?
b) Justifier que F est continue à droite en tout $x_i \in X(\Omega)$.

Définition

Soit un univers Ω fini et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout réel x par : $F(X) = p(X \leq x)$.
Pour le réel x, F(x) est la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\}$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers fini Ω .
Soit F la fonction de répartition de X. On a :
- F est une fonction en escalier, continue à droite en tout $x_i \in X(\Omega)$.
- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si les éléments x_i de $X(\Omega)$ sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \ldots x_n$ et si $p(X = x_i) = p_i$

pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ alors F est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty , x_1[\\ p_1 & \text{si } x \in [x_1 , x_2[\\ p_1 + p_2 & \text{si } x \in [x_2 , x_3[\\ \vdots & \\ p_1+p_2+\ldots+p_i & \text{si } x \in [x_i , x_{i+1}[\\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \in [x_n , +\infty[\end{cases}$$

Activité 3 **(résolue)**

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres : -1, 0, 0, 1, 1, 2.
On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque couple (a, b) associe la somme (a + b).
1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F de Y.
 b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal du plan.
3) a) Calculer $p(0 < Y \leq 3)$ et comparer le résultat avec le réel $(F(3) - F(0))$.
 b) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ on a : $p(Y > x) = 1 - F(x)$
 c) Montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $p(a < Y \leq b) = F(b) - F(a)$

Solution :

1) L'expérience aléatoire est le lancer du dé cubique deux fois de suite, on a donc : card $\Omega = 6^2 = 36$. (36 couples (a,b))
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque élément de Ω associe la somme des points obtenus.
Pour déterminer la loi de probabilité de Y, on pourra utiliser le tableau suivant :

+	-1	0	0	1	1	2
-1	-2	-1	-1	0	0	1
0	-1	0	0	1	1	2
0	-1	0	0	1	1	2
1	0	1	1	2	2	3
1	0	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	3	4

On a $Y(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
Le tableau suivant donne la loi de probabilité associée à Y.

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) a) La fonction de répartition F de Y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = 0$ si $x \in]-\infty, -2[$;

$F(x) = p_1 = \frac{1}{36}$ si $x \in [-2, -1[$;

$F(x) = p_1 + p_2 = \frac{5}{36}$ si $x \in [-1, 0[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{13}{36}$ si $x \in [0, 1[$;

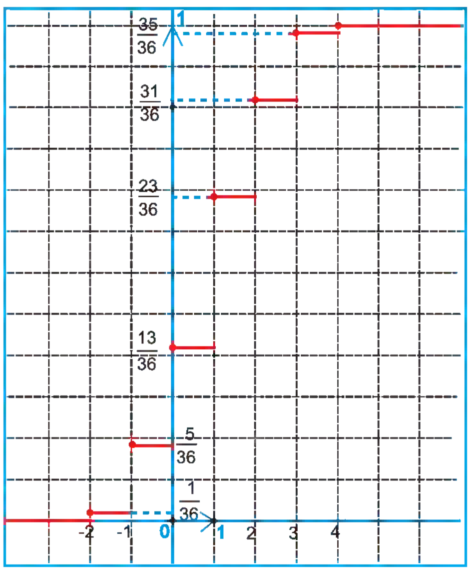
$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{23}{36}$ si $x \in [1, 2[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{31}{36}$ si $x \in [2, 3[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{35}{36}$ si $x \in [3, 4[$;

$F(x) = \frac{36}{36} = 1$ si $x \in [4, +\infty[$

b) Représentation graphique de F :



3) a) $p\left(0 < Y \leq 3\right) = p(Y=1) + p(Y=2) + p(Y=3) = \frac{22}{36}$ et on a : $F(3) - F(0) = \frac{35}{36} - \frac{13}{36} = \frac{22}{36}$
D'où $p(0 < Y \leq 3) = F(3) - F(0)$.

b) Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a $p(Y > x) = 1 - F(x)$. Les évènements $(Y \leq x)$ et $(Y > x)$ sont contraires donc pour tout réel x, on a :
$p(Y > x) = 1 - p(Y \leq x) = 1 - F(x)$.

c) Pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :
$(Y \leq a) \subset (Y \leq b)$ et $(a < Y \leq b) = (Y \leq b) \setminus (Y \leq a)$

Donc $p(a < Y \leq b) = p(Y \leq b) - p(Y \leq a) = F(b) - F(a)$

Remarque :

A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité de Y : en effet on a : $p_1 = F(x_1)$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, $p(Y = x_{i+1}) = p_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

Exemple : $p(Y = x_3) = p(Y = 0) = p_3 = F(0) - F(-1) = \frac{13}{36} - \frac{5}{36} = \frac{8}{36}$

Activité 4

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 1 boule verte.
L'expérience consiste à tirer successivement sans remise trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la première boule est rouge ou verte, 0 si non.
1) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X et construire sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Activité 1

On considère le jeu suivant où le joueur lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et reçoit autant de dinars tunisiens que le nombre de points inscrits sur la face supérieure du dé lorsque ce nombre est pair et perd autant de dinars tunisiens que le nombre de points obtenus si celui-ci est impair.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Montrer que $p(X < 0) = p(X > 0)$. En déduire qu'il est aussi probable de gagner que de perdre au jeu.
a) Calculer le gain moyen du jeu (c'est-à-dire $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i p(X = x_i)$)
b) En moyenne gagne-t-on en dinars autant que ce que l'on perd ?

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
On appelle espérance mathématique de X, ou valeur moyenne de X, que l'on note E(X) ou $\overline{X}$, le réel défini par : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k.x_k = p_1.x_1 + p_2.x_2 + ... + p_n.x_n$

Activité 2

Amor envisage d'investir dans les actions d'une entreprise spécialisée dans les nouvelles technologies pour une période d'un an. Les rendements possibles sont précisés dans le tableau suivant :

Rendement	6%	8%	10%	12%
Probabilité	0.2	0.3	0.35	0.15

1) Quel est le rendement le plus probable ?
2) Quel est le rendement moyen espéré ?

Activité 3

Un investisseur doit choisir entre les deux options suivantes :
Option A : investir pour un an à un taux d'intérêt fixe de 8%.
Option B : être actionnaire d'une société inscrite en bourse dont les rendements sont donnés avec leurs probabilités dans le tableau ci-dessous :

Rendement	-10%	0%	10%	20%
Probabilité	0.1	0.4	a	b

Déterminer les valeurs de a et b pour que l'option B soit plus favorable.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définitions

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

La variance de X, que l'on note V(X), est le réel positif défini par la formule :
$$V(X) = \left(x_1 - \overline{X}\right)^2.p_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2.p_2 + ... + \left(x_n - \overline{X}\right)^2.p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2.p_i$$
L'écart- type de X, que l'on note $\sigma(X)$, est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Activité 1

Soit $\overline{X} = E(X)$

En développant les carrés $(x_i - \overline{X})^2$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, montrer que :

$$V(X) = (x_1 - \overline{X})^2 . p_1 + (x_2 - \overline{X})^2 . p_2 + ... + (x_n - \overline{X})^2 . p_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

Si X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors on a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Remarques :

* L'écart- type est un paramètre de dispersion qui donne une idée de la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire autour de son espérance mathématique.

* L'écart- type est exprimé dans la même unité que la variable aléatoire.

Activité 2

On a placé dans une urne cinq boules indiscernables au toucher. Trois sont noires et deux sont blanches. On tire au hasard une à une toutes les boules de cette urne et on note R le rang de la première boule blanche tirée.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire R.
2) Calculer l'espérance mathématique E(R) et l'écart-type $\sigma(R)$.

Activité 3

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : 1, 1, 1, 1 ; deux boules noires numérotées : 2, 1 et une boule rouge numérotée : 2.
Une épreuve consiste à tirer successivement 3 boules de l'urne de la manière suivante :
Si la boule tirée porte le numéro 1 on la remet dans l'urne et on tire la boule suivante.
Si non on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire la boule suivante.
1) Calculer les probabilités des évènements suivants :
A : "Obtenir 3 boules blanches" ; B : "Obtenir exactement 2 boules portant le numéro 1".
2) Soit la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 si aucune boule tirée n'est noire, si non le rang de la première boule noire tirée.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'écart-type de X.
   c) Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction de répartition de X.

Activité 4 (résolue)

Une urne contient quatre boules rouges portant le nombre 1, cinq boules vertes portant le nombre -1 et trois boules blanches portant le nombre 0.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Soit X l'application qui à chaque tirage associe la somme des nombres marqués sur les boules tirées.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) a) Calculer l'espérance mathématique E(X). Interpréter le résultat obtenu.
   b) Calculer la variance V(X).
   c) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.
4) Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

Solution :

1) Les sommes possibles des nombres marqués sur les deux boules tirées sont -2, -1, 0, 1 et 2.
L'ensemble des valeurs prises par X noté $X(\Omega)$ est donc $X(\Omega) = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ et $\text{card}\ \Omega = C_{12}^2 = 66$

2) L'évènement $\{ w \in \Omega \,/\, X(w) = -2 \}$ est noté $(X = -2)$ on a donc :

* (X = -2) : "Tirer deux boules vertes".

$$p(X = -2) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66}$$

* (X = -1) : "Tirer une boule verte et une boule blanche".

$$p(X = -1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{66} = \frac{15}{66}$$

* (X = 0) : "Tirer deux boules blanches ou Tirer une boule rouge et une boule verte ".

$$p(X = 0) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \cdot C_5^1}{66} = \frac{23}{66}$$

* (X = 1) : "Tirer une boule rouge et une boule blanche".

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{66} = \frac{12}{66}$$

* (X = 2) : "Tirer deux boules rouges".

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2}{66} = \frac{6}{66}$$

La Loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

La Loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i Valeurs prises par X	-2	-1	0	1	2
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$

On remarque que $\sum_{i=1}^{5} p(X = x_i) = 1$, on dit que les évènements $(X = x_i)$ forment un système complet d'évènements.

3) a) L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X), défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=5} x_i .\ p(X=x_i)$$

$$=(-2)\times\frac{10}{66}+(-1)\times\frac{15}{66}+0\times\frac{23}{66}+1\times\frac{12}{66}+2\times\frac{6}{66}$$

$$=-\frac{1}{6}<0 \text{ donc le jeu est perdant.}$$

Remarque :

Si X indique le gain algébrique (positif ou négatif) réalisé dans un jeu, alors on dit que:
- Le jeu est favorable ou gagnant si et seulement si $E(X) > 0$.
- Le jeu est défavorable ou perdant si et seulement si $E(X) < 0$.
- Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$.

b) La variance de X est le réel positif noté V(X) défini par :

$$V(X) = E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

$$=\left[(-2)^2\times\frac{10}{66}+(-1)^2\times\frac{15}{66}+(0)^2\times\frac{23}{66}+(1)^2\times\frac{12}{66}+(2)^2\times\frac{6}{66}\right]-\left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=\frac{91}{66}-\frac{1}{36}\simeq 1{,}35$$

c) L'écart-type de X est le réel noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

$$\simeq\sqrt{1{,}35}$$

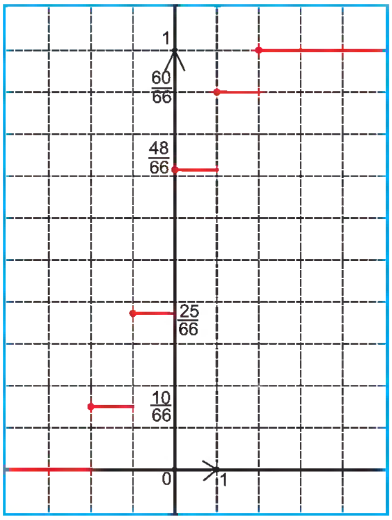
$$\simeq 1{,}16.$$

4) La fonction de répartition de X est l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$
$$x\mapsto F(x)=p(X\leq x)$$

L'évènement $(X \leq x)$ désigne $\{ w \in \Omega \,/\, X(w) \leq x \}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ \dfrac{10}{66} & \text{si } x \in [-2, -1[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} = \dfrac{25}{66} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} + \dfrac{23}{66} = \dfrac{48}{66} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} + \dfrac{23}{66} + \dfrac{12}{66} = \dfrac{60}{66} & \text{si } x \in [1, 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$



La Loi Binomiale

Activité 1

On lance une pièce de monnaie parfaite trois fois de suite.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : " Obtenir deux fois pile "
B : " Obtenir trois fois face "
C : " Obtenir au moins deux fois pile "
D : " Obtenir pile pour la première fois au 3$^{\text{ème}}$ lancer ".

Epreuve de Bernoulli- Schéma de Bernoulli

* Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, l'une est appelée succès notée S de probabilité p et l'autre est appelée échec notée E de probabilité $q = 1 - p$.

* On peut définir, sur cette épreuve, une variable aléatoire X, prenant la valeur 1 lorsque la première issue S est réalisée, $p(X=1)=p$ et 0 si non, $p(X=0) = 1 - p$. Cette variable est **une variable de Bernoulli** de paramètre p et sa loi est la **loi de Bernoulli.**

* Un **schéma de Bernoulli** est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p un certain nombre n de fois $(n > 1)$ en supposant que les épreuves sont deux à deux indépendantes.

Loi binomiale

* Si X est une variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, alors on dit que X suit **une loi binomiale** de paramètres n et p.
* La loi de probabilité de X (qu'on note $\mathscr{B}$ (n, p)) est définie par :
pour tout $k \in X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ on a : $p(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$.
* L'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :
$E(X) = n.p$; $V(X) = n.p.(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$.

Activité 2

I- 1) Un dé a la forme d'un tétraèdre régulier (pyramide à base triangulaire) dont les faces sont numérotées :1, 2, 3 et 4.
Les faces 1, 2 et 3 sont équiprobables et la probabilité de la face 4 est le double de celle de chacune des autres faces.
Quelle est la probabilité de chaque face ?
2) On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Quelle est la probabilité de chaque face ?

II- 1) Soit E l'épreuve qui consiste à lancer, simultanément, les deux dés précédents une fois. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
2) On répète l'épreuve E quatre fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient une somme égale à 7.
a) Définir la loi de probabilité de X et calculer E(X) et V(X).
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois "la somme égale à 7"?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir "la somme égale à 7" pour la première fois à la troisième répétition ?

Activité 3

Quatre chasseurs tirent en même temps sur un lapin. Chacun d'eux a une chance sur quatre d'atteindre le lapin. Calculer la probabilité pour que le lapin soit atteint.

Activité 4 (résolue)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires indiscernables au toucher.
1) On tire successivement et avec remise trois boules. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges »
2) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de l'évènement : «la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges»

3) Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne. On désigne par A l'évènement : "Obtenir une boule noire et deux boules rouges".

a) Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{3}{10}$.

b) On répète l'épreuve E cinq fois de suite en remettant les trois boules dans l'urne après chaque épreuve et on désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre de fois où l'évènement A est réalisé. Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

d) Calculer la probabilité de l'évènement : $(1 < X \leq 3)$

(D'après Bac Tunisien 2001)

Solution :

1) et 2) On tire successivement trois boules.

L'évènement M :« Obtenir une boule noire au premier tirage et 2 boules rouges aux tirages suivants » est égal à l'ensemble des triplets de la forme (N,R, R).

Type de tirages	1) successif avec remise	2) successif sans remise
p(M)	$\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=0{,}096$	$\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=0{,}1$

3) Tirage simultané de 3 boules :

a) Soit l'évènement A : «Obtenir {N,R, R}» alors $p(A)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}=0{,}3$

b) On répète l'épreuve E, 5 fois de suites. X = nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

Nous sommes donc, devant un schéma de Bernoulli de paramètres n = 5 et p = 0,3.

Donc X suit une loi binômiale de paramètres n = 5 et p = p(A) = 0,3.

Par suite, $x(\Omega\} = \{0,1,2,3,4,5\}$ et pour $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ on a $p(X=k) = C_5^k\,(0.3)^k\ .\ (0,7)^{5-k}$.

c) $E(X)=n.p=1{,}5$; $V(X)=n.p.(1-p)=1{,}05$ et $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)} = \sqrt{1{,}05} \simeq 1{,}025$

d) $p(1 < X \leq 3) = p(X = 2) + p(X = 3) = 0{,}441$.

Activité 5

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code formé de 4 chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1101).

a) Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On suppose que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b) Soit X la variable aléatoire discrète qui prend pour valeur le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

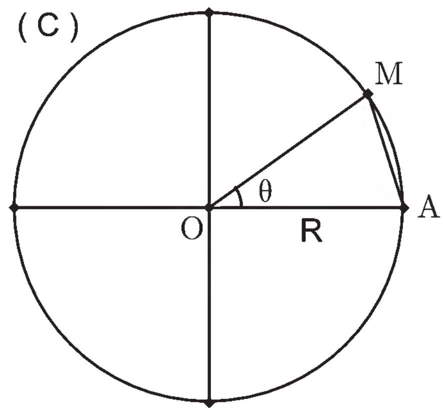
Exemples de variables aléatoires réelles continues

1) Introduction et définition

Supposons qu'on étudie la taille des individus d'une population. Si on veut déterminer la probabilité qu'un individu pris au hasard ait une taille 1,79m ; il est clair que même si on dispose des instruments de mesure les plus performants, cette taille n'est jamais atteinte (c'est un évènement «quasi-impossible») et par conséquent la probabilité cherchée est nulle. Mais on pourra calculer la probabilité que la taille de l'individu appartienne à l'intervalle [1,785 ; 1,795] par exemple, en fonction de la précision demandée.

Activité

Dans la figure ci-contre, (C) désigne un cercle de centre O et de rayon R = OA.
On choisit un point M au hasard sur ce cercle, on note $\theta = \widehat{AOM}$ et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la longueur de la corde [AM].



a) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
b) Calculer AM en fonction de θ.
c) Déterminer X(Ω).
d) Quelle est la probabilité de l'évènement $\left(X = \frac{R}{7}\right)$?

Solution et commentaires :

a) L'univers Ω correspondant à cette expérience est égal au cercle (C) qui n'est pas un ensemble fini comme c'est le cas pour une variable aléatoire discrète.

b) À chaque point M de (C) on associe, par X, le réel $AM = 2R.\sin\frac{\theta}{2}$ (sous entendu $\theta \in [0,\pi]$).

c) La fonction $u : x \mapsto 2R.\sin\frac{x}{2}$ est continue et croissante sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Par conséquent, X(Ω) = u([0,π]) = [0, 2R].
d) $p\left(\left(X = \frac{R}{7}\right)\right) = 0$. En effet $\left(X = \frac{R}{7}\right)$ est un évènement « quasi-impossible » car il correspond aux points M du cercle (C) tels que $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{14}$ où $\theta = \widehat{AOM}$ (ces points M sont tels qu'il est presque impossible de les choisir sur le cercle (C)).
La variable aléatoire X est définie sur un univers Ω non fini et on a X(Ω) est un intervalle non réduit à un point. On dit alors, que X est une variable aléatoire réelle continue.

Lorsqu'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω vérifie : $X(\Omega) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, nous dirons que cette variable aléatoire est continue et on a : $p(X \in I) = 1$, $p(X \notin I) = 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$.

En particulier, si $X(\Omega) = [a,b]$ alors $p(X \in [a,b]) = 1$ et $p(X \notin [a,b]) = 0$.
Donc il n'est pas possible de définir une loi de probabilité pour une telle variable aléatoire continue comme on l'a fait pour une variable aléatoire discrète. Par contre, on cherchera à exprimer la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire appartiennent à un intervalle donné.

2) Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = p(X \leq x)$.

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de répartition F.

1) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

2) a) Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $p(X \in]-\infty,a]) = F(a)$ et $p(X < a) = p(X \leq a)$.

   b) En déduire que $p(X > a) = p(X \geq a) = 1 - F(a)$

3) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

   a) En remarquant que $(X \leq a) \subset (X \leq b)$, montrer que $p(X \in [a,b]) = F(b) - F(a)$.

   b) En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour a < b, on a :

   $p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de fonction de répartition F alors on a les propriétés suivantes :
- F est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $p(X < a) = p(X \leq a)$ et $p(X > a) = p(X \geq a) = 1 - F(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- $p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ où a et b sont deux réels tels que a < b.

Activité 2

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

$(0{,}3\le X\le 0{,}8)$; $(X\ge \frac{1}{2})$ et $(X<0)$

3) Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue, de fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}$

par : $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

b) Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal du plan.

2) Calculer la probabilité de l'évènement A : "$(X \le 2)$".

3) Calculer la probabilité des évènements B : "$(0 < X \le 0{,}5)$" et C : "$0{,}7 < X < 0{,}8)$"

4) a) Montrer que pour $h > 0$ et voisin de zéro et pour tout x réel, on a :

$F(x + h) - F(x) \backsimeq f(x) . h$ où f désigne la fonction dérivée de F.

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $p(x \le X \le x + h) \backsimeq f(x) . h$

c) Soient a et b deux réels tels que $a \le b$. Vérifier que $\int_a^b f(x)\,dx = p(a\le X\le b)$.

Commentaires :

* Le réel positif $f(x).h$ est une valeur approchée de la probabilité que la variable aléatoire continue X soit dans un intervalle de longueur h et contenant le réel x.

* La fonction f s'appelle la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire réelle continue X.

Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de répartition F.

* On admet que F est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

* La fonction dérivée f de F s'appelle la fonction densité (ou densité de probabilité) de X.

Pour tout réel x on a : $p(x \leq X \leq x + h) \approx f(x) \,.\, h$ où h est un réel strictement positif et voisin de 0.

Activité 2

Montrer que la densité f d'une variable aléatoire continue X prend des valeurs positives ou nulles.

Activité 3

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X définie sur $\mathbb{R}$

par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2(x - \frac{1}{2}x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Déterminer la fonction f densité de probabilité de X.
2) Tracer les courbes représentatives de f et F dans deux repères orthogonaux du plan.
3) Calculer $p(0,25 \leq X \leq 0,5)$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4) Résoudre, dans]0,1[, graphiquement ; puis par le calcul ; l'équation $F(x) = 0,5$. Interpréter.

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de densité de probabilité f alors on a les propriétés suivantes :

* $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

* Pour tous réels t et s tels que $t \leq s$ on a : $p(t \leq X \leq s) = \int_t^s f(x)\, dx$

* Si $X(\Omega) = [a,b]$, (a<b), alors $\int_a^b f(x)\, dx = 1$

* Si $X(\Omega) = [a,+\infty[$ alors $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt = 1$

4) La Loi uniforme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La probabilité uniforme offre une chance égale à toutes les éventualités. Donc la densité de probabilité correspondante est partout la même ; c'est une fonction constante sur I.

Soient a et b deux réels tels que a < b.

- Une variable aléatoire continue X suit une loi de **probabilité uniforme** sur l'intervalle [a; b] si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- Si X est une variable aléatoire continue qui suit une loi de **probabilité uniforme** sur l'intervalle [a; b] alors on a :

* L'espérance mathématique de X est définie par $E(X) = \int_a^b t.f(t)\,dt$

* La variance de X est définie par $V(X) = \int_a^b t^2.f(t)\,dt - \left(E(X)\right)^2$

Exemple : Si X suit une loi de probabilité uniforme sur [0; 1] alors sa fonction densité f est la fonction constante égale1sur [0; 1] et zéro ailleurs. Et pour tous réels t et s de [0; 1] tels que t ≤ s on a $p(t \leq X \leq s) = \int_t^s 1\,dx = s - t$

* L'espérance de X est $E(X) = \int_0^1 t.f(t)\,dt = \int_0^1 t.1\,dt = \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$

* La variance de X est $V(X) = \int_0^1 t^2.f(t)\,dt - \left(E(X)\right)^2 = \int_0^1 t^2dt - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

Activité 1

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [a; b].

1) Montrer que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

2) Montrer que $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur un intervalle [a; b].

* L'espérance mathématique de X est « la moyenne arithmétique » des bornes de l'intervalle [a; b] c'est-à-dire : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

* La variance de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Activité 2

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [a; b].
Montrer que la fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\le x<b\\ 1 & \text{si } x\ge b\end{cases}$$

Activité 3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [2; 5].
1) Déterminer la densité f de probabilité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X.
3) Représenter graphiquement f et F dans un repère orthogonal du plan.
4) Calculer E(X) et V(X).
5) Calculer la probabilité de chacun des évènements : $(1 \le X \le 4)$ et $(2{,}5 < X \le 2{,}6)$

Activité 4 (résolue)

Le bus part à 9 h d'un arrêt précis et il passe par cet arrêt toutes les 10 minutes.
Un étudiant se présente à cet arrêt entre 9 h et 9h 20 mn. Soit X la variable aléatoire égale à l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt. Sachant que X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0; 20].
1) Quelle est la probabilité que l'étudiant attende moins que 5 mn le prochain bus ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende plus que 8 mn ?

Solution :

La densité de probabilité f de X est définie par $f(x)=\dfrac{1}{20}$ pour tout $x\in[0,20]$

1) L'attente n'est inférieure à 5 mn que si l'étudiant arrive entre 9h 5mn et 9h 10mn ou entre 9h 15mn et 9h 20mn. La probabilité demandée est alors :

$$p(5\le X\le 10)+p(15<X\le 20)=\int_5^{10}\frac{1}{20}\,dt+\int_{15}^{20}\frac{1}{20}\,dt=\frac{1}{2}$$

2)De même l'attente n'est supérieure à 8 mn que si l'étudiant arrive entre 9h et 9h 2mn ou entre 9h10mn et 9h12mn. La probabilité demandée est alors :

$$p(0\le X\le 2)+p(10<X\le 12)=\int_0^{2}\frac{1}{20}\,dt+\int_{10}^{12}\frac{1}{20}\,dt=\frac{1}{5}$$

5) La Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif.
Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre a sur

I = [0,+∞[si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a\,e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Exemple : La durée de vie, exprimée en années, d'un noyau radioactif ou d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle.

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une **loi exponentielle** de paramètre a sur I = [0,+∞[et de densité de probabilité de f.

1) a) Calculer, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$

b) En déduire que la fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2) a) Soit t > 0.Calculer, par intégration par parties, chacune des expressions suivantes:

$$E(t) = \int_0^t f(x)\,dx \quad \text{et} \quad V(t) = \int_0^t x^2\ f(x)\,dx - \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

b) Montrer alors, que $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = \dfrac{1}{a}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \dfrac{1}{a^2}$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre a > 0 sur I = [0,+∞[alors on a :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{1}{a}$.
- La variance de X est $V(X) = \dfrac{1}{a^2}$.
- La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Activité 2

Soit T, le temps (en minutes) d'attente entre deux clients au guichet de la poste.
On admet que T suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.

1) Représenter graphiquement une allure de la densité de probabilité de la variable aléatoire T.
2) Calculer la probabilité d'attendre plus de 15 min.
3) Donner l'espérance mathématique et la variance de T.

Activité 3

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Montrer que pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$ on a :
$p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
b) En déduire que pour tout $t > 0$ on a : $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.
c) Justifier que pour tous réels positifs s et t on a : $p(X > s+t \ / X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $I = [0,+\infty[$ alors :

- pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$ on a : $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- pour tout $t > 0$ on a : $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- pour tous réels positifs s et t on a : $p(X > s+t \ / X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Activité 4 (résolue)

La durée de vie d'une ampoule électrique mesurée en heures, est une variable aléatoire réelle X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

1) Donner la densité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) a) Calculer λ sachant que la durée moyenne d'une ampoule est de 2000 heures.
b) Représenter graphiquement les fonctions f et F dans deux repères orthogonaux du plan.
4) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule dure moins de 2000 heures.
5) Sachant qu'une ampoule a duré 2000 heures calculer la probabilité pour qu'elle dure 500 heures de plus.

Solution :

1) La densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

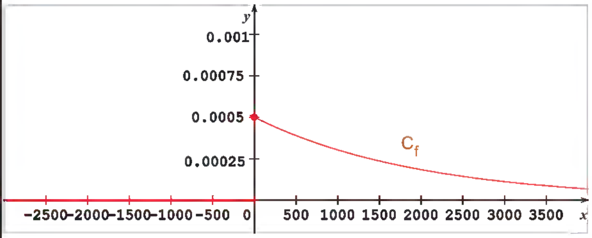
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

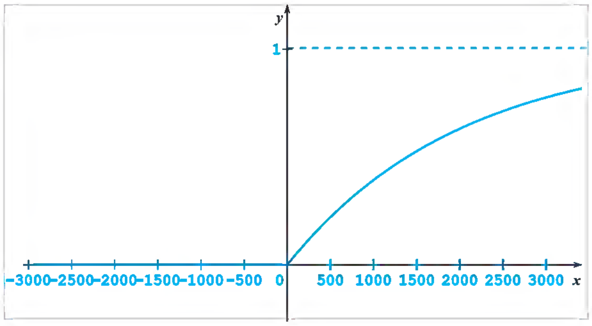
2) La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) On a $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2000$ équivaut à $\lambda = \frac{1}{2000} = 0.0005$.

Représentation graphique de f	Représentation graphique de F





4) $p(X < 2000) = 1 - e^{-\frac{2000}{2000}} = 1 - e^{-1} \simeq 0.64$ (cette probabilité représente l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la densité f de X et les droites d'équations respectives : x = 0 et x = 2000).

5) $p(X > 500 + 2000 \ / X > 2000) = p(X > 500) = e^{-\frac{500}{2000}} = e^{-0.25} \simeq 0.78$.

Activité 5

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p (de durée de vie) définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par La probabilité que «le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines» est $p(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ pour tout $t \in [0,+\infty[$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines permet de poser p(200)=0,5.

1) Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?

3) Calculer une valeur approchée décimale à la semaine prés de la durée de vie moyenne de ces composants.

RÉSUMÉ DU COURS

Variable aléatoire réelle :

Soit un univers Ω fini et p une probabilité définie sur Ω.
On appelle variable aléatoire réelle (ou aléa numérique) définie sur l'univers Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout réel x par : $F(x) = p(X \leq x)$. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, p(X > x) = 1 - F(x)$ et $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pour tous réels a et b tels que a < b.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k.x_k = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n$

- La variance de X est le réel positif $V(X) = E\left(\left(X - \overline{X}\right)^2\right)$ et on a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- L'écart-type de X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Schémas de Bernoulli :

* Soit une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, l'une est appelée succès notée S et l'autre appelée échec notée E.
On note p = p(S) et q = 1 - p = p(E).
* On répète cette épreuve n fois de suite (n>1) et on suppose que les épreuves sont deux à deux indépendantes.
* Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que la variable aléatoire X, qui à chaque n répétitions associe le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètre n et p. La loi de X se note : $\mathscr{B}$ (n, p).
* Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors pour tout $k \in X(\Omega) = \{ 0, 1, ..., n \}$ on a : $p(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$
$E(X) = n.p$; $V(X) = n.p.(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$.

Variable aléatoire réelle continue :

* Une variable aléatoire réelle X est continue lorsqu'elle est définie sur un univers Ω et vérifie : $X(\Omega) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
Dans ce cas on a : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$.
• Si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ alors $p(X \in \mathbb{R}) = 1$;
• Si $X(\Omega) = [a,b]$ alors $p(X \in [a,b]) = 1$ et $p(X \notin [a,b]) = 0$.

* Soit X une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω.
La fonction de répartition F de X a les propriétés suivantes :
• F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
• $p(X < a) = p(X \leq a)$ et $p(X > a) = p(X \geq a) = 1 - F(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
• $p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Propriétés de la densité de X :

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de densité de probabilité f alors on a les propriétés suivantes :

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Pour tous réels t et s tels que $t \leq s$ on a : $p(t \leq X \leq s) = \int_t^s f(x)\,dx$
- Si $X(\Omega) = [a,b]$ $(a<b)$ alors $\int_a^b f(x)dx = 1$. Si $X(\Omega) = [a,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$

La loi uniforme :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire continue X suit une loi de **probabilité uniforme** sur [a; b]

si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$

• L'espérance mathématique de X est « la moyenne arithmétique » des bornes de l'intervalle [a; b] c'est-à-dire : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

• La variance de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

La loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire continue X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ sur $I = [0,+\infty[$ si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

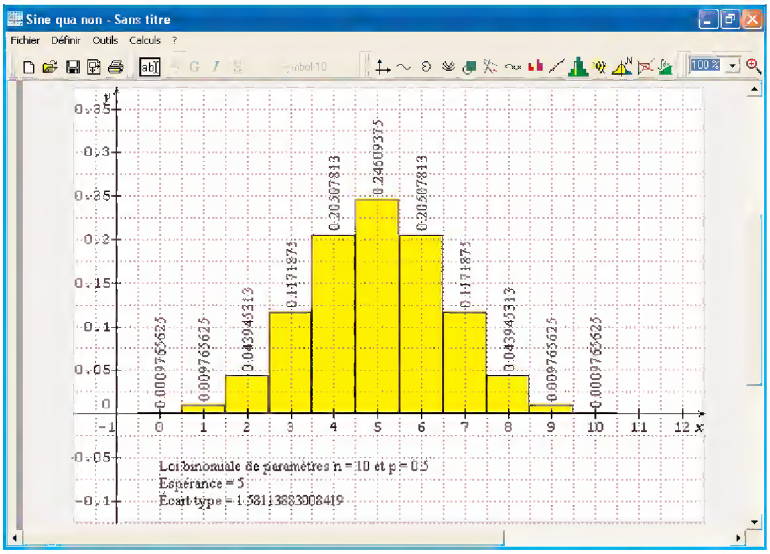
On a les propriétés suivantes :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- La variance de X est $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ pour tous réels a et b tels que $a \leq b$.
- $p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel $t > 0$.

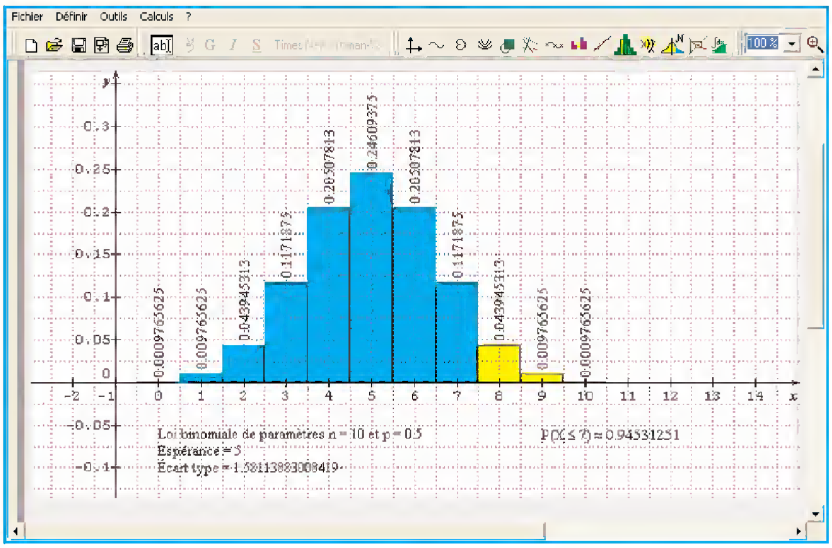
AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Le logiciel Sine qua non est un logiciel intéressant qui pourra nous aider à visualiser des calculs de probabilités pour une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n ; p), il suffit de lui proposer les paramètres : n (nombre de répétition) et p (la probabilité du succès). Par exemple : choisir,dans le menu Définir, l'icône correspondant à une loi binomiale puis prendre n = 10 et p = 0,5 pour visualiser à l'aide de ce logiciel, les calculs de p(x = k) où $k \in \{0, 1, ..., 10\}$.



Le même logiciel nous aide également à calculer et visualiser les valeurs de F(x) = p(X ≤ x) où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont la loi de probabilité suit une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n ; p). Par exemple pour n = 10 et p = 0.5 on trouve F(7) = p(X≤ 7) ≈ 0.9453



Application :

Utiliser le logiciel Sine qua non, pour résoudre chacune des deux situations suivantes :
(Ressource sur Internet : http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm)

Situation 1 :

Une usine produit des pièces pour automobiles. Sur un grand nombre de pièces fabriquées, on a constaté que 3% des pièces fabriquées doivent être rejetées.
Calculer la probabilité de trouver exactement trois pièces à rejeter dans un lot de 100 pièces prises au hasard.

Situation 2 :

Un sac contient 200 billes : 20 sont rouges, les autres sont bleues.
Les billes sont indiscernables au toucher.
1) Quelle la probabilité d'obtenir une bille rouge ?
2) Une épreuve consiste à tirer 50 fois de suite une bille, en remettant à chaque fois la bille tirée dans le sac après avoir noté sa couleur. Le nombre de fois où l'on tire une bille rouge est une variable aléatoire X.
a) Déterminer l'espérance mathématique de X.
b) Dresser le tableau donnant la loi de X.
c) Calculer la probabilité de l'évènement A : $(m-2\sigma < X \leq m+2\sigma)$ où m désigne l'espérance mathématique de X et σ son écart-type.
3) Soit F la fonction de répartition de X. Déterminer F et tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal convenablement choisi.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.
On tire simultanément 3 boules de l'urne. La variable aléatoire X est égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne après le tirage.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Définir la fonction de répartition de la variable X et la représenter graphiquement.

2 Soit X une variable aléatoire. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-1	2	4	6
p_i	0,1	0,15	0,05	0,35	0,35

Soit F la fonction de répartition de X.
Calculer F(-2), F(0), F(4,2).
Représenter graphiquement la fonction F dans un repère orthogonal du plan.

3 X est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée par :

x_i	-2	-1	2	4	6
p_i	a	0,15	0,25	b	0,1

On sait que E(X) = 1,05. Calculer a et b.

4 Un sac contient 20 boules, indiscernables au toucher, dont r sont rouges, b bleues, v vertes et j jaunes. Les entiers r, b, v et j sont respectivement proportionnels à 1, 2, 3 et 4.
1) On tire une boule au hasard et on la remet. Quelles sont les probabilités des différentes couleurs ?
2) On tire une boule, on note sa couleur, on la remet. On répète trois fois cette expérience et on s'intéresse au nombre de boules bleues tirées. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble Ω des épreuves.
a) Donner les éléments de $X(\Omega)$.
b) Calculer P(X=k) où $k \in X(\Omega)$.
c) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

5 Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.
1) On tire une boule. Calculer la probabilité de l'événement
A : " Il reste dans l'urne exactement deux couleurs".
2) On tire successivement et sans remise, deux boules. Calculer la probabilité pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.
3) On tire simultanément deux boules de l'urne.
On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance E (X).
c) Calculer la variance et l'écart-type de X.
d) Représenter graphiquement la fonction F dans un repère orthogonal du plan.

6 Une urne contient 9 boules blanches et une boule rouge.Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément trois boules de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir la

boule rouge ?

2) L'expérience précédente est répétée 5 fois, avec remise à chaque fois dans l'urne, des trois boules qu'on a tiré.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer E(X) et σ(X).

7 On lance cinq fois de suite un dé tétraédrique parfait dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Les cinq lancers sont supposés indépendants.
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de sorties du 4 en cinq lancers.
Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.

8 Dans une chaîne de fabrication, 2% de pièces sont défectueuses.
On prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 100 fois cette expérience.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient une pièce défectueuse.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Cacluler E(X).

9 Une urne contient : deux boules vertes numérotées : 1, 1 et trois boules blanches numérotées : 0, 1, -1.
1)On lance une fois une pièce de monnaie parfaite:
* Si on obtient "Face", on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
* Si non on tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On s'intéresse à la somme des numéros des deux boules tirées. Soit l'évènement A :"Obtenir une somme nulle".
a) Montrer que $p(A) = \dfrac{29}{100}$.
b) Sachant qu'on a obtenu une somme nulle, quelle est la probabilité d'obtenir "Face" ?
c) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 1$), en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Déterminer la probabilité p_n pour que l'on ait au moins une fois une somme non nulle et déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0.95$.
2) On tire successivement et sans remise les cinq boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui indique le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3) On tire successivement trois boules de l'urne de la manière suivantes :
* Si on obtient une boule blanche on la remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. Soit Y l'aléa numérique égale au nombre de boules vertes restant dans l'une.
Déterminer la loi de probabilité de Y.
* Si on obtient une boule verte on la

10 On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient une pièce défectueuse.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b)Calculer l'espérance mathématique de X.
c)Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

11 1) Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité : $p_i = P(X=i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a)Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
b)Calculer l'espérance mathématique de X.
2) Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazoile est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
C_1 : " En cinq minutes, un seul client se présente " ;
C_2 : " En cinq minutes, deux clients se présentent " ;
E : " En cinq minutes, un seul client achète de l'essence " ;
a)Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b)Montrer que $P(E / C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c)En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

12 Une boite B_1 contient trois jetons numérotés : 0, 0 et 2.
Une boite B_2 contient quatre jetons numérotés : 1, 1, 3 et 4.
1) On tire au hasard un jeton de chaque boite et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le produit des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.
2) On effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente, chaque jeton étant remis dans sa boite après chaque tirage.
Quelle est la probabilité d'obtenir :
a)Exactement deux fois un produit supérieur à quatre ?
b)Au plus une fois un produit supérieur à quatre ?
3)Une épreuve consiste à faire des tirages d'un jeton de la boite B_1, en remettant chaque fois le jeton tiré. On désigne par p_n la probabilité de l'évènement :
"Obtenir le jeton numéro 2 au $n^{ième}$ tirage pour la première fois".
a)Calculer P_1, P_2, P_3 puis P_n.
b)Calculer la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$

(D'après Bac Tunisien 1995

13 On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées: -1 ; -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1.
On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.
1) Déterminer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants :
A "Les deux numéros obtenus sont différents".
B "La somme des deux numéros obtenus est égale à 0".
2) Soit C l'évènement défini par :
C : "Les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est égale à 0".
Calculer la probabilité de l'évènement C.
3) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des deux numéros
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité de l'évènement: «X > 0».

(D'après Bac Tunisien 2002)

14 Une urne contient deux jetons blancs numérotés 1 ; -1 et trois jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; -1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux jetons de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : "Obtenir deux jetons de même couleur".
B : "Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro".

b) On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.
On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré.
On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé les plans P et P' d'équations respectives :
$x + a y + b = 0$ et $x + b y - a = 0$.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : "P et P' sont parallèles".

D : "P et P' sont perpendiculaires".

(D'après Bac Tunisien 2003)

15 On dispose d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, d'une urne U_2 contenant 3 boules noires parfait dont les faces sont numérotés 0, 0, 0, 0, 1, 1. On lance une fois le dé :
- Si on obtient le nombre 0 alors on tire successivement et avec remise deux boules de U_1.
- Si non, on tire successivement et sans remise deux boules de U_2.
1)Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : "Obtenir deux boules de même couleur ".
F : "Obtenir exactement une boule noire".
2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $\sigma(X)$.

16 On dispose de deux sacs S_1 et S_2 et d'un dé cubique parfait. Le sac S_1 contient trois jetons blancs numérotés 0, 0, 1 et trois jetons noirs numérotés 0, 2, 2. Le sac S_2 contient deux jetons blancs numérotés 0, 1 et quatre jetons noirs numérotés 0, 0, 0, 1. Les faces du dé sont numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 2.
1) On considère l'épreuve suivante : On lance le dé une fois.
* Si le numéro 1 apparaît, on tire simultanément deux jetons du sac S_1.
* Si le numéro 2 apparaît, on tire successivement et sans remise trois jetons du sac S_2.

a) Soient les évènements :
A : "Parmi les jetons tirés, on obtient le jeton noir numéro 1".
B : "Les jetons tirés sont noirs".
Calculer la probabilité de B et montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$.

b) Calculer la probabilité de faire le tirage dans S_1 sachant que les jetons tirés sont noirs.

c) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe la somme des numéros marqués. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $\sigma(X)$.

d) On répète l'épreuve 5 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir le jeton noir numéro 1 parmi les jetons tirés pour la première fois à la troisième épreuve.

2) On lance le dé 3 fois de suite. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient le numéro 2.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de Y.

17 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher portant les numéros suivants : -2 ; -1 ; 1 ; 1 ; 2.

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) On considère les évènements suivants:

A : "Aucune boule tirée ne porte le n°1".

B : "Parmi les trois boules tirées deux portent le n°1".

S : "La somme des nombres inscrits sur les deux boules qui restent dans l'urne est nulle".

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à $\frac{3}{10}$.

2) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois où l'évènement S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. *(D'après Bac Tunisien 2000)*

18 Adem possède une ficelle de 50 cm qu'il coupe au hasard. Soit X la longueur du bout de ficelle qu'il garde.

1) Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leq X \leq 25)$.

19 Soit X une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [-1,1].

On pose $Y = X^2$.

Déterminer la densité de probabilité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

20 Dans une salle de coiffure travaillent 5 coiffeurs.

Une coupe dure 20 minutes. Un client entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent.

Quelle est la loi du temps d'attente de ce client ? Quelle est son espérance ? (on admettra que les coupes sont indépendantes les unes des autres et qu'elles ont débuté depuis un temps uniformément réparti entre 0 et 20 minutes).

21 Un appareil comporte six lampes toutes nécessaires à son fonctionnement. La densité de probabilité de la durée de vie d'une lampe est définie par

$f(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$ (L'unité de temps est l'année).

a) Vérifier que f ainsi définie est une densité de probabilité d'une variable aléatoire positive. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

b) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne de façon continue pendant six ans à partir de sa mise en marche ?

22 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que F satisfait aux propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X.
2) Donner l'expression de la densité de probabilité f de X.
3) Représenter, dans un même repère orthogonal, les deux fonctions f et F.
4) a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
b) Calculer la probabilité de l'évènement $(2 < X \leq 4)$ et représenter graphiquement cette probabilité.

23 On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$.

Borhène arrive à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant lui.
1) Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende entre dix minutes et vingt minutes?

24 La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre a.
1) a) Montrer que $a = 0,2$.
b) On suppose que 50% des clients ont été dépannés durant la garantie montrer que la durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.
c) Déterminer la probabilité qu'un moteur ne tombe pas en panne avant deux ans.
2) On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manière indépendante et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.
a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
c) Déterminer la fonction de répartition F de X.
d) Représenter graphiquement f et F dans un repère orthogonal du plan.

25 Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75% de particules de type A et 25% de particules de type B.
Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz, à chaque instant t.
Ainsi, à $t = 0$ on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a : $p(t) = 0,75\, e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle positive.
a) On admet qu'à l'instant $t = 5730$ on a : $p(t) = \frac{1}{2}\, p(0)$.
Calculer une valeur approchée décimale de λ à 10^{-5} prés par défaut.
b) Au bout de combien d'années, 10% des particules de type A seront-elles transformées en particules de type B ?
c) Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.

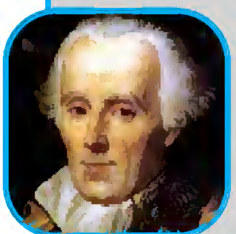
Aperçu Historique

On attribue en général à **Blaise Pascal** et à **Pierre de Fermat** l'invention au XVIIe siècle d'une première approche de la théorie des probabilités appliquée aux jeux de hasard, même si **Jérôme Cardan** s'était déjà penché sur la question dès le XVIe siècle. Cinquante ans plus tard, dans son ouvrage posthume *Ars conjectandi* (1713), **Jacques Bernoulli** systématise le calcul des probabilités, en énonçant des théorèmes prometteurs tels que l'additivité des probabilités. Au même moment, en Angleterre, **Abraham de Moivre** introduit la notion de loi normale dans son œuvre *Doctrine of Chances* (voir statistiques). Le XIXe siècle est marqué par la publication en 1814 de la *Théorie analytique* des probabilités de **Laplace**, dans laquelle la théorie des probabilités est appliquée à la mécanique et aux statistiques. Cet ouvrage aura une influence considérable sur tous les mathématiciens de ce siècle. Avec les travaux de **Darwin** et du statisticien **Quételet**, avec les travaux de Maxwell sur la théorie cinétique des gaz, ceux de **Boltzmann** sur la mécanique statistique, la vision probabiliste du monde s'affirme encore davantage, englobant tous les domaines de la science. À la fin du XIXe siècle, le Russe **Tchebychev** rend beaucoup plus rigoureuse la théorie, généralise la loi des grands nombres, que Markov reprend sous l'angle des processus dits stochastiques. Au XXe siècle, **Émile Borel** définit la probabilité à partir de la notion de mesure, et **Andreï Kolmogorov** développe une présentation axiomatique de la théorie. Aujourd'hui, les probabilités possèdent un vaste champ d'application, allant de la conception des ordinateurs à l'étude des queues ou files d'attentes (voir théorie des files d'attentes).

Blaise Pascal
(1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe, français du XVIIe siècle.

Pierre de Fermat
(1601 - 1665), mathématicien français de XVIIème siècle.

Daniel Bernoulli
(1700-1782) Pays-Bas.
Bernoulli, famille de mathématiciens et physiciens suisses qui se sont distingués aux XVIIe et XVIIIe siècles, notamment par leurs travaux en calcul infinitésimal et en mécanique des fluides.



Pierre-Simon Laplace
(1749 - 1827) mathématicien, astronome et physicien français. La place a développé la théorie des probabilités dans "Essai philosophique sur les probabilités". Ses premiers travaux sur les probabilités ont commencé entre 1771 et 1774, notemment la redécouverte aprés Bayes des probabilités inverses, dites Loi de Bays-La place, ancêtre des statistiques inférentielles.

Partie 2

Chapitre 7

Statistiques

Plan du chapitre

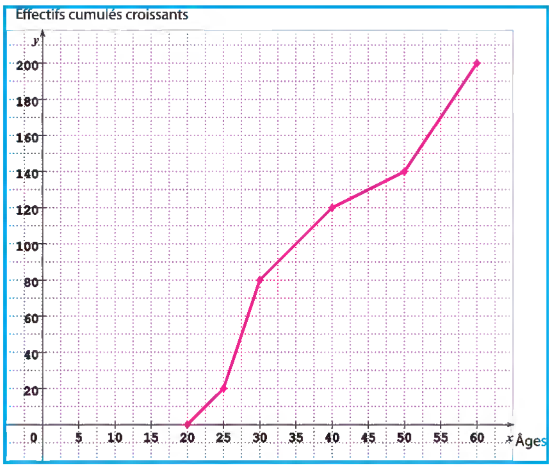
ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Une entreprise emploie 36% d'hommes et 96 femmes .La répartition des horaires du travail hebdomadaire est consignée dans le tableau ci-dessous :

Horaire	[20, 25 [	[25, 30 [	[30, 35 [	[35, 40 [	Total
Femmes	15	22			96
Hommes	2			41	
Total		29		64	

1) a) Compléter le tableau.
   b) Quel est le pourcentage des employés travaillant moins de 35 heures par semaine ?
   c) Quel est le pourcentage des femmes travaillant plus de 30 heures par semaine ?
   d) Quel est le pourcentage des hommes travaillant plus de 35 heures par semaine ?
2) Le tableau précèdent représente trois séries statistiques (horaire, femmes); (horaire, hommes); (horaire, employés).
   a) Représenter chacune de ces séries par un histogramme.
   b) Pour chacune de ces séries, déterminer le temps moyen de travail hebdomadaire d'un employé et l'écart- type de cette série.

2 L'âge des employés d'une usine varie entre 20 et 60 ans.
Le diagramme ci-contre représente le polygône des effectifs cumulés croissants de la répartition des âges.
1) Déterminer les classes et leurs effectifs.
2) Déterminer l'âge médian.
3) Calculer l'âge moyen et l'écart-type de cette série statistique.



- La moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif continu est donnée par la formule : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}{n}$ où c_i est le centre de la classe $[x_i\ ,\ x_{i+1}[$; n_i l'effectif de cette classe et n est l'effectif total de la série.
- L'écart-type de cette série est $\sigma=\sqrt{V}$ avec $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$.
- La médiane est la valeur M_e du caractère qui correspond à un effectif cumulé croissant égal à $\frac{n}{2}$ si n est pair, $\left(\text{ou } \frac{n+1}{2} \text{ si n est impair}\right)$.

3 Un relevé statistique des tailles X (en cm) et des poids Y (en kg) d'un échantillon de 100 élèves a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[
[150, 155[	18	10	2	0
[155, 160[	3	16	5	1
[160, 165[	0	5	13	5
[165, 170[	0	2	6	14

1) Donner la distribution marginale de X et la distribution marginale de Y.

2) Calculer $\overline{X}$; $\overline{Y}$; $V(X)$; $V(Y)$; $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

Retenons

Soient deux variables statistiques quantitatives X et Y définies sur une même population E d'effectif total N. Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ les valeurs de X et $y_1, y_2, ..., y_q$ celles de Y (ou les centres des classes).

On note : n_{ij} l'effectif correspondant à $(X = x_i$ et $Y = y_j)$; $n_{i.} = n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{iq}$ et $n_{.j} = n_{1j} + n_{2j} + ... + n_{pj}$. On a le tableau à double entrée suivant :

$X \backslash Y$	y_1	...	y_j	...	y_q	Totaux
x_1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1q}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{iq}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	...	n_{pj}	...	n_{pq}	$n_{p.}$
Totaux	$n_{.1}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.q}$	N

La distribution marginale de X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de X	x_1	. . .	x_i	. . .	x_p
Effectif marginal	$n_{1.}$	. . .	$n_{i.}$	. . .	$n_{p.}$

* La moyenne arithmétique de X est $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_{i.} \times x_i = \sum_{i=1}^{p} f_{i.} \times x_i$ où $f_{i.} = \frac{n_{i.}}{N}$ est la fréquence marginale associée à la modalité x_i de X.

* La variance marginale de X est $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_{i.} \times x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2$.

* L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

COURS

Séries statistiques à deux caractères quantitatifs

Activité 1

On teste la distance d de freinage (en mètres) d'un véhicule en fonction de sa vitesse v (en km/h) sur route humide. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Vitesse (v)	40	50	60	70	80	90	100
Distance de freinage (d)	21,5	28	37,5	48	60	75	92,5

1) a) Construire le nuage de points sur une feuille de papier millimétré (choisir le point de cordonnées (30,10) comme intersection des axes orthogonaux du repère et prendre 1cm pour 5km/h sur l'axe des abscisses et 1cm pour 5m sur l'axe des ordonnées).
   b) Placer le point moyen G du nuage.
   c) Sur quelle courbe semblent être situés les points du nuage ?

2) On pose $y = \sqrt{d}$. Compléter le tableau suivant :

v	40	50	60	70	80	90	100
y							

a) Construire le nouveau nuage de points.
b) Placer le point moyen G' de ce nuage.
c) Sur quelle ligne semblent être situés les points du nuage ?

Activité 2

La répartition de 100 enfants selon leurs âges (en années) et leur poids (en kg) est consignée dans le tableau suivant :

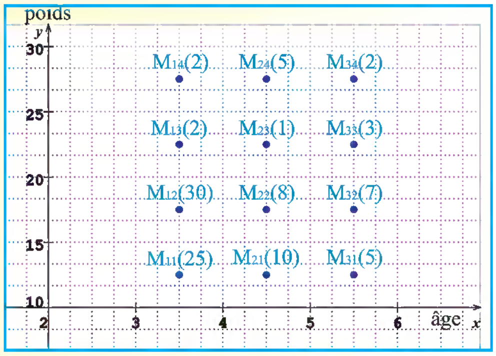
Poids \ Âges	**[3,4[**	**[4,5[**	**[5,6[**
[10,15[	25	10	5
[15,20[	30	8	7
[20,25[	2	1	3
[25,30[	2	5	2
Totaux			

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points représentant cette série statistique double.
3) Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer dans le même repère.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y.
On désigne par $x_1, x_2, \dots, x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, \dots, y_q$ celles de Y (ou les centres des classes). On note n_{ij} l'effectif correspondant à ($X = x_i$ et $Y = y_j$)

* On appelle **nuage de points** de la série considérée, l'ensemble des points $M_{ij}(x_i, y_j)$ tels que $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$.
Chacun d'eux est affecté par l'effectif n_{ij} correspondant.

* On appelle **point moyen** du nuage de points, le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignent respectivement les moyennes arithmétiques des distributions de X et de Y.



Exemple de nuage de points

Activité 3

Dans le tableau suivant, le service financier d'une entreprise a consigné les frais de publicité x_i et le chiffre d'affaires y_i (exprimés en milliers de dinars) correspondant à 8 années consécutives:

Rang de l'année (i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Frais de publicité (x_i)	1,1	1,4	1,6	2	2,2	2,3	2,2	2,4
Chiffre d'affaire (y_i)	59	68	67	71	71	69	67	72

1) a) Construire le nuage de points $M(x_i, y_i)$ sur une feuille de papier millimètré. On placera l'intersection des axes au point de coordonnées (1, 58) et en prendra sur l'axe des abscisses 1cm pour 0,2 mille dinars et sur l'axe des ordonnées 1cm pour 2 mille dinars.
b) Calculer le montant moyen $\overline{X}$ de frais de publicité sur cette période.
c) Calculer le chiffre d'affaires moyen $\overline{Y}$ sur cette période.
d) Placer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.

2) a) Donner une équation de la droite D =(M_1M_8) et tracer D.
Le point G est -il sur D ?
b) Donner une équation de la droite $\Delta = (GM_1)$ et tracer Δ.
c) Laquelle des droites D et Δ représente le mieux le nuage des points M_i ?
3) Au cours d'une année, les frais de publicité étaient de 2,5 mille dinars.
Peut-on prévoir le chiffre d'affaires correspondant ?

Activité 4

Le nombre de passagers (exprimé en milliers) dans un aéroport est relevé au cours des mois de janvier et de juillet pendant dix années consécutives. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Rang de l'année i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de passagers en janvier (x_i)	350	360	410	420	440	480	510	530	580	630
Nombre de passagers en juillet (y_i)	620	625	630	690	790	760	940	920	1030	1040

1) Construire le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$. On placera l'intersection des axes au point de coordonnées (300,600).
2) a) Calculer les cordonnées $G(\bar{x},\bar{y})$ du point moyen G de ce nuage.
b) Calculer les cordonnées des points moyens G_1 et G_2 des nuages formés respectivement des cinq premiers points $\{M_i \ / \ i \leq 5\}$ et des cinq derniers points $\{M_i \ / \ 6 \leq i \leq 10\}$.
c) Donner une équation de la droite D = (G_1G_2) puis tracer D.
3) En janvier d'une année il y a eu 700 mille passagers .Quel nombre de passagers peut-on prévoir pour le mois de juillet de la même année ?

Ajustement affine d'une série statistique double

Lorsque le nuage des points, représentant graphiquement une série statistique à deux caractères X et Y, a une forme allongée, on peut approcher la relation entre les deux variables X et Y par une relation affine définie par : Y= aX + b ou X= a'Y + b'.
On appelle **ajustement affine** toute méthode permettant la détermination d'une telle relation. Dans ce qui suit, nous présenterons deux méthodes : la méthode de Mayer et la méthode des moindres carrés.

Méthode de Mayer :

Activité 1

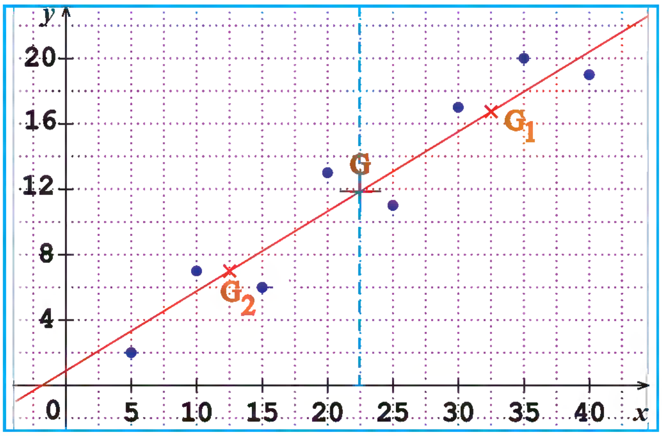
Une banque a enregistré les nombres de retraits opérés dans un guichet automatique pendant une journée. Le tableau suivant donne les montants (en DT) des retraits et leurs effectifs :

Montant en DT : x_i	40	35	30	25	20	15	10	5
Effectifs de retraits : y_i	19	20	17	11	13	6	7	2

1) a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage des points représentant cette série statistique.
   b) Quelle particularité peut -on remarquer au sujet de la forme du nuage ?
   c) Déterminer, les cordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer G.
2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux parties. La première partie P_1 correspond aux retraits inférieurs ou égaux à 25 DT et la deuxième partie P_2 correspond aux autres retraits.
a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectifs des parties P_1 et P_2 . Placer G_1 et G_2 dans le même repère.
   b) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2) et vérifier que cette droite passe par le point G.
3) Quel nombre de retraits de 50 DT peut -on prévoir en une journée ?

Commentaires :

- Le nuage de points de la série considérée a une forme allongée.
- La droite (G_1G_2) passe près des points du nuage. Elle est appelée droite de Mayer.
- Nous disons qu'on a réalisé un ajustement affine du caractère y en fonction de la variable x à l'aide de la méthode de Mayer.



La méthode de Mayer consiste à :

a) Partager le nuage de points en deux parties P_1 et P_2 satisfaisant à :

* P_1 et P_2 sont situées de part et d'autre par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées. ... / ...

* cardinal(P_1) = cardinal(P_2) si le nombre des points du nuage est pair.
* cardinal(P_1) = cardinal(P_2) +1 ou cardinal(P_1) = cardinal(P_2) -1 si le nombre des points du nuage est impair.

b) Déterminer les points moyens respectifs G_1 et G_2 des parties P_1 et P_2.

c) La droite (G_1G_2) est alors la droite d'ajustement affine du nuage de points représentant la série considérée. Cette droite est la droite de Mayer associée au nuage de points. Elle passe par le point moyen G du nuage.

Activité 2

L'évolution du pourcentage des frais de santé par rapport au budget des ménages d'un pays au cours des six dernières années est consignée dans le tableau suivant :

Rang de l'année : X	1	2	3	4	5	6
Pourcentage : Y	7,2	9,7	11,9	12,5	14	16

1) Construire le nuage de points représentant cette série double dans un repère orthogonal du plan.
2) Déterminer et placer le point moyen G de ce nuage.
3) Par la méthode de Mayer, Déterminer une équation cartésienne de la droite d'ajustement affine de Y en X.
4) Quel pourcentage de frais de santé par rapport au budget des ménages peut-on prévoir pour l'année de rang 10 ?

Activité 3

Dans le tableau suivant on a consigné les moyennes annuelles en mathématiques obtenues par dix élèves de classe terminale et leurs notes de mathématiques au Baccalauréat :

Moyennes annuelles : X	7	10	6	15	16	18	15	10	7	10
Notes de Math au Baccalauréat : Y	7	8	5	11	17	18	13	11	9	10

1) Construire le nuage de points de la série statistique double (X, Y) ainsi définie.
2) Préciser le point moyen G du nuage.
3) Réaliser un ajustement affine par la méthode de Mayer.
4) Peut-on prévoir une estimation de la note de mathématiques au baccalauréat d'un élève ayant obtenu une moyenne annuelle en mathématiques égale à 13 ?

Méthode des Moindres carrés :

Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y.
On peut reconnaître la relation affine éventuelle entre les deux variables X et Y à l'aide d'un moyen non graphique et en faisant intervenir deux nouveaux paramètres statistiques à savoir : la covariance et le cœfficient de corrélation linéaire.

1) Covariance

Définition

Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y.
On désigne par $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, \dots, y_n$ celles de Y (ou les centres des classes).On note n l'effectif total de la population observée.
On appelle covariance de la série double considérée le réel,noté Cov(X,Y), et défini par : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y}$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des distributions $(x_i)_{1 \le i \le n}$ et $(y_i)_{1 \le i \le n}$ de X et Y.

Remarque :

On a : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y}$; où $\overline{XY}$ désigne la moyenne arithmétique de la distribution $(x_i y_i)_{1 \le i \le n}$ du caractère statistique produit .

Activité 1

Le tableau suivant donne les nombres d'accidents de la circulation enregistrés au cours des cinq dernières années dans une ville :

Rang de l'année : X	1	2	3	4	5
Nombre d'accidents : Y	82	90	117	96	102

1) a) Calculer les moyennes arithmétiques $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
   b) Calculer les variances V(X) et V(Y).
2) a) Calculer Cov(X,Y).
b) Comparer $\mathrm{Cov}^2(X,Y)$ au produit V(X).V(Y).
3) Construire le nuage de points de la série double. Existe-t-il une relation affine entre les variables X et Y ?

Commentaires :

Soit une série statistique a deux caractères quantitatifs X et Y.
Lorsque $\mathrm{Cov}^2(X,Y)$ est assez voisin de V(X).V(Y), on peut dire que la relation entre X et Y est approximativement affine.
On peut alors trouver deux réels a et b tels que Y est proche de aX + b.
Cette approximation pourrait être très utile pour décrire un phénomène aléatoire et prévoir son évolution.

Activité 2

Une étude a été réalisée dans une entreprise pour connaître l'effet des longues durées de travail sur la qualité de la production. Le tableau suivant donne les résultats de cette étude :

Durée en heure du travail quotidien : X	8	9	10	12	14	15
Nombre d'erreurs commises : Y	6	7	10	14	20	25

1) a) Calculer, les écarts-types, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
   b) Calculer Cov(X,Y).
   c) Comparer Cov(X,Y) au produit $\sigma(X).\sigma(Y)$.
   d) Que peut -on en déduire ?
2) Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer un ajustement affine de Y en X.
3) Peut-on prévoir le nombre d'erreurs commises par un ouvrier qui a travaillé 13 heures de suite en une journée ?

2) Cœfficient de corrélation linéaire

Définition

Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y non constants observés dans une population donnée d'effectif total n.
On appelle **cœfficient de corrélation linéaire** de la série double (X, Y), le réel r défini par : $r = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$ où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont les écarts-types respectifs des variables statistiques X et Y.

Activité 1

Le tableau suivant donne le nombre de résistances électriques vendues, dans un magasin de composantes électriques, suivant leurs puissances (en W) en un mois :

Puissances (en W) : X	100	150	200	300	500
Nombre de résistances : Y	50	70	100	150	250

1) a) Calculer Cov(X,Y) , $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
   b) Peut-on déduire qu'il existe une relation du type affine entre X et Y ?
2) a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire r du couple (X, Y).
   b) Comparer r à 1.
3) a) Tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives : y = ax + b et x =a'y +b'

$$D_1 : y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

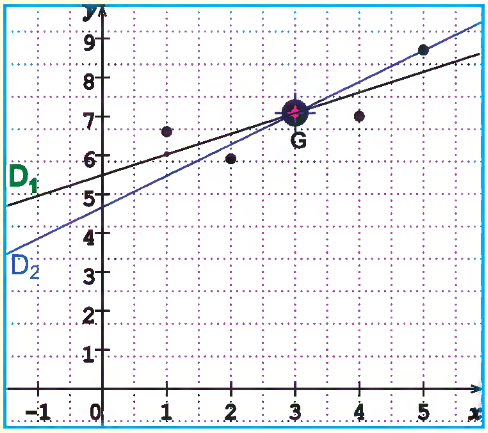
$$D_2 : x = a'y + b' \text{ avec } a' = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$$

b) Construire le nuage des points de la série double considérée.
c) Comment sont situées les droites D_1 et D_2 par rapport au nuage de points ?
d) Montrer que le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ appartient à D_1 et D_2 .

Commentaires :
Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y.
Lorsque le cœfficient de corrélation linéaire r du couple (X, Y) est proche, en valeur absolue, de 1 ($0.75 \leq | r | \leq 1$), le nuage de points de la série considérée a une forme allongée et il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par deux relations affines représentées graphiquement par deux droites D_1 et D_2 passant par le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ du nuage.
* La droite D_1: appelée droite de régression de Y en X et ayant pour équation :
$y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.
* La droite D_2: appelée droite de régression de X en Y et ayant pour équation :
$x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

Exemple :

$r \simeq 0,81$;
D_1: $y = 0,53\,x + 5,49$
D_2: $x = 1,24\,y - 5,79$
G étant le point moyen du nuage de points ci-contre correspondant à la série double (X,Y).



Activité 2

Le tableau suivant donne l'âge X et la tension artérielle Y de 10 personnes :

X	58	40	74	34	65	49	53	51	36	40
Y	16,7	13,1	17,2	11,6	15,5	15,1	14,2	14,4	13,0	14,2

1) Construire le nuage de points de cette série statistique.
2) Déterminer la moyenne et la variance de chacune des variables X et Y.
3) Déterminer le cœfficient de corrélation linéaire r des variables X et Y.
4) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
5) Estimer la tension artérielle d'une personne âgée de 45 ans.

Activité 3

Dans une grande surface, le prix de vente promotionnel d'un produit (en DT) est affiché en fonction de son poids (en g) dans le tableau suivant :

Prix du produit: X (en D.T)	0,650	0,900	1,100	1,300	1,500	2,600
Poids du produit : Y (en g)	100	150	200	250	300	500

1) a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire r de la série double (X, Y).
   b) Un ajustement affine est-il justifié ?
2) Donner les équations des droites de régression relativement à un repère orthogonal du plan.
3) Quel prix peut-on prévoir pour un produit de poids 1 kg ?

Exemples d'ajustement non affine

Activité 1

Les frais de publicité (en DT) engagés par une entreprise durant les dix dernières années sont consignés dans le tableau suivant :

Rang de l'année(X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frais de publicité (Y)	1015	1310	1690	1977	2803	3606	4640	5960	7400	9000

1) Compléter le tableau suivant :

Rang de l'année(X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z = ln Y										

2) a) Représenter, dans un repère orthogonal, par un nuage de points, la série statistique double définie par (X, Z).
   b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer G dans le même repère.
3) a) Tracer une droite D passant par G et assez près des points du nuage.
   b) Déterminer une équation cartésienne de D.
   c) En déduire une relation entre X et Z.
4) Trouver, alors, une relation entre X et Y.

Activité 2

Une entreprise fabrique un produit A.

1) Le prix de revient de fabrication est composé de a (en DT) de frais fixes et b (enDT) par unité produite. Pour n unités produites ce prix de revient est alors a + n.b.

   Montrer que le prix de revient d'une unité produite est $y = \frac{a}{n} + b$.

2) On se propose de trouver les cœfficients a et b.

   a) Dans le tableau suivant, on a enregistré le prix unitaire pour chaque nombre d'unités produites :

Nombre d'unités : n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de revient unitaire : y	150	81	54	44	38	32	29	26	23	21

   Représenter le nuage de points de la série double (n, y). Un ajustement affine vous parait-il justifié ?

   b) On pose $x = \frac{1}{n}$.

   - Calculer les valeurs de x à 10^{-2} près, par défaut.
   - Représenter le nuage de points de la série double (x, y). Un ajustement affine vous parait-il justifié ?
   - Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
   - En déduire une relation entre y et n.

   c) Quelle estimation peut-on donner du prix de revient d'une unité de produit A si on en fabrique 20 ?

Activité 3

Le tableau suivant donne la tension u (en volts) aux bornes d'un condensateur à l'instant t (en secondes) :

t (en s.)	30	60	90	120	150	180	210	240
u (en V)	2,35	1,40	0,80	0,50	0,30	0,20	0,15	0,10

On pose y = ln u

1) Dresser le tableau de valeurs de la série double (t, y).
2) a) Calculer le cœfficients de corrélation entre t et y .
   b) Un ajustement affine est-il justifié ?
3) a) Donner une équation de la droite de régression de y en t.
   b) En déduire une relation entre t et u.
4) Déterminer l'instant T en lequel u vaut 1 volt.

Exercices résolus

Exercice 1

Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètres) d'une voiture en fonction de sa vitesse v (en km/h) :

v (km/h)	30	40	50	60	70	80
d (en mètres)	42	60	80	90	95	110

1) Calculer $\bar{v}$, $\bar{d}$, V(v), V(d) et cov(v,d) .
2) a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire entre v et d.
   b) Y- a- t- il forte corrélation affine entre v et d ? Justifier.
3) Soit Δ la droite de régression de d en v. On considère qu'une équation cartésienne de Δ est : d = 1,3.v + 8. Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h.
4) La vitesse de la voiture est de 140km/h, lorsque le conducteur, roulant suivant une ligne droite aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres.
   Pourrait-il, alors, éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freins ?

(Bac Tunisien : juin 2005)

Solution :

1) $\bar{v} = 55$; $\bar{d} = 79{,}5$; $V(v) = 291{,}66$; $V(d) = 511{,}25$ et $cov(v,d) = \overline{v.d} - \bar{v}.\bar{d} = 379{,}166$.

2) a) $r = r(v,d) = \dfrac{cov(v,d)}{\sigma(v).\sigma(d)} \simeq 0{,}981$.

   b) Ce coefficient r est proche de 1.Donc il y a une forte corrélation affine entre v et d et un ajustement affine est justifié.
3) d = 1,3.v + 8. Si v = 100 km/h alors d = 138 m.
4) Si v = 140 km/h alors d = 190m.
   En une seconde, la voiture parcourt la distance $d_0 = \dfrac{140.000}{3600} = 38{,}8\,m$.

   La distance totale parcourue serait : $d + d_0 = 228{,}8\,m > 200\,m$ .Par conséquent, le conducteur ne pourra pas éviter l'obstacle.

Exercice 2

Le rendement R d'une variété de blé (en quintaux par hectare) et la quantité E d'engrais azotés (en kg/ha) utilisée pendant la culture sont indiqués dans le tableau suivant:

E (kg / ha)	50	60	70	80	90
R (q / ha)	35,7	41,4	45,7	47,2	50,8

1) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (E, R).
   b) Que peut-on en déduire ?
2) Déterminer une équation de la droite de régression de R en E relativement à un repère orthogonal du plan.
3) Quel rendement peut-on prévoir pour une culture utilisant une quantité d'engrais azotés E = 100kg/ha ?

Solutions :

1) a) $\overline{E} = 70;\ \overline{R} = 44{,}16$; $r(E,R)=\dfrac{cov(E,R)}{\sigma(E).\sigma(R)} \simeq 0{,}98$.

b) Le coefficient de corrélation est très voisin de 1, on en déduit que l'une des variables peut être approchée par une fonction affine de l'autre variable.

2) $R = a.E + b$ avec $a = \dfrac{cov(E,\,R)}{V(E)} = 0{,}36$ et $b = \overline{R} - a.\overline{E} = 18{,}92$.

L'équation demandée est alors : R = 0,36.E +18,92.

3) Pour E=100kg / ha, la formule précédente donne:

$R = 0{,}36 \times 100 + 18{,}92 = 54{,}92\ (q\,/\,ha)$.

Exercice 3

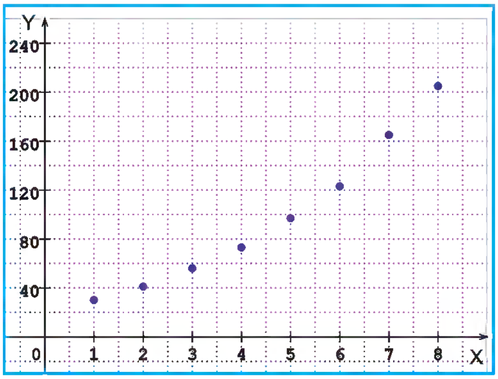
Le tableau suivant indique l'évolution de la consommation d'énergie électrique dans un pays au cours de 8 années successives :

Rang de l'année : X	1	2	3	4	5	6	7	8
Consommation (en Twh) : Y	30	41	56	73	97	123	165	205

1) a)Représenter le nuage de points de la série double (X, Y) dans un repère orthogonal du plan.
   b) Calculer le coefficient r_1 de corrélation linéaire du couple (X, Y).
   c) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de Y en X.
2) On suppose que la relation entre X et Y est du type exponentiel : $Y= k.e^{aX}$ et on pose V =ln Y.
   a) Représenter le nuage de points de la série double (X, V) dans un repère orthogonal du plan et calculer le coefficient r_2 de corrélation linéaire du couple (X, V).
   b) En déduire qu'il y'a une forte corrélation linéaire entre V et X puis construire la droite D' de régression de V en X.
   d) En écrivant V =a.X + b où b = ln k , trouver alors les réels a et b.

Solution :

1) a) Représentation du nuage de points de la série double (X, Y) ; voir figure ci-contre :



b) On a :

$\overline{X} = 4,5$; $\overline{Y} = 98,75$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(Y) = 57,9$

$$cov(X,Y) = 129,37;\ r_1 = r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = 0,97$$

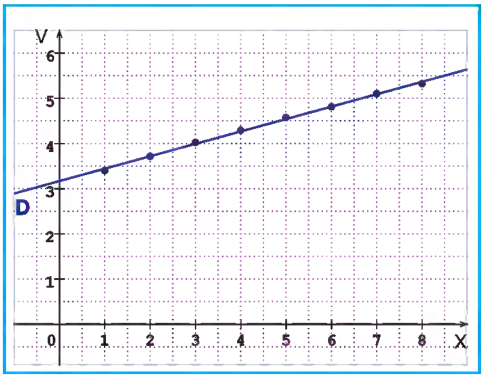
c) Une équation de la droite D de régression de X en Y est : y = 9,62.x + 29,71.

2) V = ln Y; On a aors, le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3,401	3,713	4,025	4,290	4,574	4,812	5,105	5,323

On a : $\overline{X} = 4,5$; $\overline{V} = 4,40$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(V) = 0,62$;

$$cov(X,V) \approx 1,441;\ r_2 = r(X,V) = \frac{cov(X,V)}{\sigma(X).\sigma(V)} \approx 0,99 \quad ;$$



On a r(X, V) est voisin de 1 donc il y a forte corrélation linéaire entre V et X et un ajustement affine est donc, justifié.

c) Une équation de la droite Δ de régression de X en V est : v = 0,27.x + 3,17 . Ainsi,on a:

a = 0,27 et b = 3,17 ce qui donne :

$Y = e^{3,17}.e^{0,27.X} = e^{0,27.X+3,17}$.

3) Soit $f(x) = e^{0,27.X+3,17}$. Etudier et réprésenter graphiquement f dans le même repére que le nuage de points de la premiére question.

RÉSUMÉ DU COURS

* **Nuage de points d'une série statistique double :**
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,u,v) .
Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y. On désigne par $x_1,x_2,\dots, x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2,\dots, y_q$ celles de Y (ou les centres des classes). On note n_{ij} l'effectif correspondant à $(X = x_i$ et $Y = y_j)$.
- On appelle nuage de points de la série considérée, l'ensemble des points $M_{ij}(x_i,y_j)$ tels que $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le q$ .Chacun d'eux est affecté par l'effectif n_{ij} correspondant.
- Le point moyen du nuage de points est $G(\overline{X},\overline{Y})$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignent respectivement les moyennes arithmétiques de X et Y.

* **Ajustement affine d'une série statistique double :**
Lorsque le nuage des points, représentant graphiquement une série statistique à deux caractères X et Y, a une forme allongée, on peut approcher la relation entre les deux variables X et Y par une relation affine définie par : $Y= a.X + b$ ou $X= a'.Y + b'$. Toute méthode permettant la détermination d'une telle relation, s'appelle un ajustement affine du couple (X, Y).

Méthode de Mayer :
La méthode de Mayer consiste à :
a) Partager le nuage de points en deux parties P_1 et P_2 satisfaisant à :
* P_1 et P_2 sont situées de part et d'autre par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
* $card(P_1) = card(P_2)$ si le nombre des points du nuage est pair.
* $card(P_1) = card(P_2)+1$ ou $card(P_1) = card(P_2) -1$ si le nombre des points du nuage est impair.

b) Déterminer les points moyens respectifs G_1 et G_2 des parties P_1 et P_2 .
c) La droite (G_1G_2) est alors la droite d'ajustement affine du nuage de points représentant la série considérée. Cette droite s'appelle la droite de Mayer.

Méthode des moindres carrés :
Soit une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y.
On désigne par $x_1,x_2,\dots, x_n$ les valeurs de X et par $y_1, y_2,\dots, y_n$ celles du caractère Y (ou les centres des classes).On note n l'effectif total de la population observée. Soit r le cœfficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) :

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont les écarts-types respectifs des variables statistiques X et Y;

et $Cov(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \overline{X}.\overline{Y}$ est la covariance du couple (X, Y).

* Lorsque le cœfficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est proche, en valeur absolue, de 1 $(0.75 \leq |r| \leq 1)$, il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par deux relations affines représentées graphiquement par deux droites passant par le point moyen G du nuage. La droite D_1 : appelée droite de régression de Y en X et ayant pour équation :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

La droite D_2 : appelée droite de régression de X en Y et ayant pour équation :

$$x = a'y + b' \text{ avec } a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

On se propose de résoudre, à l'aide du logiciel **Sine qua non** :(Ressource sur Internet: http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm), le problème ci-dessous proposé par une entreprise qui fabrique et vend des lots de circuits électriques.
Ces circuits sont garantis un an. L'entreprise envisage d'augmenter la durée de la garantie et désire connaître l'incidence de cette mesure sur les bénéfices.
Le tableau suivant indique le pourcentage y de circuits d'un lot qui ont une panne au cours de x semestres d'utilisation :

x (semestres)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (pourcentage)	2	3	4	7	9	11	16	20	23	31

1) Pour construire le nuage des points $M_i\,(x_i,\ y_i)$ à l'aide du logiciel :
* Définir, tout d'abord, le repère **(menu Définir, repère),** tout en choisissant l'origine, la graduation, la forme de la grille, etc. Par exemple : on prendra 1cm pour 1 semestre et 0,5 cm pour 1%.
* **Définir** successivement les points $M_i(x_i,y_i)$ (choisir **série statistique double**,dans le menu Définir, et remplir le tableau de données,…) ,etc. puis valider par OK.
Question : Peut-on envisager un ajustement affine résumant le nuage obtenu ?

2) Pour visualiser la droite de régression de y en x :
* Ouvrir le logiciel et taper sur l'icône correspondant à la définition d'une série statistique double.
* Faire entrer les données du tableau précédent, cocher la nature de régression (linéaire : y en fonction de x). Vous obtenez alors des renseignements sur les paramètres statistiques de cette série double, etc.
* Valider par OK pour obtenir la représentation graphique de la droite de régression de y en x.

3) Le logiciel consigne que : $\text{cov}(x,\ y) = 25{,}5$; le cœfficient de corrélation linéaire $r = 0{,}97$ et l'équation de la droite de régression de y en x est $y = 3{,}09\,x - 4{,}4$.
Justifier à votre tour, par le calcul, ces résultats consignés.

4) Pour un lot, la part de bénéfice z, exprimée en pourcentage du prix de vente du lot, est liée à la variable y précédente par la relation : $z = 40 - 1{,}2\,y$.
En utilisant la relation obtenue dans la question 3) entre x et y, déterminer le nombre maximum de semestres de garantie que l'entreprise peut accorder à ses clients tout en conservant un bénéfice z , exprimé en pourcentage du prix de vente d'un lot, supérieur ou égal à 25.

Activité 2

Pour résoudre une activité se rapportant à une série statistique double, en utilisant une calculatrice Sharp, il faut choisir tout d'abord le mode statistique double :

Mode Statistique Double :

Sharp Mode (0 -2)	Sharp Mode (0 -1)	Sharp Mode (0 - 3)
2ndf , Mode , 2 ==> Stat xy	2ndf , Mode , 1 , 1 ==> Stat 1	2ndf , Mode , 3 , 1 ==> Stat 1

Exemple : Dans une population de 30 logements, on a observé les deux variables statistiques suivantes : X : nombre d'enfants dans chaque logement. Y : nombre de pièces du logement.

*** Les résultats individuels sont consignés dans le tableau suivant :**

x_i	0	3	0	3	1	3	1	2	3	2	1	1	1	0	3	0	1	2	3	1	2	1	3	1	2	2	3	2	1	2
y_i	1	3	2	2	1	3	2	2	2	1	3	2	3	1	3	2	2	3	3	1	3	2	2	3	3	1	2	3	2	2

*** Ces résultats sont résumés dans le tableau à double entrée suivant:**

Y \ X	1	2	3	Totaux
0	2	2	0	**4**
1	2	5	3	**10**
2	2	2	4	**8**
3	0	4	4	**8**
Totaux	**6**	**13**	**11**	**30**

Saisie du tableau à double entrée :	La série marginale de X :	La série marginale de Y :
0 STO 1 STO 2 M+	La moyenne arithmétique de X :	La moyenne arithmétique de Y :
0 STO 2 STO 2 M+	RCL 4 → $\overline{X}$ = 1.66	RCL 7 → $\overline{Y}$ = 2.16
1 STO 1 STO 2 M+	La variance V(X) :	La variance V(Y) :
1 STO 2 STO 5 M+	RCL 6 x^2 = → V(X) = 1,02	RCL 9 x^2 = → V(X) = 0.53
1 STO 3 STO 3 M+	L'écart-type de σ(X) :	L'écart-type de σ(Y) :
2 STO 1 STO 2 M+	RCL 6 → σ(X) = 1,01	RCL 9 → σ(Y) = 0.73
2 STO 2 STO 2 M+		
2 STO 3 STO 4 M+		
3 STO 2 STO 4 M+		
3 STO 3 STO 4 M+		

Le coefficient de corrélation linéaire r : RCL ÷ → 0.38 (corrélation faible).

La covariance Cov(X, Y) : RCL ÷ x RCL 6 x RCL 9 = → Cov(X, Y) = 0.28

Droite de régression de Y en X : Y = α X + β ,

α : RCL) → α = 0.28 ; β : RCL (→ β = 1.69

Droite de régression de X en Y : X = α' Y + β',

α' : RCL ÷ x^2 ÷ RCL) = → α' = 0.04 ; β' : $\overline{X}$ − α' $\overline{Y}$ → 1.58.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On a relevé, dans le tableau ci-dessous, pour 100 véhicules la distance parcourue (en milliers de km) en 3 ans :

Distance parcourue	De75 à 85	De85 à 95	De95 à 105	De105 à 115	De115 à 125
Effectif	10	18	40	20	12

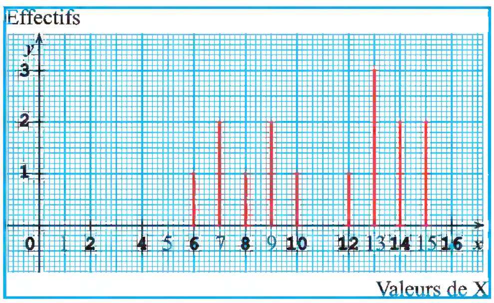
1) Construire l'histogramme correspondant à cette série statistique.
2) Calculer la distance moyenne parcourue par un véhicule en une année.

2 Dans deux entreprises A et B, les salaires horaires ont été classés de la manière suivante :

Salaire (en dinars)	De 1 à 1,5	De1,5 à 2	De2 à 2,5	De2,5 à 3	De3 à 3,5
Effectif de A	10	18	40	20	12
Effectif de B	10	18	40	20	12

1) Établir le tableau associé aux fréquences des deux séries statistiques.
2) a) Construire dans un même repère orthogonal les histogrammes des fréquences.
b) Comparer, globalement, les deux entreprises.
3) Calculer, pour chaque série, le salaire horaire moyen ; la médiane et lécart-type.

3 Le diagramme ci-dessous, représente un caractère quantitatif discret X.



1) Déterminer la moyenne, la médiane et le mode de la série statistique associée à X.
2) Soit le caractère quantitatif Y dont les valeurs sont : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 15 ; 16 ; 17.
a) Représenter graphiquement Y.
b) Montrer que X et Y ont même moyenne, même médiane et même mode.
3) a) Calculer pour chaque caractère : l'étendue, l'écart moyen et l'écart-type.
b) Interpréter les résultats obtenus.

4 Le tableau ci-dessous donne la taille et le poids de cinq enfants :

Taille X (en cm)	95	103	109	122	133
Poids Y(en kg)	15	16	19	24	30

1) a) Construire le nuage de points de cette série double dans un repère orthogonal du plan.
b) Déterminer et placer le point moyen G de ce nuage.
2) Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer un ajustement affine de la série considérée.
3) Utiliser les résultats de la question précédente pour déterminer une valeur approchée du poids d'une enfant dont la taille est 115 cm.

5 Les dépenses annuelles d'un pays pour la promotion des nouvelles technologies de l'information et de la communication, au cours des six dernières années (en milliers de D.US) sont consignées dans le tableau suivant :

Rang de l'année : X	1	2	3	4	5	6
Dépenses (en M.D.US) : Y	445	474	504	530	568	588

1) Représenter graphiquement la série par un nuage de points et placer le point moyen G dans un repère orthogonal du plan.
2) On considère les points du nuage correspondant aux années 1, 2 et 3 et on désigne par G_1 le point moyen de ces trois points. Soit G_2 le point moyen des trois points correspondant aux années 4, 5 et 6.
   a) Placer les points G_1 et G_2 et tracer (G_1G_2).
   b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
   c) Que représente G pour le segment $[G_1G_2]$?
3) Déterminer une valeur approchée de la dépense au cours de l'année de rang 10 ?

6 Le tableau ci-dessous illustre l'influence de la pluviométrie sur le rendement d'une variété de blé en tonnes par hectare au cours d'une année :

Pluviosité (en mm) : X	165	130	120	80	40	30
Rendement (en t/ha) : Y	0,37	0,30	0,29	0,25	0,20	0,12

1) Calculer les coordonnées du point moyen.
2) Représenter, dans un repère orthogonal, cette série double par un nuage de points.
3) Peut-on envisager un ajustement affine résumant le nuage ? Si oui donner une équation de la droite de régression de Y en X.

7 Les hauteurs barométriques (liées à la pression atmosphérique) varient en fonction de l'altitude conformément au tableau suivant :

Altitude (en km) : X	0	1	2	4	6	10
Hauteur barométrique (en cm) : Y	76	67	59	46	35	20

1) a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points.
   b) Peut-on justifier un ajustement affine de la série considérée ?
2) Utiliser la méthode de Mayer pour donner une équation cartésienne d'une droite résumant le nuage de points.
3) En déduire l'altitude d'un lieu où la hauteur barométrique est de 60 cm.

8 Le tableau suivant représente une série chronologique donnant le chiffre d'affaires Y (en millions de D.T) d'une entreprise au cours des dix dernières années. (X est le rang de l'année).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	8	12	12	15	17	22	27	32	37	42

1) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X,Y) ainsi définie.
   b) Que peut-on en déduire ?
2) Déterminer deux équations des droites de régression D_1 et D_2 dans un repère orthogonal du plan.
3) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires reste la même, donner le rang de l'année à partir duquel le chiffre d'affaires dépassera 50 millions de dinars tunisiens.

9 On donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant « la charge y, en kg, de rupture d'un acier » en fonction de « sa teneur x, pour 10.000 unités, en carbone ».

X	72	60	68	66	64	62	64	70	62	74
Y	90	70	80	80	75	75	80	85	70	100

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique double.
2) Calculer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, V(X), V(Y) et cov(X,Y) .
3) Est-il possible d'envisager une liaison affine entre X et Y ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.
4) Déterminer et construire la droite de régression de Y en X.
5) Quelle pourrait -être la charge de rupture d'un acier ayant une teneur en carbone de 65 pour 10.000 unités?

10 Les nombres de litres d'essence achetés à une pompe d'essence de 8 véhicules selon leurs puissances (en chevaux) sont consignés dans le tableau suivant :

Puissance (en chevaux) : x	4	5	6	8	9	10	11	12
Nombre de litres d'essence : y	10	20	25	30	40	32	25	45

1) a) Calculer $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ et cov(x,y)
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r du couple (x, y).
c) Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2) Déterminer les équations des droites de régression correspondant à cette série statistique double.
3) Quel volume d'essence acheté peut-on prévoir pour un véhicule de puissance 7 chevaux ?

11 Un relevé statistique des tailles X (en cm) et des poids Y (en kg) d'un échantillon de 100 enfants a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[
[100,110[	18	10	2	0
[110,120[	3	16	5	1
[120,130[	0	5	13	5
[130,140[	0	2	6	14

1) Construire, dans un repère orthogonal du plan, le nuage de points associé à cette série statistique double.
2) Déterminer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, V(X), V(Y) .
3) Calculer cov(X,Y) en utilisant la

formule : $\displaystyle \text{cov}(X,Y) = \frac{1}{100} \sum_{\substack{1 \le i \le 4 \\ 1 \le j \le 4}} n_{ij}.c_i c'_j$

où les c_i sont les centres des classes de la variable X et les c'_j sont les centres des classes de la variable Y ; n_{ij} désigne l'effectif correspondant à $(X = x_i \text{ et } Y = y_i)$.

4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r du couple (X, Y) et dire si on peut estimer un ajustement affine entre X et Y.
5) Déterminer la droite de régression de Y en X.

12 Les notes de 15 élèves d'une classe de 1ère année secondaire dans le devoir de synthèse numéro 2 : X en Français, Y en Mathématiques et Z en sciences physique sont consignés dans le tableau suivant :

N° de l'élève	X = notes de Français	Y = notes de Maths	Z = notes de Sc.Physique
1	6.5	12	7,5
2	6.5	10	7
3	6	8	5
4	8	7.5	4.5
5	9.5	14.5	8
6	4.5	8.5	5.5
7	12	12	6

8	6.5	12	7,5
9	6.5	10	7
10	6	8	5
11	8	7.5	4.5
12	9.5	14.5	8
13	4.5	8.5	5.5
14	12	12	6
15	12	12	7
moyenne	....	....	....
médiane	....	....	....
mode	....	....	....
écart-type	....	....	....

A) Compléter le tableau (on pourra utiliser une feuille de calcul Excel ou une calculatrice).

B) On se propose d'étudier la relation entre les variables statistiques X et Y.

1) a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série double (X, Y)

b) Peut-on justifier un ajustement affine de la série considérée ?

c) Donner une équation cartésienne de la droite de Mayer associée au nuage de points.

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r du couple (X, Y).

b) Quelle conclusion peut-on en trier ?

3) Déterminer les équations des droites de régression correspondantes.

C) Etudier de même, les séries doubles : (X, Z) et (Y, Z).

13 Dans le tableau statistique suivant : X désigne la température moyenne extérieure en 24 heures et Y désigne la consommation de pétrole de chauffage pour les mêmes 24 heures et pour une famille donnée.

X en degrés	-2	0	4	8	10
Y en litres	40	30	20	15	10

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et vérifier qu'il y a une forte corrélation linéaire entre ces deux variables.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.

3) Quelle prévision (en litres) sur sa consommation de pétrole peut faire la famille considérée, si une vague de froid persiste pendant 48 heures avec une température moyenne extérieure de -4° ?.

14 L'évolution du taux de chômage dans un pays au cours de 7 années successives est la suivante :

T	1	2	3	4	5	6	7
C	6,6	5,9	7,2	7	8,7	8	9,3

T : temps et C : taux de chômage (en%)

1) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série double (T, C).

2) Peut-on justifier un ajustement affine de la série double (T, C) ?

3) Trouver par la méthode des moindres carrés l'équation c = at + b.

15 Le tableau suivant indique la distribution de 50 logements en fonction de leur nombre X de pièces principales et de leur surface Y en m^2.

X \ Y	30	50	70	90	120
1	1				
2	1	2	2		
3		1	6	6	
4			2	16	5
5				4	4

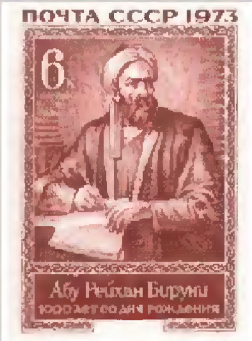
1) a) Déterminer les distributions marginales associées à X et à Y.
   b) Calculer X, Y, V(X) ; V(Y) ; σ(X) et σ(Y).
2) Construire le nuage des points, représentant la série statistique double donnée.
3) a) Calculer Cov(X, Y) et le coefficient de corrélation linéaire r du couple (X, Y).
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite D de régression de Y en X.

16 Soient deux séries d'observations relatives à la quantité consommée, X, de parfum en dl et le revenu annuel,Y, des ménages en milliers de D.T:

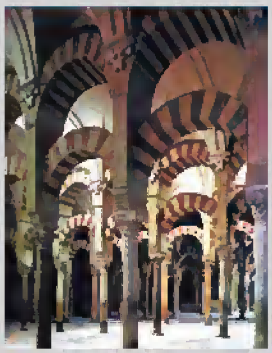
xi	2	4	7	10	11	14
yi	0.5	0.9	9	25	62	110
xi	18	20	21	22		
yi	180	290	680	1800		

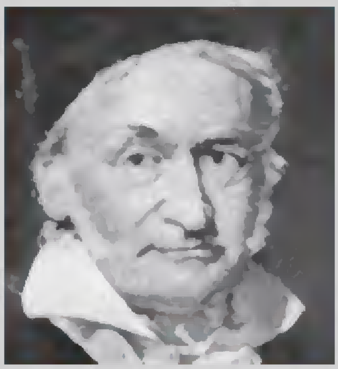
1) a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série double (X, Y)
   b) Peut-on justifier un ajustement affine de la série considérée ?
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) et conclure.
2) On pose U = ln (X) et V = ln (Y).
   a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série double (U, V).
   b) Peut-on justifier un ajustement affine de la série double (U, V) ?
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (U, V) et conclure.
   d) Prouver que : $v = 3{,}31.u - 3{,}91$.
   e) En déduire que : $y = 0{,}02\,e^{3{,}31.\ln x}$.
   f) Quel revenu annuel peut-on prévoir pour une quantité de 13 dl de parfum consommé ?

APERÇU HISTORIQUE



Al Birouni
(973 - 1048)





Carl Friedrich Gauss
(1777 / 1855)

Depuis le 20ème siècle av. J.C, les chinois et les Egyptiens étudiaient l'évolution de leurs productions agricoles et organisaient des recensements de leurs populations.

Dans l'Antiquité, les Grecs et les Romains traitaient des données chiffrées relatives à leurs populations et à la richesse de leurs territoires.

Du 8ème siècle jusqu'au 15ème siècle, les mathématiciens arabes, influencés par les cultures babylonienne, grecque et indienne, furent particulièrement novateurs en calcul numérique, en algèbre et en trigonométrie. Ils ont introduit l'analyse combinatoire, l'analyse numérique et l'interpolation et ont ainsi contribué au développement des techniques permettant le traitement des informations chiffrées qu'ils ont mis en œuvre dans la résolution des problèmes de la vie courante et en astronomie. Citons entre autres : Al Khawarizmi, Thabet Ibn Quorra, Abou Kamil, Al Birouni, Omar Al Khayam, Al battani, Abou Al Wafa, Ibn Al Haythem et Al Kashi.

Au 18ème siècle, le développement des statistiques a permis l'instauration des bases solides aux prévisions et aux décisions relatives à la vie courante.

Au 19ème siècle, le mathématicien Laplace (Laplace Pierre Simon (1749-1827)) découvrit que la théorie des probabilités pouvait constituer une aide précieuse aux méthodes statistiques.

Pour étudier et préciser les formes de la terre (ellipsoïde aplatie), les mouvements oscillatoires de la Lune ainsi que ceux de Saturne, Euler (1748) et Mayer (1750) établissent la méthode des moyennes. Avant les travaux de ces deux mathématiciens, la statistique n'était qu'une observation des faits et des classements de données .

Gauss donnera les premiers algorithmes qui vont permettre de rationaliser les études statistiques, il utilise la méthode des moindres carrés.

Les travaux de Boscovich (1755) permettent de minimiser la somme des valeurs absolues des écarts, facilitant des calculs statistiques souvent trop longs et source d'erreurs.

De nos jours, la statistique est considérée comme outil efficace et fiable pour analyser des phénomènes, interpréter des données, faire des prévisions et prendre des décisions dans les divers domaines économiques, politiques, sociaux, biologiques ou physiques.