10

Ministère des Enseignements Secondaires
Collège la Gaieté

Examen : Baccalauréat blanc
Épreuve : Mathématiques
Session : Mars 2021
Série : D, TI
Durée : 4 heures Coeff : 4

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 / 5 pts Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

A. On considère l'équation (E) : $z^3 - (6+i)z^2 + (13+2i)z - 8 - i = 0$
1. Montrer que (E) est équivalente à : $(z-1)(z^2 - (5+i)z + 8 + i) = 0$ **(0,25pt)**
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ **(1pt)**

B. On considère les points A, B et D d'affixes respectives 1 ; $2-i$ et $3+2i$. On note C le milieu du segment [AD]
1. Placer ces points dans le plan complexe **(0,5pt)**
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A **(0,5pt)**
3. Soit r la rotation de centre A qui transforme B en C, et h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On pose $s = h \circ r$
   a) Quel est l'angle de r ? **(0,25pt)**
   b) Démontrer que $h(C) = D$, puis déterminer s(B) **(0,5pt)**
   c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de s **(0,5pt)**
   d) En déduire que s a pour écriture complexe : $z' = 2iz + 1 - 2i$ **(0,5pt)**
4. Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $|z - 2 + i| = 1$ et (C') l'image de (C) par s
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C) **(0,5pt)**
   b) Déterminer une équation cartésienne de (C') **(0,5pt)**

Exercice 2 / 5 pts

1. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\cos^2 x$ et $g(x) = e^{-2x}\sin^2 x$
   a) Déterminer la primitive A de $f + g$ sur $\mathbb{R}$, telle que $A(0) = -\frac{1}{2}$ **(0,5pt)**
   b) Montrer que la fonction B définie par $B(x) = \frac{1}{2}(-\cos 2x + \sin 2x)e^{-2x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f - g$ **(0,5pt)**
   c) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g **(1pt)**
2. On place 10 kg de sel dans un grand récipient d'eau à l'instant $t = 0$ et on note $f(t)$ la quantité de sel dissoute (en kg) à l'instant t (en min). La vitesse de dissolution du sel est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, à tout instant. On a ainsi : $f'(t) = \lambda(10 - f(t))$, où λ est une constante réelle non nulle.
   a) Sachant que le premier kg de sel est dissous en 5 min, exprimer f(t) en fonction de t. **(1pt)**
   d) Au bout de combien de temps la moitié du sel est-elle dissoute ? **(0,5pt)**
3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leq u_n$ **(0,75pt)**
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. **(0,25pt)**
   c) On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie : $f(l) = l$. Déterminer l. **(0,5pt)**

Exercice 3 / 5 pts Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité de longueur est de 2 cm. Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(x) = x\ln x - x - 1\,,\ \text{si } x > 0 \end{cases}$ et (C) sa représentation graphique.

1. a) Montrer que f est continue en 0 **(0,25pt)**
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner l'interprétation géométrique du résultat **(0,5pt)**
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation **(1pt)**
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α telle que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$ **(0,5pt)**
4. Tracer soigneusement (C) dans le repère **(1pt)**
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1\,;+\infty[$
   a) Montrer que h est une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[-2\,;+\infty[$ **(0,5pt)**
   b) La réciproque h^{-1} de h est-elle dérivable en -2 ? Justifier la réponse **(0,25pt)**
   c) Justifier que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ et calculer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α **(0,5pt)**
   d) Tracer la courbe (C') représentative de la fonction h^{-1} dans le repère **(0,5pt)**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Les experts chinois en énergie solaire qui ont installé les lampadaires solaires dans le chef-lieu départemental d'une des régions du Cameroun ont révélé au Maire de ce chef-lieu que la quantité d'énergie solaire en kWh absorbée par ces lampadaires pendant la journée en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis minuit, est donnée par la fonction f ci-dessous définie :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad si \ \ 0 \leq t < 6\,; \\ -54 + 12t - \frac{1}{2}t^2 \quad si \ \ 6 \leq t < 18\,; \\ 0 \quad si \ \ 18 \leq t \leq 24. \end{cases}$$

M. le Maire se pose un certain nombre de questions légitimes concernant la capacité de ces plaques solaires à stocker effectivement l'énergie solaire. En répondant aux questions posées ci-après, donne des éléments de réponse à certaines questions que le Maire se pose.

Tâches :

1. Déterminer l'heure où l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires est maximale et donner cette quantité. **(1,5pt)**
2. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires augmente. **(1,5pt)**
3. Est-il vrai qu'il existe deux temps distincts dans la journée où la quantité d'énergie solaire absorbée vaut 6 kWh ? **(1,5pt)**

Présentation : **(0,5pt)**

Bonne composition !