Ministère des Enseignements Secondaires
Collège la Gaieté

Examen : Baccalauréat blanc
Épreuve : Mathématiques
Session : Mai 2021
Séries : D-TI
Durée : 4 heures **Coeff : 4**

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 / 5 pts (pour la série D uniquement)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x-y+2) \\ y' = \frac{1}{2}(x+y-2) \end{cases}$. On note Ω le point d'affixe $\omega = 2$

1. a) Montrer que f a pour écriture complexe : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1 - i$ **(0,5pt)**
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f **(1pt)**
2. a) Déterminer l'affixe a du point A tel que $f(A) = O$ **(0,5pt)**
   b) Calculer $\frac{a}{\omega}$ et en déduire la nature du triangle $AO\Omega$ **(0,5pt)**
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') image par f de la droite (D) d'équation : $x + y - 2 = 0$ **(0,5pt)**
4. On note A_0 le point d'affixe $z_0 = 2i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$; on note ensuite d_n la distance entre les points A_n et A_{n+1}, puis on pose $L_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. On désigne enfin par z_n l'affixe de A_n.
   a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n **(0,25pt)**
   b) Calculer d_0 **(0,5pt)**
   c) Démontrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(0,5pt)**
   d) Exprimer d_n en fonction de n. **(0,25pt)**
   e) Exprimer L_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$ **(0,5pt)**

Exercice 1 / 5 pts (pour la série TI uniquement)

1. On pose : $A(x) = 2\cos 3x \cos x + 1$
   a) Montrer que $A(x) = 2\cos^2 2x + \cos 2x$ **(0,5pt)**
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $A(x) = 0$ **(0,5pt)**
2. Soit E un plan vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$. On note φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}(x;y)$ associe le vecteur $\vec{u'}(x';y')$ tel que $x' = (\cos 3\theta)x - y$ et $y' = x + (2\cos\theta)y$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   a) Déterminer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$ **(0,5pt)**
   b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles φ est un automorphisme de E, puis donner dans ce cas la matrice M^{-1}, inverse de M dans la base $\mathcal{B}$ **(1pt)**

Dans la suite, on pose $\theta = \frac{\pi}{4}$

   c) Déterminer $Ker\varphi$ et $Im\varphi$ (On donnera une base de $Ker\varphi$ et une base de $Im\varphi$) **(1pt)**

d) Soit $\overrightarrow{e_1} = -\sqrt{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}\,; \overrightarrow{e_2})$ est une base de E, puis déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ **(1pt)**

e) Donner la matrice N de $\varphi \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}'$ **(0.5pt)**

<u>Exercice 2</u> / 5 pts

A. Afin d'orienter ses investissements, une chaine d'hôtels réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres par mois. Une analyse établit un lien entre ce taux d'occupation (en %) et le montant des frais de publicité du mois (en centaines de milliers de francs)

Frais de publicité (x_i)	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation (y_i)	52	45	67	55	76	48	32	72

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x; y)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal **(1pt)**
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire **(1pt)**
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x **(0,5pt)**
4. Estimer le montant qu'il faut investir dans la publicité au cours d'un mois pour espérer un taux d'occupation des chambres de 80% au cours de ce mois **(0,5pt)**

B. Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties. Chaque partie est notée A, B ou N selon que l'équipe A gagne, l'équipe B gagne ou la partie est nulle. Lors de chaque partie, la probabilité que l'équipe A gagne est 0,5 ; la probabilité que B gagne est 0,4 et la probabilité du match nul est 0,1

1. On considère la variable aléatoire X qui aux trois parties du tournoi, associe le nombre de victoires de l'équipe A. Déterminer la loi de probabilité de X **(1pt)**
2. Montrer que la probabilité que l'équipe A remporte le tournoi est 0,515 **(0,5pt)**
3. Ce tournoi est organisé chaque mois entre les équipes A et B.
   Calculer la probabilité que l'équipe A gagne au moins un tournoi au cours d'une année. **(0,5pt)**

<u>Exercice 3</u> / 5 pts Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1 cm.

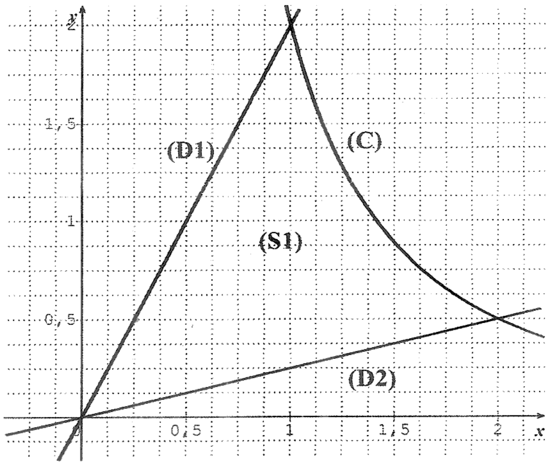
Soit la fonction Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -(x+1)e^{-2x} - x + 1$ et (C) sa représentation graphique.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ **(0,5pt)**
2. a) Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variation **(0,75pt)**
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ **(0,25pt)**
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variation de f. **(1pt)**
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$ **(0,5pt)**
5. Calculer $f(0)$, puis tracer soigneusement (D) et (C) dans le repère **(1pt)**
6. a) Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
   b) Dresser la tableau de variation de f^{-1}, puis tracer sa représentation graphique (C') dans le repère. **(1pt)**

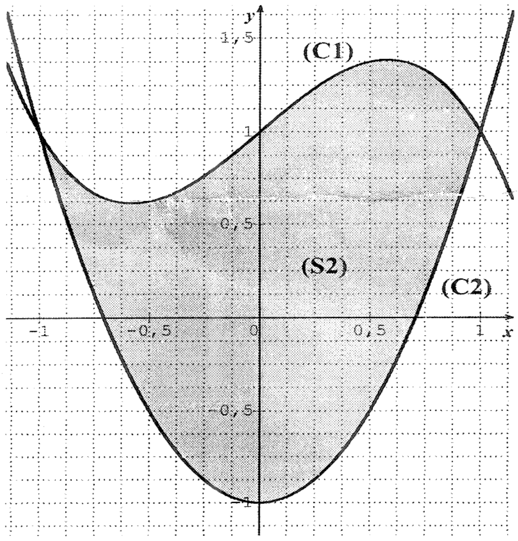
PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation:

Dans la cadre de la stratégie nationale de riposte contre le Covid-19, le gouvernement a créé un comité scientifique constitué d'experts pour l'aider à prendre des décisions les plus adéquates possibles. C'est ainsi qu'il a appris du comité que la capacité pulmonaire (en litres d'air) de l'être humain suivant son âge x en années (où $x \in [10; 90]$) est donnée par $f(x) = \frac{110(-2+\ln x)}{x}$ et que lorsque la capacité pulmonaire moyenne d'une tranche d'âges est inférieure à 4 litres, les personnes de cette tranche d'âges atteintes du covid-19 sont susceptibles d'avoir une détresse respiratoire. Le comité a aussi relevé que les hôpitaux existants ne sont pas en mesure d'accueillir les patients du covid-19 et a conseillé de construire un centre spécial de prise en charge de ces patients sur un site d'une superficie d'au moins 2 ha (pour des besoins de distanciation). Le gouvernement dispose de deux sites (S_1) et (S_2) (ci-dessous représentés dans un repère orthonormé d'unité 100m) et entend construire ce centre spécial sur l'un des deux sites. Enfin, la distance entre le portail d'entrée du centre et le hall d'accueil des urgences doit être de telle sorte qu'une ambulance arrivant au portail avec une vitesse de 20m/s et entamant de là un ralentissement d'accélération constante $a = -2m.s^{-2}$ s'arrête exactement au niveau du hall.



Site **(S1)** délimité par la courbe (C) d'équation $y = \frac{2}{x^2}$ et les droites (D1) et (D2) d'équations respectives $y = 2x$ et $y = \frac{1}{4}x$



Site **(S2)** délimité par la courbe (C1) et (C2) d'équations respectives $y = -x^3 + x + 1$ et $y = 2x^2 - 1$

Tâches :

1. Le ministre de la santé dans une de ses communications sur le covid-19 déclare que les patients de la tranche d'âges de 50 à 90 ans sont susceptibles d'avoir une détresse respiratoire. Cette déclaration est-elle cohérente avec l'avis des experts du comité scientifique ? **(1,5pt)**

2. Lequel des sites (S_1) et (S_2) a une aire suffisante pour abriter le centre spécial de prise en charge des patients covid-19 ? **(1,5pt)**

3. Lors de la construction de ce centre spécial, quelle distance doit-on prévoir entre le portail d'entrée et le hall d'accueil des urgences ? **(1,5pt)**

Présentation : (0,5pt)