39-TC

COLLEGE LIBERMANN B.P. 5351 DOUALA – AKWA Tél. : 33 42 28 90 E-mail : college_libermann@yahoo.fr Web: www.collegelibermann.org	**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**		
	Baccalauréat Blanc N°2		
	Série C		
	Date : Avril 2021	**Durée : 4 heures**	**Coeff. : 7**

Partie A : Evaluation Des Ressources

Exercice 1 (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ U_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)-n\ln n}{n}$

1. Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n})\right]$ (0,5pt)
2. a) Démontre que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, 0 \le k \le n-1\ \ \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\, dn \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$ (1pt)

   b) Déduis - en que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\, dx \le U_n$ (1pt)
3. Détermine la limite de la suite (U_n) (0,5pt)

Exercice 2 (3,5 pts)

$ABCD$ et $DEFG$ sont deux carrés de sens direct tels que E est le milieu de $[CD]$

1. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B
   a) Détermine les éléments caractéristiques de S (0,5pt)
   b) Détermine l'image de E par S et la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BF}})$ (0,5pt)
2. On désigne par (C) le cercle de diamètre $[BD]$ et par K le point d'intersection des droites (AE) et (BF)
   a) Démontre que $K \in (C)$ (1pt)
   b) Déduis-en que (KD) et (BF) sont perpendiculaires (0,5pt)
3. On désigne par (C') le cercle de diamètre $[DF]$
   a) Démontre que K appartient à (C') (0,5pt)
   b) Déduis-en que les points C, G et K sont alignés (0,5pt)

Exercice 3 (9 pts)

A. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \frac{2}{1+e^{2x}}$

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ (0,25pt)
2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x}k(x)$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
   a) Démontre que g est solution de (E) si et seulement si $k'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ (0,75pt)
   b) Déduis-en la solution de (E) qui prend la valeur $\ln 2$ en 0 (0,5pt)

B. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1+e^{2x})$ et (C) sa courbe représentative

1. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \ln(1+e^{2x}) - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
   a) Etudie les variations de u (0,75pt)

b) Déduis-en le signe de $u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0,75pt)

2. a) Etudie les variations de la fonction f (0,75pt)

b) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 (0,5pt)

c) Trace la courbe (C) et la tangente (T) (1pt)

3. On considère la fonction $h: \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{matrix}$. Démontrer que h est une bijection (0,5pt)

4. On considère l'homothétie g de centre Ω d'affixe $-1+i$ et de rapport 2 et (r) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $\begin{cases} x \in]1:3[\\ y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{2\ln(1+e^{1+y})}{e^{1+y}} + 1 \end{cases}$

a) Démontre que $M \in (r) \Leftrightarrow \frac{y+1}{2} = h^{-1}(\frac{x-1}{2})$ où h^{-1} désigne la bijection réciproque de h (0,75pt)

b) Détermine l'expression analytique de la bijection réciproque g^{-1} de g. (0,5pt)

c) Déduis- en que $(r) = g(C')$ où (C') est la courbe de h^{-1} dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. (0,5pt)

5. a) Justifie que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\left[-f'(x) + \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right]$ (0,5pt)

b) Déduis - en une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (0,5pt)

c) Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine (Σ) délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ si α est un nombre réel strictement positif (0,5pt)

d) Calcule la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$ (0,25pt)

Partie B : Evaluation de Compétences (4,5pts)

En visite dans une grande ville Africaine, Paul, élève en classe de Terminale C a été émerveillé par le nouvel échangeur, le tracé de certaines rues et le système de jet d'eau qui se trouve au rond-point. Le guide de Paul, un féru de mathématiques, lui annonce que le coût de la réalisation c du projet de modernisation de la ville, en francs CFA s'exprime par $c = 5 \times 10^n$ où n est un entier naturel. De plus, c possède 132 diviseurs positifs.

En se promenant, Paul rencontre un artiste qui expose deux types de tableaux T_1 et T_2 dont les nombres respectifs p et q sont tels que $\frac{p+15}{P+2}$ est un entier naturel et q un nombre premier tel que $13q + 1$ est le carré d'un entier naturel

Ces tableaux sont exposés dans un musée où N visiteurs au moins viennent chaque jour et N est tel que $PPCM\ (9N+4\,;2N-1) = 714$

Tâche 1 : Détermine le coût exact de la réalisation du projet (1,5pt)

Tâche 2 : Détermine le nombre de tableaux de chaque type (1,5pt)

Tâche 3 : Déterminer N (1.5pt)