# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau : T^le C | Durée : 4 h | Coefficient : 7

## Partie A : Evaluation des ressources

15 points

### Exercice 1 : 5 points

I- Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $F(0,4)$ et $D\left(0,\frac{3}{2}\right)$. On note $(\Delta)$ la droite passant par $D$ et parallèle à l'axe des abscisses ; $(\Gamma)$ la conique dont les points $M$ vérifient : $\frac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = 2$. $S$ est la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre $O$. $(\Gamma')$ l'image de $(\Gamma)$ par $S$.

3 1. Préciser la nature de $(\Gamma)$ et déterminer son excentricité, un de ces foyers et la directrice associé à ce foyer. **0,75 pt**

2. Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. **1 pt**

3.a) Donner l'écriture complexe de $S$. **0,25 pt**

b) Donner la nature exacte de $(\Gamma')$ dont on donnera l'excentricité. **0,5 pt**

II- Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $(C_m)$ d'équation cartésienne $mx^2 + y^2 - 2x = 0$.

1. Discuter suivant les valeurs de $m$ la nature de la courbe $(C_m)$ et donner les éléments caractéristiques (centre, axe focal, sommets). 1,75 pt

2. Tracer les courbes $(C_0)$ et $(C_2)$ sur une même figure.
L'unité de longueur sur les axes est 4 cm. **0,75 pt**

### Exercice 2 : 5 points

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1.a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et dresser le tableau de variation de $f$. **0,75 pt**

b) Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(C_f)$ par rapport à sa tangente $T_0$ en $O$. **0,5 pt**

c) Démontrer que l'origine $O$ du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(C_f)$. **0,5 pt**

2.a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. **0,5 pt**

4 b) Soit $g$ la bijection réciproque de $f$ et $(C_g)$ sa courbe représentative.

Montrer que pour tout $x$ de $I$, $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. **0,5 pt**

3. Construire dans le même graphique les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$. (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées) **1 pt**

4. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la suite numérique $(U_n)$ par :

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \left(ln(1+x) - ln(1-x)\right)dx.$$

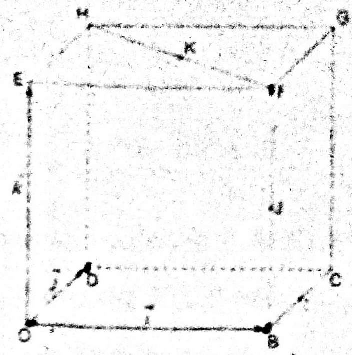
a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul,

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right) ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{ln n}{n}.$$ **0,75 pt**

b) Calculer la limite de la suite $(U_n)$ et interpréter graphiquement le résultat. **0,5 pt**

**Exercice 3 : 5 points**

I- On considère le cube d'arête 1 représenté ci-contre.




On désigne par $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BF]$ et $[HF]$. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OB}$ ; $\vec{j}=\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OE}$.

1. Déterminer les coordonnées des points $I$, $J$ et $K$ **0,75 pt**
2. Déterminer une équation du plan $(IJK)$. **0,5 pt**
3. Déterminer l'expression analytique de la réflexion $s_{\mathcal{P}}$ de base le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $4x+2y+2z-5=0$. **1 pt**
4. Donner la nature exacte de $s_{(HJK)} \circ s_{(ODC)}$. **0,5 pt**
5. Donner la nature de la figure géométrique $(HBCD)$, puis déterminer la nature de son image par la réflexion $s_{(OEK)}$ de base $(OEK)$. Justifier clairement la réponse. **0,75 pt**

1

II- $E_1$ et $F_1$ désignent deux espaces vectoriels réels de bases respectives $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère l'application linéaire de $E_1$ vers $F_1$ défini par :

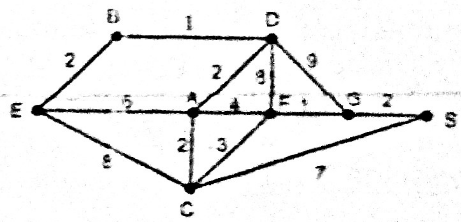
$$f(\vec{i})=2\vec{e_1}-\vec{e_2}\ ; \qquad f(\vec{j})=\vec{e_1}+2\vec{e_2}\ ; \qquad f(\vec{k})=-\vec{e_1}+\vec{e_2}.$$

1. Déterminer $ker f$ et donner une base de $ker f$. **0,75 pt**
2. Déterminer $Im f$, puis déterminer une base de $Im f$. **0,5 pt**
3. Ecrire la matrice de $f$ relativement aux bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{e_1},\vec{e_2})$. **0,25 pt**

**Partie B : Evaluation des compétences** **5 points**

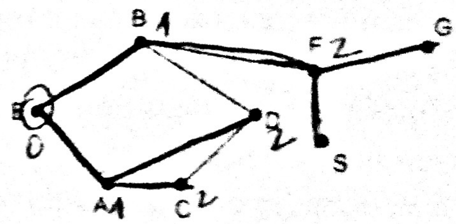
**Situation :**

Un voyageur de commerce prépare sa tournée. Il doit visiter un certain nombre de clients A (Axel), B (Brian), C (Cris), D(Diane), F(Florian) et G (Grâce) en partant de E (Eunisse) pour arriver à S (Samira). Les liaisons possibles sont représentées ci-contre avec la durée des trajets en heures. Ce voyageur de commerce souhaiterait savoir si un ordre de visite qui minimise la durée totale du trajet de E à S lui permettrait de rencontrer tous ses clients.




2

Ses clients sont des abonnés d'un réseau téléphonique dont les liaisons possibles sont représentées ci-contre.




A la fin de ses visites, le voyageur se lance dans un jeu qu'il espère bénéfique : Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard 1 jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré. Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, -5, 1-a) et (1+b, 1, b). On propose de lui rembourser la totalité du montant dépensé pour ses visites s'il trouve la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux. Après des calculs faits, il déclare avoir trouvé 0,256.

**Tâches :**

1. Est-il possible pour ce voyageur de commerce d'avoir la solution à son problème ? Si oui, la lui donner **1,5 pt**
2. Montrer que ce réseau téléphonique permet à tout abonné X de joindre chaque abonné Y du réseau. **1,5 pt**
3. Le voyageur recevra-t-il des organisateurs du jeu la totalité du montant qu'il a dépensé ? **1,5 pt**

**Présentation : 0,5 pt**