DSCHANG, Ouest CMR Contacts : (+237) 672004246 / 696382854 E-mail : toumpeolivier2017@gmail.com

EVALUATION SOMMATIVE DE FIN DU DEUXIEME TRIMESTRE

Classe : Terminale C	Durée : 4heures	Coefficient : 07	Année Scolaire : 2020/2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

****

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15.5 POINTS

EXERCICE 1 FONCTIONS, SUITES ET CALCULS INTEGRALES 05 POINTS

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = \frac{1}{x+e^x}$ et $g(x) = \frac{1}{x+e^x} - x$

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, e^x > -x$, puis en déduire les domaines de définition de ces fonctions 0.75pt
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations 0.5pt
3. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β, avec $\beta \in \left]\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right[$ 0.25pt
4. On pose $I \in \left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$ et on définit la suite (u_n) telle que $u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n+e^{u_n}}$

   4.1. Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ 0.25pt

   4.2. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\, |\, u_n - \beta|$ et $|\, u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$ 0.5pt

   4.3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ainsi qu'une valeur approchée de β à 10^{-5} près 0.75pt

5. Pour tout entier naturel n, on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x\, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x\, dx$

   5.1. En utilisant une intégration par parties, montre que $2I_n + nJ_n = 2$ et $nI_n + 2J_n = -2e^{-\frac{nx}{4}}$ 1pt

   5.2. Déduire de la question précédente les expressions de I_n et J_n en fonction de n 0.75pt

   5.3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ? Justifier 0.25pt

EXERCICE 2 ESPACES VECTORIELS ET CALCUL VECTORIEL 04.5 POINTS

1. E désigne un espace vectoriel dont une base $\mathcal{B} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soit f l'endomorphisme de E définie par $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = f(\vec{e_3}) = \frac{1}{2}(\vec{e_2} + \vec{e_3})$

   1.1. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ 0.25pt

   1.2. Déterminer une base de base $Kerf$ puis une base de base Imf 1pt

   1.3. Démontrer que tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de $Kerf$ et d'un vecteur de Imf 0.5pt

   1.4. Vérifier que $f \circ f$ et $\vec{u} \in Imf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ 0.75pt

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$; $I(0,1,-1)$

   2.1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ 0.25pt

   2.2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant A, B et C 0.5pt

   2.3. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de I sur (P) 0.5pt

   2.4. (S) est la sphère de centre I et de rayon 3. Déterminer $(P) \cap (S)$ 0.75pt

EXERCICE 3 NOMBRES COMPLEXES 03 POINTS

1. On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = -(\sqrt{3}+i)z_n - 1 + i(1+\sqrt{3})$.

   Montrer par récurrence que pour tout entier n, $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$ 0.75pt

2. L'impédance complexe d'un oscillateur électrique (circuit RLC) série est donnée par la relation $Z = R + i\left(Lw - \frac{1}{cw}\right)$ où R est la résistance totale et $X = g(w) = Lw - \frac{1}{cw}$ la réactance du circuit. On pose $W = 2\pi f$ avec W la pulsation et f la fréquence du circuit. L'oscillateur électrique entre dans sa phase de résonnance électrique si son impédance complexe est égale à sa résistance électrique et dans cette phase, sa fréquence f prend la valeur f_0 appelée fréquence propre.

   2.1. Quelle est la nature de l'impédance complexe si le circuit est dans la phase de résonnance ? 0.25pt

   2.2. Etablir l'expression de sa fréquence propre 0.5pt

   2.3. Etablir que le déphasage φ est $tan\,\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{cw}}{R}$ (φ est un argument de l'impédance Z) 0.5pt

   2.4. Etudier et tracer h sur $]0\,;\,+\infty[$ et en déduire f_1 pour laquelle la réactance est maximale 1pt

EXERCICE 4 ARITHMETIQUE 03 POINTS

On considère les suites définies par : $u_n = 2.2^n + (-3)^n$; $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$; $s_n = w_0 + \cdots + w_n$

1. Déterminer les entiers relatifs α et β solutions de l'équation : $8\alpha - 27\beta = -11$ 0.75pt
2. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \equiv 3.2^n[5]$ 0.25pt
3. Déduire le reste de la division euclidienne du terme u_n par 5 0.5pt
4. Démontrer que $s_n \equiv 2 - 4(2)^n[5]$ 0.75pt
5. Déduire le reste de la division euclidienne de la somme s_{1956} par 5 0.75pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04.5 POINTS

Lorsqu'un appareil est très consommateur d'énergie électrique, il faut améliorer son facteur de puissance permettant ainsi à celui-ci de réduire le courant absorbé. Il est noté $cos\,\varphi$ et est compris entre 0 et 1. David possède un appareil consommateur fonctionnant en régime sinusoïdal dont le circuit électrique est un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. On monte en parallèle un condensateur de capacité C avec ce dipôle afin de le rendre moins consommateur. Pour cela, l'admittance complexe de l'ensemble noté $\underline{Y_e} = jCw + \frac{1}{\underline{Z}}$ doit être un réel. David souhaite également alimenter une charge d'impédance inconnue $\underline{Z_c} = R_c + jX_c$ par une source de tension sinusoïdale modernisée par sa f.é.m. $e(t) = Ee^{jwt}$ et son impédance interne $\underline{Z_0} = R_0 + jX_0$ pour une puissance $P = R_e(\underline{P})$ quelle reçoit soit maximale et dans ce cas, on parlera d'adaptation d'impédance $\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{Z_c}\, i^2$ avec $\underline{i} = \frac{e(t)}{\underline{Z_c} + \underline{Z_0}}$. Il est à noter que j est l'imaginaire pur remplaçant i.

Tâches à effectuer :

1. Quelle doit être la capacité du condensateur à utiliser pour que l'appareil consomme moins ? 1.5pt
2. Quelle doit être l'impédance de la charge pour quelle reçoive une puissance maximale ? 1.5pt
3. Donner donc l'expression de cette puissance maximale 1.5pt

Examinateur : M. SONNA GUIMGO JUNIOR
Professeur des Lycées / Mathématiques