INSTITUT POLYVALENT NANFAH **BACCALAURÉAT BLANC**

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Session : 2021
Série : C
Coef : 7
Durée : 04h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : ÉVALUATIONS DES RESSOURCES (15,5 points)

Exercice 1 (04 points)

Une urne contient 10 boules noires et 10 boules blanches indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise n boules de cette urnes ($n \geqslant 2$).
On pose A : "on obtient des boules de deux couleurs"
B : "on obtient au plus une boule blanche"

1. (a) Calculer la probabilité de l'évènement : "toutes les boules tirées sont de même couleur". (0,5pt)
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement : "on tire exactement une boule blanche". (0,5pt)
2. (a) Définir l'évènement $A \cap B$. (0,25pt)
   (b) En déduire que $P(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$; $P(A) = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$; $P(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$. (0,75pt)
3. Montrer que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n+1$. (0,5pt)
4. Soit (U_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 par $U_n = 2^{n-1} - (n+1)$.
   (a) Calculer U_2 ; U_3 et U_4. (0,5pt)
   (b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante. (0,5pt)
   (c) En déduire la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soient indépendants. (0,5pt)

Exercice 2 (02,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points $A(-1;0)$ et $I(4;0)$. Soit (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est O.

1. Déterminer les trois autres sommets de (E). (0,75pt)
2. Calculer l'excentricité de (E) et donner une équation de sa directrice associée au foyer O. (1pt)
3. Donner une équation cartésienne de (E) dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ puis tracer (E). (0,75pt)

Exercice 3 (04 points)

L'espace $(\mathscr{E})$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,2)$; $(1,1,4)$ et $(-1,1,1)$.

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. (0,25pt)
   (b) Soit $\vec{n}$ le vecteur normal de coordonnées $(3,4,-2)$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (0,5pt)
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (0,5pt)
2. Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

(a) Montrer que les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants selon une droite $(\mathscr{D})$ dont on déterminera le système d'équations paramétriques. (0,75pt)

(b) Écrire l'expression analytique de la réflexion $S_{\mathscr{P}_1}$ de plan $(\mathscr{P}_1)$. (0,5pt)

(c) Écrire l'expression analytique de la réflexion $S_{\mathscr{P}_2}$ de plan $(\mathscr{P}_2)$. (0,5pt)

3. En déduire l'expression analytique et la nature de $S = S_{\mathscr{P}_1} \circ S_{\mathscr{P}_2}$. (1pt)

Exercice 4 (05 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_{-\ln x}^{x} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \mathrm{d}t$. Le but de cet exercice est la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Déterminer l'intervalle (noté I pour la suite) des réels x tels que $f(x)$ existe. (0,5pt)
2. Démontrer que l'équation $x + \ln x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1]$. (0,5pt)
   Dresser le tableau de signe de $u(x) = x + \ln x$. (0,5pt)
3. En utilisant l'inégalité des accroissement finis, démontrer que pour tout réel x de $]0,\alpha]$,
   $(x + \ln x)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}} \leqslant f(x) \leqslant (x + \ln x)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. (0,75pt)
   En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. (0,25pt)
4. Démontrer que f est dérivable sur I. Calculer $f'(x)$. (0,5pt)
5. Démontrer que f admet une application réciproque g définie sur un intervalle J qu'on précisera. (0,5pt)
   Donner le tableau de variation de g. (0,5pt)
6. Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. (0,5pt)
7. Montrer que $\frac{1}{\mathrm{e}} < f(\alpha) < 1$. (0,5pt)

PARTIE B : ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES (04,5 points)

M. BALLA est invité à la base navale de la ville de Douala. Il fait des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit à l'hébergement A coûte 12 000 frs et une nuit à l'hébergement B coûte 22 500 frs. Il se rappelle que le coût total de sa réservation dans les deux types d'hébergement est de 219 000 frs et qu'il aurait passé au maximum 13 nuits à l'hébergement A.
La base navale comprend une piste d'athlétisme qui est un terrain délimité par les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ tels que $(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre I d'affixe $z_I = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^9}{(1+\mathrm{i})^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$. $(\mathscr{C}_2)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la similitude directe S d'écriture complexe $z' = (-1+\mathrm{i})\,z + 2\mathrm{i}$. M. BALLA voudrait estimer la superficie de cette piste d'athlétisme.
Le camp d'armement peut être assimilé à un plan (ABC) de sorte que si on munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit un repère du plan, alors $A(1,2,3)$, $B(-1,3,1)$ et $C(2,-1,2)$. Une camera y est fixé en un point K, point d'intersection du plan (ABC) et la droite dont le système d'équation cartésienne est $\begin{cases} -4x+7y=4 \\ 5x+7z=9 \end{cases}$ intrigué, M. BALLA voudrait savoir en quel point K est fixé cette camera.

Tâche 1. Déterminer le nombre de nuits passées dans chacun des deux types d'hébergement (1,5pt)

Tâche 2. Aider M. BALLA à estimer la superficie de la piste d'athlétisme. (1,5pt)

Tâche 3. Déterminer les coordonnées du point K. (1,5pt)