



Cette épreuve comporte trois exercices et un problème toutes obligatoires

Exercice 1 : 03 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :
$$\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$
. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $31x^2 + 21y^2 + 10xy\sqrt{3} + (36\sqrt{3} - 16)x + (16\sqrt{3} + 36)y = 12$ et (Γ') son image par f .

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f . 0.25pt
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f . 0.5pt
2. a) Montrer que l'équation de (Γ') est $2x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 3 = 0$. 0.5pt
- b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') . (sommets, excentricité).
- c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) . (sommets, excentricité). 0.75pt
- d) Construire (Γ) et (Γ') dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. 1pt

Exercice 2 : 02.25 points

1. Résoudre dans Z^2 , l'équation (E) : $8x + 9y + 10 = 0$. 0.5pt
2. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace. $(S) : x + 2y - z + 2 = 0$ et $(\pi) : 3x - y + 5z = 0$ sont deux plans.
 - a) Montrer que (S) et (π) sont sécants suivant une droite (D) et montrer que $A(1, -2, -1) \in (D)$. 0.5pt
 - b) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D). 0.75pt
 - c) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (E). 0.25pt
 - d) En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. 0.25pt

Exercice 3 : 04.75 points

- I-** Une urne contient 18 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles : 4 boules porte le numéro $\frac{4}{5}$, trois boules portent le numéro $\frac{1}{5}$, 6 boules portent le chiffre 1 et 5 boules portent le chiffre 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On nomme a le nombre porté par l'une des boules tirées et par b le nombre porté par l'autre boule tirée ($a > b$).
1. On définit pour tout entier naturel n deux suites (U_n) et (V_n) telles que : $U_{n+1} = aU_n + b$ et $V_n = U_n - 1$.
Calculer la probabilité P_1 pour la suite (V_n) soit géométrique. 0.75pt
 2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - ay' + by = 0$. Quelle est la probabilité P_2 pour que la fonction $g : x \mapsto (Ax + B)e^x, (A; B) \in \mathbb{R}^2$ soit une solution de (E) ? 0.75pt
 3. On considère dans Z^2 l'équation $(E_0) : ax + by = 1$. Quelle est la probabilité P_3 pour que (E_0) n'admette pas de solution ? 0.5pt
 4. On définit dans l'espace vectoriel \mathcal{E} l'endomorphisme f dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est
$$M = \begin{pmatrix} a - 3b & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}$$
. Quelle est la probabilité P_4 pour que f soit une projection vectorielle ? 0.75pt
- II-** Soit (D) une droite affine, munie d'un repère (O, \vec{i}) et soient A et B deux points de (D) d'abscisses respectives a et b . Soient α et β deux nombres réels dont la somme est 1.
1. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , par ψ l'application qui à tout point $M \in (D)$ associe le réel $\psi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$.
 - a) Exprimer $\psi(G)$ en fonction de $\psi(O)$ et OG^2 . 0.5pt

- b) Exprimer en fonction de a, b, α et β le réel $\psi(0)$, l'abscisse g du point G et le réel $\psi(G)$. **0.75pt**
2. On suppose que : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs a et b avec les probabilités α et β respectivement.
- a) Calculer les espérances mathématiques $E(X)$ de x et $E(x^2)$ de x^2 . **0.5pt**
- b) Montrer que la variance de x est $V(X) = \psi(G)$. **0.25pt**

PROBLEME 10 points

PARTIE I : on considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$ où n désigne un nombre entier naturel. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A/ Etude des propriétés de f_0 :

1. a) Dresser le tableau de variation de f_0 . **0.5pt**
 b) Montrer que f_0 réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle K que l'on précisera et que pour tout x élément de K , on a : $f_0^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$; **0.75pt**
 c) Construire la courbe (C_0) . **0.5pt**
2. Soient a et b deux nombres réels quelconques ; soit $g_{a,b}$ la fonction définie par : $g_{a,b}(x) = b + \ln\left(\frac{1-x-a}{x-a}\right)$ et $(C_{a,b})$ sa courbe représentative dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- a) Donner l'ensemble de définition $D_{g_{a,b}}$ de la fonction $g_{a,b}$. **0.25pt**
 b) Montrer que pour tout $x \in D_{g_{a,b}}$, on a : $g_{a,b}(x) = b - f_0^{-1}(x-a)$. **0.25pt**
 c) En notant (C) la courbe représentative de f_0^{-1} , en déduire que $(C_{a,b})$ est l'image de (C) par la transformation du plan $\varphi_{a,b} = s \circ t$ où t est une translation et s une symétrie orthogonale que l'on précisera. **0.5pt**
 d) Pour quelles valeurs de a et b la transformation $\varphi_{a,b}$ est-elle une symétrie orthogonale ? **0.5pt**
 e) Construire $(C_{1,2})$ dans le même repère que que (C_0) sans étudier la fonction $g_{1,2}$. **0.75pt**

B/ Etude de la fonction f_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Montrer que les fonctions f_n sont décroissantes sur \mathbb{R} . **0.5pt**
 2. Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) . **0.5pt**
 3. Montrer que les courbes (C_n) passent par un point fixe A à préciser les coordonnées. **0.5pt**

C/ Etude des suites (U_n) et (V_n) définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ où $n \in \mathbb{N}$ et $V_n = \frac{U_{n-1} + U_n}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

1. Calculer U_0 et donner une interprétation géométrique de ce résultat. **0.5pt**
 2. A partir de $B/2$, donner le sens de variation de (U_n) . **0.5pt**
 3. a) Prouver que : $V_n = \frac{1 - e^{-n+1}}{2(n-1)}$ et étudier la convergence de (V_n) . **0.75pt**
 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq U_n \leq V_n$. **0.5pt**
 c) En déduire la convergence de la suite (U_n) . **0.25pt**

PARTIE II : On considère sur $]0; +\infty[$ les équations différentielles $(E) : xy' - (2x+1)y = 8x^2$ et $(E') : y' - 2y = 8$.

1. Démontrer que si y est une solution sur $]0; +\infty[$ de (E) , alors la fonction qui à x associe $\frac{y(x)}{x}$ est une solution sur $]0; +\infty[$ de (E') . **0.5pt**
 2. Démontrer que si y est une solution sur $]0; +\infty[$ de (E') , alors la fonction qui à x associe $xy(x)$ est une solution sur $]0; +\infty[$ de (E) . **0.5pt**
 3. Déterminer une fonction affine f solution de (E') . **0.5pt**
 4. Résoudre alors l'équation (E') et en déduire la solution sur $]0; +\infty[$ de (E) . **0.5pt**
 5. Déterminer si elle existe la solution f sur $]0; +\infty[$ de (E) qui s'annule en $\ln 2$. **0.25pt**