RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
....
MINESEC/GSP
....

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
....
MINESEC/GSP
....

Examen : Baccalauréat Blanc ESG **N° 1**

Série : CDE

Session : 2019

Durée : 4 heures

Coef. : 6 (C) & 4 (D)

ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES

NB *: Les exercices ayant le symbole (*) sont des exercices réservés aux séries C et/ou E.*

Exercice 1 : Probabilité et nombres complexes — / 3 points

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}$; -1 ; 0 ; 1 et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ? **0,5pt**
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   - 2.1. Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$? **0,5pt**
   - 2.2. Un nombre complexe dont l'argument est $\frac{\pi}{2}$? **0,5pt**
3. On effectue trois de suite de tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages, associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X. **1,5pt**

Exercice 2 : Application des maths en physique — / 4,5 points

On considère un petit caillou de masse m, abandonné à $t_0 = 0s$, sans vitesse initiale du haut d'un immeuble de hauteur y (en m). À un instant t quelconque, $V = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ et le point de départ du caillou est considéré comme niveau de référence de l'énergie potentielle. Toutes les formes de résistances sont négligées. La vitesse du caillou au premier contact avec le sol est $V_1 = 2$ m/s. On admet alors que le caillou perd $\frac{1}{10}$ de sa vitesse à chaque rebond.

1. Montrer que pour tout n ∊ $\mathbb{N}^*$, $V_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} V_1$ Que dire alors de la vitesse du caillou ? **0,75pt**
2. Montrer que la suite (V_n) est strictement croissante. **0,5pt**
3. Pour quelle valeur de n, (V_n) est-elle majorée par 1 ? (Prendre l'arrondi supérieur). **0,75pt**
4. Montrer que l'expression de l'énergie mécanique E_m du système {caillou – sol} est de la forme :
   $E_m = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy$ où g est la constante de la pesanteur qui s'exprime en m/s^2. **0,5pt**
5. Montrer que y vérifie l'équation différentielle : $\ddot{y} = g$ **0,5pt**
6. En exploitant les conditions initiales précédentes, montrer que $\dot{y} = gt$ **0,25pt**
7. À l'aide d'un dispositif approprié, on trouve g ≈ 9,88 m.s^{-2}. Déterminer alors à t = 1s, le nombre n de bonds effectués par le caillou. **0,75pt**
8. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et conclure. **0,5pt**

Exercice 3 (*) : Suites numériques et intégrales — / 5 points

Soit a > 0 et (U_n) la suite définie par $U_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^2}{n!}$

1. Montrer que $\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$ et en déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t\,dt$ **1pt**

2. Soit n∈ ℕ*. On pose $K_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\,dt$

   Démontrer que : $K_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + K_{n+1}$ **0,75pt**

3. Démontrer par récurrence que, ∀ n∈ ℕ*, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + K_n$ **0,5pt**

4. (a) Démontrer que : $0 \le K_n \le \frac{a^n}{n!}\left(e^a - 1\right)$ **0,75pt**

   (b) On pose : $V_n = \frac{a^n}{n!}$ Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ en fonction de a et n. **0,5pt**

   (c) Montrer qu'il existe un entier n tel que ∀ n ≥ n_0, $V_{n+1} \le \frac{1}{2}V_n$ **0,5pt**

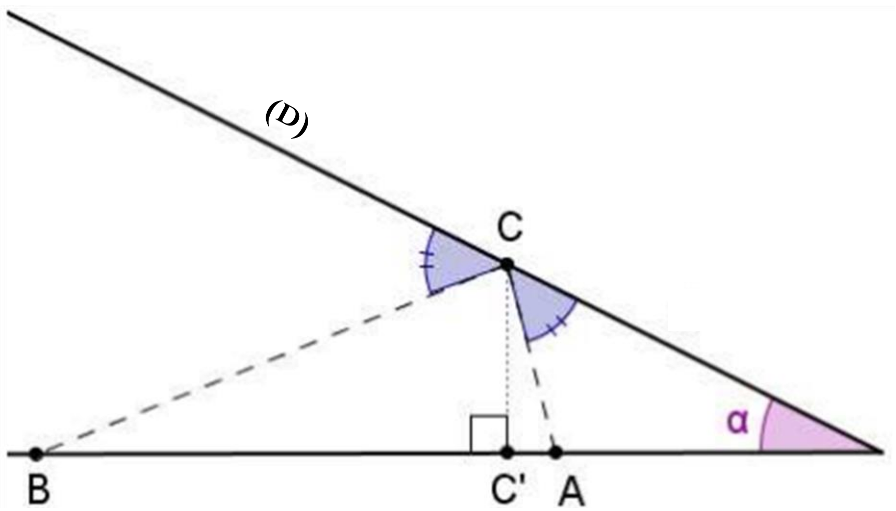
   (d) En déduire que ∀ n ≥ n_0, $0 \le V_n \le V_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$ **0,5pt**

   (e) En déduire la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^2}{n!}$ **0,5pt**

Exercice 4 (*) : Coniques / 11 points

1. **Coniques et Réflexion de la lumière** **/ 2,5pts**

   Deux points A et B sont éloignés de 12 m et la droite (D) forme avec (AB) un angle α. Un rayon lumineux issu de A est réfléchi par (D) au C et arrive en B après un parcours de 20 m. De plus, la projection orthogonale C' de C sur (AB) est telle que C'∈ [AB] et AC' = 1 m.



   1.1. Montrer que C appartient à une conique dont vous déterminerez l'équation réduite. **1pt**

   1.2. Quelle est la position de (D) par rapport à cette conique ? Trouver son équation. **1pt**

   1.3. Calculer une mesure de l'angle α. **0,5pt**

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), (unité 2cm), on considère la famille de courbes (C_m) d'équation : $2mx^2 - 8mx - (m-1)y^2 + 12m - 2 = 0$ où m est un paramètre réel.

   2.1. Étudier les cas particuliers m = 0, m = $\frac{1}{2}$ et m = 1. **1,5pt**

2.2. On suppose désormais que m $\in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2} ; 0 ; 1\}$
Étudier suivant les valeurs de m, la nature de (C_m). Donner dans chaque cas, les éléments caractéristiques de (C_m). **2pts**

2.3. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle :

2.3.1. (C_m) est un cercle ? **0,75pt**

2.3.2. (C_m) est une hyperbole équilatère (a = b dans l'équation réduite) ? **0,75pt**

3. Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et (E) l'équation :

$$(\cos^2\alpha)z^2-(4\cos\alpha)z+5-\cos^2\alpha=0$$

3.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**

3.2. Soient M et M' les points dont les affixes respectives z et z' sont solutions de (E) avec Im(z) > 0.

3.2.1. Déterminer l'ensemble (H) des points M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ **0,75pt**

3.2.2. Écrire une équation cartésienne de (H) et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de (H). **1pt**

3.2.3. Tracer (H). **0,75pt**

Exercice 5 : Nombres complexes — 4 points

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On désigne par S l'application qui, à tout point M de (P), de coordonnées (x ; y) associe le point M' de coordonnées (x' ; y') telles que : $\begin{cases} x'=-x-y+2 \\ y'=x-y-1 \end{cases}$

1. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M. **0,5pt**
2. Démontrer que S est une similitude plane directe. Préciser son angle, son rapport et les coordonnées de son centre Ω. **0,75pt**

3.a) On considère deux points A et B d'affixes respectifs $z_A=1-2i$ et $z_B=1+\sqrt{3}-i$. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectifs des points A et B par S. **0,5x2pt**

b) Quelle est la nature du triangle A'B'Ω. **0,75pt**

4. Soit (D) la droite d'équation y = 2x – 3. Trouver l'équation de la droite (D'), image de la droite (D) par S. **1pt**

Exercice 6 : Équations différentielles — / 4 points

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : 4y'' + 4y' + y = sinx

1.1. On pose g(x) = acosx + bsinx. Déterminer a et b pour que g soit solution de (E). **0,75pt**

1.2. Soit l'équation (E') : 4y'' + 4y' + y = 0

1.2.1. Résoudre (E'). **1pt**

1.2.2. Montrer que si une fonction f est une solution de (E), alors, la fonction h = f – g est solution de (E')

1.2.3. Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (E'), alors, f = g + h est une solution de (E). **0,75pt**

1.2.4. Déterminer la fonction f de (E) vérifiant : f(0) = 0 et f'(0) = 0. **0,75pt**

2. Soient les deux équations différentielles suivantes définies sur I = $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases} (E): y'+(1+tgx)y=\cos x \\ (E_0): y'+y=1 \end{cases}$

2.1. Donner l'ensemble des solutions de (E_0). **0,75pt**

2.2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et telles que f(x) = g(x)cosx.
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0). **0,75pt**

2.3. Déterminer la solution h de (E) telle que h(0) = 0. **0,5pt**

PROBLÈME — 11 points

Le problème comporte trois parties dépendantes A, B et C.

PARTIE A — 6,25 points

Soient les fonctions f et h définies par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ et $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que la courbe (Cf) de f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations. **0,75pt**
2. Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. **0,5pt**
3. Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses. **0,75pt**
4. On pose $g(x)=1-x+2\ln x$ avec $x>0$.

4.1. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation. **1pt**

4.2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0;2[$ et $]2;4[$

4.3. Donner un encadrement de la solution α appartenant à $]2;4[$ d'amplitude 10^{-1} **0,75pt**

4.4. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$. **0,5pt**

5. Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ .En déduire que (Cf) et (Ch) se coupent en deux points. ((Ch) étant la courbe représentative de h). **0,5pt**
6. Montrer que pour tout $x\geq 4$ on a : $0\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x}$. **0,5pt**
7. Trace les courbes (Cf) et (Ch) dans un repère même orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. **1pt**

PARTIE B — 3,5 points

1. Soit D la partie du plan définie par : $\begin{cases}1\leq x\leq \alpha\\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$ (α est le réel défini à la partie A).

1.1. Calculer en unités d'aires, en utilisant une intégration par parties, l'aire $A(\alpha)$ de D. **0,5pt**

1.2. Montrer que $A(\alpha)=2-\dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-1} près. **0,5pt**

1.3. On fait tourner le domaine D autour de l'axe des abscisses. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer en unités de volume, le volume du solide de révolution obtenu. **1pt**

2. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

2.1. Montrer que, pour tout $n\geq 4$, on a : $0\leq I_n\leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. **0,5pt**

2.2. En déduire que la suite (I_n) converge et préciser sa limite. **0,5pt**

2.3. On pose $S_n=I_1+I_2+\dots\dots\dots+I_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite. **0,5pt**

PARTIE C — 1,25 points

On considère pour tout entier $n\geq 1$, la fonction f_n définie par $f_n(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^{2n}}$.

1. Déterminer la dérivée f'_n de f_n. **0,5pt**

1.1. On désigne par x_n la solution de l'équation $f'_n(x)=0$.

1.2. Déterminer le réel x_n en fonction de n. **0,5pt**

2. Calculer la limite de la suite (x_n). **0,25pt**

SUJETS PROPOSÉS PAR, GSP