COLLEGE JEAN TABI D'ETOUDI DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES BP : 4174 YAOUNDE –TEL : 22 21 60 53 N/REF : CJT/19-20/DH/AB/MMLM	EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE : 2019-2020 SEQUENCE : 6 CLASSE DE : 1C DUREE : 3H -COEFF : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU MOIS DE JUIN 2020

Partie A : Evaluation des ressources **(15.5points)**

EXERCICE 1 (05.25 points)

1. On donne l'expression $A(x) = (2\sqrt{3}-2)\cos 2x + (2\sqrt{3}+2)\sin 2x$ où $x \in IR$
   a) Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ (on prendra $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$) **(0.5pt)**
   b) Déterminer les valeurs a et θ tels que $A(x) = a\cos(2x+\theta)$ **(0.5pt)**
   c) Résoudre dans IR puis dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $A(x) = -4$ **(1pt)**
2. ABC est un triangle isocèle de sommet A tels que $AB = 3cm$ et $BC = 4cm$. On considère les points H et G des barycentres déterminés : $H = bar\{(A,2),(C,-1)\}$ et $G = bar\{(A,m),(B,1),(C,-1)\}$où m es un nombre réel non nul.
   2.1 Déterminer le lieu géométrique de G lorsque m décrit IR^* **(0.5pt)**
   2.2 Déterminer la valeur de m pour que AGCB soit un parallélogramme **(0.25pt)**
   2.3 On considère l'ensemble (E) des points M du plan qui vérifient la relation : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -4$
      a) Montrer que le point G est milieu du segment $[BH]$et $BH = 2\sqrt{5}\,cm$ **(0.75pt)**
      b) Montrer que la relation $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -4$ est équivalente à la relation $MG^2 + BG^2 = 7$ **(075pt)**
      c) Déterminer et construire l'ensemble (E) **(1pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère trois droites de l'espace (D_1), (D_2) et (D_3) de représentations paramétriques

$$(D_1): \begin{cases} x = 2-3r \\ y = 1+r \\ z = -3+2r \end{cases} (r \in IR) \quad (D_2): \begin{cases} x = 7+2s \\ y = 2+2s \\ z = -6-s \end{cases} (s \in IR) \quad \text{et} \quad (D_3): \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -62-t \\ z = 1+8t \end{cases} (t \in IR)$$

   a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes, puis déterminer les coordonnées du point H de leur intersection **(0.75pt)**
   b) Trouver une équation cartésienne du plan (P) contenant les droites (D_1) et (D_2) **(0.75pt)**
   c) Montrer que la droite (D_3) est orthogonale au plan (P) et trouver les coordonnées du point K de leur intersection **(0.75pt)**
2. On donne le point $\Omega(1, -1, 2)$, le plan (Q) d'équation cartésienne $5x - y + 8z + 15 = 0$ et un ensemble (S) des points M de coordonnées (x, y, z) qui vérifient l'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

   a) Montrer que l'ensemble (S) est une sphère de centre et de rayon à préciser **(0.75pt)**
   b) Déterminer l'intersection du plan (Q) et la sphère (S) **(1pt)**

EXERCICE 3 (03 points)

A et B sont deux points d'un plan tels que AB= 4 cm. C et D sont deux points qui n'appartiennent pas à la droite (AB) tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. (C) est le cercle de centre de diamètre $[AB]$

1. Si h est l'homothétie qui transforme A en C et B en D
   a) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie (0.5pt)
   b) Quelle est l'image de (C) par l'homothétie h ? (0.25pt)
2. On considère que $r(\Omega, \alpha)$ est la notation d'une rotation de centre Ω et d'angle α
   a) Déterminer et construire la droite (D) telle que $r\left(A, \frac{-2\pi}{3}\right) = S_{(AB)} o S_{(D)}$ (0.75pt)
   b) Déterminer et construire la droite (D') telle que $r'\left(B, \frac{-2\pi}{3}\right) = S_{(D')} o S_{(AB)}$ (0.75pt)
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f = r' o r$ (0.75pt)

EXERCICE 4 (03.25 points)

E est un plan vectoriel de base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On donne f un endomorphisme dont la matrice dans la base B est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les applications g et h sont aussi des endomorphismes de E définies par : $g = f + id_E$ et $h = f - 2id_E$

1. Déterminer les matrices de g et de h dans la base B (1pt)
2. Déterminer $ker g$ et préciser une base $\vec{e_1}$ (0.75pt)
3. Déterminer $ker h$ et préciser une base $\vec{e_2}$ (0.75pt)
4. Démontrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E, puis déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base (0.75pt)

Partie B : Evaluation des compétences (04.5 points)

Situation

Idrissa a travaillé pendant 30 ans comme agent de liaison dans une entreprise des biens et services de la ville de Yaoundé. Il raconte avec beaucoup d'ironie que son premier salaire mensuel était insignifiant qu'il a fini par l'appelé A_0. Dans les accords qu'Idrissa aeus avec son patron, il devait obtenir une augmentation fixe sur son salaire mensuel chaque année. Dans ses souvenirs, Idrissa sait que son salaire à la dixième année était de 53.000 F et avant son départ à la retraite, le comptable de la boite lui a présenté le cumul de tous ses salaires pendant les trente années, un montant de 23.040.000 F. Une fois la retraite actée, Idrissa a reçu une prime de bonne séparation d'un montant de 1.500.000 qu'il a immédiatement placé dans une banque à un taux d'intérêt annuel connu de tous les épargnants. Après 2 années, Idrissa sait qu'il a un capital de 1.749.600 F dans cette banque. Pour régler les problèmes d'eau dans son village, Idrissa fait creuser un puits d'eau par l'entremise d'une entreprise spécialisée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 2046 m, cette entreprise creuse 2 m le premier jour, 4 m le deuxième, 8 m le troisième jour, 16m le quatrième et ainsi de suite.

Tâches

1. Quel est taux d'intérêt utilisé dans cette banque pour les épargnants ? (1.5pt)
2. Déterminer le montant du premier salaire mensuel d'Idrissa (1.5pt)
3. Combien de jours, il faut à cette entreprise pour atteindre la nappe ? (1.5pt)

Probatoire Blanc – Juin 2020 – Collège J.T.T

Mathématiques

Partie A Évaluation des ressources

Exercice 1 : Soit $A(x) = (2\sqrt{3}-2)\cos 2x + (2\sqrt{3}+2)\sin 2x$ où $x \in \mathbb{R}$.

1.a) Calculons $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Avec $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) On a : $A(x) = 4\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{(2\sqrt{3}+2)}{4\sqrt{2}}\sin 2x\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos 2x + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin 2x\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\cos 2x + \sin\frac{5\pi}{12}\sin 2x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{5\pi}{12}\right)$

$= a\cos(2x+\varphi) \implies a = 4\sqrt{2}$ et $\varphi = -\frac{5\pi}{12}$

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$; $A(x) = -4$.

$A(x) = -4 \iff \cos\left(2x - \frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\iff 2x - \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

donc $\left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi \,;\, -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$.

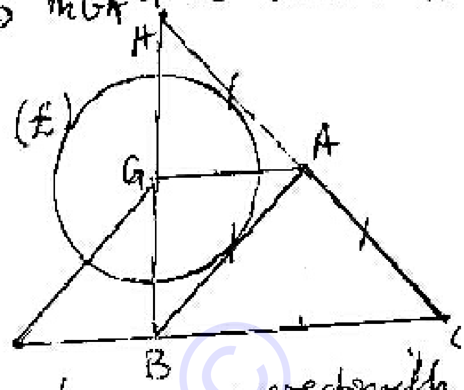
et $\left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{19\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$ ensemble solution dans $[0, 2\pi[$.

2. ABC triangle isocèle de sommet A / AB = 3 cm, BC = 4 cm.

$H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline 2 & -1 \\ \hline\end{array}$, $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline m & 1 & -1 \\ \hline\end{array}$, $m \in \mathbb{R}^*$

2.1 Déterminons le lieu géométrique de G lorsque $m \in \mathbb{R}^*$

2.1. $G = \text{bar}\{(A, m), (B,1), (C,-1)\} \Leftrightarrow m\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$ ... (1)



$\Rightarrow m\vec{GA} + \vec{GA} - \vec{GA} + \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$

$\Rightarrow m\vec{GA} - (\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow m\vec{GA} - \vec{BC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{GA} = \frac{1}{m}\vec{BC}$

$\Rightarrow \vec{GB} + \vec{BA} = \frac{1}{m}\vec{BC}$

$\Rightarrow \vec{BG} = \vec{BA} - \frac{1}{m}\vec{BC}$; G est dans la somme vectorielle de point d'application B.

Ou bien encore directement de (1), $m\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = m\vec{GA} - (\vec{BG} + \vec{GC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow m\vec{GA} - \vec{BC} = \vec{0}$.

2.2. ABGCB est un parallélogramme ssi $m = -1$

2.3 $£ = \{ M \in \text{Plan} \,/\, 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -4 \}$

a) Montrons que $G = \text{iso bar}\{B, H\}$ et $BH = 2\sqrt{2}$ car

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} A & B & C \\ \hline m & 1 & -1 \end{array}$ et $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|} A & C \\ \hline 2 & -1 \end{array}$

Si $m=2$, $= \begin{array}{|c|c|c|} A & C & B \\ \hline 2 & -1 & 1 \end{array} = \begin{array}{|c|c|} H & B \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow G = \text{iso bar}\{H, B\}$

Si $m \neq 2$, G ne saurait être milieu de $[HB]$.

b) $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -4$

$\Leftrightarrow 2(\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -4$

$\Leftrightarrow 2MG^2 + 2GA^2 + GB^2 - GC^2 = -4$ en considérant $m = 2$

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} A & B & C \\ \hline 2 & 1 & -1 \end{array}$

G milieu de $[HB] \Leftrightarrow \vec{GH} + \vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GB} + \vec{BH} = -\vec{GB} \Leftrightarrow \vec{BH} = 2\vec{BG}$

$\Rightarrow$ BHC est rectangle en B et $BH^2 = HC^2 - BC^2$

$= (2AC)^2 - BC^2$

$= 6^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow BH = 2\sqrt{5}$

Avec $2MG^2 + 2GA^2 + GB^2 - GC^2 = -4$

On a $GC^2 = GB^2 + BC^2$

$GA^2 = AB^2 - GB^2$

donc $2MG^2 + 2AB^2 - 2GB^2 + GB^2 - GB^2 - BC^2 = -4$

$\rightarrow 2MG^2 - 2GB^2 + 18 - 16 = -4$

$\rightarrow MG^2 - GB^2 = -3$; or $GB = \frac{1}{2}BH = \sqrt{5}$

donc $\boxed{MG^2 - GB^2 = -3}$, $\Leftrightarrow MG^2 - GB^2 + 10 = 7$

$\Leftrightarrow MG^2 - GB^2 + 2GB^2 = 7$

$\Leftrightarrow \boxed{MG^2 + GB^2 = 7}$

c) $M \in (\mathcal{L}) \Leftrightarrow MG^2 + GB^2 = 7$

$\Leftrightarrow MG^2 + 5 = 7$

$\Leftrightarrow MG^2 = 2$:

$\Rightarrow (\mathcal{L}) = \mathcal{C}(G ; \sqrt{2})$: cercle de centre G et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 2 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. $(D_1) : \begin{cases} x = 2 - 3r \\ y = 1 + r \\ z = -3 + 2r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ $(D_2) : \begin{cases} x = 7 + 2s \\ y = 2 + 2s \\ z = -6 - s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$; $(D_3) \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -62 - t \\ z = 1 + 8t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

a) (D_1) et (D_2) sont sécantes car $\vec{u_1}\begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ vecteurs directeurs respectivement de (D_1) et (D_2) constituent un système libre, en effet ; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

• $(D_1) : \dfrac{x-2}{-3} = y - 1 = \dfrac{z+3}{2}$ | $(D_2) : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+6}{-1}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = x - 5 \Rightarrow \frac{5}{3} + 5 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)x$

$\Rightarrow x = 20/4 = 5$

et

$y = 1 + \frac{3}{2} + \frac{z}{2} = -2(z+6) + 2 \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{z}{2} = -2z - 10$

$\Rightarrow \frac{25}{2} + \frac{5}{2}z = 0$

$\Rightarrow z = -5$

donc $\{H(5 ; 0 ; -5)\} = (D_1) \cap (D_2)$.

b) Le plan (P) contenant (D_1) et (D_2) a pour vecteur de base $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ et de vecteur normal $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{vmatrix}$

donc $H \in (P) : -5x + y - 8z + d = 0 \Rightarrow -25 + 0 + 40 + d = 0$

$\Rightarrow d = -15$ d'où $(P) : -5x + y - 8z - 15 = 0$

$: 5x - y + 8z + 15 = 0$

Autre méthode : (P) ayant $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ de base, $\forall H(x,y,z) \in (P)$

$H \in (P)$, $\vec{HQ} = \alpha \vec{u_1} + \beta \vec{u_2}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

d'où l'équation paramétrique de (P) : $\begin{cases} x = -5 - 3\alpha + 2\beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = 5 + 2\alpha - \beta \end{cases}$

c) • La droite (D_3) est dirigée par $\vec{u_3}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ qui ~~est~~ le vecteur normal à (P). donc $(D_3) \perp (P)$.

• On a : $5(1+5t) - (-62 - t) + 8(1+8t) + 15 = 0 \Rightarrow t = -1$

d'où les coordonnées de $K\begin{pmatrix} x = -4 \\ y = -61 \\ z = -7 \end{pmatrix}$

2- Soit $\Omega(1; -1; 2)$ et (Q) : $5x - y + 8z + 15 = 0$

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2y - 4z - 3 = 0$

a) (S) : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 1 - 1 - 4 - 3 = 0$

: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3^2 = r^2$

$\Rightarrow$ (S) est une sphère de centre Ω et de rayon $3 = r$.

$\Omega \notin (D_3)$, $\Omega \notin (Q)$; $(D_3) \perp (Q)$

Soit $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{proj}_{\perp (Q)}(\Omega)$, on a ; $\vec{\Omega A} = \alpha \vec{u_3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in Q$

$\begin{cases} x = 1 + 5\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 2 + 8\alpha \end{cases}$ $\Rightarrow 5(1+5\alpha) + (1+\alpha) + 8(2+8\alpha) + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{57}{90} \Rightarrow A\left(-\frac{19}{18} ; -\frac{53}{90} ; -\frac{58}{45}\right)$

On devrait avoir : $(S) \cap (Q) =$ Cercle de centre A et de rayon $r_1 = \sqrt{r^2 - A\Omega^2}$

et $r = \sqrt{9 - \left[\left(1 + \frac{19}{18}\right)^2 + \left(1 - \frac{53}{90}\right)^2 + \left(2 + \frac{58}{45}\right)^2\right]}$

or $A\Omega \simeq 3{,}9 > 3 = r \Rightarrow S \cap Q = \{\}$

Exercice 3 $A, B \in$ Plan / $AB = 4$ cm, $C, D \notin (AB)$

$\mathcal{C}$: cercle de diamètre $[AB]$ noté $C[AB]$; $\vec{AB} = 2\vec{DC}$

1. • h homothétie / $h(A) = C$ et $h(B) = D$

a) le rapport de h : $k = \frac{DC}{BA} = \frac{DC}{2DC} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} C, D \notin (AB) \\ \vec{AB} = 2\vec{DC} \end{array}\right\} \Rightarrow$ le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze

et le centre de l'homothétie h est $(AC) \cap (DB)$.

• $h(C_{[AB]})$ est le cercle de diamètre $[h(A)\ h(B)] = [C\ D]$

$h(C_{[AB]}) = C_{[CD]}$.

2. a) Déterminons et construisons (D) / $r(A ; -\frac{2\pi}{3}) = S_{(AB)} \circ S_{(D)}$

b) ——"—— (D') / $r'(B ; -\frac{2\pi}{3}) = S_{(D')} \circ S_{(AB)}$

ΔMM_1A équilatéral

$\Delta MM_1M''$ équilatéral

$r(M) = M'$

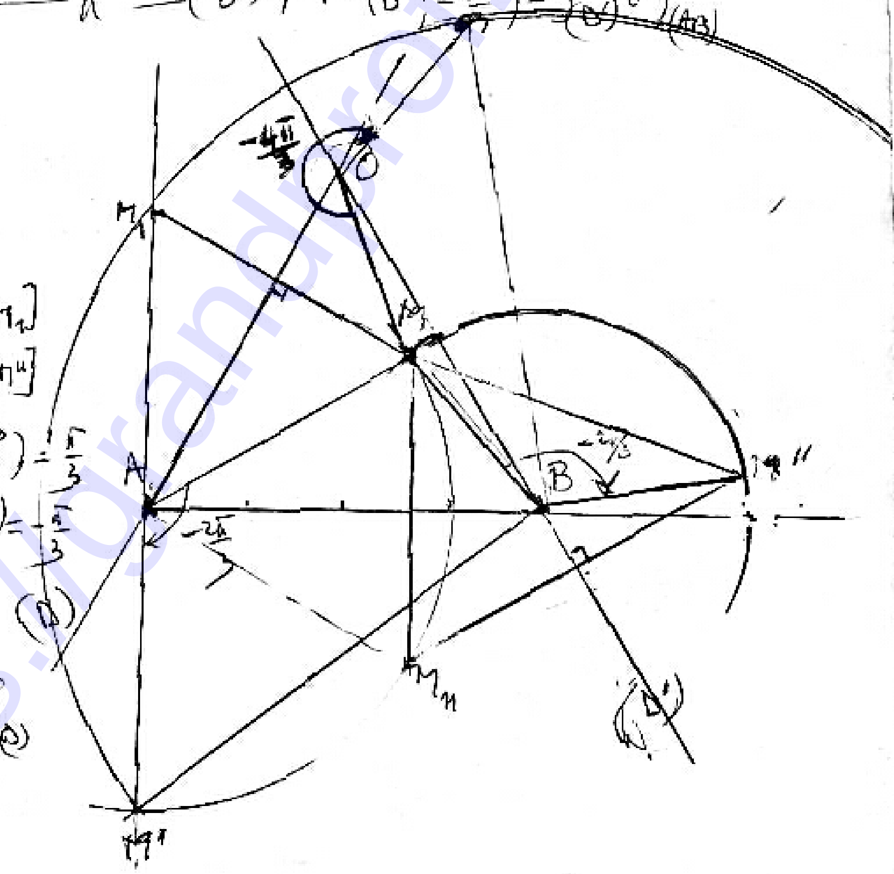
$r'(M) = M''$

$A \in (D)$ = médiatrice de $[MM_1]$

$B \in (D')$ = ——"—— $[M_1M'']$

$D = D(A, \vec{u})$ / $mes(\widehat{\vec{u}, \vec{AB}}) = \frac{\pi}{3}$

$D' = D(B, \vec{v})$ / $mes(\widehat{\vec{v}, \vec{AB}}) = -\frac{\pi}{3}$



c)

$f = r' \circ r = S_{(D')} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(D)}$

$= S_{(D')} \circ S_{(D)}$

$f = r' \circ r \Rightarrow f$ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

$= S_{(D')} \circ S_{(D)} \Rightarrow f$ est une rotation de centre O, $\{O\} = (D) \cap (D')$

Exercice 4 : E : plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

f l'endomorphisme de E / $M(f)_{B(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g et h des endomorphismes / $g = f + id_E$ et $h = f - 2id_E$

1°/ $M(g) = M(f) + M(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M(h) = M(f - 2id_E) = M(f) - 2M(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2°/ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, g \iff g(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0$

$\iff \mathrm{Ker}\, g = \{\lambda(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$: droite vectorielle de base $\vec{e_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

3°/ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, h \iff h(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - 2y = 0$

$\Longrightarrow \mathrm{Ker}\, h$ est une droite vectorielle de base $\vec{e_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

4°) $B'(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une base de E car $\det B' = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ \vec{e_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(\vec{e_2} - \vec{e_1}) = \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{\jmath} = \vec{e_1} + \vec{\imath} = \vec{e_1} + \frac{1}{3}(\vec{e_2} - \vec{e_1})$$

$$= \frac{1}{3}(2\vec{e_1} + \vec{e_2})$$

$$f(\vec{e_1}) = f(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$
$$= f(-\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath})$$
$$= -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{\imath}$$
$$= \vec{\imath} - \vec{\jmath} = \frac{1}{3}(\vec{e_2} - \vec{e_1}) - \frac{1}{3}(2\vec{e_1} + \vec{e_2}) = -\vec{e_1}$$

$$f(\vec{e_2}) = f(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$
$$= 2f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath})$$
$$= 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{\imath}$$
$$= 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \frac{4}{3}(\vec{e_2} - \vec{e_1}) + \frac{2}{3}(2\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 2\vec{e_2}$$

d'où $M(f)_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B - Evaluation des compétences.

1. Soit $C_0 = 1\,500\,000$ F : capital placé à la banque

$C_1 = C_0 + x C_0$

$= (1+x) C_0$: capital au terme de la 1ère année avec x le taux d'intérêt bancaire

$C_2 = (1+x) C_1$

$= (1+x)^2 C_0$: ——— " ——— 2ème année

donc $x = \sqrt{\frac{C_2}{C_0}} - 1$

$= \sqrt{\frac{1749600}{1500000}} - 1 = 1{,}08 - 1 = 0{,}08$

d'où le taux d'intérêt bancaire $x = 8\%$.

2. Soit x_0 : le 1er salaire ; A_0 : la 1ère année de travail

$A_0 = 12 x_0$

$A_1 = 12(\underbrace{x_0 + a}_{x_1})$ où a est l'augmentation fixe mensuel du salaire chaque année.

$A_2 = 12(x_1 + a)$

$= 12(x_0 + a + a)$

$= 12(x_0 + 2a)$

Et en conjecturant,

$A_n = 12(x_0 + na)$

Avec $x_{10} = 53\,000$, $A_{10} = 12(x_0 + 10a) = 12 x_{10} = 12 \times 53\,000$

on a $12x_0 + 120a = 12 \times 53\,000$ soit $\underline{x_0 + 10a = 53\,000}$

En outre $\sum_{k=0}^{30} A_k = \sum_{k=0}^{30} 12(x_0 + ka) = 23\,040\,000$

$= 12 x_0 \sum_{k=0}^{30} 1 + a \sum_{k=0}^{30} k = 23\,040\,000$...

Soit $12 \times 30 x_0 + 12 a \cdot \frac{30 \times 31}{2} = 23\,040\,000$

$360 x_0 + 12 \times 465 a = 23\,040\,000$ ------ (L1)

et comme $x_0 + 10 a = 53\,000$ ----------- (L2)

On a : $(L1) - 12 \times 46{,}5 (L2) \Rightarrow x_0 = \frac{23\,040\,000 - 53\,000 \times 46{,}5 \times 12}{360 - 46{,}5 \times 12}$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = 33\,000 \text{ F}}$$

- La Profondeur p_n creusée est une progression géométrique de raison 2 et de premier terme 2.

donc $p_n = 2 \cdot 2^{n-1}$
$= 2^n$. , n représentant le nombre de jours.

Pour atteindre la nappe d'eau, on a $2^n = 2046$ m

$\Rightarrow n \ln 2 = \ln 2046$

$\Rightarrow n = \frac{\ln 2046}{\ln 2}$

$\Rightarrow \underline{n \equiv 11 \text{ jours}}$