BACCALAUREAT BLANC

Département de Mathématiques.

Classe : T^{le} D

Durée : 4h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES.

Exercice 1 : 5 points

I- On considère dans C l'équation : $z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1- Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles. 1,5pt

2- On désigne par A, B, C et G les points d'affixes respectives $3, 2 + i\sqrt{3}, -1$ et $11 + 4i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral. 0,5pt

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés. 0,75pt

3-Soit K le milieu du segment $[AB]$.Soit S la similitude directe de centre A qui transforme Ien K.

a) Déterminer l'écriture complexe de S. 0,75pt

b) Soit (E) le cercle de centre I et de rayon 4 cm et (E') son image par S. Déterminer la nature et éléments caractéristique de (E'). 0,5pt

II- On considère les nombres complexes Z_n définis de la manière suivante : $Z_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul $n, Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n, |Z_n| \leqslant 1$. 0,75pt

2. Pour tout $n \in IN$, on pose $u_n = Z_n - i$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique. 0,5pt

~~b) Démontrer que pour tout $n \in IN, u_n = \frac{1-i}{3^n}$ 0,5pt~~

Exercice 2 : 5 points

I- Le tableau ci-dessous donne la répartition de 35 élèves d'une classe de terminal D selon leurs âges en années.

Ages	17	18	19	20
Nombre d'élèves	3	12	18	2

1. Calculer la moyenne des âges des élèves de la classe (arrondir à l'unité la plus proche) 0,5pt

2. On représente le non de chacun des élèves par un numéro de 1 à 35. On inscrit les 35 numéros sur les jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac. On tire successivement trois jetons en remettant chaque fois le jeton tiré dans le sac.

Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves âgés de 19 ans.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. 1,5pt
b) Calculer l'espérance mathématique ainsi que l'écart type de X. 1pt

II- Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un quartier de Yaoundé.

Année	1983	1988	1993	1998	2003	2008	2013	2018
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20	25	30	35
Population y_i	540	560	700	800	875	1120	1390	1500

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Unité 2cm pour 5 années et 1cm pour 100 habitants avec 500 à l'origine.

1. Représenter le nuage des points associé à cette série. 0,5pt

2. Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer une équation de la droite d'ajustement de cette série. 1,25pt

3. Donner une estimation de la population de ce quartier en 2028. 0,25pt

Problème : 10 points

A/ On considère l'équation différentielle : $(E_1): y'' - 2y' + y = 4e^x$

1.On pose $u(x) = 2x^2\, e^x$ pour tout réel x. Vérifier la fonction u est une solution de l'équation (E_1) 0,5pt

2. On pose $g = f - u$

a) Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si g est solution de $(E_2): y'' - 2y' + y = 0$ 0,5pt

b) Résoudre l'équation (E_2) 0,5pt

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1). 0,25pt

d) Déterminer la solution particulière de (E_1) telle que sa courbe passe par le point O(0,0) et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur. -3 0,5pt

B/ Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité 1cm. (C) désigne la représentation graphique de la fonction $f(x) = (x+1)(e^{-2x} + 1)$.

1. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$. Etudier les variations de g et en déduire son signe. 1pt

2. Montrer que pour tout réel $x, f'(x) = e^{-2x} g(x)$ puis dresser le tableau des variations de f. 1pt

3.a) Déterminer la limite en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat. 0,5pt

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C). 0,5pt

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D). 0,5pt

4. Construire(C) et (D). 1pt

5. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$

a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur un intervalle que l'on précisera. 0,5pt

b) Dresser le tableau des variations de la bijection réciproque h^{-1} puis tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C) 0,75pt

6. On pose pour tout réel $\alpha \geq -1$, $I_\alpha = \int_{-1}^{\alpha} (x+1)e^{-2x} dx$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer I_α en fonction de α. 0,75pt

7. Soit D_α le domaine du plan délimité par la courbe (C), les droites (D) et celles d'équations

$x = -1$ et $x = \alpha$

a) Déduire de la question 6, l'aide notée A_α du domaine D_α 0,5pt

b) Déterminer la limite de A_α quand α tend vers $+\infty$. 0,5pt

c) Donner un encadrement d'amplitude 3×10^{-3} de cette limite sachant que $2{,}718 < e < 2{,}719$. 0,5pt