


EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

T D T I

Exercice 1 5,5pts

P est un polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$.

1. (a) Vérifier que le nombre complexe $-1-i$ est une racine de P . 0,25pt
- (b) Déterminer les complexes a et b tels que : $P(z) = (z+1+i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
- (c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. 1pt
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1-i, z_B = 2-i$ et $z_C = -1+2i$.
 - (a) Déterminer l'ensemble \mathcal{S} des points M d'affixes z tels que :
 $|z-2+i| = |z+1-2i|$, puis vérifier que le point A appartient à \mathcal{S} . 0,75pt
 - (b) Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. En déduire la mesure principale de l'angle orienté $\overrightarrow{(AC, AB)}$. 0,75pt
 - (c) En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,25pt
3. On considère la similitude directe S de centre B qui transforme le point A en C .
 - (a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude S . 0,5pt
 - (b) Donner l'écriture complexe de la similitude S . 0,5pt
 - (c) Soit \mathcal{E} le cercle circonscrit au triangle ABC . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de \mathcal{E}' , image de \mathcal{E} par S . Construire \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur la même figure. 1pt

Exercice 2 3,5points

Un réparateur de bicyclette achète à 30% de son stock de pneus à un premier fournisseur. 40% à un deuxième fournisseur et le reste à un troisième fournisseur. Le premier fournisseur produit 80% de pneus sans défaut le deuxième 95% et le troisième 85%.

- a) Montrer que les trois évènements : « acheter au fournisseur 1 » ; « acheter au fournisseur 2 » ; « acheter au fournisseur 3 » forment une partition de l'univers. 0,75pt
- b) Exprimer la probabilité de chacun des trois évènements. 0,75pt
- c) Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock. Quelle est la probabilité que le pneu soit sans défaut ? 0,75pt
- d) Le pneu choisi est sans défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne du premier fournisseur ? 0,75pt
- e) Le pneu choisi a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne du deuxième fournisseur ? 0,5pt

Problème le problème comporte trois parties liées A ; B et C. **11points**

Dans tout ce problème on note :

- f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x - 2)e^x + x$.
- (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .
- g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$.

Partie A

- 1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$. **0,5pt**
- 2) Calculer la dérivée de g et dresser le tableau de variation de g . **0,75pt**
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} . **0,5pt**

Partie B

- 1.a) Calculer la limite en $-\infty$. **0,25pt**
- 1.b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$. Puis étudier la position de (C) par rapport à (D) . **1pt**
2. a) Calculer la limite en $+\infty$.
- b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement ce résultat. **0,75pt**
- 3) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f . **0,75pt**
4. a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α . **0,5pt**
- b) Calculer les valeurs exactes, puis les troncatures à trois décimales de $f(1,68)$ et $f(1,7)$. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut. **1pt**
- 5) tracer (C) . **1pt**

Partie C

t désigne un réel strictement négatif.

1. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_t^0 (x - 2)e^x dx$. **0,5pt**
2. Calculer en centimètres carrés l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = t, x = 0, y = x$ et la courbe (C) . **0,5pt**
3. Calculer la limite en $-\infty$ de $A(t)$. **0,5pt**
4. On considère les équations différentielles suivantes :
 $(E): y'' - 2y' + y = x - 2$; $(E_0): y'' - 2y' + y = 0$
- a) Trouver une fonction affine h qui solution de (E) . **0,5pt**
- b) Soit g une fonction au moins deux fois dérivable. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_0) . **0,5pt**
- c) Résoudre (E_0) . **0,5pt**
- d) En déduire les solutions de (E) et vérifier que la fonction f est une solution de (E) . **1pt**