L'EPREUVE COMPORTE DEUX PARTIES A et B

EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 pts

EXERCICE 1 02,75 pts

On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :
$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$.

1. Montrer que $P(2i) = 0$. 0,5 pt
2. a) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :
$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$. 0,5 pt
   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. 0,75 pt
3. Soient $z_A = 1 + i$ et $z_M = x + iy$ avec x et y des nombres réels.

Soit (C) l'ensemble des points $\mathrm{M(x, y)}$ du plan tels que : $|\mathrm{z_M - z_A}| = 4$.

   a) Montrer que le point $B(-3,1)$ appartient à (C). 0,25 pt
   b) Déterminer l'équation de (C') image de (C) par la transformation f définie par :
   $f: z' = \left(-\sqrt{3} + i\right)z$. 0,75 pt

EXERCICE 2 02,5 pts

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ où M est la matrice d'adjacence d'un graphe G.

1. On admet que les sommets de ce graphe sont dans l'ordre A, B, C et D.
   a. Justifier s'il s'agit d'un graphe orienté ou non. 0,5 pt
   b. Quel est le degré du premier sommet ? 0,25 pt
   c. Représenter ce graphe. 0,5 pt
   d. Combien de chemins de longueur 4 y a – t – il de B à D ? 0,5 pt
2. Quel est le diamètre de ce graphe ? 0,25 pt
3. Représenter un arbre couvrant de ce graphe. 0,5 pt

EXERCICE 3 05,5 pts

I. Un laboratoire met sur pied un test de dépistage pour le COVID – 19 et fait un essai sur un échantillon de rats dans lequel un rat sur trois malade. Et mieux encore, si un rat est malade, le test est positif dans 90 % de cas ; mais s'il est sain, le test est positif dans 30% de cas. On note :

M l'évènement '' Le rat est malade'' ; ''T l'évènement le test est positif''

1) Faire un arbre représentant cette situation. 0,5 pt
2) Déterminer les probabilités : $P(M); P(T/M)\ et\ P(T/\overline{M})$. 1,5 pt
3) Montrer que $P(T) = 0,5$. 0,5 pt
4) On prend au hasard 10 rats dans ce laboratoire, et on les teste indépendamment les uns après les autres. Déterminer la probabilité pour qu'un seul parmi se révèle positif au test. 0,5 pt
5) Dans un carnet de santé, on peut lire le poids moyen d'un enfant de sa naissance à 12 ans :

Age (x_i) en années	0	1	2	4	7	11	12
Poids $(y_i) en\ Kg$	3,4	7	10,5	14,5	20,5	33	37,5

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique. (Unité graphiques : 1cm pour 2ans et 1cm pour 10Kg). 0,5 pt
2. Calculer les coordonnées du point moyen G au dixième près. 0,75 pt
3. Déterminer la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés puis représenter la dans le même graphique. 1 pt
4. Donner une estimation du poids moyen de cet enfant à l'âge de 5 ans. 0,5 pt

EXERCICE 4 **03,75 pts**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 + x)e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Déterminer les limites de f au bornes de son ensemble de définition. 0,5 pt
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur son Df. 0,75 pt
3. Construire la courbe (C) de représentative de f dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. 0,5 pt
4. On considère la restriction h(x) de la fonction f sur $[-3; 5]$. A l'aide d'une double intégration par partie, calculer le volume du solide obtenu par rotation de la courbe (C_h) autour de l'axe des abscisses. 1 pt
5. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. 0,5 pt
6. Construire dans le même repère la courbe (C^{-1}) bijection réciproque de (C). 0,5 pt

EVALUATION DES COMPETENCES : **04,5 pts**

ALAIN veut décorer un immeuble en construisant une figure étape par étape comme suit : à chaque étape, il ajoute un disque (**figure 1**) dont le rayon est la moitié de celui qui a été ajouté à l'étape précédente. Il désire peintre sa décoration avec une peinture qui coûte 5000 FCFA le m².

Il travaille dans un laboratoire de la place. Dans une culture de microbes qui se développent, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant. Il constate plus tard qu'il y a 10^5 microbes au bout de 2 heures et 5×10^5 microbes au bout de 6 heures.

Une entreprise du coin fabrique des objets d'art. elle peut fabriquer en un mois entre 50 et 120 objets d'art. on a modélisé le bénéfice de cette entreprise par la fonction $h(x) = -x + 3000 - \frac{8100}{x}$ où x est le nombre d'objets et $x \in [50; 120]$.

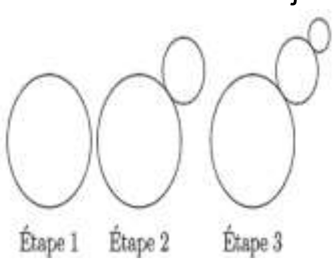

Figure 1

Tâches :

1. Sachant que le premier disque a un rayon de 35cm, quel sera la somme d'argent à pourvoir lorsqu'il fait ses disques jusqu'à l'étape 50 ? 1,5 pt
2. Combien y avait-il initialement de microbes. 1,5 pt
3. Déterminer le bénéfice maximal de cette entreprise en un mois et le nombre d'objets fabriqués pour réaliser ce bénéfice. 1,5 pt

« Nous vous souhaitons bonne chance pour l'examen officiel !!! »