Ministère des Enseignements Secondaires
Inspection de Pédagogie / sciences
Section Mathématiques

Examen : Baccalauréat
Épreuve Zéro: Mathématiques
Session : 2021
Série :D-TI
Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'épreuve est notée sur 20 et comporte deux parties A et B réparties sur trois pages.

<u>PARTIE A</u> : Évaluation des ressources (15points)

<u>Exercice 1</u> :5points (Uniquement pour la série D)

I.On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :
$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i.$

1.Montrer que $P(2i) = 0.$ **0,5 pt**
2.a. Déterminerles nombres complexes a et b tels que :
$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b).$ **0,5 pt**
b. Résoudre l'équation $P(z) = 0.$ **0,75pt**
3.Soient $z_A = 1 + i$ et $z_M = x + iy$ avec x et y des nombres réels.
Soit (C) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $|z_M - z_A| = 4.$
a.Montrer que le point $B(-3,1)$appartient à $(C).$ **0,25 pt**
b. Déterminer, puis représenter l'ensemble $(C).$ **0,5 pt**
II. Dans le plan complexe, on donne les points $A(2;-5)$, $B(2;3)$ et $C(8;-1).$
1.Donner la forme algébrique de$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$. **0,5 pt**
2.En déduire la nature exacte du triangle $ABC.$ **0,5 pt**
3.Donner la forme complexe de la rotation r de centre C qui transforme Ben $A.$ **0,75 pt**
4.Soit (C_2) : $x^2 + y^2 = 9.$
Déterminer l'image de (C_2) par la rotation $r.$ **0,75 pt**

<u>Exercice 1</u> : 5 points (Uniquement pour la série TI)

E est un plan vectoriel réel dont une base est $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B ci-dessus est $A = \begin{pmatrix} m-4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & m \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour que f soit un automorphisme de E. **0,5 pt**
On prend $m = 1$ pour la suite de l'exercice.
2. **a**. Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath}).$ **0,5 pt**
b. Déterminer le noyau de f, puis en donner une base. **0,5 pt**
c. Déterminer l'image de f, puis en donner une base. **0,5 pt**
3.on pose $\vec{u} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ deux vecteurs de E.
a. Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. **0,5 pt**
b. Montrer que la matrice de f dans la base B' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$ **0,5 pt**
c.Calculer M^2 et $M^3.$ **0,5 pt**
d.Montrer par récurrence que pour tout entier naturel nonnul$n$, on a :
$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$ **0,5 pt**

4.Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité d'ordre 2 et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle d'ordre 2.

a. Montrer que $2M = M^2 + M^3$ **0,25 pt**

b. En déduire que $M \times (M^2 + M - 2I) = O$. **0,25 pt**

c. La matrice $M^2 + M - 2I$ est-elle inversible ? **0,5 pt**

<u>Exercice 2</u> :4 points

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + x)$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. **0,5 pt**

b.Calculer $f(0)$. **0,25 pt**

c.En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. **0,5 pt**

d. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $ln(1 + x) \leq x$. **0,75 pt**

2.On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a.Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. **0,5 pt**

b.Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$. **0,5 pt**

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge. **0,5 pt**

3. On désigne par l la limite de la suite (u_n) .On admet que $f(l) = l$.
Déterminer la valeur de l. **0,5 pt**

<u>Exercice 3</u> :3 points

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles 2 blanches, 3 bleues et 3 rouges. On tire successivement et sansremise2 boules de cette urne.

1. Calculer la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de même couleur. **0,75 pt**

2.On appelle X la variable aléatoire qui à ce tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

a.Montrer que la loi de probabilité de X est : **0,75 pt**

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	10/28	15/28	3/28

b. Calculer l'espérance mathématique de X. **0,5 pt**

c.Calculer la variance de X. **0,5 pt**

d. Calculer l'écart-type de X. **0,5 pt**

<u>Exercice 4</u> : 3 points

Anne et Solange sont deux amies qui se rendent dans un supermarché pour acheter uniquement des oranges, ananas et avocats. Anne achète une orange à 200 FCFA, un ananas à 350 FCFA, un avocat à 600 FCFA et paie la somme de 23250 FCFA.
Solange achète une orange à 300 FCFA, un ananas à 500 FCFA, un avocat à 800 FCFA et paie la somme de 32500 FCFA. Elles achètent en tout 60 fruits.

1. On désigne respectivement par x,y et z le nombre d'oranges, d'ananas et d'avocats achetés par les deux amies.

a. Justifier que les nombres x,y et z vérifient le système (S) ci-dessous :

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x + 3{,}5y + 6z = 232{,}5. \\ 3x + 5y + 8z = 325 \end{cases}$$

1,5 pt

b. Résoudre le système (S). **0,75 pt**

2. En déduire le nombre d'oranges, le nombre d'ananas et le nombre d'avocats achetés par les deux amies. **0,75 pt**

<u>PARTIE B</u> : Évaluation des compétences(5points)

<u>Situation</u>:

Les experts chinois en énergie solaire qui ont installé les lampadaires solaires dans lechef-lieu départemental d'une des régions du Cameroun ont révélé au Maire de ce chef-lieu que la quantité d'énergie solaire en kWhabsorbée par ces lampadaires pendant la journée en fonction du temps t en heure est donnée par la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad si \;\; 0 \leq t \leq 6; \\ -54 + 12t - \frac{1}{2}t^2 \;\; si \;\; 6 \leq t \leq 18; \\ 0 \quad si \;\; 18 \leq t \leq 24. \end{cases}$$

M. le Maire se pose un certain nombre de questions légitimes concernant la capacité de ces plaques solaires à stocker effectivement l'énergie solaire. En répondant aux questions posées ci-après,donne des éléments de réponse à certaines questions que le Maire se pose.

***<u>Tâches</u>* :**

1. Déterminer l'heure où l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires est maximale et donner cette quantité. **1,5pt**

2. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires augmente. **1,5pt**

3. Est-il vrai qu'il existe deux temps distincts dans la journée où la quantité d'énergie solaire absorbée vaut 6 kWh ? **1,5pt**

Présentation : **0,5 pt**

EPREUVE ZERO 2021 Série D-TI

Partie A.

Exercice 1 (Serie D uniquement)

I. $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$

1. Montrons que $P(2i) = 0$

on a $P(2i) = (2i)^3 - (2+2i)(2i)^2 + 2(1+2i)(2i) - 4i$

$= -8i + 8i + 8 + 4i - 8 - 4i$

$= 0$

D'où $P(2i) = 0$

2. a) Déterminons les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$

on a $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$

$= z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2iaz - 2ib$

$= z^3 + (a-2i)z^2 + (b-2ia)z - 2ib$

Par identification on a $\begin{cases} a-2i = -2-2i \\ b-2ia = 2+4i \\ -2bi = -4i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

d'où $a=-2$; $b=2$ et $P(z)=(z-2i)(z^2-2z+2)$

b) Resolvons $P(z)=0$

$P(z)=0 \iff (z-2i)(z^2-2z+2)=0$

$\implies z=2i$ ou $z^2-2z+2=0$

pour $z^2-2z+2=0$

$\Delta=-4=4i^2 \implies \sqrt{\Delta}=2i$

Donc $z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$; $z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$

d'où $S_{\mathbb{C}}=\{2i ; 1-i ; 1+i\}$

3. $z_A=1+i$ et $z_M=x+iy$

(C) : $|z_M-z_A|=4$

a. Montrons que $B(-3,1)$ appartient à (C)

L'affixe de B est $z_B=-3+i$ et on a

$|z_B-z_A|=|-3+i-1-i|=4$

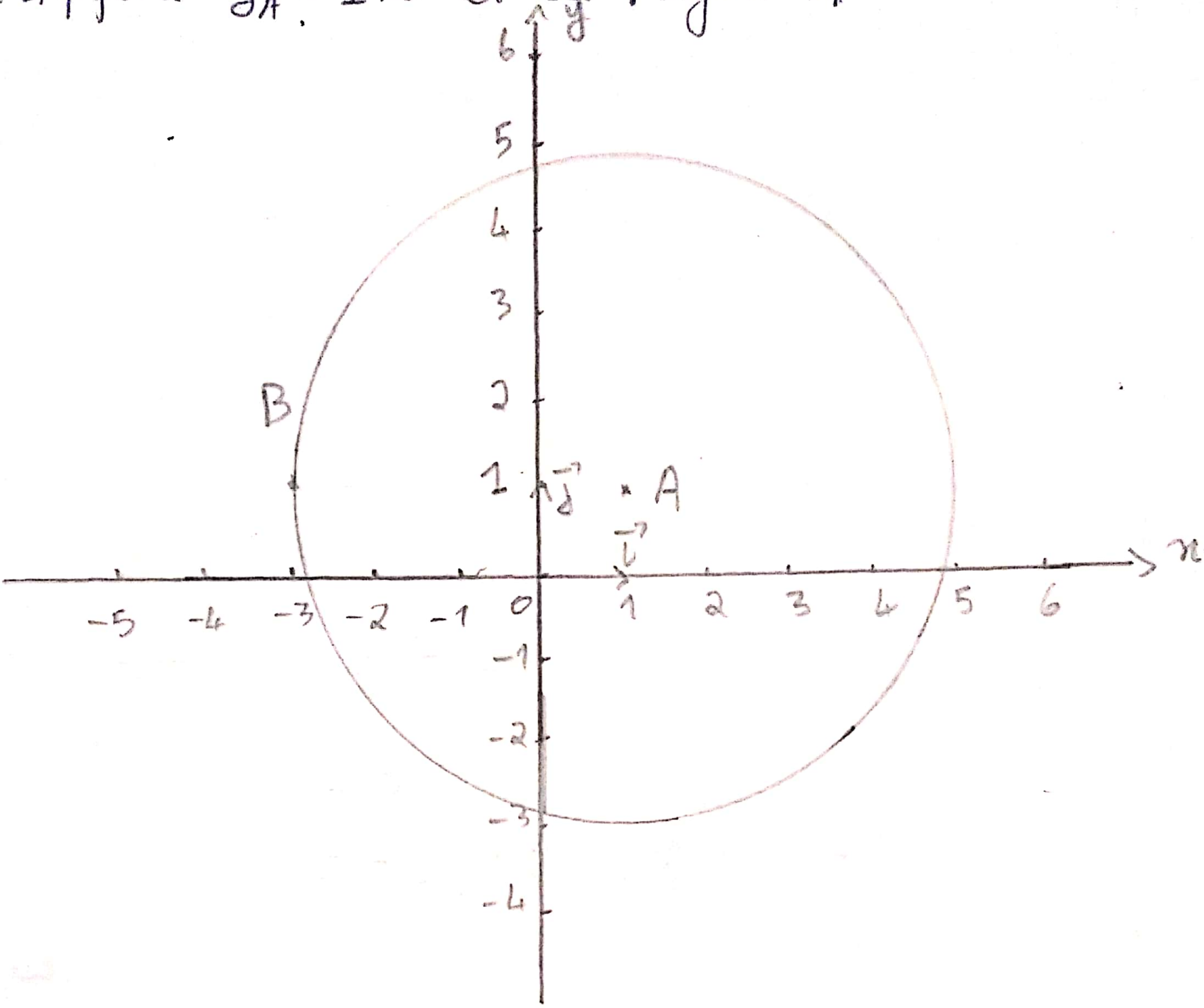
D'où $B(-3;1)$ appartient à (C)

b. Determinons puis representons (C)

on a $|z_M-z_A|=4 \iff AM=4$

Scanned by CamScanner

d'où (C) est le cercle de centre A ~~et de rayon~~ d'affixe $z_A = 1+i$ et de rayon 4



II. $A(2;-5)$, $B(2;3)$ et $C(8;-1)$

1. Donnons la forme algebrique de $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$

on a $z_A = 2-5i$; $z_B = 2+3i$ et $z_C = 8-i$

Donc $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{8-i-2+5i}{8-i-2-3i} = \frac{6+4i}{6-4i} = \frac{3+2i}{3-2i}$

Scanned by CamScanner

Donc $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{(3+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{5+12i}{13}$

d'où $\underline{\underline{\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13}}}$

2. Deduisons la nature exacte de ABC

on a $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13} \Rightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right| = \left|\frac{5}{13} + i\frac{12}{13}\right|$

Donc $\frac{|z_C - z_A|}{|z_C - z_B|} = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = 1$

Donc $|z_C - z_A| = |z_C - z_B|$ ie $AC = BC$

D'où $\underline{\underline{\text{le triangle ABC est isocèle en C}}}$

3. Donnons la forme complexe de la rotation r

posons $z' = az + b$

on a $\begin{cases} r(C) = C \\ r(B) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_C = a z_C + b \\ z_A = a z_B + b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (8-i)a + b = 8-i & (i) \\ (2+3i)a + b = 2-5i & (ii) \end{cases}$

$(i) - (ii) \Rightarrow a = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13}$ et $b = 4 + i7$

d'où $z' = \left(\frac{5}{13} + i\frac{12}{13}\right) z + 4 + i7$

Scanned by CamScanner

4. $(C_2) : x^2 + y^2 = 9$

Déterminons l'image de (C_2) par r

(C_2) est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 3

Soit $(C_2)'$ l'image de (C_2) par r

L'image de O par r est O' d'affixe z_0'

Donc $z_0' = \frac{1}{13}(5+i12)z_0 + 4 + i7 \Rightarrow z_0' = 4+i7$

r étant une isometrie, on conclût que (C_2') est le cercle de centre d'affixe $z_0' = 4+i7$ et de rayon 3

D'où $\underline{\underline{(C_2)' : (x-4)^2 + (y-7)^2 = 9}}$

Exercice 1 (Serie TI uniquement)

$A = \begin{pmatrix} m-4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

1. Déterminons m pour que f soit un automorphisme.

f étant un endomorphisme, f est un automorphisme ssi f est bijective ie $\det A \neq 0$

on a $\det A = \begin{vmatrix} m-4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3.$

Posons $m^2 - 4m + 3 = 0$

Scanned by CamScanner

$\Delta = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

Donc $m = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $m = \frac{4+2}{2} = 3$

Ainsi $\det A \neq 0$ ssi $m \neq 1$ et $m \neq 3$

d'où f est un automorphisme si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

2. $m = 1$

a. Déterminons $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$

on a $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

d'où $f(\vec{i}) = -3\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

b. * Déterminons le noyau de f

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in E$

$\vec{u} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\vec{u}) = 0$

$\Rightarrow x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) = 0$

$\Rightarrow (-3x + \sqrt{3}y)\vec{i} + (-\sqrt{3}x + y)\vec{j} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -3x + \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow -3x + \sqrt{3}y = 0$

Donc Ker f est une droite vectorielle engendrée par $\vec{u} = (-\sqrt{3}; -3)$

une base de Ker f est donc $\{\vec{u} = (-\sqrt{3}; -3)\}$

Scanned by CamScanner

c. Déterminons l'image de f

Soit $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \in E$

$\vec{v} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists \vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$ tel que $\vec{v} = f(\vec{w})$

$\vec{v} = f(\vec{w}) \Leftrightarrow x'\vec{i} + y'\vec{j} = (-3x + \sqrt{3}y)\vec{i} + (-\sqrt{3}x + y)\vec{j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + \sqrt{3}y = x' & (i) \\ -\sqrt{3}x + y = y' & (ii) \end{cases}$$

$(i) - \sqrt{3}(ii) \Rightarrow 0 = x' - \sqrt{3}y'$

D'où Im f est la droite vectorielle engendrée par $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

Une base de Im f est donc $\{(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})\}$

3. $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ et $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

a. Montrons que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) + \beta(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) = 0$

$\Rightarrow (\alpha + \sqrt{3}\beta)\vec{i} + (\sqrt{3}\alpha + \beta)\vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \sqrt{3}\beta = 0 \\ \sqrt{3}\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E

b. Montrons que la matrice de f dans B' est M

Scanned by CamScanner

on a $f(\vec{u}) = f(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j})$

$= f(\vec{i}) + \sqrt{3} f(\vec{j})$

$= -3\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j})$

Donc $f(\vec{u}) = 0\vec{i} + 0\vec{j} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$

$f(\vec{v}) = f(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j})$

$= \sqrt{3} f(\vec{i}) + f(\vec{j})$

$= \sqrt{3}(-3\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}) + \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

$= -2\sqrt{3}\vec{i} - 2\vec{j}$

Donc $f(\vec{v}) = -2(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}) = -2\vec{v}$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

c. Calculons M^2 et M^3

on a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Donc $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

on a $M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Donc $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

d. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

· pour $n = 1$

on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie au rang 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie au rang n ie $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ ie $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$

on a $M^{n+1} = M^n \times M$ or $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

Donc $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n(-2) \end{pmatrix}$

D'où $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$

on conclût du principe de raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

4. a. Montrons que $2M = M^2 + M^3$

on a $M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

Donc $M^2+M^3 = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2M$

D'où $M^2+M^3=2M$

b. Déduisons que $M\times(M^2+M-2I)=0$

on a d'après ce qui précède, $M^3+M^2=2M$

Donc $M^3+M^2-2M=0 \Rightarrow M(M^2+M-2I)=0$

D'où $M\times(M^2+M-2I)=0$

c. Vérifions si la matrice M^2+M-2I est inversible

on a $\det(M^2+M-2I) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Donc M^2+M-2I n'est pas inversible.

Exercice 2

1. f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$

a. Montrons que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée de 2 fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et

on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ or $\dfrac{1}{1+x} > 0 \quad \forall x\in[0;+\infty[$

Scanned by CamScanner

Donc $f'(x) > 0$ $\forall x \in [0; +\infty[$ d'où f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. Calculons $f(0)$

$f(0) = \ln 1 = 0$ donc $\underline{\underline{f(0) = 0}}$

c. Deduisons que $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0$

f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$, Donc $\underline{\underline{\forall x \geq 0, \ f(x) \geq 0}}$

d. Montrons que $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$

posons $g(x) = \ln(1+x) - x$.

g est definie et derivable sur $[0; +\infty[$ et

on a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leq 0$ $\forall x \in [0; +\infty[$

Donc g est decroissante sur $[0; +\infty[$ et deplus, $g(0) = \ln 1 = 0$, donc $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$

i.e $\ln(1+x) - x \leq 0$ d'où $\underline{\underline{\forall x \geq 0, \ \ln(1+x) \leq x}}$

2. $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$

a. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

Scanned by CamScanner

pour $n=0$

on a $U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$ et donc la propriété est vraie au rang 0

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie au rang n ie $U_n > 0$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ ie $U_{n+1} > 0$

on a $U_n > 0 \Rightarrow f(U_n) > f(0)$ car f est croissante

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(0) = 0$

Donc $U_{n+1} > 0$

on conclût ~~q~~ du principe de raisonnement par recurrence que $\forall n \geq 0$, $U_n > 0$

b. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$

D'après la question 1.d), $\forall x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$. or d'après ce qui précède, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

Ainsi pour $x = U_n$, on a $\ln(1+U_n) \leq U_n$

d'où $\underline{U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c. Deduisons que la suite (U_n) converge.

D'après ce qui précède, on a que U_n est decroissante et minorée par 0. Donc la suite (U_n) converge.

Scanned by CamScanner

3. $f(l) = l$. Déterminons la valeur de l

on a $f(l) = l \iff \ln(1+l) = l$

$\iff g(l) = 0$

or d'après 1.d), g est décroissante et $g(0) = 0$

Donc $\underline{\underline{l = 0}}$

Exercice 3

1. Calculons la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de même couleur

Soit A l'évènement "obtenir 2 boules de même couleur"

Soit on obtient 2 boules blanches, soit 2 boules bleues, soit 3 rouges

Donc le nombre de cas favorable est $A_2^2 + A_3^2 + A_3^2$

$= 2 + 6 + 6 = 14$

Le nombre de cas possible est $A_8^2 = 56$

Donc $P(A) = \dfrac{14}{56} = \dfrac{1}{4}$

d'où $\underline{\underline{P(A) = \dfrac{1}{4}}}$

2. a. Donnons la loi de probabilité de X.

Scanned by CamScanner

Soit B_i l'évènement "obtenir i boules rouges" avec $i \in \{0; 1; 2\}$

on a $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

+ $P(X=0) = P(B_0) = \dfrac{A_2^2 + A_3^2 + (A_2^1 \times A_3^1) \times 2}{A_8^2} = \dfrac{20}{56}$

Donc $P(X=0) = \dfrac{10}{28}$

+ $P(X=1) = P(B_1) = \dfrac{2(A_3^1 \times A_2^1) + (A_3^1 \times A_3^1) \times 2}{56} = \dfrac{15}{28}$

Donc $P(X=1) = \dfrac{15}{28}$

+ $P(X=2) = P(B_2) = \dfrac{A_3^2}{A_8^2} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

Donc $P(X=2) = \dfrac{3}{28}$

D'où la loi de X est donnée par

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

b. Calculons l'espérance de X

Scanned by CamScanner

on a $E(X) = 0 \times \frac{10}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28}$

Donc $E(X) = \frac{21}{28}$

c. Calculons la variance de X

on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

or $E(X^2) = 0^2 \times \frac{10}{28} + 1^2 \times \frac{15}{28} + 2^2 \times \frac{3}{28} = \frac{27}{28}$

Donc $V(X) = \frac{27}{28} - \left(\frac{21}{28}\right)^2 = \frac{315}{784}$

D'où $V(X) = \frac{315}{784}$

d). calculons l'écart-type de X

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{315}{784}} = \frac{3\sqrt{35}}{28}$

$\sigma(X) = \frac{3\sqrt{35}}{28}$

Exercice 4.

Scanned by CamScanner

a. Justifions que les nombres x, y et z vérifient le système (S).

- puisqu'elles achètent en tout 60 fruits, on a $x+y+z=60$ (L_1)
- Anne achète les oranges à $200x$ FCFA, les ananas à $350y$ FCFA et les avocats à $600z$ FCFA. Donc Anne dépense au total $(200x+350y+600z)$ FCFA

Ainsi $200x+350y+600z=23250$

En simplifiant par 100, on a $2x+3{,}5y+6z=232{,}5$ (L_2)

- Solange achète les oranges à $300x$ FCFA, les ananas à $500y$ FCFA et les avocats à $800z$ FCFA Donc Solange dépense au total $(300x+500y+800z)$ FCFA.

Ainsi $300x+500y+800z=32500$

En simplifiant par 100, on a $3x+5y+8z=325$ (L_3)

De (L_1), (L_2) et (L_3), on déduit que x, y et z vérifie le système $\begin{cases} x+y+z=60 & (L_1) \\ 2x+3{,}5y+6z=232{,}5 & (L_2) \\ 3x+5y+8z=325 & (L_3) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

b. Résolvons le système (S)

on a $\begin{cases} x+y+z=60 & (L_1) \\ 2x+3,5y+6z=232,5 & (L_2) \\ 3x+5y+8z=325 & (L_3) \end{cases}$

(L_1) et (L_2) donne $\begin{cases} x+y+z=60 \\ 2x+3,5y+6z=232,5 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-2z=-120 \\ 2x+3,5y+6z=232,5 \end{cases}$$

$$1,5y+4z=112,5 \quad (L_2')$$

(L_1) et (L_3) donne $\begin{cases} x+y+z=60 \\ 3x+5y+8z=325 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} -3x-3y-3z=-180 \\ 3x+5y+8z=325 \end{cases}$

$$2y+5z=145$$

on obtient donc $\begin{cases} x+y+z=60 & (L_1) \\ 1,5y+4z=112,5 & (L_2') \\ 2y+5z=145 & (L_3') \end{cases}$

(L_2') et (L_3') donne $\begin{cases} 1,5y+4z=112,5 \\ 2y+5z=145 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3y-8z=-225 \\ 3y+7,5y=217,5 \end{cases}$$

$$-0,5z=-7,5 \Rightarrow z=15 \quad (L_3'')$$

Scanned by CamScanner

on obtient donc $\begin{cases} x+y+z=60 \ (L_1) \\ 1,5y+4z=112,5 \ (L_2') \\ z=15 \ (L_3'') \end{cases}$

(L_3'') dans (L_2') donne $y=35$

on deduit donc que dans (L_1), $x=10$

D'où $S_{\mathbb{R}^3}=\{(10;35;15)\}$

2. Deduisons le nombre d'oranges, d'ananas et le nombre d'avocat achetés par les 2 amies

D'après ce qui précède, $x=10$; $y=35$ et $z=15$ d'où le nombre d'oranges est 10 ; le nombre d'ananas est 35 et le nombre d'avocats est 15

Partie B

Tâche 1 : Déterminons l'heure où l'absorption d'énergie solaire est maximale et donnons cette quantité

on a $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq t \leq 6 \\ -54+12t-\frac{1}{2}t^2 \text{ si } 6 \leq t \leq 18 \\ 0 \text{ si } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

on veut determiner t_0 pour laquelle $f(t)$ est maximale et donner $f(t_0)$

f est derivable sur $[0;6[\cup]18;24]$ comme fonction nulle et derivable sur $]6;18[$ comme fonction polynôme.

De plus, $\lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ >}} \dfrac{f(t)-f(6)}{t-6} = \lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ >}} \dfrac{-\frac{1}{2}t^2+12t-54}{t-6}$

$= \lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ >}} \dfrac{-\frac{1}{2}(t-6)(t-18)}{t-6}$

$= \lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ >}} -\frac{1}{2}(t-18) = 6$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ >}} \dfrac{f(t)-f(6)}{t-6} = 6 \neq 0 = \lim\limits_{\substack{t \to 6 \\ <}} \dfrac{f(t)-f(6)}{t-6}$

Donc f n'est pas derivable en 6

De même $\lim\limits_{\substack{t \to 18 \\ <}} \dfrac{f(t)-f(18)}{t-18} = \lim\limits_{\substack{t \to 18 \\ <}} -\frac{1}{2}(t-6) = -6$

Donc $\lim\limits_{\substack{t \to 18 \\ <}} \dfrac{f(t)-f(18)}{t-18} = -6 \neq 0 = \lim\limits_{\substack{t \to 18 \\ >}} \dfrac{f(t)-f(18)}{t-18}$

Donc f n'est pas derivable en 18

on a donc $\forall t \in [0;6[\cup]18;24[$, $f'(t)=0$

et $\forall t \in]6;18[$, $f'(t) = -t+12$

Scanned by CamScanner

$f'(t) = 0 \iff -t + 12 = 0 \Rightarrow t = 12$

$\forall t \in [0;6[\cup]18;24[$, $f'(t) = 0$ donc f est constante sur $[0;6[\cup]18;24]$

$\forall t \in]6;12[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]6;12[$

$\forall t \in]12;18[$, $f'(x) < 0$ donc f est decroissante sur $]12;18[$

on deduit donc le tableau de variations

t	0		6		12		18		24
$f'(t)$			$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$		
$f(t)$	0	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

Du tableau de variation, on conclût que f est maximale pour $t_0 = 12$ et sa valeur maximale est $f(12) = -\frac{1}{2}(12)^2 + 12(12) - 54$

$$\Rightarrow f(12) = 18$$

<u>Conclusion :</u> L'absoption d'energie solaire est maximale à $t_0 = 12$ heures et sa quantité est $f(12) = 18$ kwh

Scanned by CamScanner

Tâche 2 : Déterminons l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'energie augmente

De la tâche 1, on a montré que f est croissante sur $]6 ; 12]$.

Ainsi l'intervalle de temps cherché est $]6 ; 12]$

Tâche 3 : Verifions s'il existe 2 temps distincts où la quantité d'energie solaire vaut 6kWh

Il suffit de determiner le nombre de solution de $f(t) = 6$

f est continue, strictement croissante sur $]6 ; 12[$ et strictement decroissante sur $]12 ; 18[$, donc f realise une bijection de $]6 ; 12[$ vers $]0 ; 18[$ et de $]12 ; 18[$ vers $]0 ; 18[$.

De plus, $6 \in]0 ; 18[$, donc d'après le théorème des valeurs intermediaires, il existe un unique $t_1 \in]6 ; 12[$ et un unique $t_2 \in]12 ; 18[$ tel que $f(t_1) = 6$ et $f(t_2) = 6$, ~~avec $t_1 \neq t_2$~~

Donc il existe bien 2 temps distincts où la quantité d'energie solaire vaut 6.

Scanned by CamScanner