REPUBLIQUE GABONAISE | 2021- Mathématiques

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT | Série : C-E

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

ÉPREUVE ZÉRO

Pendant la résolution des exercices et problème, tout résultat non établi par le candidat peut-être admis pour la suite.

La qualité de la rédaction, la clarté et précision des raisonnements ainsi que la propreté seront prises en compte lors de l'appréciation des copies.

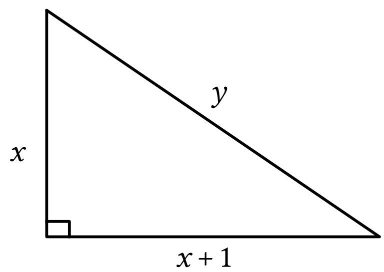
Exercice 1. Suites - applications affines - arithmétique - coniques.. / 6 points
Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Partie A
Soit H l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiants :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

1. Reconnaître la nature exacte de H. On précisera également ces éléments caractéristiques.
2. Réprensentrer H graphiquement.

Partie B
On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypothénuse est un nombre entier. Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longeur de l'hypothénuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x; y)$ définit un TRPI.



1. a) Soit N un point du plan (P) dont les coordonnées $(x; y)$ définit un TRPI. Montrer que N appartient à l'ensemble H.
   b) Réciproquement, montrer que si le couple d'entiers naturels $(x; y)$ appartient à H alors le couple $(x; y)$ définit un TRPI.
2. Soit un couple d'entiers naturels $(x; y)$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$	1			
$y \in \mathbb{N}$	vrai			

b) En déduire que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3;5)$.

3. a) Soit n un entier naturel. Montrer que n^2 et n ont la même parité.
b) Montrer que dans un couple d'entiers $(x;y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie C

Soit f l'application définie du plan (P) dans lui-même qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 3x+2y+1 \\ y' = 4x+3y+2 \end{cases}$.

1. Justifier que f est application affine.
2. a) Déterminer l'image de H' de H par f.
b) En déduire que si un couple $(x;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x';y')$ définit également un TRPI.
3. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$$
a) Justifier que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;y_n)$ définit un TRPI.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2021.

Exercice 2. Nombres complexes et isométries du plan ../ 4 points

Soit a un nombre réel. On considère l'application f du plan dans le plan qui au point d'affixe z associe

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \sqrt{3} - i$$

1. Justifier que f est une isométrie qui ne conserve pas les angles orientés.
2. Déterminer $f \circ f$. En déduire la nature de f.
3. Soit g la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2 + x\sqrt{3} + a\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'expression analytique de f.

   b) Déterminer l'équation de l'image de $(\mathcal{C})$ par f. En déduire la naure de $(\mathcal{C})$.

Problème. Calcul intégral - fonction