Baccalauréat Métropole 8 juin 2021

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(1\,;\,1\,;\,-2)$ et B$(-1\,;\,3\,;\,2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+3t \\ y &=& 6-3t \\ z &=& 8-6t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+my-2z+8=0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $\text{M}_1(-1\,;\,3\,;\,-2)$ **b.** $\text{M}_2(11\,;\,-9\,;\,-22)$ **c.** $\text{M}_3(-7\,;\,9\,;\,2)$ **d.** $\text{M}_4(-2\,;\,3\,;\,4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $m=-1$ **a.** $m=1$ **c.** $m=5$ **d.** $m=-2$

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0,45$.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :
    n = 0
    P = 0
    while P < 0,99 :
        n = n + 1
        P = 1 - 0,55 ** n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme; dérivation

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.
   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

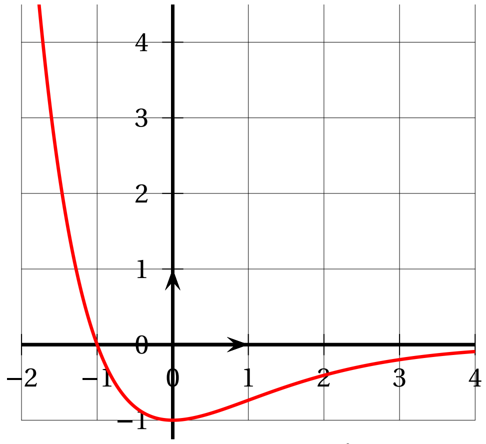
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?