PROPOSITION CORRIGÉ EPREUVE ZÉRO BACC C & E 2021

Par Nathanaël AWONO-MESSI
PLEG Maths.

Exercice 1

1. Montrons que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- HAC est un triangle isocèle en H et O est le milieu de [AC], donc $(OH) \perp (AC)$. 0,25pt
- HBD est un triangle isocèle en H et O est le milieu de [BD], donc $(OH) \perp (BD)$. 0,25pt
- (AC) et (BD) étant deux droites sécantes du plan (ABC), alors la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC). 0,25pt

2. Montrons que $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

Dans le triangle rectangle OHC, la propriété de Pythagore s'écrit. $HC^2 = OC^2 + OH^2$, donc $OH^2 = HC^2 - OC^2$. 0,25pt
Dans les triangles ABC et BHC rectangles respectivement en B et en H, on a : $OC^2 = \frac{5}{4}AB^2$ et $HC^2 = 2AB^2$. 0,25pt
Ceci étant : $OH^2 = 2AB^2 - \frac{5}{4}AB^2 = \frac{3}{4}AB^2$

d'où $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. 0,25pt

3. Donnons la nature de $S_{(HBA)} \circ S_{(HDC)}$

Les plans (HBA) et (HDC) étant perpendiculaires, $S_{(HBA)} \circ S_{(HDC)}$ est un demi-tour d'axe (Δ) où (Δ) est la droite passant par H et parallèle à la droite (AB). 1pt

4. Déterminons les images des points A, B par le demi-tour $S_{(OH)}$ d'axe (OH).

- $S_{(OH)}(A) = C$, car [OH] est une médiatrice du segment [AC]. 0,25pt
- $S_{(OH)}(B) = D$, car (OH) est une médiatrice du segment [BD]. 0,25pt

Exercice 2.

1. Resolvons l'équation $h(x) = x$.

$$h(x) = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x + \frac{3}{4} = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. 0,5pt

2. (a) Montrons que si $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, alors $h\left(\left[0; \frac{3}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Soit $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, alors $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

par suite, $\frac{3}{4} \leq x + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4}$.

Par stricte croissance de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a:

$$0 < \sqrt{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{x + \frac{3}{4}} \leq \sqrt{\frac{9}{4}}$$

c'est-à-dire $0 \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$ d'où $h(x) \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$ et par conséquent, $h\left(\left[0; \frac{3}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{3}{2}\right]$. 0,5pt

(b) Montrons que si $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, alors $\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

h est dérivable sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$,

$$h'(x) = \frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)'}{2\sqrt{x + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2h(x)}.$$

Soit $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, on a: $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x + \frac{3}{4}} \leq \frac{3}{2}$

c'est-à-dire $\sqrt{3} \leq 2\sqrt{x + \frac{3}{4}} \leq 3$

Ainsi, par passage à l'inverse, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

d'où pour tout $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, $\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. 0,5pt

(c) Montrons que si $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, alors $\left|h(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$

- h est dérivable sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et pour tout $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$,

$|h'(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (En effet $\frac{1}{3} \leq h'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq h'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$)

En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis sur $[x; \frac{3}{2}]$, $x \geq 0$, on obtient : $\left|h(\frac{3}{2}) - h(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2} - x\right|$

c'est-à-dire $\left|h(x) - h(\frac{3}{2})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$ **0,5pt**

et comme $h(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, on a bien $\left|h(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$

3.(a) <u>Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$.</u>

- Montrons d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in [0; \frac{3}{2}]$.

  * $U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0; \frac{3}{2}]$.

  * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $U_n \in [0; \frac{3}{2}]$ **0,25pt**

  $U_n \in [0; \frac{3}{2}] \Rightarrow h(U_n) \in [0; \frac{3}{2}]$ d'après la question 2.a)

  $\Rightarrow U_{n+1} \in [0; \frac{3}{2}]$

- <u>Montrons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$.</u>

  * $U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\left|U_1 - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|1 - \sqrt{3}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, car $|1-\sqrt{3}| \leq 1$

  Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$, on conclut que $\left|U_1 - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$.

  * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$ et montrons que $\left|U_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times \frac{3}{2}$.

  Nous avons : $\left|U_{n+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|h(U_n) - \frac{3}{2}\right|$ **0,5pt**

  D'après la question 2.c), $\left|h(U_n) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|U_n - \frac{3}{2}\right|$

  et comme $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$, on a : $\left|U_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \times \frac{3}{2}$

  Ainsi, d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$.

(b) Déduisons-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

Nous venons de voir que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|U_n-\frac{3}{2}\right|\leq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{3}{2}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{3}{2}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{3}{2}$

0,5pt

Ainsi, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell=\frac{3}{2}$.

Exercice 3.

(a) Précisons la nature de l'ensemble décrit par le point M.

$$z'=\frac{z+3i}{z-4-i}=\frac{z-(-3i)}{z-(4+i)}=\frac{z-z_B}{z-z_A}\quad \text{où } z_A=4+i \text{ et } z_B=-3i$$

(i) z' est un réel.

- $z'\in\mathbb{R}\iff z=z_B$ ou $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\equiv 0[\pi]$

$\iff M=B$ ou $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv 0[\pi]$.

$\boxed{\text{M décrit la droite (AB), privée du point A.}}$ 0,5pt

(ii) z' est un imaginaire.

z' est un imaginaire $\iff z'=0$ ou $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\iff z=z_B$ ou $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\iff M=B$ ou $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}[\pi]$.

$\boxed{\text{M décrit le cercle de diamètre [AB] privé du point A.}}$ 1pt

(b) Calculons le produit $(z'-1)(z-4-i)$.

$$(z'-1)(z-4-i)=\left(\frac{z+3i}{z-4-i}-1\right)(z-4-i)$$

$$=z+3i-(z-4-i)=4+4i.$$ 0,5pt

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble décrit par le point M lorsque le point d'affixe z' décrit le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon $\sqrt{2}$.

De l'égalité $(z'-1)(z-4-i)$, on a : $|(z'-1)(z-4-i)| = |4+4i|$
donc $|z'-1| \times |z-4-i| = 4\sqrt{2}$.

$M(z')$ décrit le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon $\sqrt{2}$, signifie que $|z'-1| = \sqrt{2}$.

Ceci étant : $\sqrt{2}\,|z-4-i| = 4\sqrt{2}$

c'est-à-dire $|z-(4+i)| = 4$ soit $|z - z_A| = 4$

Soit encore : $AM = 4$.

Ainsi, $\boxed{\text{M décrit le cercle de centre A et de rayon 4.}}$ 1pt

Exercice 4.

1.(a) Déterminons la nature et l'excentricité de (C).

$(C) : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

L'équation de (C) est sous la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donc (C) est une ellipse.

Avec les notations habituelles, $a = 1$ et $b = 2$.

donc $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Ainsi (C) est une ellipse d'excentricité $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 0,5pt

(b) Déterminons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un foyer F de (C) et une équation cartésienne de la directrice (D) de (C), associée au foyer F.

Foyer : $F(0 ; \sqrt{3})$ 0,25pt Directrice : $(D) : y = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. 0,25pt

Scanné avec CamScanner

2.(a) Donnons la forme complexe de S.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par S.

S étant la similitude directe de centre O, d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$, alors $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)z$

$z' = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$

d'où $\boxed{z' = \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})z.}$ 0,5pt

(b) Montrons que si S transforme le point de coordonnées $(x;y)$ en le point de coordonnées (x',y'), alors $x = x' - y'\sqrt{3}$ et $y = x'\sqrt{3}+y'$.

posons $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.

$S(M) = M' \iff z' = \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})z$

$\iff x'+iy' = \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})(x+iy)$

$\iff x+iy = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}(x'+iy')$

$\iff x+iy = (1+i\sqrt{3})(x'+iy') = x'+iy'+i\sqrt{3}x' - y'\sqrt{3}$

$= x'-y'\sqrt{3} + i(x'\sqrt{3}+y')$

Par égalité de deux nombres complexes, on a:

$$\begin{cases} x = x' - y'\sqrt{3} \\ y = x'\sqrt{3} + y'. \end{cases}$$ 0,5pt

(c) Montrons que (C) est l'image de (C') par S.

Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(X,Y)$ son image par S. alors $x = X - Y\sqrt{3}$ et $y = X\sqrt{3}+Y$.

Ceci étant: $x^2 = (X-Y\sqrt{3})^2 = X^2+3Y^2-2XY\sqrt{3}.$

$y^2 = (X\sqrt{3}+Y)^2 = 3X^2+Y^2+2XY\sqrt{3}.$

$xy = (X-Y\sqrt{3})(X\sqrt{3}+Y) = \sqrt{3}X^2 - 2XY - \sqrt{3}Y^2.$

$M \in (C') \iff 7x^2 + 13y^2 + 6xy\sqrt{3} - 64 = 0$

$\iff 7(X^2 + 3Y^2 - 2XY\sqrt{3}) + 13(3X^2 + Y^2 + 2XY\sqrt{3}) + 6\sqrt{3}(\sqrt{3}X^2 - 2XY - \sqrt{3}Y^2) - 64 = 0$

$\iff 64X^2 + 16Y^2 = 64$

$\iff X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$ 0,5pt

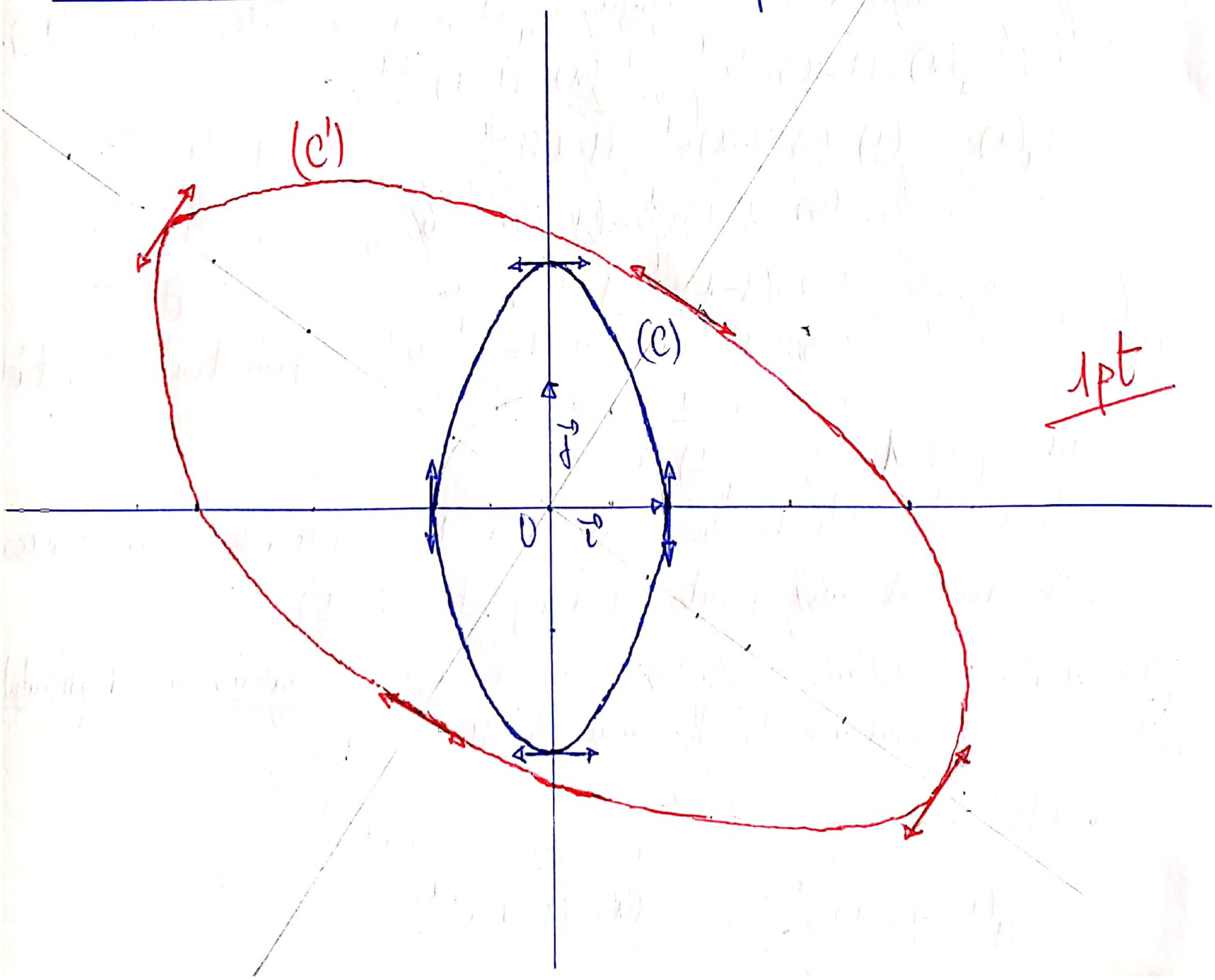
$\iff M'(X, Y) \in (C)$

donc (C) est l'image de (C') par S.

(d) Déduisons-en la nature et l'excentricité de (C').

Comme l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature et de même excentricité, alors (C') est une ellipse de centre O (car $S(O) = O$) d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 0,5pt

3- Construisons (C) et (C') dans le même repère.



1pt

Partie B ÉVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1. Donnons la position exacte des lieux d'accès qui marquent la rencontre des courbes décrivant les côtés du terrain.

- Trouvons les valeurs possibles de n.

On a : $5^0 \equiv 1[3]$, $5^1 \equiv 2[3]$; $5^2 \equiv 1[3]$

* Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, on a : $5^n = (5^2)^k \equiv 1^k[3]$; donc $5^n \equiv 1[3]$

* Si $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, on a : $5^n = (5^2)^k \times 5 \equiv 1^k \times 5[3]$, donc $5^n \equiv 2[3]$

Ainsi $n \in \{1, 2\}$.

- Trouvons les courbes qui délimitent ce domaine et leurs points de rencontre.

Le terrain est délimité par les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentant respectivement les fonctions f_1 et f_2, les droites (D_1) et (D_2).

$f_1(x) = (1-x)e^x$; $f_2(x) = (1-x)e^{2x}$.

$f_1(x) = f_2(x) \iff (1-x)e^x = (1-x)e^{2x}$ C1 : 0,75pt.

$\iff (1-x)e^x - (1-x)e^{2x} = 0$ C2 : 0,75pt.

$\iff (1-x)e^x(1-e^x) = 0$ C3 : 0,75pt

$\iff 1-x=0$ ou $1-e^x=0$ Pour toutes les tâches

$\iff x=1$ ou $x=0$.

or $f_1(0) = 1$ et $f_1(1) = 0$

donc, dans le repère défini par M. TAGNE, les lieux d'accès se trouvent aux points $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

Tâche 2. Dans un repère orthonormé (O, I, J), faisons une représentation rigoureuse du domaine de M. TAGNE.

- Étudions les fonctions f_1 et f_2 sur $[-2; +\infty[$.

$f_1(x) = (1-x)e^x$; $f_2(x) = (1-x)e^{2x}$.

$f_1(-2) = 3e^{-2}$ $\quad f_2(-2) = 3e^{-4}$. $\quad \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)e^{x} = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)e^{2x} = -\infty$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $[-2;+\infty[$ et pour tout $x \in [-2;+\infty[$,

$f_1'(x) = (1-x)'e^{x} + (e^{x})'(1-x) = -e^{x} + (1-x)e^{x} = (-1+1-x)e^{x} = -xe^{x}$.

$f_2'(x) = (1-x)'e^{2x} + (e^{2x})'(1-x) = -e^{2x} + 2e^{2x}(1-x) = (-1+2-2x)e^{2x} = (1-2x)e^{2x}$.

pour tout $x \in [-2;+\infty[$, $e^{x} > 0$, $e^{2x} > 0$, donc le signe $f_1'(x)$ est celui de $-x$; le signe de $f_2'(x)$ est celui de $1-2x$.

x	-2		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	

x	-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	

f_1 est strictement croissante sur $[-2;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

f_2 est strictement croissante sur $[-2;\frac{1}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

Tableaux de Variations.

x	-2		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$\frac{3}{e^2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

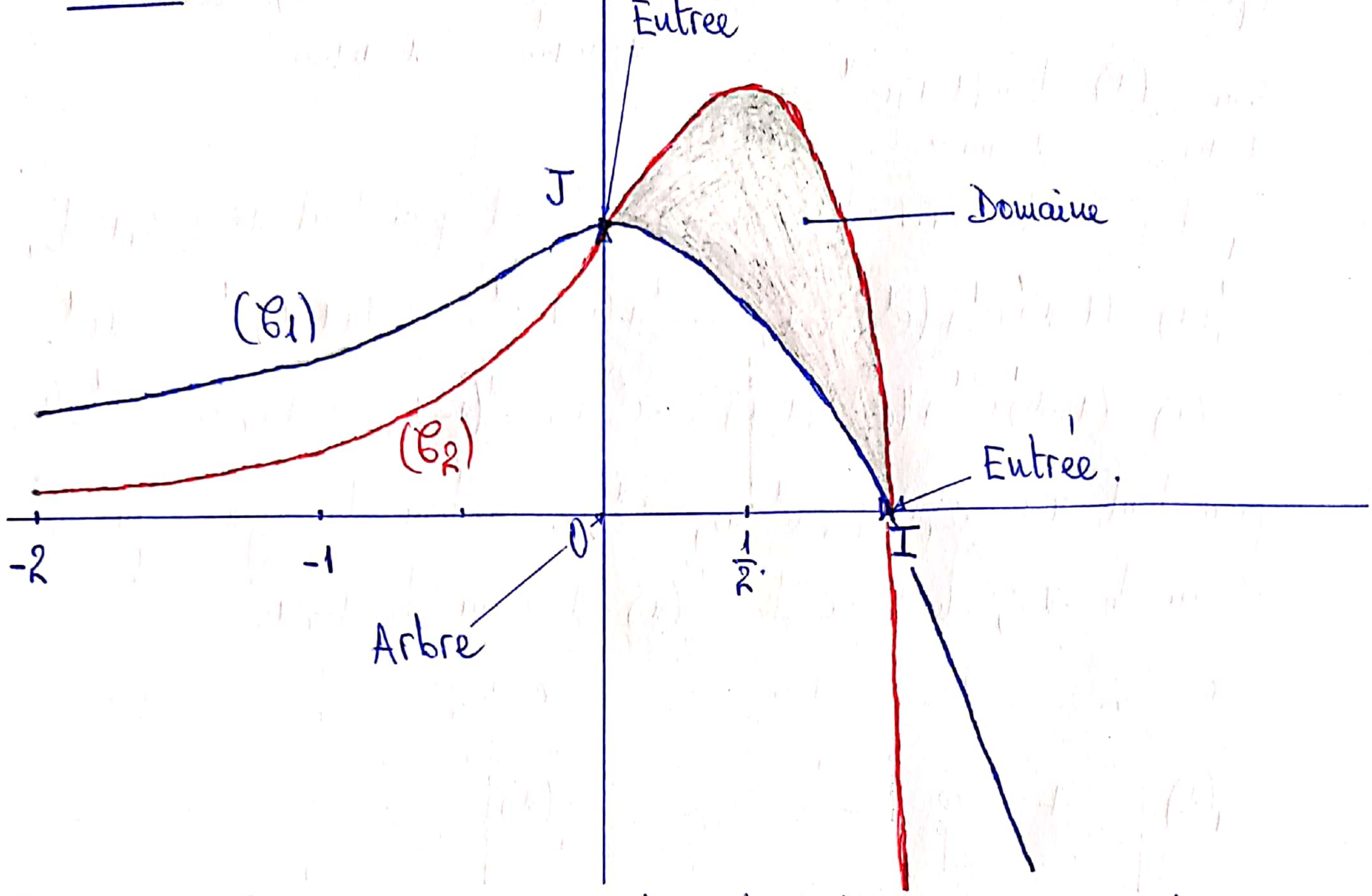
x	-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
f_2	$\frac{3}{e^4}$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	$-\infty$

Branches infinies.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{x} = -\infty$; $(\mathscr{C}_1)$ admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{2x} = -\infty$; $(\mathscr{C}_2)$ admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

• Tracé.



Tâche 3. Déterminons combien il faut prévoir pour couvrir entièrement le domaine.

Dans l'intervalle $[0;1]$, $(\mathcal{C}_2)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_1)$, ainsi l'aire du domaine de M. TAGNE est $\mathcal{A} = \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))\,dx$ U.A

$\mathcal{A} = \int_0^1 ((1-x)e^{2x} - (1-x)e^{x})\,dx = \int_0^1 (1-x)e^{2x}\,dx - \int_0^1 (1-x)e^{x}\,dx$ (en U.A)

À l'aide d'une intégration par parties

posons $u(x) = 1-x$. $u'(x) = -1$.

$v'(x) = e^{2x}$ $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Alors, $\int_0^1 (1-x)e^{2x}\,dx = \left[(1-x)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2-3}{4}$

De façon analogue, $\int_0^1 (1-x)e^{x}\,dx = e-2$.

Ainsi, $\mathcal{A} = \frac{e^2-3}{4} - (e-2)$ U.A $= \frac{e^2-4e+5}{4} \times 10000 \simeq 3789{,}822\,m^2$

le montant à prévoir pour couvrir le domaine est $3789{,}822 \times 2500 = 9.474.555$ FCFA