Concours d'admission Ecole de santé des armées avril 2014

EXERCICE 1 — 7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui parait exacte en cochant sur la grille prévue à cet effet.
Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée −0,5 point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Réponses : 1 :D ; 2 :C ; 3 : A ; 4 : D ; 5 : C ; 6 : B ; 7 : B

QCM 1 :
Soit la fonction h définie pour out réel x par $h(x) = e^{-x} - x + 4$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h. :

Pour tout réel x, $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1$. Ce qui exclut A.
Pour tout réel x, $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$. Ce qui exclut B.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} - x + 4 = +\infty$.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} - x + 4 = -\infty$.
Ces deux résultats excluent C...Reste D (h fonction continue strictement monotone sur $\mathbb{R}$ avec $h(x)$ qui décrit $\mathbb{R}$.)

QCM 2 :
Dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation $-2x\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions...

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ et $-2x\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$
Réponse : C

QCM 3 :
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculons la dérivée de la fonction h définie sur $[1;\mathrm{e}]$ par $h(t) = t^3[3\ln(t) - 1]$.
On a $h'(t) = 3t^2(3\ln(t) - 1) + 3t^2 = 9t^2\ln(t)$.
On en déduit :
$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\int_1^{\mathrm{e}} h'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}[h(t)]_1^{\mathrm{e}}$.
La valeur exacte de I est :$I = \dfrac{2e^3 + 1}{9}$. Réponse : A

QCM 4 :
Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\cos x$.
La dérivée f' de f est définie pour tout réel x par :
$f'(x) = -x\sin x + \cos x$: :
Réponse : D

QCM 5 : Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\cos x$.
La primitive F de f telle que $F(0) = 1$ est définie pour tout réel x par $F(x) = \cos x + x\sin x$:

Il suffit de dériver la fonction de la réponse C

QCM 6 : $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{3x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_2^4 \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[\ln(x^2-1\right]_2^4 = \frac{3}{2}(\ln(15) - \ln(3))$
D'où $I = 1,5\ln(5)$.
Réponse : B

QCM 7 :
On considère la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2\ln x}{x}$:
On a $f(x) = -x - 2\dfrac{\ln x}{x}$.
on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Réponse : B

EXERCICE 2 7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui parait exacte en cochant sur la grille prévue à cet effet.
Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée −0,5 point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 8 :

On considère l'équation $2z+\overline{z}=9+i$. On pose $z=x+iy$. on a $\overline{z}=x-iy$, avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.

$2z+\overline{z}=9+i \Leftrightarrow 2(x+iy)+(x-iy)=9+i \Leftrightarrow 3x+iy=9+i \Leftrightarrow (x=3 \text{et} y=1)$

Réponse : C

QCM 9 :

On considère la suite u définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$:

La forme de u_{n+1} en fonction de u_n exclut A et B.
Raisonnons par récurrence sur n.
Considérons la proposition $u_n<3$.
Initialisation : la proposition est vraie pour $n=0$.
Hérédité : Si $u_n<3$ est vraie, alors $\frac{1}{3}u_n+2$ est vraie et $u_{n+1}<3$ est vraie.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, d'après l'axiome de récurrence,$u_{n+1}<3$. Et la suite u est majorée par 3.
Réponse : C

QCM 10 : On considère trois suites u, v, et w qui vérifient la propriété suivante :
Pour tout entier naturel n non nul : $u_n<v_n<w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et comme $w_n=u_n+\frac{1}{n}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n)=2$.
D'après le théorème d'encadrement par des limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=2$.
Réponse : D

QCM 11 : Un sac contient 4 boules noires et 3 boules rouges.On tire successivement et sans remise 2 boules du sac. Sachant que la première boule tirée est noire, il reste dans le sac 6 boules : 3 noires et 3 rouges ; la probabilité de la seconde soit noire est $\dfrac{1}{2}$
Réponse : C

QCM 12 :

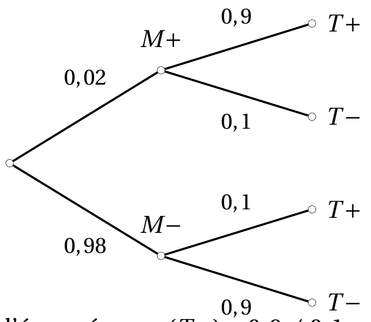
On lance un dé cubique bien équilibré et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de dé.
Soit les événements :
I :"le numéro est inférieur ou égal à 3".$I=\{1;2;3\}$ et $p(I)=\frac{3}{6}$.
M :" le numéro est un multiple de 3".$M=\{3;6\}$ et $p(I)=\frac{2}{6}$.

$I\cup M=\{1,2,3,6\}$ et $P(I\cup M)=\frac{4}{6}$.
$I\cap M=\{3\}$ $P(I\cap M)=\frac{1}{6}$
$P(I\cap M)=\frac{1}{6}$ et $p(I)\times p(M)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.
Réponse : D

QCM 13 :

Une maladie frappe 2% de la population d'un pays. Pour dépister cette maladie, on utilise un test. On sait que :
— la probabilité que le test soit positif, sachant que l'individu est malade, est 0,9 ;
— la probabilité que le test soit négatif, sachant que l'individu n'est pas malade, est 0,9.

On note les événements :
$M+$: "l'individu est malade"
$M-$: "l'individu n'est pas malade"
$T+$: "le test est positif"
$T-$: "le test est négatif"



D'après l'énoncé : $p_{M+}(T+) = 0,9 \neq 0,1$;
D'après la formule des probabilités totales :
$p(T+) = p(M+) \times p_{M+}(T+) + p(M-) \times p_{M-}(T+) = 0,116$.
Par définition des probabilités conditionnelles :
$p_{T+}(M+) = \dfrac{p(M+ \cup T+}{p(T+} = \dfrac{0.02 \times 0.9}{0,116}$.
On trouve à 10^{-2} près $p_{T+}(M+) = 0,16$.
Réponse : C

QCM 14 :
X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[2;20]$.
$P_{X>6}(5 < X < 10) = \dfrac{p(6 < x < 10)}{p(X > 6)} = \dfrac{4}{20} \times \dfrac{20}{14} = \dfrac{2}{7}$.
Réponse : C

EXERCICE 3 — 6 points

Un essai thérapeutique est réalisé chez des patients atteints d'une maladie associée à une très forte mortalité. Les données de cet essai sont correctement ajustées par un modèle de survie exponentielle.

Soit X_A la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_A = 0,22$.

C'est à dire $P(X_A \leqslant t) = \int_0^t 0,22e^{-0.22x}\,dx$.

Soit X_B la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_B = 0,11$.

C'est à dire $P(X_B \leqslant t) = \int_0^t 0,11e^{-0.11x}\,dx$.

t représente le temps en années avec $\geqslant 0$.

Avec un traitement A, la probabilité de survie à l'instant t est égale à $S_A(t) = P(X_A > t)$.

Avec un traitement B, la probabilité de survie à l'instant t est égale à $S_B(t) = P(X_B > t)$.

Aide aux calculs $e^{-2,2} \approx 0,111$ et $\sqrt{0,111} \approx 0,333$.

1. Calculons : $P(X_A \leqslant 10)$.

   On a : $P(X_A \leqslant 10) = \displaystyle\int_0^t -\lambda_A e^{-\lambda_A x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_A x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-10\lambda_A}$.
   Avec $\lambda_A = 0,22$, $P(X_A \leqslant 10) = 1 - \mathrm{e}^{-2,2} = 1 - 0,111 = 0,889$
2. Démontrons que pour tout réel t positif, $S_A(t) = e^{-0,22t}$.

   L'événement "$X_A > t$" est l'événement contraire de l'événement "$X_A \leqslant t$", on en déduit :
   $S_A(t) = P(X_A > t)1 - p(X_A \leqslant t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \lambda_A e^{-\lambda_A x}\,dx = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_A x}\right]_0^t = \mathrm{e}^{-t\lambda_A}$.
   Et finalement :$S_A(t) = e^{-0,22t}$.
3. La fonction S_A est dérivable sur $[0;+\infty[$ avec pour tout réel t, $t \geqslant 0$: $S'_A(t) = -\lambda_A \mathrm{e}^{-\lambda_A t} < 0$.
   S_A est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   D'autre part $S(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} S_A(t) = 0$
   On en déduit le tableau de variation complet de la fonction S_A.

4. Calculons la probabilité de survie à 10 ans dans le cas du traitement B, c'est à dire $S_B(10) = p(X_B > 10)$.

On a en utilisant les calculs faits au 2 pour X_A :
$S_B(10) = p(X_B > 10) = \mathrm{e}^{-10\lambda_B} = \mathrm{e}^{-1,1} = (\mathrm{e}^{-2,2})^2 = \sqrt{0,111} = 0,333$.

5. Calculons la probabilité de survie à 5 ans dans le cas du traitement A.

On a $S_A(5) = e^{-1,1}$

6. Le rapport de survie des traitements A et B est-il constant au cours du temps ?

Calculons $S_A(10)$; on a : $S_A(10) = e^{-2,2}$
On a d'autre part $S_B(5) = e^{-0,55}$.
On a : $\dfrac{S_A(5)}{S_B(5)} = e^{-0,55}$ et $\dfrac{S_A(10)}{S_B(10)} = e^{-1,1}$.
Or $-0,55 > -1,1$ et $e^{-0,55} > e^{-1,1}$
On remarque que $\dfrac{S_A(5)}{S_B(5)} > \dfrac{S_A(10)}{S_B(10)}$. Le rapport de survie des traitements A et B n'est pas constant au cours du temps.

7. Pour t fixé, établissons la relation entre la survie dans le cas du traitement A et la survie dans le cas du traitement B.
On a :
$\dfrac{S_A(t)}{S_B(t)} = \dfrac{e^{-0,22t}}{e^{-0,11t}} = e^{-0,11t}$.