GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN
TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE
Mercredi 17 mai 2006
SUJET DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I **7,5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$orthogonal.

Partie A

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. **a.** Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.
   b. Dresser le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Préciser $f(1)$ et $f(\mathrm{e})$.
   c. En déduire que f admet un maximum M que l'on donnera.
3. Tracer la courbe C_f. On placera avec soin les points de C_f d'abscisses respectives 1 et e.
4. Donner, suivant les valeurs de x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f(x)$.
5. Soit A un réel. On veut déterminer, suivant les valeurs de A, le nombre de solutions de l'équation :
$$f(x) = A$$
   Distinguer les différents cas et préciser, pour chacun d'eux, le nombre de solutions appartenant à chaque intervalle $]0\,;\,1]$, $]1\,;\,\mathrm{e}]$ ou $]\mathrm{e}\,;\,+00[$.

Partie B

Soit a un réel strictement positif.
On se propose dans cette partie de déterminer tous les réels x, strictement positifs, qui vérifient l'inéquation (ϵ_a) suivante :

$$(\epsilon_a) : \quad a^x \leqslant x^a.$$

1. Justifier que l'inéquation $a^x \leqslant x^a$ est équivalente à l'inéquation $f(a) \leqslant f(x)$.
2. On suppose dans cette question que : $a = \mathrm{e}$.
   a. En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $(\epsilon_\mathrm{e}) : \quad \mathrm{e}^a \leqslant x^\mathrm{e}$.
   b. *Application* : Sans les calculer, comparer e^π et π^e. Justifier la réponse.
3. On suppose dans cette question que : $0 < a \leqslant 1$.
   Quel est le signe de $f(a)$? En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation (ϵ_a), en fonction de a.
4. On suppose dans cette question que : $a > 1$ et $a \neq \mathrm{e}$.
   a. En utilisant la partie A, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet deux solutions a_1 et a_2 qui vérifient : $1 < a_1 < \mathrm{e} < a_2$.
   On remarquera que l'une des solutions a_1 ou a_2 est égale à a.
   b. Donner alors l'ensemble S_3 des solutions de l'inéquation (ϵ_a), en fonction de a_1 et a_2.

5. Application : On suppose dans cette question que : $a = 2$.

a. Déterminer l'entier naturel n, différent de 2, tel que : $f(n) = f(2)$.

b. En déduire l'ensemble S_4 des solutions de l'inéquation : (ϵ_2) : $2^x \leqslant x^2$.

EXERCICE II **7 points**

Ariane et Benjamin échangent des balles au ping-pong.
Soient les évènements suivants :
A : « Ariane marque le point » et B : « Benjamin marque le point ».
Ariane étant légèrement plus expérimentée que Benjamin, la probabilité qu'elle marque un point est : $p = P(A) = \dfrac{53}{100}$.
Ils décident d'engager une partie selon les modalités suivantes :

— Le joueur qui « gagne un set » est le premier qui marque deux points, consécutifs ou non.

— La partie s'arrête dès qu'un des deux joueurs a remporté trois sets, consécutifs ou non. On dit alors que ce dernier a gagné la partie.

Partie A

Dans cette partie, on étudie la probabilité pour Ariane de « gagner un set » (deux points marqués, de façon consécutive ou non).

1. Dans un échange de balles, quelle est la probabilité q que Benjamin marque le point ?
2. Dresser et compléter l'arbre de tous les évènements élémentaires.
3. Donner la probabilité P_1 qu'Ariane marque les deux premiers points.
4. Donner la probabilité P_2 qu'Ariane gagne le set, Benjamin ayant marqué un point.
5. Donner la probabilité P_3 qu'Ariane gagne le set. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B

On étudie maintenant la probabilité pour Ariane de « gagner la partie » (trois sets gagnés, consécutifs ou non).
Tous les sets sont joués dans des conditions identiques et indépendantes.
Pour le jeu d'un set, on note les évènements :
S : « Ariane gagne le set » et E : « Ariane perd le set ».
On suppose que, pour chaque set, les probabilités de ces évènements sont :

$$P = P(S) = 0,545 \quad \text{et} \quad Q = P(E) = 0,455.$$

Ariane et Benjamin engagent une partie.

1. Finir le dessin de l'arbre des évènements élémentaires et le compléter.
2. Donner, en fonction de P, la probabilité T_1 qu'Ariane gagne les trois premiers sets.
3. Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T_2 qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté un set.
4. Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T_3 qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté deux sets.
5. **a.** Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T qu'Ariane gagne la partie.

   b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité T.

6. **a.** Déterminer, en fonction de P et Q, la probabilité H qu'Ariane gagne la partie, sachant que Benjamin a remporté le premier set.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité H.

Partie C

On suppose maintenant que chaque joueur gagne 10 euros pour chaque set gagné et perde 10 euros pour chaque set perdu. Ariane et Benjamin engagent une partie dans les mêmes conditions que précédemment.
On note G_A la variable aléatoire représentant le gain en euros d'Ariane à la fin de la partie et G_B la variable aléatoire représentant le gain de Benjamin. Ces gains peuvent être positifs ou négatifs.

1. Donner le tableau représentant la loi de probabilité de G_A. On donnera les probabilités en fonction de P et Q.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'espérance de gain $\text{E}(G_A)$ d'Ariane à l'issue de la partie.
3. Donner, en fonction de $\text{E}(G_A)$, l'espérance de gain $\text{E}(G_B)$ de Benjamin.

EXERCICE III **5,5 points**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel égal au produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On considère un vecteur unitaire $\vec{k}$ du plan, c'est-à-dire tel que $\left\|\vec{k}\right\|^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$.
On rappelle qu'un point N du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel x_N tel que : $\overrightarrow{\text{O}N} = x_N \vec{k}$.
Pour tout point M du plan, on note $p(M)$ le produit scalaire suivant :

$$p(M) = \overrightarrow{\text{O}M} \cdot \vec{k}.$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les points M du plan qui vérifient : $p(M) = 0$.
2. Soit N un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$ et x_N le réel tel que $\overrightarrow{\text{O}N} = x_N \vec{k}$. Déterminer $p(N)$ en fonction de x_N.

Partie B

On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point $M' = f(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{\text{O}M'} = 2p(M)\vec{k} - \overrightarrow{\text{O}M}.$$

1. Déterminer l'image N' d'un point quelconque N de la droite $\mathcal{D}$. Justifier la réponse.
2. Soit M un point quelconque du plan, M' son image par f et I_M le milieu du segment $[MM']$.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{O}I_M}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}M'}$ et montrer que I_M appartient à la droite D.

b. Déterminer $p\left(M'\right)$ en fonction de $p(M)$. On fera le détail du calcul.

c. En déduire l'image $M'' = f\left(M'\right)$ de M'. On justifiera la réponse.

d. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$.

3. En déduire quelle est la transformation f.