Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
mai 2008

QCM DE MATHEMATIQUES
Ce QCM comporte 15 questions.
Donner la réponse à chaque question sur la feuille des réponses.

Question 1 **1,5 points**

Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants.
Il a une chance sur trois de réussir le concours C_1 et une chance sur trois de réussir le concours C_2.
Pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.
Quelle probabilité P a-t-il de réussir au moins un concours ?

A : $P = \frac{2}{3}$ B : $P = \frac{5}{9}$ C : $P = \frac{2}{9}$ D : $P = \frac{4}{9}$ E : $P = \frac{1}{9}$

Question 2 **1 point**

Donner le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}$$

A : $\mathscr{D} = \mathbb{R}_*^+$

B : $\mathscr{D} =]1\ ;\ +\infty[$

C : $\mathscr{D} =]1\ ;\ \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$

D : $\mathscr{D} =]1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$

E : $\mathscr{D} =]2\ ;\ +\infty[$

Question 3 **1 point**

On tire au hasard une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée.
Donner la valeur de l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

A : $\mathrm{E}(X) = 1$

B : $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{10}$

C : $\mathrm{E}(X) = \frac{11}{2}$

D : $\mathrm{E}(X) = 5$

E : $\mathrm{E}(X) = 11$

Question 4 **1 point**

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n, $w_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$, vérifie :

A : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

B : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

C : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

D : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$

E : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

Question 5 **1,5 point**

On considère dans l'espace rapporté au repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les deux plans suivants :

$$\mathscr{P}_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0 \quad ; \quad \mathscr{P}_2 : x - y + 2 = 0$$

Donner l'équation du plan passant par le point O et contenant la droite d'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

A : $x + y - 2z = 0$

B : $x + y + z + 3 = 0$

C : $x + y = 0$

D : $y - 2z = 0$

E : $2x + y - 3z = 0$

Question 6 **1,5 point**

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
Une intégration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
Quelle est cette relation ?

A : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

B : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-1}$

C : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

D : $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$

E : $I_n = 2\mathrm{e}^2 - 2nI_{n-1}$

Question 7 **1 point**

La fonction f définie sur $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x - 7}}$ vérifie :

A : $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B : $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

C : $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

D : $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

E : f n'a pas de limite quand x tend vers 1.

Question 8 **1,5 point**

Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ vérifiant l'équation :

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$$

A : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\right\}$

B : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

C : $S = \left\{0\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

D : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\ ;\ -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

E : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Question 9 **1,5 point**

Donner la solution de l'équation différentielle : $y'(x)+2y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos x$, vérifiant la condition $y(0) = 1$.
A : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos x$
B : $f(x) = \ln\left(1+\cos x\mathrm{e}^{-2x}\right)$
C : $f(x) = (1+\sin x)\mathrm{e}^{-2x}$
D : $f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\sin x$
E : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}\right)\cos x$

Question 10 **1,5 point**

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (\mathrm{e}^x-2)(\mathrm{e}^x+1)$.
On note $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{H}$ au point d'intersection de $\mathscr{H}$ avec l'axe des abscisses.

A : $y = x-2$

B : $y = 3x-\ln 6$

C : $y = x+2$

D : $y = 6(x-\ln 2)$

E : $y = 2(x-\ln 2)$

Question 11 **1,5 point**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$.
Une des cinq affirmations suivantes est exacte. Laquelle ?
A : g est majorée par 2
B : Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$
C : Pour tout réel x, on a : $g'(x) < 0$
D : La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = -\dfrac{1}{2}x+3$
E : La fonction G définie par : pour tout réel x, $G(x) = 2x+\ln\left(x^2+1\right)$ est une primitive de g

Question 12 **1,5 point**

On considère, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_M = 1+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_N = 3+2\mathrm{i}.$$

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, le point J. Donner l'affixe de J.

A : $z_J = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$

B : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$

C : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{12}}$

D : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$

E : $z_J = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

Question 13 **1 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$\mathscr{C}: \quad y = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$$

On note $\mathscr{A}$, l'aire, en unités d'aires, de la partie de plan délimitée par $\mathscr{C}$, les axes du repère et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

A : $\mathscr{A} = \frac{1}{4}$

B : $\mathscr{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}$

C : $\mathscr{A} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}$

D : $\mathscr{A} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$

E : $\mathscr{A} = -1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$

Question 14 **1,5 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées :

$$\text{A}(2\,;\,4),\ \text{B}(-2\,;\,1)\ \text{ et }\ \text{C}(4\,;\,3).$$

On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.

A : $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$ B : $d = \frac{9}{\sqrt{10}}$ C : $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ D : $d = \frac{\sqrt{10}}{2}$ E : $d = -\frac{5}{\sqrt{10}}$

Question 15 **1,5 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, soit le point A d'affixe i. On considère la fonction T qui associe à tout point M, différent de A et d'affixe z, le point M', d'affixe z', tel que :

$$z' = \frac{\text{i}}{2(z - \text{i})}$$

Alors l'image par T du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 est :

A : le cercle de centre O et de rayon 0, 5
B : le cercle de centre O et de rayon 2
C : le cercle de centre A et de rayon 0,5
D : le cercle de centre A et de rayon 1
E : le cercle de centre A et de rayon 2