**Durée : 1 heure 30**

# Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
# 6 mai 2009

**Exercice 1** **8 points**

**Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3**

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$$

Soit $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthogonal, l'unité sur l'axe des abscisses étant de 1 cm et sur l'axe des ordonnées de 2 cm.

**1.** **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.

**b.** En déduire que $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote $\Delta_n$, au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.

**2.** **a.** Déterminer $f_n'(x)$, pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$, où $f_n'$ désigne la dérivée de $f_n$.

**b.** Dresser le tableau des variations de $f_n$.

Préciser les valeurs de $f_n(0)$, $f_n'(0)$ et $f_n(n)$.

**3.** La fonction $f_2$ est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

**a.** Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de $f_2$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthogonal donné.

**b.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection $B_1$ et $B_2$ des courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

**c.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par les deux points $B_1$ et $B_2$.

**4.** **a.** Donner la valeur exacte de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On indiquera les calculs intermédiaires.

**b.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K = \displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

On indiquera les calculs intermédiaires et on donnera la valeur exacte de l'intégrale.

**c.** À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, en fonction de $K$, l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On indiquera les calculs intermédiaires.

**d.** On note $\mathscr{Q}$ la partie de plan délimitée par les axes du repère, la courbe $\mathscr{C}_2$ et la droite d'équation $x = 2$.

Donner une valeur approchée à $10^{?2}$ près de l'aire $\mathscr{A}(\mathscr{Q})$ de la partie $\mathscr{Q}$, en unités d'aire, puis en cm2.

**e.** Hachurer la partie $\mathscr{Q}$ sur le graphique de la question 3. a.

**EXERCICE 2** **4 points**

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Dans une classe de terminale S, comprenant 39 élèves, on relève les voœux d'orientation suivants :

30 élèves veulent faire des études scientifiques dont 22 envisagent des études longues.
6 élèves souhaitent s'engager dans des études de droit dont 2 envisagent des études courtes.
3 élèves veulent faire des études d'arts (études longues).
Toutes les filles veulent faire des études longues.
Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études scientifiques.
Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études de droit.
Un seul garçon envisage de s'engager dans des études d'arts.

**1.** Compléter le tableau à l'aide des informations données en hypothèse.

**2.** On interroge un élève pris au hasard dans la classe.

   **a.** Donner la probabilité $P(F)$ que l'élève interrogé soit une fille et la probabilité $P(G)$ que ce soit un garçon.

   **b.** Sachant que l'élève interrogé veut faire des études longues, quelle est la probabilité $P_1$ que ce soit une fille qui envisage de faire des études scientifiques ?

   **c.** Sachant que l'élève interrogé n'envisage pas de faire des études scientifiques, quelle est la probabilité $P_2$ qu'il se destine à des études d'arts ou envisage des études courtes ?

**3.** Deux filles et un garçon sortent de la classe.

   **a.** Quelle est la probabilité $Q_1$ que ce soit trois élèves qui envisagent des études scientifiques ?

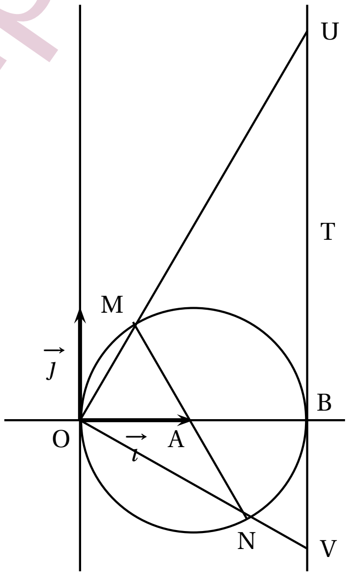
   **b.** Quelle est la probabilité $Q_2$ qu'il y'ait au moins un élève envisageant des études d'arts ?

**EXERCICE 3** **8 points**

On se place dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthomormé, direct.
Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2.
On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 et la droite $T$, tangente à $\mathscr{C}$ en B, d'équation $x = 2$.
Pour tout réel $\varphi$ vérifiant $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, on pose :

$$z_\varphi = \left(\cos(\varphi) + 1\right) + \text{i}\sin(\varphi)$$

On désigne par $M_\varphi$ le point du plan d'affixe $z_\varphi$.




**1.** Où se trouve le point $M_\varphi$ lorsque : $\varphi = -\pi$ ? $\varphi = \pi$ ? $\varphi = 0$ ?

**2.** Soit $\varphi \in ]-\pi\ ;\ \pi[$.

   **a.** Déterminer, en fonction de $\varphi$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{A}M_\varphi}$.

   **b.** Justifier que $M_\varphi$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

**3.** Pour la suite de l'exercice, on pose : $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

   On désigne par $M$ le point d'affixe : $z = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On note $N$ le point du cercle $\mathscr{C}$ diamétralement opposé au point $M$ ($N$ est le symétrique de $M$ par rapport à A).

Déterminer l'affixe $Z$ du point $N$.

**4.** Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[MN]$.

**5.** On considère $U$ le point d'intersection de la droite $(\text{O}M)$ et de la tangente $T$ et $V$ le point d'intersection de la droite $(\text{O}N)$ et de la tangente $T$.

**a.** Déterminer l'affixe $u$ du point $U$ et l'affixe $v$ du point $V$.

**b.** Déterminer l'affixe $k$ du milieu $K$ du segment $[UV]$.

**c.** En déduire une équation cartésienne de la médiatrice $\Delta$ du segment $[UV]$.

**6.** **a.** Déterminer l'affixe $\omega$ du point $\Omega$ d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$.

**b.** Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ ainsi que le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $\Omega$ passant par $M$.

Quels sont les trois points cités dans cet exercice, autres que $M$, qui appartiennent à ce cercle $\mathscr{C}'$ ?