Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
mai 2011

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé. Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit. Aucun document n'est autorisé.
L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 10 points. Le sujet est donc noté sur 30 points. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, direct.
Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = 3 - 2\text{i}$.
Pour tout complexe z, on pose :

$$z' = \text{i}z + 1 - \text{i}.$$

On considère la fonction F qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1. Placer A et B sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2. Dans cette question, on considère un point M, différent de A, donc d'affixe $z \neq 1$.

a. Déterminer le complexe $Z = \dfrac{z' - 1}{z - 1}$.

b. Déterminer le module $|Z|$ et un argument $\arg(Z)$ de Z.

c. Exprimer $\text{A}M'$ en fonction de $\text{A}M$. Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$.

d. En déduire la nature de la fonction F. On précisera tous ses éléments caractéristiques.

3. Déterminer les affixes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ des images A′ et B′ par F des points A et B.

4. Soit C le point dont l'image par la fonction F est le point C′ d'affixe
$Z_{\text{C}'} = -3 - 3\text{i}$.
Déterminer l'affixe z_{C} du point C. Justifier le calcul.
Dessiner les triangles ABC′ et ACB′ sur la figure du 1.

5. On désigne par I le milieu du segment [BC′].

a. Déterminer l'affixe z_{I}, du point I.
Dans le triangle ABC′, tracer la médiane (D) issue de A.

b. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}'}$.

c. Déterminer la position relative des droites (AI) et (CB′). On justifiera la réponse.

d. Que représente la droite (D) pour le triangle ACB′ ?

6. On note (D′) l'image de la droite (AI) par la fonction F. Déterminer (D′) et tracer (D′) sur la figure.

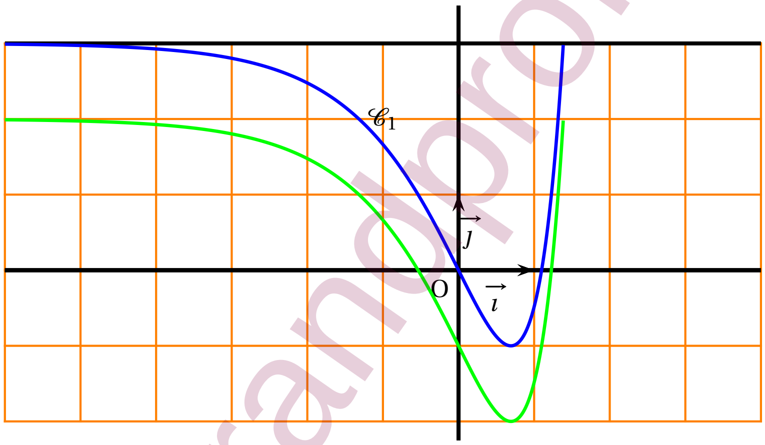
EXERCICE 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   c. On en déduit que $\mathscr{C}$ admet, au voisinage de $-\infty$, une asymptote Δ dont on donnera une équation.
2. **a.** f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.
   b. Pour tout réel x, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)$.
   Donner l'expression de $g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   d. f présente un minimum au point $M\left(x_M\ ;\ y_M\right)$. Déterminer les coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$ de M. Détailler le calcul de y_M.
3. Une des deux courbes $\mathscr{C}_1$l et $\mathscr{C}_2$ dessinées sur la figure ci-dessous représente la fonction f. Laquelle ? Justifier votre réponse.



4. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T_0 sur la figure du 3.
5. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'asymptote Δ en un point E.
   Déterminer les coordonnées $\left(x_{\mathrm{E}}\ ;\ y_{\mathrm{E}}\right)$ du point E. Détailler les calculs.
6. **a.** Soit J l'intégrale définie par : $J = \displaystyle\int_0^{\ln 4} (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$.
   Calculer la valeur de J en justifiant le calcul.
   b. Sur la figure du 3. placer le point E et hachurer la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, vaut J.

EXERCICE 3

Un fabricant de jouets vend un modèle de poupée qui « parle et marche » grâce à un mécanisme électronique.
On appelle « durée de vie » d'une poupée, le temps pendant lequel le mécanisme fonctionne correctement avant la première défaillance.
La variable aléatoire T, représentant la durée de vie exprimée en années d'une poupée prise au hasard dans la production, suit une loi exponentielle de paramètre 1.

La probabilité $P(T \leqslant t)$ que la durée de vie de la poupée soit inférieure à t années est alors donnée par :

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}.$$

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. **a.** Déterminer la probabilité p qu'une poupée ne fonctionne plus au bout d'une année.

b. Exprimer, en fonction de t, la probabilité $P(T > t)$ qu'une poupée n'ait aucune défaillance pendant t années.

2. J'ai acheté une poupée. On note A l'évènement : « la poupée n'a aucune défaillance pendant une année » et B l'évènement : « la poupée n'a aucune défaillance pendant trois ans ».

a. Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des évènements A et B.

b. Sachant que la poupée fonctionne parfaitement au bout d'un an, quelle est la probabilité $P_A(B)$ que la poupée fonctionne encore au bout de trois ans ? Justifier le calcul.

3. Le fabricant garantit les poupées pendant un an et s'engage à rembourser les poupées défectueuses.

a. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du pourcentage de poupées remboursées.

b. Quelle durée de garantie maximale ta devrait proposer le fabricant pour qu'il ne rembourse pas plus de 8 % des poupées vendues ? Calculer la valeur exacte, exprimée en années, de t_0. Justifier le résultat.
Donner une valeur approchée, exprimée en mois, de t_0.

4. Un commerçant achète un lot de trois poupées et le fabricant offre, pour chaque poupée, une garantie d'une année.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de poupées remboursées sur ce lot.

a. Exprimer, en fonction de p défini en 1. a., la probabilité $P(X = 3)$ que les trois poupées ne fonctionnent plus au bout d'un an.

b. Exprimer, en fonction de p, la probabilité $P(X = 3)$ qu'une seule des trois poupées ne fonctionne plus au bout d'un an.

c. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X. Les probabilités seront exprimées en fonction de p.

d. Déterminer, en fonction de p, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable X.

EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, orthonormé, on considère les points A, B et C, de coordonnées :

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,-1), \mathrm{B}(0\,;\,2\,;\,-2) \quad \text{et } \mathrm{C}(2\,;\,2\,;\,2).$$

1. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n_1}\,(4\,;\,1\,;\,-2)$. Calculer : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
Que peut-on dire de $\overrightarrow{n}$ par rapport au plan (ABC) ?

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit le plan P d'équation cartésienne : $x - 2y + z = 0$.

a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan P.

b. Justifier que les plans P et (ABC) sont perpendiculaires.

c. Parmi les points A, B et C, préciser ceux qui appartiennent à P.

d. On note D_1 la droite intersection des deux plans P et (ABC).
Quelle est cette droite D_1 ?
Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{U}$ de la droite D_1.

3. Soit la droite D_2 définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$D_2 \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+\alpha \\ y & = \alpha & \\ z & = & 0-\alpha \end{array} \right.$$

On note N le point d'intersection de la droite D_2 et du plan P.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{N}}\ ;\ y_{\text{N}}\ ;\ z_{\text{N}}\right)$ de N. Justifier le calcul.

4. Montrer que le point K(3 ; 2 ; 0) appartient à la droite D_2.

5. **a.** Soit le point $\text{L}\left(\dfrac{10}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{KL}}$ est normal au plan P.

b. Montrer que les points K et L sont symétriques par rapport au plan P.

c. On désigne par H le projeté orthogonal du point K sur le plan P. Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{H}}\ ;\ y_{\text{H}}\ ;\ z_{\text{H}}\right)$ de H.

6. Justifier que les droites D_1 et D_2 sont orthogonales.