

Durée : 1 heure 30

♪ Épreuves communes ENI-GEIPI-POLYTECH ♪  
 mai 2012

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.

La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.

Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

**EXERCICE I**

On considère la fonction  $f$  définie, pour tout réel de  $]0 ; +\infty]$ , par

$$f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2.$$

Soit  $C$  la courbe représentant  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

1. **a.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Justifier la réponse.
- b.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier la réponse.
2. **a.**  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ . Déterminer  $f'(x)$ .
- b.** Pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x)$  s'écrit sous la forme :  $f'(x) = g(x)(1 - \ln x)$ .  
Donner l'expression de  $g(x)$ .
- c.** Compléter le tableau de variation de la fonction  $f$ .  $f$  présente un extremum en un point  $M$ . Donner les coordonnées  $(x_M ; y_M)$  de  $M$ .
3. La courbe  $C$  coupe l'axe des abscisses ( $Ox$ ) en deux points A et B d'abscisses respectives  $x_A$  et  $x_B$  telles que  $x_A < x_B$ .  
Déterminer les valeurs exactes de  $x_A$  et de  $x_B$ . Détailler les calculs. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_B$ .
4. Placer les points A, B et M. Tracer la courbe  $C$  ainsi que sa tangente au point M.
5. On considère la fonction  $F$  définie, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ , par :

$$F(x) = x(-4 + 4 \ln x - (\ln x)^2).$$

- a.** Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$ . Détailler les calculs.
- b.** Soit  $J$  l'intégrale définie par :

$$J = \int_1^e f(x) dx.$$

Calculer la valeur exacte de  $J$  en justifiant le calcul.

- c.** Sur la figure de 4., hachurer la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, vaut  $J$ .

**EXERCICE II**

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte, écrite sous forme de fraction irréductible.

Un marchand de parapluies ouvre son magasin 240 jours par an et sur ces journées, il y a 80 jours de beau temps, 40 jours de pluie et 120 jours de temps maussade.

- Il constate que lors d'une journée de beau temps, il a une probabilité de  $\frac{3}{4}$  de ne pas vendre de parapluie, et une probabilité de  $\frac{1}{4}$  de vendre un parapluie.
- Lors d'une journée de pluie, il a une probabilité de  $\frac{1}{4}$  de vendre un parapluie, une probabilité de  $\frac{1}{4}$  de vendre deux parapluies et une probabilité de  $\frac{1}{2}$  de vendre trois parapluies.
- Lors d'une journée de temps maussade, il a une probabilité de  $\frac{1}{4}$  de ne pas vendre de parapluie, une probabilité de  $\frac{1}{2}$  de vendre un parapluie et une probabilité de  $\frac{1}{4}$  de vendre deux parapluies.

Pour une journée quelconque d'ouverture du magasin, on considère les événements suivants :

$B$  : « Le temps est beau »,

$P$  : « Le temps est pluvieux »,

$M$  : « Le temps est maussade ».

$X$  désigne la variable aléatoire représentant le nombre de parapluies vendus ce jour-là.

1. Compléter l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.
2.
  - a. Sachant qu'il fait beau, quelle est la probabilité  $P_1$  que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?
  - b. Sachant qu'il pleut, quelle est la probabilité  $P_2$  que le commerçant vende au moins deux parapluies ce jour-là ?
3.
  - a. Quelle est la probabilité  $P(X = 0)$  que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?
  - b. Quelle est la probabilité  $P(X = 2)$  que le commerçant vende deux parapluies ce jour-là ?
  - c. Quelle est la probabilité  $P(X = 3)$  que le commerçant vende trois parapluies ce jour-là ?
4.
  - a. Compléter le tableau qui donne la loi de la variable aléatoire  $X$ .
  - b. Calculer l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .
5. Il vend chaque parapluie 10 euros. Quel est le gain moyen  $G$ , en euros, que lui rapporte sa vente de parapluies pour un an ?
6. Sachant que, lors d'une journée donnée, le commerçant a vendu un seul parapluie, quelle est la probabilité  $P_3$  que ce soit une journée de beau temps ?
7. Sachant que la journée n'est pas une journée de beau temps, quelle est la probabilité  $P_4$  que le commerçant ne vende qu'un parapluie ?

**EXERCICE III**

On se place dans le plan complexe  $P$  rapporté au repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  orthonormé, direct. Pour tout complexe  $z$ , on pose :

$$z' = (1 + i)z - i.$$

On considère la fonction  $F$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

1. Soit le point A d'affixe  $z_A = 1$ . Déterminer l'image A' par F de A.
2. Dans cette question, on considère un point M d'affixe  $z \neq 1$ .  
 On considère le complexe  $Z = \frac{z' - z}{1 - z}$ .
  - a. Z peut s'écrire  $Z = ai$ . Déterminer a. Justifier le calcul.
  - b. Déterminer le module  $|Z|$  et un argument  $\arg(Z)$  de Z.
  - c. Exprimer la distance  $MM'$  en fonction de MA et déterminer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'})$ .
  - d. En déduire la nature du triangle  $AMM'$ .
  - e. Construire l'image M' par F du point M placé sur la figure.
3. C désigne le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère et B désigne le point d'affixe :

$$z_B = \frac{-1 + i}{2}.$$

- a. Donner l'affixe  $z_C$  du point C.
  - b. Déterminer l'affixe  $z_{B'}$  de l'image B' par F du point B. Détailler le calcul.
  - c. Placer les points B, B' et C sur la figure de 2. e.
4. a. Déduire de la question 2. c. la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'})$ .
  - b. Donner la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'})$ . Justifier le résultat.
  - c. En déduire que les points A, B, C et B' appartiennent à un même cercle dont on donnera les extrémités d'un diamètre. Justifier la réponse.

#### EXERCICE IV

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad y'(x) + y(x) = x + 1$$

où y est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit y une solution de l'équation différentielle (E). On note h la fonction définie pour tout réel x de  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = y(x) - x.$$

- a. En détaillant le calcul de  $h'(x) + h(x)$ , vérifier que h est solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad h'(x) = -h(x).$$

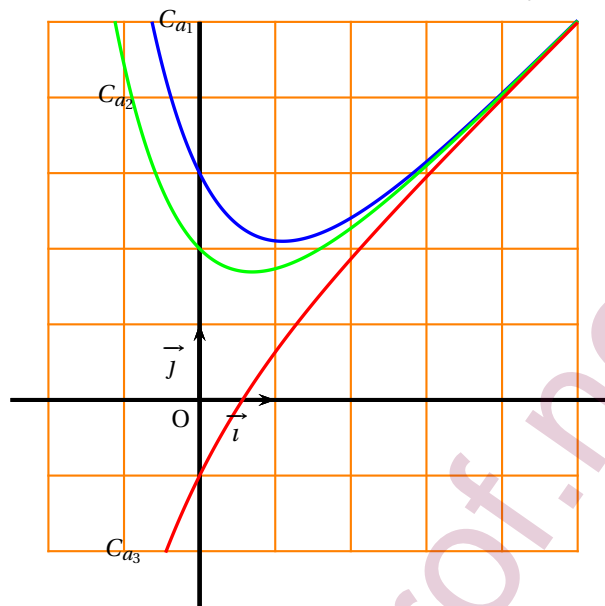
- b. Déterminer toutes les fonctions h solutions de l'équation différentielle (F).
2. En déduire toutes les fonctions y solutions de l'équation différentielle (E).
  3. Soit un réel a quelconque. On note  $f_a$  la fonction définie, pour tout réel x de  $\mathbb{R}$ , par :

$$f_a(x) = x + ae^{-x}$$

et on note  $C_a$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a. Calculer  $f_a(0)$ .

- b. Déterminer, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'_a(x)$ .
  - c. Déterminer une équation de la tangente  $T_a$  à la courbe  $C_a$  au point  $A_a$  d'abscisse nulle.
  - d. Justifier que le point  $I(1; 1)$  appartient à la tangente  $T_a$ .
4. Voici trois courbes représentant les fonctions  $f_{a_1}$ ,  $f_{a_2}$  et  $f_{a_3}$ .



Déterminer  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Justifier vos affirmations.

- 5. Tracer, sur la figure de 4., les tangentes  $T_{a_1}$ ,  $T_{a_2}$  et  $T_{a_3}$  à chacune des trois courbes au point d'abscisse 0.
- 6. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .  
 Quel est le signe de  $f_a(x) - f_b(x)$ ? Justifier votre réponse. Qu'en déduisez-vous pour les courbes  $C_a$  et  $C_b$ ?