Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
Série S 13 mai 2015

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

Une librairie a effectué une étude auprès de ses clients concernant leur durée de passage et leur mode de paiement ainsi qu'une étude sur le prix des livres.

Partie A

La durée de passage, en minutes, d'un client peut être modélisée par une variable aléatoire T ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 0,02\mathrm{e}^{-0,02x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit t un réel strictement positif. La probabilité $P(T \leqslant t)$ que la visite d'un client dans cette librairie dure moins de t minutes est alors donnée par : $P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4}près.

1. Quelle est la loi suivie par T ? Préciser son paramètre.
2. **a.** Déterminer, avec le calcul d'une intégrale, la probabilité P_1 qu'un client reste moins de 15 minutes dans la librairie. Détailler le calcul.

   b. Donner la probabilité P_2 qu'un client reste plus de 15 minutes dans la librairie.
3. Déterminer la probabilité P_3 qu'un client reste plus de 20 minutes dans la librairie sachant qu'il y est déjà depuis 15 minutes. Justifier le résultat.
4. Donner, en minutes, la durée moyenne de passage mo d'un client dans la librairie.

Partie B

On estime à 0,1 la probabilité qu'un client règle ses achats par chèque, lorsque leur montant est inférieur à 25 euros. Un matin, 20 clients font des achats d'un montant inférieur à 25 euros. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients, parmi ceux-là, ayant réglé leurs achats par chèque.
Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

2. Donner la probabilité P_4 que trois clients exactement règlent leurs achats par chèque.
3. Donner la probabilité P_5 qu'au moins deux clients règlent leurs achats par chèque.

Partie C

On note Y la variable aléatoire qui, à un livre choisi au hasard dans la librairie, associe son prix, en euros. On admet que Y suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On prend au hasard un livre dans la librairie.
Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. Donner la probabilité P_6 que le prix de ce livre soit inférieur à 25 euros.
2. Donner la probabilité P_7 que le prix de ce livre soit supérieur à 35 euros.
3. Donner la probabilité P_8 que le prix de ce livre soit compris entre 10 et 15 euros.

EXERCICE II

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0\,;\,+\infty[, \quad f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Donner $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.
   b. On en déduit que C_n admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
2. **a.** f_n' désigne la dérivée de f_n.
   Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad f_n'(x) = n\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$.
   b. Dresser le tableau des variations de f_n.
   c. f_n présente un maximum en un point M_n. Donner les coordonnées de M_n.
3. **a.** Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad f_2(x) - f_1(x) = x\mathrm{e}^{-2x}\left(2-\mathrm{e}^{x}\right)$.
   b. On déduit de la question **3. a.** que les courbes C_1 et C_2 ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).
   Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.
   c. Donner, pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.
   En déduire la position relative des courbes C_1 et C_2.
4. Sur la figure est tracée la courbe C_1.
   Placer les points M_1, M_2, P et Q.
   Tracer la tangente à la courbe C_2 au point M_2, puis tracer la courbe C_2.
5. On considère la fonction F définie par : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$F(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

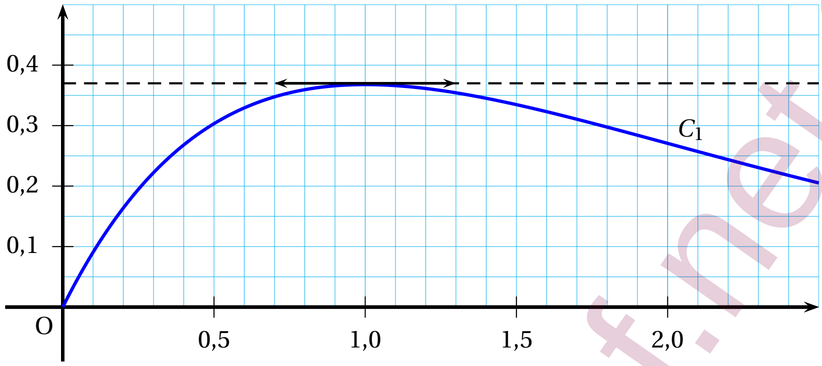
   a. Justifier que F est une primitive de la fonction f_1.

b. On considère l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Hachurer, sur la figure de la question **4.**, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut $\mathscr{A}$.

c. Déterminer $\mathscr{A}$. Détailler le calcul.
Le résultat sera écrit sous la forme $\mathscr{A} = \dfrac{1}{a}(b - c\ln 2)$ où a, b et c sont des entiers à déterminer.



EXERCICE III

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A, B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 1$ et $z_\mathrm{B} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Tracer le triangle ABC sur la figure (voir à la fin de l'exercice).
2. Donner l'affixe z_C du point C.
3. **a.** Calculer le module $|z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$. Détailler le calcul.
   b. Donner les modules $|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|$ et $|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|$.
   c. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère les points suivants :
I : projeté orthogonal du point O sur la droite (BC),
J : projeté orthogonal du point O sur la droite (AC),
K : projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).
On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes respectives.

1. Placer les points I, J et K sur la figure (voir à la fin de l'exercice).
2. **a.** Justifier que J est le milieu du segment [AC].
   b. Calculer alors l'affixe z_J de J. Donner son module $\left|z_\mathrm{J}\right|$.
   c. Donner les affixes z_I et z_K ainsi que leur module $|z_\mathrm{I}|$ et $|z_\mathrm{K}|$.
3. En déduire la valeur de la somme des distances : $L_\mathrm{O} = \mathrm{OI} + \mathrm{OJ} + \mathrm{OK}$.
   Justifier la réponse.

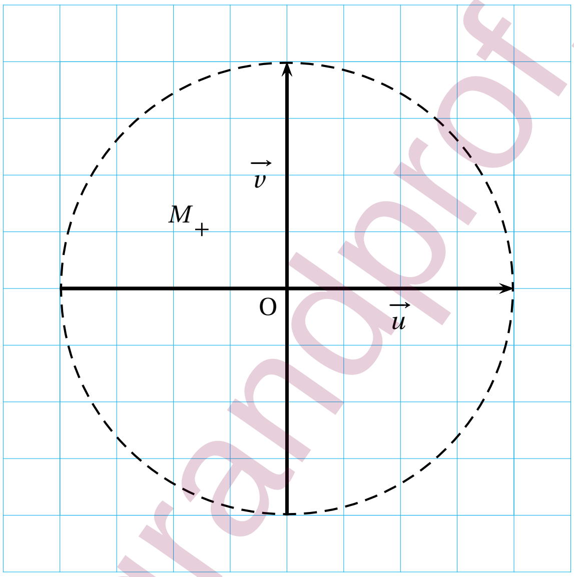
Partie C

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC.
On considère les points suivants :
E : projeté orthogonal de M sur la droite (BC),
F : projeté orthogonal de M sur la droite (AC),
G : projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
On note $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MAC, MAB et ABC.
On pose $L_M = ME + MF + MG$.

1. Avec le point M déjà placé sur la figure (voir à la fin de l'exercice), placer les points E, F et G.
2. **a.** Exprimer $\mathscr{A}_1$ en fonction de la distance ME.

   b. Ecrire une relation liant $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}$.

   c. Déduire des questions précédentes que : $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} 3L_M$.
3. L'égalité précédente montre que la valeur de L_M ne dépend pas de la position du point M à l'intérieur du triangle ABC.
   Donner la valeur de L_M. Justifier la réponse.



EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

— le point A de coordonnées (3 ; 2 ; 2),
— le point C de coordonnées (−1 ; −1 ; 0),
— le point D de coordonnées (1 ; −3 ; 2),
— le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z + 3 = 0$,
— la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Delta : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+2t \\ y & = & -6+5t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. $\mathscr{P}$ et Δ sont sécants en un point E.
   Déterminer les coordonnées $\left(x_{\mathrm{E}}\,;\, y_{\mathrm{E}}\,;\, z_{\mathrm{E}}\right)$ de E.
2. **a.** Vérifiez que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

b. On note B le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{B}}\ ;\ y_{\text{B}}\ ;\ z_{\text{B}}\right)$ du point B. Détailler le calcul.

c. Justifier que le point B appartient à la droite Δ.

3. **a.** Donner les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (CD) d'abscisse 1.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

c. On désigne par H le point de la droite (CD) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (CD).
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{H}}\ ;\ y_{\text{H}}\ ;\ z_{\text{H}}\right)$ de H. Détailler le calcul.

4. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme ABCD. Détailler le calcul.