COLLEGE DE LA RETRAITE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
BACCALAUREAT BLANC N°1
CLASSE: TC

ANNEE 2018/2019
SEQUENCE 4
COEF : 7

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : (4pts)

A) 1- Démontrer que pour tous entiers K et r $5^{4k+r} \equiv 5^r \ (13)$ (0.5pt)

2- quels sont les restes possibles de 5^n modules 13 (0.5pt)

3- Soit $An = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$. $n \in \mathbb{N}$

Montrer que A_n est divisible par 13 si et seulement si n n'est pas multiple de 4 (1pt)

B) Soit Mo le point d'affixe 2i et (Mn) la suite des points dont les affixes Zn sont donnés par

$Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

1) Déterminer Ω le point invariant par (M_n) (0.5pt)

2) Exprimer $Z_{n+1} + 1$ en fonction de Z_{n+1} et donner donc la nature de (M_n) (0.75pt)

3) Calcules ΩM_{n+1} en fonction de ΩM_n (0.75pt)

Exercice 2 : (6pts)

A) Soit p la fonction définie sur ℝ par $p(x) = x^3 + ax + b$ a et b des réels

1) Étudier les variations de p et dresser son tableau de variation (1pt)

2) On suppose α strictement négatif

a) Démontrer que le polynôme $p(x)$ admet une unique racine réelle si $4a^3 + 27b^2 > 0$ (0.75pt)

b) Démontrer que le polynôme $p(x)$ admet trois racines réelles ssi $4a^3 + 27b^2 < 0$ (0.75pt)

c) Démontrer que le polynôme $p(x)$ admet deux racines réelles distincte α et β que l'on déterminera telles que $p(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ si $4a^3 + 27b^2 = 0$

B) Dans cette partie $p(x) = x^3 - 2x + 4$

1) Démontre que le polynôme $p(x)$ admet une racine réelle (0.75pt)

2) Soit U et V sont les complexes distincts

a) Démontre que si U et V sont les complexes tels que réels que $U^3 + V^3 = -4$ et $UV = \frac{2}{3}$ alors U+V est une racine de $p(x)$ (0.75pt)

b) En déduire que U^3 et V^3 sont solution de l'équation $x^2 + 4x + \frac{8}{27} = 0$

TC

Problème : **(10pts)**

Le problème compte trois parties A, B et C indépendantes

Partie A : **(3.5pts)**

n est un entier naturel normal, f_n la fonction définie par $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ell nx$

1- Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation (0.75pt)

2- Montrer qu'il existe un unique α_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

3- Démontrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$ et $\ell n\, x_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$ (0.75pt)

4- Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n puis déduire les variations de α_n

5- Démontrer que (α_n) converge et calculer sa limite (0.5pt)

PARTIE B : **(3pts)**

On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 1cm.

On considère dans un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $I(1,\frac{1}{4},0)$, $J(0, \frac{3}{4}, 1)$, $K(\frac{2}{5},0,1)$ M et N sont les points tels que MIB, JHN soient des triangles rectangles isocèles respectivement en B et en H. L un point de (CD) tel que KJLI soit un parallélogramme.

1- Faire la figure (0.5pt)

2- Justifier que (IL) est parallèle à (JK). (0.5pt)

3- a) donner les représentations paramétriques des droites (IL) et (CD)

4- Justifier que (IL) et (AB) sont sécantes et démontrer que leur point d'intersection S a pour abscisse $\frac{17}{15}$ (0.5pt)

5- Donner la nature des triangles ILN et calculer sa surface (0.5pt)

PARTIE C : **(4pts)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, j) soit (e) d'équation $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$

1- Caractériser (e)

2- à chaque point M (x, y) on associe le nombre complexe $Z = x + iy$ affixe de M.

Démontrer que $|Z| = \frac{1}{2}(3 - x)$ (1pt)

3- En déduire que $|Z| = \frac{3}{2+\cos\theta}$ $\theta = \arg(Z)$ (1pt)

4- Soit M' et M'' les points de (e) ayant pour affixes z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$

Calculer $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ en fonction de θ (1pt)