COLLEGE DE LA RETRAITE
Département de Mathématiques
Epreuve : Mathématiques
Examen : BAC BLANC

Série : C
Coef : 5
Durée : 4h

L'épreuve comporte trois exercices et un problème repartis sur trois pages. La qualité de rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat

EXERCICE 1 : 3,5points

1-) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n}(6k-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)$ **0,5pt**

2-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation: $4x^2 = y^2 + 48$ **0,5pt**

3-) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$

a-) Montrer que la suite (u_n) est croissante **0,5pt**

b-) Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties **0,5pt**

c-) Déterminer la limite de u_n **0,25pt**

4-) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a-) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{i(2-z)}{3i-z}\right) \equiv 0[2\pi]$ **0,75pt**

b-) Caractériser la transformation f d'écriture complexe :
$z' = \sqrt{2}(1+i)z + 1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ **0,5pt**

EXERCICE 2 : 3,5points

I-/ Soient E un espace vectoriel a, b$\in\mathbb{Z}$ et $B = (\vec{i}\,;\vec{j})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini $\forall \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par $f(\vec{u}) = (2x + ay)\vec{i} + (bx + 3y)\vec{j}$

1-) Ecrire la matrice de f dans la base B **0,25pt**

2-) Déterminer suivant les valeurs de a et b, le noyau kerf et l'image Imf de f. **1pt**

3-) Pour quelles valeurs de a et b, f n'est pas un automorphisme ? **0,25pt**

4-) On suppose que $ab = 12$ avec $1 < a < b < 5$

Ecrire la matrice M' def dans la base B **0,25pt**

II-/ L'espace affine euclidien est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On considère les points $A(-1\,;1\,;1)$; $B(3\,;1\,;1)$et $C(1\,;1;1+\sqrt{2})$ et la droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}(1;\,-1;3)$

1-) Vérifier que A, B et C sont non alignés et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) **0,5pt**

PARTIE B : 3points

Soient f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 - 4x}$ et h celle définie par $h(x) = -f(x)$. On note (Cf)et (Ch)leurs courbes respectives dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1-a-) Déterminer Df et étudier la dérivabilité de f en 0 et en -4. Interpréter graphiquement les résultats obtenus. **1pt**

b-) En déduire l'ensemble de dérivabilité de f **0,25pt**

2-) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation **1pt**

3-) Construire (Cf)et (Ch)dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. **0,75pt**

PARTIE C : 3points

Soient r le quart de tour direct de centre A et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose S=hor. On désigne par Γ l'image de (C) par r et par Γ' celle de (C) par S

1-a-) Déterminer l'expression analytique de r **0,5pt**

b-) En déduire que Γ est la réunion de (Cf)et de (Ch) **0,75pt**

2-) Vérifier que Γ'=h(Γ) et construire Γ' dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ **0,75pt**

3-) On fait tourner Γ et Γ' autour de l'axe de repère $(O ; \vec{i})$, on obtient respectivement des solides Ψ et Ψ' de l'espace.

a-) Déterminer le volume de Ψ **0,5pt**

b-) En déduire le volume de l'espace intermédiaire entre Ψ et Ψ' **0,5pt**

PARTIE D : 1,5point

On assimile maintenant Ψ à un œuf de poule.

Un fermier élève des poules et des canards dans sa ferme. Il forme n alvéoles d'œufs contenant chacune 20 œufs de poules et 10 œufs de canards de même volume que Ψ et indiscernables à la vue et au toucher pour livrer en fin de semaine dans ses différentes structures. Lors de la livraison, il constate que dans chaque alvéole, un œuf s'est cassé à cause des secousses en route.

1-) Calculer la probabilité P_n pour qu'au moins un œuf de canards soit cassé **1pt**

2-) Déterminer le nombre minimal d'alvéoles pour que $P_n \geq 0,99$ **0,5pt**