Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : Mai 2018
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4h Coefficient : 5

Cette épreuve est constituée de 2 exercices et d'un problème étalés sur 2 pages que chaque candidat traitera obligatoirement.

EXERCICE 1 : 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1-2i,\ z_{A'} = -2+4i,\ z_B = 3-i$ et $z_{B'} = 5i.$

1. **(a)** Placer les points A, A, B dans le plan complexe. **0,25pt**
   Montrer que $ABB'A'$ est un rectangle. **0,5pt**

   (b) Soit S la réflexion telle que $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$. On note Δ son axe.
   Donner une équation de la droite Δ et la tracer dans le plan complexe. **0,5pt**

   (c) On note z' l'affixe du point M' image par S du point M d'affixe z.
   Montrer que $z' = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\bar{z}+2i-1.$ **0,75pt**

2. Soit g l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point P d'affixe z' définie par : $z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\bar{z}+5-i.$

   (a) Déterminer les affixes des points C et D, images respectives de A et B par g. **0,5pt**

   (b) Soit Ω le point d'affixe $1+i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
   Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h. **0,5pt**

   (c) Soit M_1, d'affixe z_1, l'image par h de M, d'affixe z.
   Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1. **0,75pt**

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

   (a) Déterminer l'écriture complexe de f. **0,75pt**

   (b) Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $F(0;3;0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point C du plan tel que $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CF}$. **0,75pt**
2. On considère l'ensemble (E_k) des points M du plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ tels que :
   $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = k\ \|\overrightarrow{MF}\|$ où $k\in\mathbb{R}^*$.
   Discuter suivant les valeurs de k sur la nature de (E_k). **1pt**
3. Pour obtenir les valeurs de k, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 telles que :

L'urne U_1 contient 4 boules portant chacune le nombre 1, 2 boules portant le nombre $\frac{1}{2}$;
L'urne U_2 contient 4 boules portant le nombre 2, 3 boules portant le nombre 1 et 3 boules portant chacune le nombre $\frac{2}{5}$.
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_1 que l'on introduit dans l'urne U_2, puis on tire une boule de U_2 et on donne au nombre porté par cette boule la valeur de k.

(a) Quelle est la probabilité p_1 pour que (E_k) soit une hyperbole ? **0,75pt**

(b) Quelle est la probabilité p_2 pour que (E_k) soit une parabole ? **0,75pt**

(c) On répète 4 fois cette expérience.
Quelle est la probabilité pour que (E_k) soit exactement deux fois une ellipse ? **0,75pt**

PROBLEME : 11 points

A) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : 1cm)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Etudier les variations de la fonction f. **1pt**
2. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$. **0,5pt**
3. Construire la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y^2-x^2=16$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. **1pt**
4. On nomme A et B les points de la courbe $\mathscr{H}$ d'abscisses respectives -3 et 3.
   On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x,y)$ vérifiant :
   $-3\le x\le 3$ et $\sqrt{x^2+16}\le y\le 5$.
   Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale. **0,75pt**

B) 1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. **0,5pt**

2. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x,y)$ par r.
   (a) Donner l'expression analytique de r. **0,75pt**
   (b) Placer les points A' et B', images respectives de A et B par r dans le repère. **0,5pt**
3. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy=8$.
   (a) Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère précédent. **0,5pt**
   (b) Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par r. **0,5pt**
4. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par r. On admet que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2}\le x\le 4\sqrt{2}$ et $\frac{8}{x}\le y\le 5\sqrt{2}-x$. Hachurer $\mathscr{D}'$. **0,25pt**
   Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$ exprimée en cm^2, puis en déduire celle de $\mathscr{D}$ à 10^{-3} près. **1pt**

C) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2e^{1-x}$. (Γ) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Etudier les variations de g et tracer la courbe (Γ). **1,5pt**
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et calculer I_2. **1,5pt**
3. Donner une interprétation graphique de I_2 et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. **0,75pt**