Avant propos

Ce manuel est un simple outil qui ne prétend pas à l'exhaustivité. Nous rappelons à toutes fins utiles qu'il n'est qu'un simple guide. Il existe d'excellents ouvrages sur les Sujets corrigés dans ce support. Les destinataires de ce document sont bien entendu les élèves de la Tle G2, Tle F2, Tle A2 - A1 et Tle D qui ont ce cours de Mathématiques au programme.

Notre souci a été de pouvoir procurer au-delà de leur formation, le maximum de situation de problème type examens, qui leur seront utiles pour la composition du baccalauréat. C'est donc raison pour laquelle vous trouverez une large gamme de sujets, entièrement corrigés et détaillés et des sujets tests également.

Par ailleurs, cet anales ne peut et ne doit en aucun cas remplacer le travail de l'enseignant.

A toi qui t'es procuré ce document ,Que la main de Dieu comble tes efforts , afin que le BAC cette année soit un acquis

Vos remarques et suggestions au 01710371 ou au mail yayooll@yahoo.fr

Sommaire

Comprenez-vous toujours le sens des questions dans les énoncés mathématiques ?

♣ **Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.**

1. Il faut calculer f(0)
2. Il faut résoudre l'équation f(x) = 0
3. Il faut chercher sur la courbe représentative les points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

♣ **Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des ordonnées.**

1. Il faut calculer f(0)
2. Il faut résoudre l'équation f(x) = 0
3. Il faut chercher sur la courbe représentative, les points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

♣ **Déterminer les coordonnées des points d'intersection de deux courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g.**

1. Il faut construire les deux courbes représentatives de f et g et lire graphiquement leur coordonnée.
2. Il faut résoudre l'équation f(x) = g(x).
3. Il faut trouver un nombre dont l'image est la même par f ou par g.

♣ **Déterminer les variations de f.**

1. En étudiant le signe de f(x)
2. En étudiant le signe de f '(x)
3. En utilisant la courbe représentative de f.

♣ **Déterminer le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -3 de la courbe représentative Cf.**

1. Il faut tracer la tangente au point - 3 et déterminer son coefficient directeur avec 2 points de la droite.
2. Le coefficient directeur est le nombre f (-3)
3. Le coefficient directeur est le nombre f '(-3)

♣ **Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 5 de la courbe représentative (C_f)**

1. y = f(5)(x - 5) + f '(5)
2. y = f '(5)x + f(5)
3. y = f'(5)(x - 5) + f(5)

♣ **Déterminer les coordonnées des points de la courbe représentative de f ou la tangente à un coefficient directeur égal à ½.**

1. Il faut résoudre l'équation f(x) =1/2
2. Il faut résoudre l'équation f'(x) =1/2
3. Il faut résoudre l'équation f(x) = x/2

♣ **Etudier la position relative de deux courbes représentatives Cf et Cg de deux fonctions f et g.**

1. Il faut étudier le signe de f(x) - g(x)
2. Il faut résoudre l'inéquation f(x) > g(x)
3. Il faut étudier le signe de f(x) et le signe de g(x).

♣ **Existe –t-il des points de la courbe dont l'ordonnée est 2 ?**

1. Il faut chercher un nombre réel dont l'image est 2.
2. Il faut calculer f(2)
3. Il faut résoudre l'équation f(x) = 2.

♣ **Montrer que la courbe représentative de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

1. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet aucune solution
2. Montrer que la fonction f est strictement positive.
3. Montrer que la droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe.

PLAN D'ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

1. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction numérique f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant :

- *Déterminer l'ensemble de définition* D_f
- *Calculer les limites aux bornes de* D_f
- *Interpréter les résultats des calculs de la limite si possible.*
- *Calculer la dérivée* f'
- *Etudier le signe de la dérivée* f'
- *En déduire le sens de variation de* f
- *Dresser le tableau de variation de* f

2.Plan de représentation d'une fonction

Pour représenter graphiquement une fonction numérique f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant :

- *Tracer les droites et points remarquables*
  - *Axes de symétrie, centres de symétrie*
  - *Tangentes éventuelles*
  - *Asymptotes éventuelles*
  - *Points d'intersection avec les axes des ordonnées ou des abscisses*
  - *Points d'inflexions*
  - *Points anguleux*
- *Positions relatives de la courbe avec les droites remarquables*

- ♣ *Tracer la courbe représentative (C_f) de f, après avoir éventuellement dressé une table de valeurs si utile.*

QCM
Fonction logarithme népérien

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$

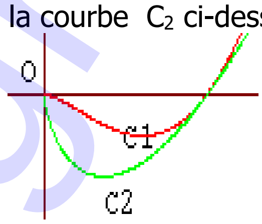
1. Soit les expressions suivantes, où x désigne un réel: $f(x)=\ln(x-2)$, $g(x)=\ln(1+x^2)$ et $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
   - f(x) et g(x) ont un sens pour tout x.
   - h(x) a un sens si $x>0$.
   - f(3) = 0.
   - h(e) = e.
   - pour tout $x>2$, on a : $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ln\dfrac{x-2}{1+x^2}$.
2. Simplifier des écritures
   - $\ln 2+\ln\frac{1}{2}-\ln(e^{-2})=2$.
   - $\ln(3^2)+\ln 3-\ln\sqrt{3}=2\ln 3$.
   - $\dfrac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})}-\ln 2e=1-\ln 2$.
   - $\ln 125-\ln 81-\ln\frac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=4\ln 5-\ln 3$.
   - $\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}]+\ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]=0$.
3. l'équation ou l'inéquation …
   - $\ln(x+1)=\ln(2x+3)$ a pour unique solution -2.
   - $(x+2)\ln(x+2)=0$ a pour unique solution -
   - $\ln\dfrac{x+1}{x-3}\geq 0$ a pour ensemble solution $S=]3;+\infty[$.
   - $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$ a pour unique solution e^3.
   - $\ln(2-x)+1\geq 0$ a pour ensemble solution $S=]-\infty;2[$.
4. **Calcul de limites**
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^3)=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=0$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=+\infty$
5. Calcul de dérivées
   - $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}+\ln x$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=\dfrac{1+x}{x^2}$.

- $f : x \mapsto x\ln x - x$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \ln x$.
- $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
- $f : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2)$ définie sur $]-\infty;-2[$ et $]1;+\infty[$ est dérivable sur ces intervalles et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.
- $f : x \mapsto \ln\dfrac{x+1}{x+3}$ définie sur $]-\infty;-3[$ et $]-1;+\infty[$ est dérivable sur ces intervalles et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$.

6. Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$
   - f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et f′(x) a le signe de $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.
   - sur $]0;+\infty[$ g′ a le signe de x-1.
   - sur $]0;+\infty[$ g admet un maximum égal à 3.
   - f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
   - l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[1;2]$.
7. Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0.$
   - f n'est pas dérivable en 0.
   - la courbe de f admet à l'origine du repère une demi-tangente verticale.
   - le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{e^{-1}}{2}$	↗	$+\infty$

8. la courbe de f a l'allure de la courbe C_2 ci-dessous.



9. Soit f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$ et (C) sa courbe représentative.
   - Les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ sont asymptotes à (C).
   - (C) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
   - Une équation de la tangente à (C) en A est $y = x - 2$.
   - Pour tout x de $]0;1[$ on a $f(\dfrac{1}{2} + x) = f(\dfrac{1}{2} - x)$.
   - Le point A est un centre de symétrie pour (C).

10. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\ln x}$ et D son ensemble de définition.

- $D =]0;+\infty[$
- Pour tout x de D: $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.
- f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

11. Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

- La courbe de f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Pour tout x de ℝ $f'(x) = \dfrac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.
- Pour tout x de $[0;1]$ on a $f(x) \geq 0$.
- L'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $[0;1]$.

Qcm

Fonction Exponentielle népérienne

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$

1. Simplifier des écritures

$1.\ e^{\ln 2}.\ e^{\ln 5}=7$.

$2.\ e^{-\ln 3}=3$.

$3.\ e^{\frac{1}{2}\ln 8}=2\sqrt{2}$.

$4.\ e^{-3\ln\frac{1}{2}}=8$.

$5.\ \dfrac{e^{2+\ln 32}}{e^{3+\ln 8}}=4e$.

2. Résolution d'équations ou d'inéquations

$1.\ e^{x}=7$ a pour unique solution $x=\ln 7$.

$2.\ e^{2x}+1<0$ n'a pas de solution.

$3.\ e^{-x+2}=e^{2x-1}$ a pour unique solution $x=1$.

$4.\ e^{2x}-5e^{x}+6=0$ a pour ensemble solution $S=\{0;\ \ln 6\}$.

$5.\ e^{x+1}\geq\dfrac{2}{e^{x}}$ a pour ensemble solution $S=[\ \dfrac{-1+\ln 2}{2};\ +\infty\ [$.

3. Calcul de limites

$1.\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$.

$2.\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x}=0$.

$3.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=+\infty$.

$4.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-3}{e^{2x}+1}=1$.

$5.\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+x)=0$.

4. Calcul de dérivées

$1.\ f:x\mapsto xe^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=e^{x}$.

$2.\ f:x\mapsto e^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=2xe^{2x}$.

$3.\ f:x\mapsto\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ définie dans $\mathbb{R}-\{0\}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$.

$4.\ f:x\mapsto\sqrt{1+e^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

5. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}$.

6. $f : x \mapsto \ln\dfrac{1}{e^x+2}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = \dfrac{-e^x}{e^x+2}$.

5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x} - 1$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)e^{2x}$.
- f est croissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

6. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C) la courbe de f.

- Le point A(0;1) est un centre de symétrie pour (C)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
- le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

- Une équation de la tangente à (C) en A(0;1) est $y = 4x + 1$.

7. Soit f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = e^{-x}\sin x$ et (C) sa courbe représentative.

- Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$.
- Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.
- Une équation de la tangente à (C) à l'origine O est $y = x$.
- Pour tout x de $[0;2\pi]$ la courbe (C) est située entre la courbe de $g : x \mapsto e^{-x}$ et la courbe de $h : x \mapsto -e^{-x}$. (C) et la courbe de g ont un unique point commun d'abscisse π.

8. Soit la fonction f définie sur $]-\infty;\ 1\ [$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

- $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

- Pour tout x de $]-\infty;\ 0\,[$, $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}\ \dfrac{x}{2(x-1)}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
- Pour tout x de $]-\infty;\ 1\,[$ $f'(x)=\dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.
- f admet en 0 un minimum égal à $\dfrac{1}{2}$.

9. Soit les fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$
   - La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
   - Pour tout x de ℝ $f'(x)=(x^2-1)\ e^{-x}$.
   - Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0

   - Sur l'intervalle $]-1;0[$ la courbe de f est au-dessus de celle de g.
     Au point A(0;1) les tangentes aux courbes de f et g sont orthogonales.

10. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(x+1)\ e^{\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.
    - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
    - Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable et $f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$.
    - Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\ e^{\frac{1}{x}}$.
    - f est dérivable en 0.
    - La courbe de f admet à l'origine O du repère une demi-tangente horizontale.

1ère partie
Etude des fonctions logarithmes neperiens
Problèmes résolus

PROBLEME 1

- Extrait bac blanc régional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série G2

PARTIE A

Soit f une fonction définie sur R par $f(x) = \ln(x) - 1$

On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

1. a. Calculer f'(x) $\forall x \in]0;+\infty[$

b. Etudier les variations de f

c. Calculer f(e)

2. a. Dresser le tableau de variation de f (on ne calculera pas les limites)

b. Justifier que $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[, f(x) \prec 0 \\ \forall x \in]0;+\infty[, f(x) \succ 0 \end{cases}$

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique 2cm. On considère la fonction g, de représentation graphique (Cg) définie par : $\begin{cases} g(x) = x\ln x - 2x \quad \forall x \in]0;+\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$

1. a. Etudier la continuité de g en 0.

b. Etudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter le résultat

c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter ce dernier résultat.

2. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

a. Justifier que $g'(x) = f(x)$

b. En déduire les variations de g

c. dresser le tableau de variation de g

3. a. Justifier que l'équation $g(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $]e;+\infty[$

b. Calculer $g\left(e^2\right)$ et interpréter graphiquement le résultat $]e;+\infty[$

4. Tracer la représentation graphique (Cg) de g

PROBLEME 2

PARTIE A : Etude du signe de $g(x)=x^3-1+2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$. *(ln x désigne le logarithme népérien de x)*

1. Calculer g'(x) et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées). Calculer g(1).
3. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$.On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(unités :3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (C).
Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

1.c .Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

1.d. En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de f '(x), puis dresser le tableau de variation de f.

1.e .Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C).
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

1.f. Tracer dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C) et les droites (D).

2.a Montrer que la fonction H définie par : $H(x)=\frac{-1}{x}(1+\ln x)$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

2.b. Soit (A) le domaine plan limité par (D), (C) et les droites d'équation x = 1 et $x=\sqrt{e}$ Hachurer (A) calculer la valeur exacte de l'aire, en cm², de (A); en donner une valeur approchée au mm²

PROBLEME 3 : *(Extrait devoir commun tle g2 I.S.T.A.S mars 2012)*

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-5+5\ln x$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).

2.a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1;5]$.On note α cette solution .

b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α .

3. Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x-5)\ln x}{x}$. On peut donc aussi écrire :

$f(x)=\frac{1}{x}(x-5)\ln x$ ou encore $f(x)=\ln x-\frac{5\ln x}{x}$.

1. a . Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat .
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2.a. Soit $f\,'$ la fonction dérivée de f . Calculer $f\,'(x)$.
   b. Montrer que $f\,'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f\,'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. On désigne par *C* la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm .
   a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1 .
   Donner une équation de la droite *D* tangente en A à la courbe *C* .
   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de *D* et de l'axe des ordonnées.
   b. Tracer la droite *D* et la courbe *C*

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x-\dfrac{5}{2}(\ln x)^2$.
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .
2. a . Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe *C* , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
   b. Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm² de l'aire du domaine .
   c. Calculer la valeur exacte ,en cm² de $A=-4\left[F(e)-F(1)\right]$.

PROBLEME 4

- *Introduction d'inconnues réels pour la détermination de l'expression de la fonction principale*

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer g'(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$

1. on désigne par f ' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer f '(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Sachant que la courbe C_f passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f\,'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. En déduire le signe de f(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x-1$.
   a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C_f.
   b. Etudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite D.
   c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

PARTIE D : CALCUL D'AIRE

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation x = 1 et x = e.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer H'(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. Calculer A. Donner la valeur de A , arrondie au mm².

PROBLEME 5

- *Introduction d'inconnues réels pour la détermination de l'expression de la fonction principale*

PARTIE A

Soient a et b deux nombres réels. On note I l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par : $f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées (1 ; -3). Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe C_f passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b) Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de I, on a $f(x) = x\left(x - \frac{4}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right)$.
   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.
4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.
5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1;2]$.
6. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par : $H(x) = x\ln x - x$.

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.
3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm².

PROBLEME 6

- Introduction d'inconnues réels pour la détermination de l'expression de la fonction principale

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A: RECHERCHE D'UNE FONCTION

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$, où a, b et c sont trois réels. Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C (e^2 ; 0).

PARTIE B: ETUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$.

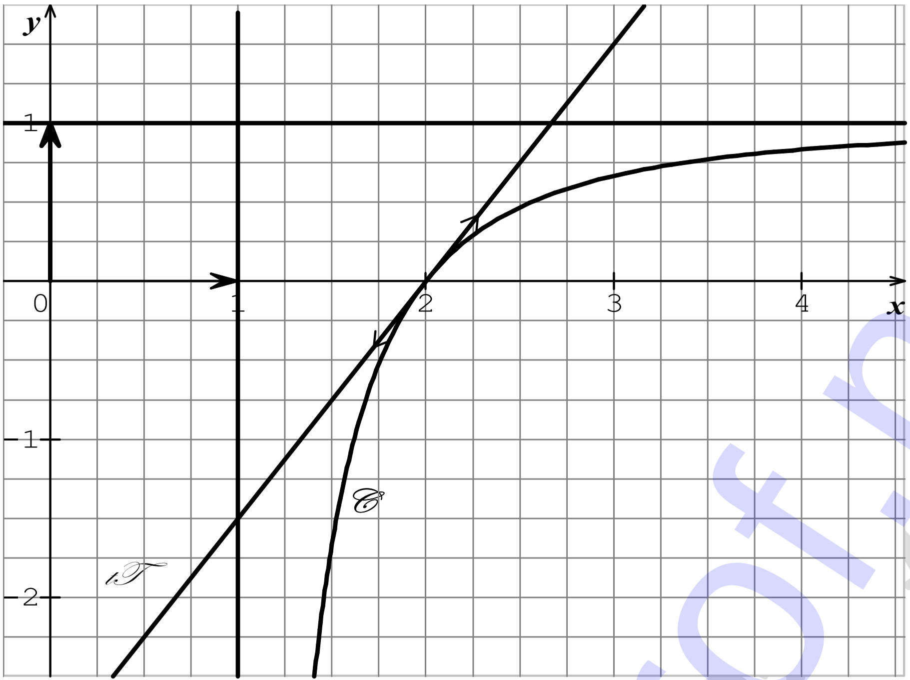
1. a. Calculer la limite de f en 0.
   b. Calculer la limite de f en +∞. On pourra remarquer que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\ln x(\ln x-3)+2$
2. a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x}$ où f ′ désigne la fonction dérivée de f.
   b. Etudier le signe de f′(x) selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. a. Résoudre dans ℝ l'équation d'inconnue X : $X^2-3X+2=0$.
   b. En déduire les solutions exactes dans $]0;+\infty[$ de l'équation : f(x) = 0.
   c. Déduire, des questions 2.c. et 3.b, le signe de f(x) lorsque x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente (Δ).
5. Soit H la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$ .Calculer $H'(x)$ et conclure
6. calculer le nombre $A=H(e^2)-H(e)$.

PROBLEME 7

- Lecture graphique et Etude de fonction

PARTIE A

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (C) d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(0;-3)$. La droite (D) a pour équation $y=1$.



1.a. Déterminer graphiquement g (2).

b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement g' (2).

c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe (C). Déterminer graphiquement la limite de g (x) quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point. Etudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$; $g_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 - x}$ et $g_3(x) = \ln(x-1)$. L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$, $g_3(2)$. Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g_3(x)$. Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g'_1(2)$, $g'_2(2)$ puis conclure.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$.

On note (C_f). la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

1.a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$?

b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

2.a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifiez que la droite (Δ) d'équation y = x + 1 est asymptote oblique à la courbe (C_f).

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} > 1$. Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$?

d. En déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ)

3.a. Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, f ' (x) = g (x) où g est la fonction trouvée dans la partie A.

b. à l'aide des résultats graphiques obtenus dans la partie A, dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie C

1°/Montrer que, sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction H définie par :H(x) = x ln x - (x - 1) ln (x - 1) est une primitive de la fonction h définie par h(x) = ln x - ln (x - 1) sur cet intervalle.

2.a. Construire la courbe (C_f), la droite (Δ) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (Δ) ,la courbe (C_f) et les droites d'équation x = 2 et x = 3.

b. On désigne par A la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de A puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

PROBLEME 8

Partie A Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$,puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$.On appelle ($C_f$) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0; on remarquera que : $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$ .Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$

Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation f(x) = x.

4. Tracer (C_f) et la droite d'équation y = x.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm². On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm² près

PROBLEME 9

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm). Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}$ puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-4+2\ln x$.

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g.(On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$.)
3. a. Démontrer que sur l'intervalle $[1;2]$ l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique α.

   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de g(x) suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

II) Etude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2. a . Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Démontrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe C_f ?.

   c . Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C_f et à la droite D.

   d . Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D.

3. Etude des variations de f.

a . Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f . Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.

b . En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f

4. On note T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse e^2. Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.

5. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C_f à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha)=1,25$)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction H par : $H(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Soit E la région du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1et x= e.

   a. Hachurer la région E sur votre figure.

   b . On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E. Déterminer la valeur exacte de S.

   c . Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

PROBLEME 10

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; $+\infty$ [par : $g(x)=\ln x-1-\dfrac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$. Etudier son signe sur] 0; $+\infty$ [.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ le signe de g(x).

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $f(x)=-9x+5-\dfrac{2\ln x}{x}$ .On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4.soit (Δ) la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur]0;+∞[par $\mathrm{h(x)=f(x)-(-9x+5)}$.

a. Démontrer que Δ est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ

c. Etudier la position relative de C et Δ sur]0 ; +∞[

5. a. Calculer f ′(x) pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$. f ′ est la fonction dérivée de la fonction f

b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: f ′(x) = $\frac{2g(x)}{x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8. Démontrer qu'il existe un seul réel Δ de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Donner un encadrement de Δ d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $h(x)=(\ln x)^2$

1.On désigne par h′ la fonction dérivée de la fonction h. Calculer h′(x) pour tout réel x de l'intervalle]0;+∞[.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle] 0;+∞ [.

3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C ,l'axe des abscisses et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1):x=1$ et $(d_2):x=e$.

4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².. Donner la valeur exacte .

PROBLEME 11

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par : $g(x)=\ln x-2x^2-1$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$. Etudier son signe sur] 0; + ∞ [.

2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en +∞).

3. En déduire pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ le signe de g(x).

PARTIE B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $f(x)=-2x+1-\frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm .

1. Calculer f (1).

2. Calculer $\lim_{x\to0^+}f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

4.Démontrer que la droite D d'équation $y=-2x+1$ est asymptote à la courbe C.

5. Etudier la position relative de C et D sur]0 ; +∞[

6. Calculer f ′(x) pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$. f ′ est la fonction dérivée de la fonction f

Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0;+∞[.

7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.

8. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

PARTIE C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par $\mathrm{h(x)}=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

1.On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer h'(x) pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x = 1$ et $(d_2): x = e$.

4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².Donner la valeur exacte .

PROBLEME 12

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction *f.*

1. Etudier les limites de *f* en 0 et en + ∞ (pour cette dernière on pourra remarquer que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$

b. En déduire le sens de variation de *f*. Dresser le tableau de variation de *f.*

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2.

Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2. vérifier que Δ_2 passe par O.

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit *f*'' la fonction dérivée de f ' : calculer f ''(x) pour *x* appartenant à $]0;+\infty[$.

Déterminer le réel x_4 qui annule f ''(x) . On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4.

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2,M_3,M_4 dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^2$. Calculer la dérivée de *g.*

En déduire une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$,après avoir remarqué que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{e}$ et *x* = 2. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².

PROBLEME 13

- *Etude d'une fonction ln définie par raccordement*
- *Extrait bac D session 2010*

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x\ln x$

1-a) Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$

b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g)

2-En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\forall x \in]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentation de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(Unité : 4cm).

1-a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$

d) Démontrer que : (C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$ et (C) est au-dessus de (T) sur $]1;+\infty[$

1- Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$

2- a) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)}$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4-Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C

1-a) Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \leq 1$

b) Démontrer que : $\forall x \in [1;e], 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

2-Soit (A) l'aire en cm de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

PROBLEME 14

PARTIE A

Le plan est muni d'un repère orthormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm sur les axes . On s'intéresse dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - x + 2$. On note C sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

<u>Partie B</u>

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 .Interpréter graphiquement cette limite .

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. Justifier que la droite D d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe C .

d. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D .

2. a . Montrer que pour tout appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Etablir le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe *C* tel que la tangente en ce point soit Parallèle à l'asymptote *D* .

   b. Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe au point d'abscisse e .

4. a Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.

   On appelle B le point d'abscisse α .

   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α .

   c. Montrer que, sur l'intervalle $[2;3]$ l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée β.

   d. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution β

5. Dans le repère $]0;+\infty[$, voir annexe placer les points A et B puis tracer les droites *D* , T .

Partie C : Calcul d'une aire

Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par $h(x)=(\ln x)^2$.

1. Calculer $h'(x)$, où h'désigne la fonction dérivée de la fonction h .

   En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

2.On considère le domaine du plan S délimité par la droite d'équation x = 1, la droite d'équation $x=\sqrt{e}$, la courbe C et la droite D. Calculer, en unités d'aire puis en cm², la mesure de l'aire du domaine S.

PROBLEME 15

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=-4\ln x+x^2+6$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $g'(x)=0$ a une seule valeur $x=\sqrt{2}$ sur I.

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I,et en déduire le tableau de variation de la fonction g

2. a. Calculer la valeur exacte de $g\left(\sqrt{2}\right)$.

   b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

3.soit (Δ) la droite d'équation $y=\dfrac{x}{4}$.

   a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C.

   b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et (Δ)

   c. Etudier la position relative de C et · sur] 0 ; +∞ [

4.

   a. Calculer f '(x) pour tout $x\in]\,0\,;+\infty[$. f ' est la fonction dérivée de la fonction f

b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: f ′(x) = $\frac{g(x)}{4x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

6. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7. Démontrer qu'il existe un seul réel · de l'intervalle $[1;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.

à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse donner une valeur approchée de · à 10^{-3} près.

Partie C :

Soit k la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $k(x)=(\ln x)^2$

1. On désigne par k′ la fonction dérivée de la fonction k.
Calculer k ′(x) pour tout réel x de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. On rappelle que $h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$

En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle] 0 ; +∞ [qui s'annule quand x vaut 1 .

3. à l'aide des questions précédentes déterminer une primitive F de f sur l'intervalle] 0 ; +∞ [
Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , la droite (··· et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x=\sqrt{e}$ et $(d_2): x=e$.

4. Calculer le nombre $A=8\times[H(e^2)-H(\sqrt{e})]$. Donner la valeur exacte .

PROBLEME 16

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2+\ln x}{x}$

Partie A

1. Il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C . Le prouver par le calcul.

2. a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la page 3. a) Prouver que, pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que f ' (x) s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$.

c) Etablir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

d) Tracer La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B

1.Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+2}{x}$ et H . la courbe représentative de g .

a) Etudier rapidement la fonction g sur $]0;+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .

2. a) Calculer f (x) ··g(x) et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Etudier la position relative des deux courbes C et H .
Placer le point K et construire la courbe H dans le repère précédent.

Annexe problème

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$											

$f(x)$											

Résolution des Problèmes ln

PROBLEME 1

- Extrait bac blanc régional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série G2

PARTIE A : $f(x) = \ln x - 1$

1. **a. Calcul de** $f'(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{1}{x}$

b. Etude des Variations de f

Signe de f. $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) \succ 0$

Sens de variations : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

c. Calcul de f(e)

$f(e) = \ln e - 1 = 0$

2. **a. Tableau de variation de f**

	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f'(x)$		0 ↗	

b. Signe de f

$\forall x \in]0;e[$, 0 est le Maximum de f sur $]0;e[$ alors $f(x) \prec 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

$\forall x \in]e;+\infty[$, 0 est le minimum de f sur $]0;e[$ alors $f(x) \succ 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

$\forall x \in \{e\}, \quad f(x) = 0$

PARTIE B

1. **a. Continuité de f en 0**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} g(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} (x\ln x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} (x) = 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} g(x) = g(0) = 0$ alors g est continue en 0.

b. Dérivabilité de g en 0.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} \frac{(x\ln x - 2x) - 0}{x-0} \\ &\lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} (\ln x - 2) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ g n'est donc pas dérivable en 0}$$

Interprétation : (C_g) admet une demie tangente d'équation x=0 au point d'abscisse 0.

c. Calcul de limites

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - 2x) = \lim_{x\to+\infty} [x(\ln x - 2)] = +\infty \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x\ln x - x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$$

Interprétation : (C_g) admet une Branche Parabolique de direction (OJ)

2.a. vérifions que $g'(x) = f(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = (x\ln x - 2x)'$

$$= \ln x + \frac{1}{x}x - 2$$

$$g'(x) = \ln x - 1 = f(x)$$

Signe de g(x)

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x)$ est du signe de $f(x)$.D'après la partie A question 2b. On a :

$\forall x \in \left]0;e\right[,\ g'(x) \prec 0$ sur $\left]0;+\infty\right[$

$\forall x \in \left]e;+\infty\right[,\ g'(x) \succ 0$ sur $\left]0;+\infty\right[$

b. Variations de g

Sens de variations

$\forall x \in \left]0;e\right[, g(x)$ est strictement décroissante sur $\left]0;e\right[$

$\forall x \in \left]e;+\infty\right[, f(x)$ est strictement croissante sur $\left]e;+\infty\right[$

Tableau de variations

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	|| $-$		$+$
$g(x)$	$0 \searrow$	$-e$	$\nearrow +\infty$

3.a. unicité de la solution de l'équation $g(x)=1$

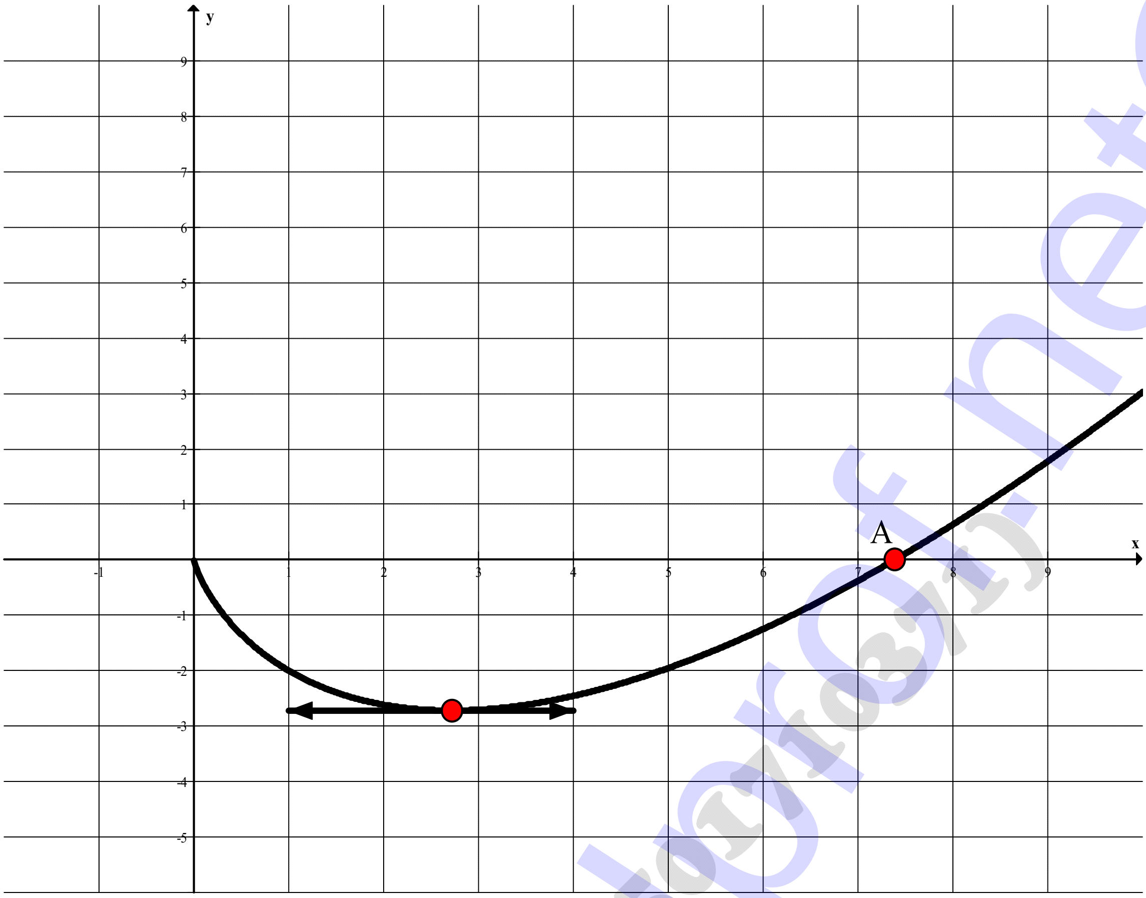
$\forall x \in \left]e;+\infty\right[, g(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]e;+\infty\right[$, elle réalise donc une Bijection de $\left]e;+\infty\right[$ sur $g\left(\left]e;+\infty\right[\right)=\left]-e;+\infty\right[$ .On a $1 \in \left]e;+\infty\right[$ par conséquent, l'équation $g(x)=1$ admet une solution unique $\alpha \in \left]e;+\infty\right[$ tel que $g(\alpha)=1$

b. Calcule de $g(e^2)$

$$g(x)=e^2\ln e^2-2e^2=2e^2-2e^2=0 \Rightarrow \quad g(e^2)=0$$

Interprétation : (C_g) coupe l'axe des abscisses au point $A(e^2;0)$

4. Représentation graphique de (C_g)


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x
A

PROBLEME 2:

Partie A : Etude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$	

1. La fonction g est dérivable sur]0 ; + ∞[: $g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x}$

donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2. Tableau de variation de la fonction g.

3. $g(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.

4. Si $x \leq 1$, alors $g(x) \leq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \leq 0$.

Si $x \geq 1$, alors $g(x) \geq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \geq 0$.

conclusion : sur $]0;1]$, $g(x) \leq 0$ et sur $[1;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	1	1	$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖ −	0	+

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

1.a $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} x - 1 = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$. et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = (-\infty)\times(+\infty) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$

De la dernière limite,on en déduit que la droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe (C).

1.b $f(x) - (x-1) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$;donc la droite (D) d'équation y = x · 1 est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$ .Il y a une autre asymptote à la courbe(C) (voir 1.a.) ,c'est la droite d'équation x = 0.

1.c $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$; $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$;

$f'(x) = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ −	0	+
$f(x)$	‖ ↘	0	↗

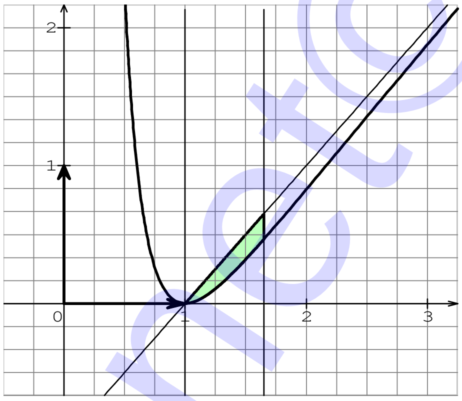
1.d f '(x) est du signe de g(x) car $x^3 > 0$ sur]0 ; + ∞[et le signe de g(x) a déjà été trouvé à la partie A : f (1) = 0

1.e Soit x l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (D) et de la courbe (C) , on a : f(x) = x · 1 soit ln x = 0,par conséquent x = 1. L'ordonnée de ce point est f(1) = 0.

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées (1 ; 0) . $f(x) - (x-1)$ est du signe de - ln x **(voir Partie B 1 .b)**

<u>Etudions le signe de · ln x :</u>

· ln x ≥0 si ln x ≤0 soit ln x ≤ ln 1 d'où x ≤1 sur]0 ; 1] , · ln x ≥0 donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur [1 ;+ ∞[, · ln x ≤0 donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)



1.f voir graphique

2.a pour tout réel x on a :

$H'(x) = \frac{1}{x^2}(1+\ln x) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$ donc H est une primitive de la fonction h définie sur]0 ; + ∞[

2.b Soit · le domaine plan limité par (D), (C) et les droites d'équation x = 1 et $x=\sqrt{e}$. Sur $\left[1;\sqrt{e}\right]$ la courbe (C) est au dessous de (D) donc l'aire du domaine · limité par (D), (C) et les droites d'équation : x = 1 et $x=\sqrt{e}$ est en unité d'aire :

$\int_1^{\sqrt{e}}[(x-1)-f(x)]dx = \int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx = [H(x)]_1^{\sqrt{e}} = H(\sqrt{e}) - H(1)$.

$H(\sqrt{e}) = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\ln\sqrt{e}\right) = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\ln e\right) = \frac{-3}{2\sqrt{e}}$ $H(1) = -(1+\ln 1) = -1$,

donc $\int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx = \left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)\text{u.a} = \left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)\times 6 = 6 - \frac{-9}{\sqrt{e}}$ cm². on trouve en arrondissant au mm² : 0,54 cm².

PROBLEME 3

Partie A

1. g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$. $x+5>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .donc $g'(x)>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et par conséquent la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

2.a . la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .elle est strictement croissante sur $[1;5] \subset]0;+\infty[$ et on a : $g(1) = 1-5+5\ln 1 = -4 < 0$ et $g(5) = 5-5+5\ln 5 = 5\ln 5 > 0$

$0 \in [g(1); g(5)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha)=0$ et $\alpha \in [1;5]$.

b. à l'aide de la calculatrice on lit : $g(1,87) = -0,0003 < 0$ et $g(1,88) = 0,036 > 0$, donc $1,87 \le \alpha \le 188$.

3. signe de $g(x)$

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

PARTIE B

1.a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-5) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, donc par produit des limites on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

On déduit que la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\ln x}{x} = 0$ par différence des limites on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a . f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 5\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{x-5+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$

x	0 α $+\infty$

$f'(x)$		$-$ 0 $+$
$f(x)$		$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$

3.a. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 1

Equation de la tangente en A à la courbe C est : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=\dfrac{g(1)}{1^2}=g(1)=1-5+5\ln 1=-4$ et $f(1)=\dfrac{(1-5)\ln 1}{1}=0$ D : $y=-4(x-1)+0=-4x+4$.

Coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée à l'origine

On pose $x=0$ donc $y=4$ et on a : $(0;4)$.

b. graphique

PARTIE C

1. $F(x)=x\ln x-x-\dfrac{5}{2}(\ln x)^2$. F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a : $\left(u^2\right)'=2u'u$, donc

$$F'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1-\frac{5}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\ln x=\ln x+1-1-5\frac{\ln x}{x}=\ln x--5\frac{\ln x}{x}=f(x)$$

Donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f.

2.a . voir figure

b. Soit E le point de coordonnées (e ; 0) et F celui de coordonnées (e ; -1) et G (1 ;-1)

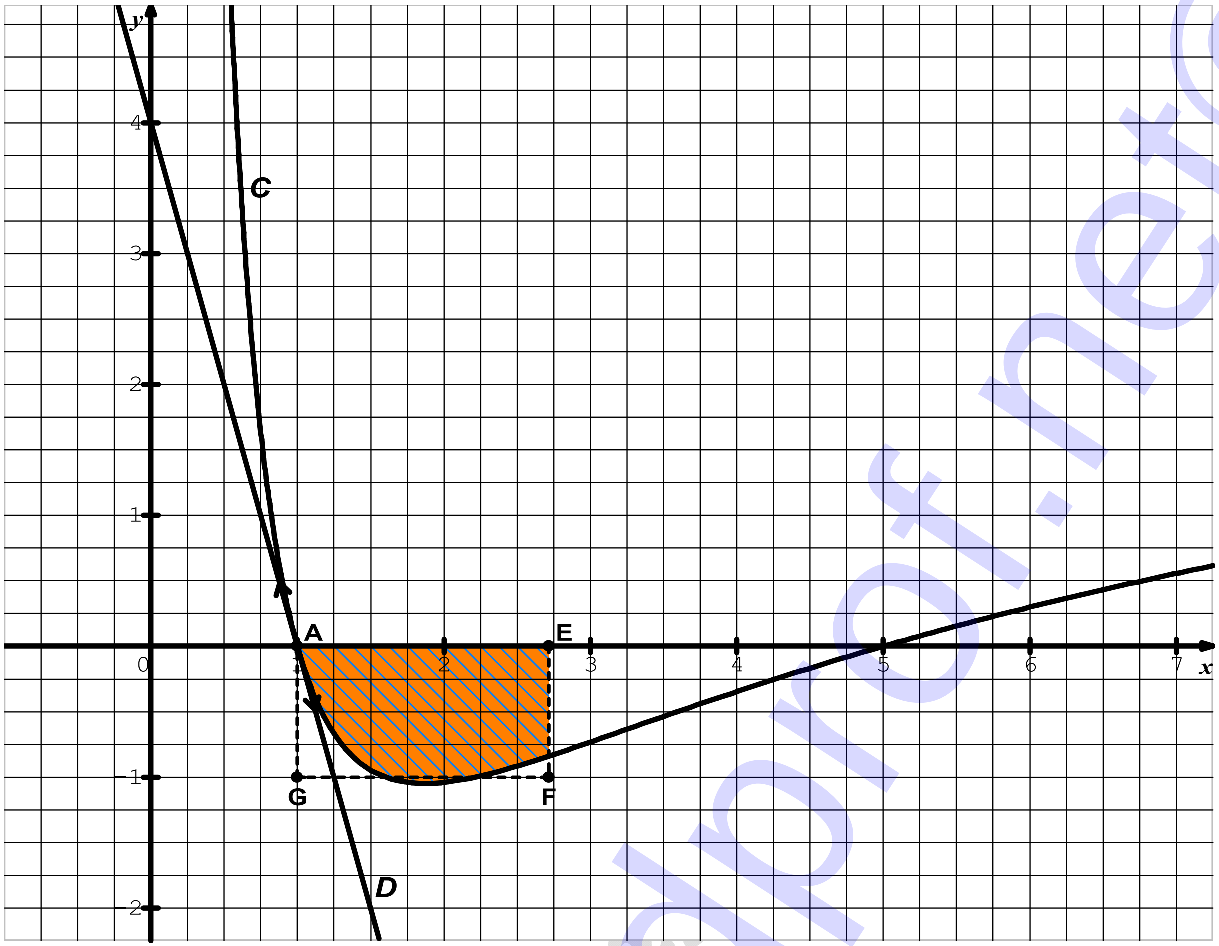
l'aire du rectangle AEFG vaut en unité d'aire : $A=L\times l=(e-1)\times 1=(e-1)u.a$ or l'unité d'aire vaut $u.a=2\times 2=4cm^2$, donc l'aire du rectangle AEFG est égale $A=4(e-1)\approx 6{,}8cm^2$.

c. La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;e]$

Donc $A=\left(-\int_1^e f(x)dx\right)u.a=4\left(-\int_1^e f(x)dx\right)=-4\left[F(e)-F(1)\right]cm^2$.

$$F(e)=e\ln e-e-\frac{5}{2}(\ln e)^2=e-e-2{,}5=-2{,}5 \text{ et } F(1)=1\times\ln 1-1-\frac{5}{2}(\ln 1)^2=0-1-0=-1$$

Donc $A=-4\left[F(e)-F(1)\right]=-4(-2{,}5+1)=-4\times(-1{,}5)=6cm^2$



PROBLEME 4:

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$

par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1. $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$, pour $x\in]0;+\infty[$; $2x^2+1>0$ et $\frac{1}{x}>0$, donc $g'(x)>0$. on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. $g(1)=1^2-1+\ln 1=0$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 on en déduit le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

Partie B

1. $f'(x)=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, f(1) = 0

et f '(1) = 0 soit : $f(1)=0\Leftrightarrow a+b-\frac{\ln 1}{1}=a+b=0$; $f'(1)=a-\frac{1-\ln 1}{1^2}=a-1=0$

Donc $a=1$ et $b=-1$ et enfin $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

Partie C : Etude de la fonction **f**

1. a. $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln x\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$,la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. a. $f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

b. f '(x) est du signe de g(x) sur]0 ; + ∞[, on en déduit les variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on f(x) ≥0 pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; + ∞[.

3. On considère la droite D d'équation y = x - 1.

a. $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

donc la droite d'équation y = x - 1 est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b. Etudions le signe de $f(x)-(x-1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :

$-\ln x>0$ équivaut à $\ln x<0$ ou encore $\ln x<\ln 1$ soit $x<1$:

si $x<1$ alors $f(x)-(x-1)>0$ donc sur l'intervalle]0 ; 1 [, la courbe C est au dessus de l'asymptote D.

si $x>1$ alors $f(x)-(x-1)<0$ donc sur l'intervalle]1 ; + ∞[,

la courbe C est au dessous de l'asymptote D.

Si x = 1, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées (1; 0)

c.

Partie D : Calcul d'aire

1. a. $H(x)=(\ln x)^2$: $H=u^2$ avec $u=\ln x$ et $u'=\frac{1}{x}$,

$H'=2u'u$ et on a : $H'(x)=\frac{2\ln x}{x}$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; + ∞[est la fonction F définie par : $F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$

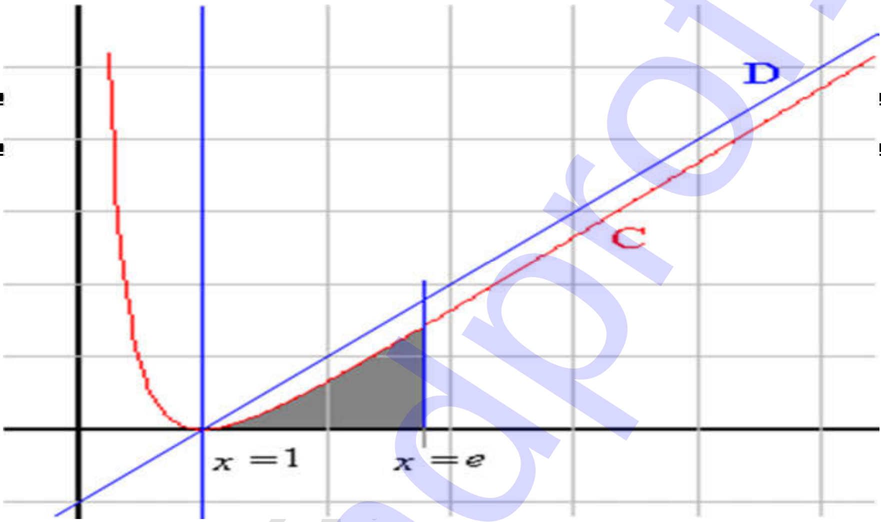
2. a. b.

$$S=\int_1^e f(x)dx=[F(x)]_1^e=\left[\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\text{u.a}$$

$$1\text{u.a}=4\text{cm}^2\Rightarrow A=4\left(\frac{e^2}{2}-e\right)=(2e^2-4e)\text{cm}^2$$

PROBLEME 5:

Partie A :



$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$

Déterminons les valeurs de a et de b tels que la courbe C d'équation y=f(x) passe par A(1;-3) et que la tangente à C en A soit parallèle à l'axe Ox.

On doit avoir : $f(1) = -3$ et $f'(1) = 0$. Or $f'(x) = 2x + a - \frac{2}{x}$

On en déduit : $f(1) = 1 + a + b - 2\ln 1 = a + b - 1 = -3$ donc : $a + b = -4$ $f'(1) = 2 + a - \frac{2}{1} = a = 0$

donc : $a = 0$ et $b = -4$. La fonction f cherchée est donc définie par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

Partie B :

1.a) On a clairement : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - 4\right) = -4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ .On en déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0 (l'axe Oy est asymptote à C).

2.a)Vérifier pour $x > 0$: $f(x) = x\left(x - \frac{4}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{4}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On peut écrire : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de f′(x). Tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	-3	↗	$+\infty$

4.Signe de f(x) lorsque $x \in [1;2]$.

On sait que $f(1) = -3$. Par ailleurs $f(2) = 2^2 - 4 - 2\ln 2 = -2\ln 2$.

Donc $f(2) < 0$.La fonction f étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle$[1;2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5.Courbe C.

Partie C. Calcul de H′(x). On a : $H(x) = x\ln x - x$. Donc : $H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

En déduire une primitive de f sur I. Une primitive de f sur I est définie par :

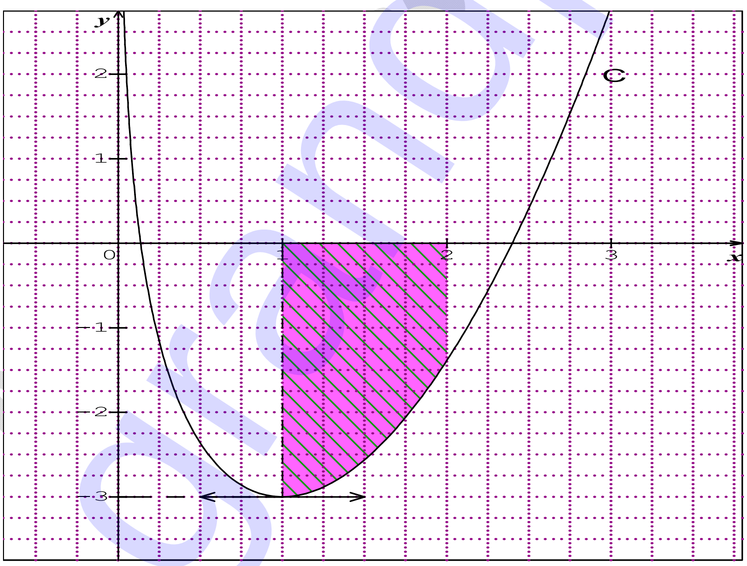
$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2(x\ln x - x)$ ou encore : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - 2x\ln x$

Calcul de l'aire de Δ. La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1;2]$,

L'nité d'aire vaut 4 cm² Donc on peut écrire que cette aire est donnée

par : $\text{Aire}(\Delta) = 4 \times \left(-\int_1^2 f(x)dx\right) = 4 \times \left[-F(x)\right]_1^2 = 4 \times \left[F(1) - F(2)\right]$ Donc : $F(1) = \frac{1}{3} - 2 - 2\ln 1 = -\frac{5}{3}$ et

$F(2) = \frac{8}{3} - 4 - 4\ln 2$, donc $\text{Aire}(\Delta) = 4 \times \left[F(1) - F(2)\right] = 4 \times \left(-\frac{5}{3} - \frac{8}{3} + 4 + 4\ln 2\right) = 4\left(4\ln 2 - \frac{1}{3}\right) = 16\ln 2 - \frac{4}{3} \approx 9{,}75\text{cm}^2$.



PROBLEME 6

Partie A

$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$

$A \in \mathscr{C}$, donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de g :

$g(1) = a(\ln 1)^2 + b\ln 1 + c = 2$; $\ln 1 = 0$, donc $c = 2$, de même $B \in \mathscr{C}$, on a :

$g(e) = a(\ln e)^2 + b\ln e + c = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0$, puisque $\ln e = 1$

$C \in \mathscr{C} \Rightarrow g(e^2) = a(\ln e^2)^2 + b\ln e^2 + c = 0 \Rightarrow a(2\ln e)^2 + 2b\ln e + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 2 = 0$

On doit résoudre un système d'équation linéaire à deux inconnues : $\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -3$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$

1.a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left((\ln x)^2-3\ln x+2\right)$ or $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ d'où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln x)^2=+\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-3\ln x=+\infty$

Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x\left((\ln x)-3\right)+2$; $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\left((\ln x)-3\right)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3.a f est dérivable sur $]0;+\infty[$; $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$ $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-3\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}-\frac{3}{x}$.

(car $(u^2)'=2u'u$ et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2\ln x-3}{x}$.

3.b variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{2\ln x-3}{x}$ $x\in]0;+\infty[$, donc $x>0$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x-3=0\Leftrightarrow 2\ln x=3\Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{3/2}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2\ln x-3>0\Leftrightarrow 2\ln x>3\Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>e^{3/2}$

$f(e^{3/2})=(\ln e^{3/2})^2-3\ln(e^{3/2})+2=(3/2\ln e)^2-3\times\frac{3}{2}\ln e+2$

$=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2=\frac{9-18+8}{8}=-\frac{1}{4}$

x	0		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-1/4$	↗	$+\infty$

c. d'après 1.b, on a : $f(x)=0$ si $x=e$ ou $x=e^2$ .En regardant le tableau de variation , on peut en déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$.

$f(x)>0$ pour $x\in\,]0;e[\,\cup\,]e^2;+\infty[$; $f(x)<0$ pour $x\in\,]e;e^2[$; $f(x)=0$ pour $x=e$ et $x=e^2$.

3. a. $x^2-3x+2=0$; $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=9-8=1$; $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ et $x_1=\frac{3+1}{2}=2$. $S=\{1;2\}$

b. sur l'intervalle $]0;+\infty[$, résolvons l'équation $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$. Posons $X=\ln x$ .l'équation devient $X^2-3X+2=0$. On a vu que $X=1$ ou $X=2$.

$\ln x_1=1=\ln e \Leftrightarrow x_1=e$ $\quad\ln x_1=2=2\ln e=\ln e^2\Leftrightarrow x_1=e^2$ $\quad S=\{e;e^2\}$.

c. $f(x)=(\ln x-1)(\ln x-2)$

x	0		e		e^2		$+\infty$
$\ln x-1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	-	0	$+$	

4. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$; $f'(\sqrt{e})=\frac{2\ln(e)-3}{e}=\frac{2-3}{e}=-\frac{1}{e}$;

$f(e)=(\ln e)^2-3\ln e+2=1-3+2=0$; $y=\frac{-1}{e}(x-e)=\left(\frac{-1}{e}\right)x+1$, donc (T) : $y=\frac{-1}{e}x+1$

5.a. voir courbe ci-contre b. Calculons $F'(x)$. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x$

$F'(x) = (\ln x)^2 + \dfrac{2x \times \ln x}{x} - 5\ln x - 5x \times \dfrac{1}{x} + 5$

$F'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 5\ln x - 5 + 5$ d'où $F'(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = f(x)$,

6. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x$

$H(e^2) = e^2\left(\ln e^2\right)^2 - 5e^2\ln e^2 + 5e^2$

$= e^2(2\ln e)^2 - 10e^2 + 5e^2$

$H(e^2) = 4e^2 - 5e^2 = -e^2$

$H(e) = e\left(\ln e\right)^2 - 5e\ln e + 5e = e - 5e + 5e = e$. $A = H(e^2) - H(e) = -e^2 - e$

PROBLEME 7

1.a. On a g(2) = 0.

b. T est tangente à C au point d'abscisse 2 donc $g'(2)$ est égal au coefficient directeur de T.

Graphiquement on lit ce coefficient : $\frac{3}{2}$ donc $g'(2) = \frac{3}{2}$.

c. Si D est asymptote à C lorsque x tend vers $+\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

d. On obtient graphiquement : si $x \in]1;2[$ alors $g(x) < 0$; si $x \in [2;+\infty[$ alors $g(x) \geq 0$. D'où

x	1	2	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$ 0	$+$

2.a. $g_1(2) = 1 - \dfrac{1}{2-1} = 0$ $g_2(2) = 1 - \dfrac{2}{4-2} = 0$.

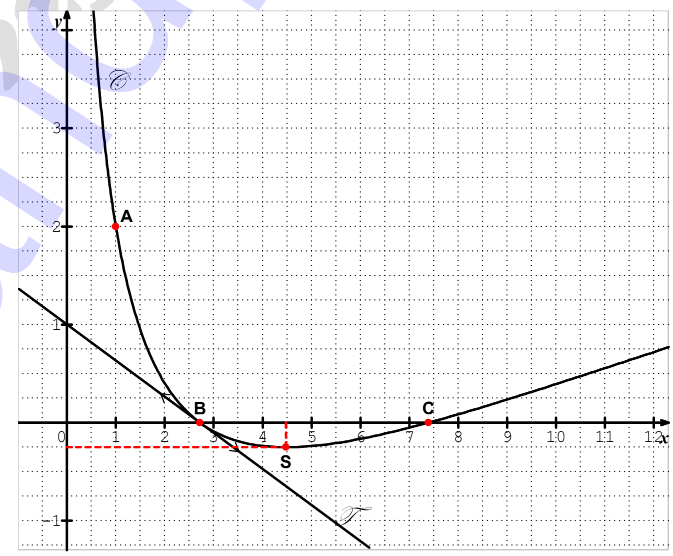
$g_3(2) = \ln(2-1) = 0$. On ne peut donc éliminer aucune fonction.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2 - x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x) = +\infty$. On peut donc éliminer la fonction g_3.



c. $g_1'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, donc $g_1'(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1$

$g_2'(x) = \dfrac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$ $g_1'(2) = \dfrac{2(4-1)}{(4-2)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

Il s'agit donc de la fonction g_2.

PARTIE B

1.a. $f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$ $x \in]1;+\infty[$. On sait que : $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$ donc

$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. donc la droite $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

2.a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\dfrac{x}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x}{x-1}=0$,donc la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$

c. Si $x\in]1;+\infty[$ alors $x-1>0$, $x>1$ et $x>x-1>0$ donc $\dfrac{x}{x-1}>1$; si $\dfrac{x}{x-1}>1$ alors $\ln\dfrac{x}{x-1}>0$

donc $\ln\dfrac{x}{x-1}>0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$. et par conséquent C est au dessus de C pour tout $x\in]1;+\infty[$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$3+2\ln 2$	↗ $+\infty$	

3.a. $f'(x)=1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{(x-1)}$ $f'(x)=1+\dfrac{2(x-1)-2x}{x(x-1)}$,donc

$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=1-\dfrac{2}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)}=\mathrm{g}_2(\mathrm{x})$.

b. On a vu précédemment le signe de g_2.On a donc:

Partie C

1. On a $H'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-[\ln(x-1)+(x-1)\times\dfrac{1}{x-1}]$. $H'(x)=\ln x+1-[\ln(x-1)+1]$;

$H'(x)=\ln x+1-\ln(x-1)-1$. $H'(x)=\ln x-\ln(x-1)=h(x)$. Donc H est une primitive de h sur $[1;+\infty[$

2.a. voir graphique

b. $A=\left(\int_2^3(f(x)-(x+1))dx\right)u.a=\left(\int_2^3 2\ln\dfrac{x}{x-1}dx\right)u.a=\left(\int_2^3 h(x)dx\right)u.a$

$A=[h(x)]_2^3$ $A=2[(3\ln 3-2\ln 2)-2\ln 2]$ **et** $A=2[3\ln 3-4\ln 2]u.a$ **= 1,08 u.a.**

PROBLEME 8

PARTIE A

1. $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$

$\lim\limits_{x\to0}(x^2+3x-4)=-4$; $\lim\limits_{x\to0}4\ln x=4\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x-4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\ln x=4\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2. Soit g' la dérivée de g. $g'(x)=2x+3+\dfrac{4}{x}=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$

3. g'(x) est du signe de $2x^2+3x+4$, calculons les racines de ce polynôme :
$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$, donc $2x^2+3x+4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, (prendre le signe de $a=2$) par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; +∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; +∞[

x	0	1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0 donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et g(x) > 0 sur]1;+∞[.

x	0		1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$

PARTIE B

1. a. limite de f en + ∞.

$f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}3\ln x=3\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\dfrac{\ln x}{x}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

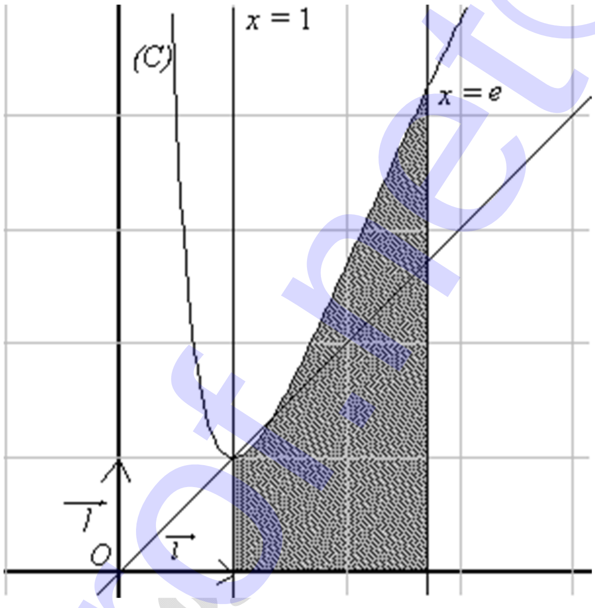
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. la limite de f en 0 ; $f(x)=x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x$: $x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x = x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4}{x}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{4}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x=+\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

On peut en déduire que la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C)



2. a. Pour tout x strictement positif :

$$f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$$

$$f'(x)=1+\frac{3}{x}-4\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=1+\frac{3}{x}-4\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+3x-4(1-\ln x)}{x^2}=\frac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. f '(x) est du signe de g(x) dont le signe a été trouvé Partie A 4.

c. $f(1)=1+3\ln 1-4\frac{\ln 1}{1}=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x \Leftrightarrow x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x=x \Leftrightarrow \left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x=0$

$3-\frac{4}{x}=0$ et $\ln x=0$ $\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ ou $x=1$, donc $S=\left\{1;\frac{4}{3}\right\}$.

4. voir graphique

5. La droite d'équation y = x coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$; $F'(x)=x-3+3\ln x+3-2\times 2\frac{\ln x}{x}^2$ et on a : $F'(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=f(x)$.

donc F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. a.

b.

$$\int_1^e f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^e=F(e)-F(1)=\frac{e^2}{2}-3e+3e\ln e-2(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-3\right)=\left(\frac{e^2}{2}-2+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)$$

$1u.a=3^2=9cm^2$, donc $A=9\times\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)=\frac{9}{2}\left(e^2+1\right)cm^2\approx 37,75cm^2$

PROBLEME 9

PARTIE A

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

1) $g'(x)=2x+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+2}{x}$

2) $g'(x) > 0$ comme somme de deux expressions strictement positive sur]0; + ∞[donc g est strictement croissante sur] $]0;+\infty[$.

3) Résolution de l'équation g(x) = 0.

a) $g(1) = 1 - 4 + 2\ln 1 = -3 < 0$ et $g(2) = 2^2 - 4 + 2\ln 2 = 2\ln n2 > 0$ .g est strictement croissante sur

[1; 2] ,g est dérivable sur $[1;2]$ et g(1) < 0 < g(2) , donc l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle $[1;2]$.

b) g(1,70) < 0 < g(1,71) donc 1,70 < α < 1,71

4) On en déduit que g(x) < 0 sur]0 ; α [et g(x) > 0 sur] α ; + ∞[et g(α) = 0

II) Etude de la fonction f

1) La droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C

$\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln x = -2\lim\limits_{x\to 0}\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to 0}\ln x \times \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$, et on a finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2) a) Déterminer la limite de f en + ∞. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\mathrm{h(x) = f(x) - (x-1)} = \frac{2}{\mathrm{x}} - \frac{2\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-1)\right] = 0$

c) $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est $e-1$ (en remplaçant x = e dans l'équation de D , on trouve $y = e-1$)

d) $h(x) = f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$, $f(x) - (x-1)$ est du signe de $1 - \ln x$,

$1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$.

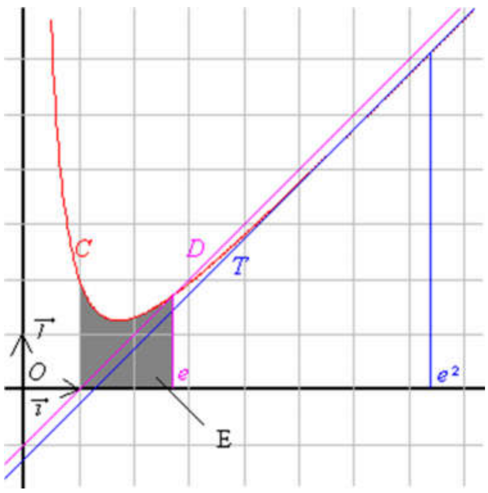
Conclusion : sur l'intervalle $]0;e]$, la courbe C est au dessus de la droite D.sur l'intervalle [e ; + ∞[la courbe C est en dessous de la droite D

3) Etude des variations de f.

a) $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - 2\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2} - 2\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 4 + 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b) f '(x) est donc du signe de g(x) , on en déduit les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$



4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e².

$f'(e^2) = \frac{e^4 - 4 + 2\ln e^2}{e^4} = \frac{e^4 - 4 + 4\ln e}{e^4} = 1$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)

III) Calcul d'une aire

1) $H(x)=\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$: $H'(x)=x-1+\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$

donc H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0;+ ∞[.

2)

a) voir figure

b) $S=\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]$

$S=\left[\frac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e+\frac{3}{2}\right)$u.a

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm² (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm² on a S = 9,90 cm²

PROBLEME 10

PARTIE A

soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{1}{x}-9x=\frac{1-9x^2}{x}=\frac{(1-3x)(1+3x)}{x}$. Or x >0 donc $g'(x)=0$

Si et seulement si, $1-3x=0$ ou $1+3x=0$ c'est-à-dire $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$, mais $-\frac{1}{3}\notin]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$ sur $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	--
$g(x)$	↗	$-\ln 3-\frac{3}{2}$	↘

3- la fonction g admet un maximum sur $]0;+\infty[$,

égal à $-\ln 3-\frac{3}{2}<0$, donc pour tout réel appartenant à

$]0;+\infty[$, $g(x)$ est strictement négatif.

Partie B

soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to0^+}-9x+5=5$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim_{x\to0^+}-2\frac{\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

La droite D d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-9x+5=-\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-9-2\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=-9-\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{-9x^2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$.

Or $x^2>0$, donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

2/a)soit D la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-(-9x+5)$.

pour tout $x\in]0;+\infty[$; $h(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}-(-9x+5)=-2\frac{\ln x}{x}$. De plus $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ .la droite D est donc asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b) pour le point d'intersection de C et D , on a $h(x)=0$, c'est-à-dire $\ln x=0$, soit $x=1$, les coordonnées
de ce point sont $(1;-4)$.

c) si $x=1$, on vient de voir que C et D se coupent ;
si $x>1$ on a : $\ln x>0$ et donc $h(x)<0$, d'où la courbe C est en dessous de la droite D
si $0<x<1$, on a : $\ln x<0$ et donc $h(x)>0$, d'où la courbe C est au dessus de la droite D.

3°-Tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-11$ et $f(1)=-4$, donc $y=-11(x-1)-4$, soit $y=-11x+7$

b)courbes

4) la fonction f est dérivable est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\ln 2>0$ et $f(1)=-4<0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un seul réel α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .on a $f(0,6)>0$ et $f(0,7)<0$, donc $0,6<\alpha<0,7$
Puis $f(0,68)>0$ et $f(0,69)<0$ donc $0,68<\alpha<0,69$.

PROBLEME 11

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

1. $g'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$ et $1+2x>0$.

Donc, $g'(x)$ est du signe de $1-2x$ sur $]0;+\infty[$. Or, $1-2x>0$ si $x<\frac{1}{2}$. D'où : $g'(x)$ est positive si x appartient à l'intervalle $]0;1/2[$ et $g'(x)$ est négative si x appartient à l'intervalle $]1/2;+\infty[$

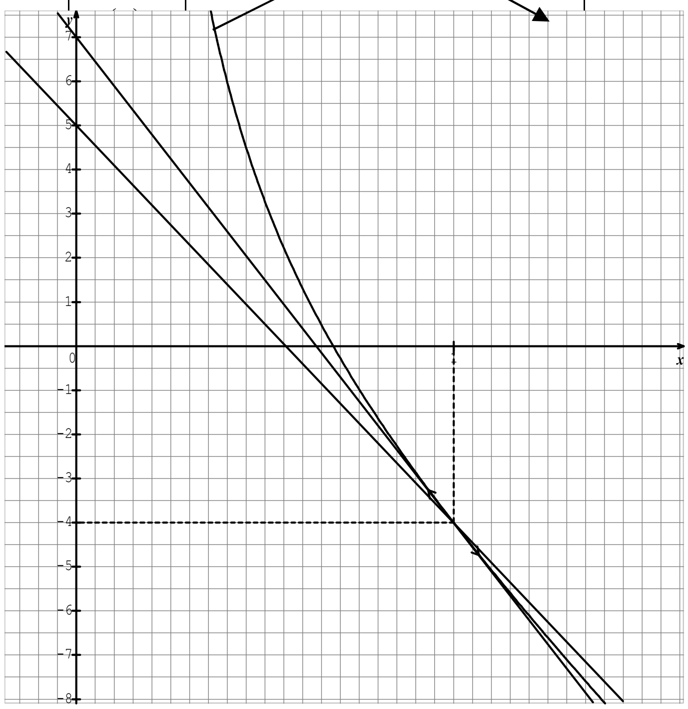
On en déduit alors que la fonction g est croissante sur $]0;1/2[$ et décroissante sur $]1/2;+\infty[$.

Tableau de variations de la fonction g :

$g(1/2)=\ln(1/2)-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\ln 2-3/2$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$-\ln 2-3/2$	↘	

2. De la question précédente, en on déduit que la fonction
g admet un maximum atteint en $1/2$ et ce maximum est strictement négatif.
On en déduit alors que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



Partie B : Etude d'une fonction f

1. a) **Limite de f en $+\infty$:**

$\lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc par soustraction des limites on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2x-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

1. b) **Limite de f en 0 :**

$\lim_{x\to0^+}(1-2x)=1$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to0^+}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

, D'où, par addition des limites, on en conclut que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-2x-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1-(-\infty)=+\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

2. a) **Montrons que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$:**

On a : $f(x)-(1-2x)=-\dfrac{\ln x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-(1-2x)\right)=0$. On en déduit alors que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2. b) **Position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$:**

Etudions le signe de $f(x)-(1-2x)$, c'est-à-dire le signe de $-\dfrac{\ln x}{x}$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$. $-\dfrac{\ln x}{x}$ est donc du signe de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$. Or, $\ln x\geq 0$ si $x\geq 1$; et $\ln x\leq 0$ si $0<x\leq 1$.

Donc : $f(x)-(1-2x)\geq 0$ si $0<x\leq 1$ et $f(x)-(1-2x)\leq 0$ si $x\geq 1$

D'où : $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur]0; 1] et $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}$ sur [1; + ∞[

3. a) Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=-2-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{-2x^2-1+\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

3. b) **Signe de $f'(x)$ sur l'intervalle]0; + ∞ [:**

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$; $x^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Or, d'après la question A.2, on sait que $g(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On en conclut que $f'(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4. cf graphique

Partie C : Calcul d'une aire

1. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{2}\times 2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$$

2. a) cf graphique

2. b) Sur [1; e], la droite D est au-dessus de la courbe C, on a donc :

$$A=\left(\int_1^e\left(y-f(x)\right)dx\right)\times u.a=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left[h(x)\right]_1^e\times u.a=\left(h(e)-h(1)\right)\times u.a=\left(\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)u.a=\frac{1}{2}\times 2^2=2cm^2$$

PROBLEME 12

A 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)=1-\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=1-\infty=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=(-\infty)\times+\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$. on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.On peut en déduire que la droite d'équation $y=0$ est asymptote en $+\infty$

2. a. f est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\frac{(1/x)\times x-1\times(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

2.b. f '(x) est du signe de $-\ln x$ car $x^2>0$ sur]0 ; + ∞ [$-\ln x$ > 0 si et seulement si ln x < 0 si et seulement si 0 < x <1. on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f '(x) >0 donc f croissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [, f '(x) < 0 donc f décroissante .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	1	↘	0

2. **c .** $f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1}=1$

Partie B :

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=1/e$

2. a. Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 : $f'(1/\sqrt{e})=\dfrac{-\ln(1/\sqrt{e})}{(1/\sqrt{e})^2}=\dfrac{\ln(\sqrt{e})}{1/e}=\dfrac{e}{2}$.

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 : $f(1/\sqrt{e})=\dfrac{1+\ln(1/\sqrt{e})}{1/\sqrt{e}}=\dfrac{1-1/2}{1/\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow x_2=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

T : $y=f'(1/\sqrt{e})(x-1/\sqrt{e})+f(1/\sqrt{e})=(e/2)\dfrac{e}{2}(x-1/\sqrt{e})+1/\sqrt{e}=(e/2)x-1/\sqrt{e}+1/\sqrt{e}=(e/2)x$

La tangente T_2 au point M_2 a pour équation : $y=\dfrac{e}{2}x$.

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3)=0$ on en déduit $x_3=1$ et M_3 (1 ; 1)

4. $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$. $f''(x)=\dfrac{(-1/x)\times x^2+2x\times(1+\ln x)}{x^4}=\dfrac{x-2\ln x}{x^3}=-\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2\ln x-1}{x^3}=0 \Leftrightarrow 2\ln x-1 \Leftrightarrow \ln x^2=\ln e \Leftrightarrow x_4=\sqrt{e}$

5. $x_1=1/e$; $x_2=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$; $x_3=1$ et $x_4=\sqrt{e}$. $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$ .Donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$.

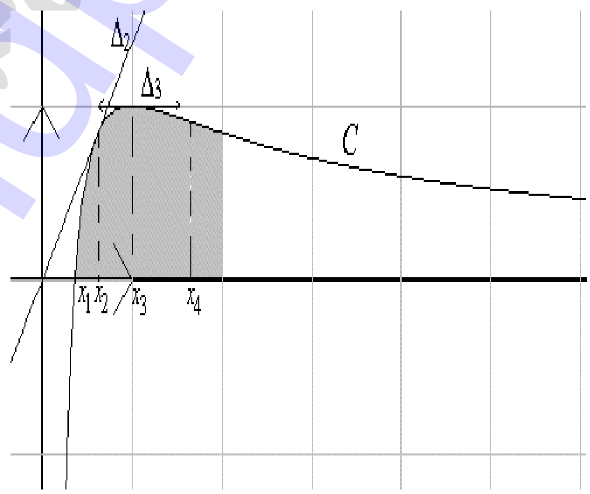
6.

$A=\int_{1/e}^{2} f(x)dx=[F(x)]_{1/e}^{2}=F(2)-F(1/e)$

$=\ln 2+\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(\ln(1/e)+\dfrac{1}{2}(\ln(1/e))^2\right)$

$=\ln 2+\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)$

$A=\ln 2+\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2+\dfrac{1}{2}$



Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel x de]0 ; + ∞ [on a : $g(x)=(\ln x)^2$ $g'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$.

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ $F(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

PROBLEME 13

PARTIE A

1-a)

$\forall x\in]0;+\infty[, g'(x)=(1+x\ln x)' \Rightarrow g'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x=1+\ln x$

b) Etude les variations de g et son tableau de variation

$\forall x\in \left]0;\dfrac{1}{e}\right[, g'(x)<0,$ g est strictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$

$\forall x\in \left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[, g'(x)>0,$ g est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$

x	0	$1/e$	$+\infty$

Tableau de variation de g

$g'(x)$		$-$ 0 $+$
$g(x)$		$\searrow$ $1-\frac{1}{e}$ $\nearrow$

2) $g'(x)$ s'annule en $\frac{1}{e}$ et change de signe en $\frac{1}{e}$, donc $g(x)$ admet un extremum relatif en $\frac{1}{e}$. D'après le tableau de variation $g(x)$ admet un minimum en $\frac{1}{e}$ qui est $f\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$. Or $1-\frac{1}{e}>0$ donc $\forall x\in\left]0;+\infty\right[, g(x)>0$

PARTIE B

1-a. Etude de la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, donc f est continue en 0.

b. Etude de la dérivabilité de f en 0.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1=f'(0)$, donc f est dérivable en 0.

c) $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

d) $f(x)-y=\frac{-x^2\ln x}{1+x\ln x}=\frac{-x^2\ln x}{g(x)}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in\left]0;1\right[, f(x)-y>0\\ \forall x\in\left]1;+\infty\right[, f(x)-y<0\end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

3.a. Calcul de la dérivée

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in\left]0;+\infty\right[, f'(x)=\left(\frac{x}{1+x\ln x}\right)'\\ f'(x)=\frac{x'(1+x\ln x)-\left(\ln x+\frac{1}{x}\times x\right).x}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1+x\ln x-x\ln x-x}{(1+x\ln x)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-x}{(1+\ln x)^2}$$

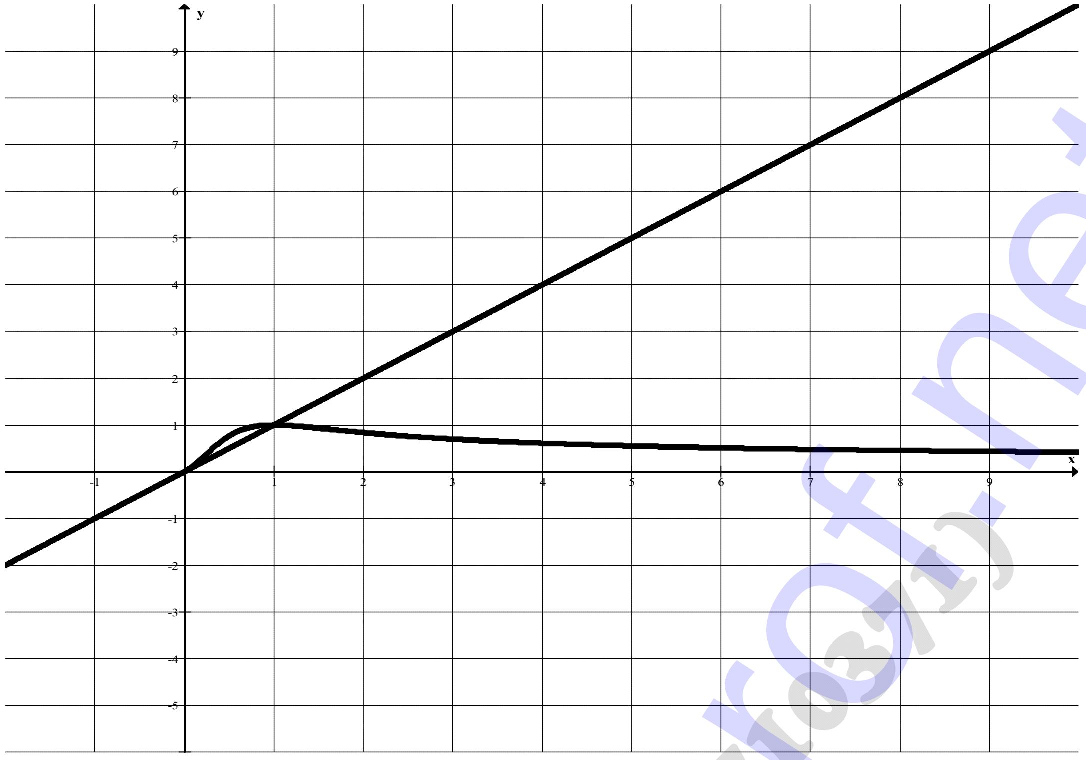
b. $\forall x\in\left]0;1\right[, f'(x)>0$ $f(x)$ est strictement croissante sur $\left]0;1\right[$

$\forall x\in\left]1;+\infty\right[, f'(x)<0$ $f(x)$ est strictement croissante sur $\left]1;+\infty\right[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	.	0	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

4) Voir papier millimétré (T) et (C)



PARTIE C

1-a) Justification de $f(x \geq 1)$

$f'(x)$ s'annule en 1 et change de signe en 1 , donc $f(x)$ admet un extremum relatif en1 .D'après le tableau de variation $f(x)$ admet un maximum en 1qui est $f(1)=1$, donc $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \leq 1$

b. $f(x)-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2(1-\ln x)}{(1+x)(1+x\ln x)} \quad \Rightarrow \forall x \in [1;e], f(x)-1+\frac{1}{1+x} \geq 0$

On peut procéder par encadrement

2) $\forall x \in [1;e], 1-\frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$ l'unité d'aire est$16cm^2$. $16\int_1^e \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \leq A \leq 16\int_1^e dx$

PROBLEME 14

PARTIE A : Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-\ln x-x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g . On a : $g'(x)=-\frac{1}{x}-2x$.

Donc, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $g'(x)<0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Calcul de $g(1)$. Signe de g(x).

On a : $g(1)=1-\ln 1-1=0$. puisque la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.

On peut écrire : $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x-x+2$.

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc, par produit : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$.

Comme par ailleurs on a $\lim\limits_{x\to 0}(-x+2)=2$, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

La courbe C a donc une asymptote verticale d'équation x=0 (axe des ordonnées)

b) Déterminer la limite en +õ de la fonction f.

On sait que : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et que : $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x+2)=-\infty$. Donc, par addition : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$

c) Justifier que la droite *D* d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe C.

On a : $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right)=0$.

Donc, la droite *D* d'équation $y=-x+2$ est bien asymptote oblique à C en +õ.

d) Position de la courbe *C* par rapport à la droite *D*.

Cette position est donnée par le signe de $f(x)-(-x+2)$.

On a vu que : $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$. Or, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $\frac{\ln x}{x}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

Donc : Sur l'intervalle $]0;1[$, la courbe *C* est en-dessous de la droite *D*,

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la courbe *C* est au-dessus de la droite *D*,

La courbe *C* coupe la droite *D* au point d'abscisse 1.

2. a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1[$, $f'(x)=x^2g(x)$.

On a, d'après les règles de dérivation : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$.

Donc : $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Tableau de variation de f. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g(x) qui a été vu à la question A.2) On peut donc construire le tableau de variation de f :

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

3. a) Déterminer la point A de *C* où la tangente est parallèle à l'asymptote *D*.

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

La droite *D* a pour coefficient directeur −1. La tangente à *C* au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$. Il faut donc résoudre l'équation $f'(x)=-1$.

Cette équation équivaut successivement à :

$$\frac{g(x)}{x^2}=-1\Leftrightarrow g(x)=-x^2\Leftrightarrow 1-\ln x-x^2=-x^2\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=1$$

b) Équation de la tangente T à *C* au point d'abscisse e.

Cette tangente est précisément celle qui est parallèle à la droite *D*.

Son équation est donnée par la formule : $y=f'(e)(x-e)+f(e)$.Ou encore :

$y=-1\times(x-e)+\frac{1}{e}-e+2=-x+e+\frac{1}{e}-e+2=-x+2+\frac{1}{e}$. Finalement : $y=-x+2+\frac{1}{e}$.

4. a) Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.

La fonction f est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$.De plus, nous savons

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et que f(1)=1. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$ telle que $f(\alpha)=0$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

À la calculatrice, on trouve : $f(0,48)\approx -0,01$ et $f(0,49)\approx 0,05$. On en déduit : $0,48 \le \alpha \le 0,49$.

c. La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Elle est e particulier sur l'intervalle $[2;3] \subset]1;+\infty[$ De plus, nous savons $f(2)=\dfrac{\ln 2}{2}>0$ et que $f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}-1 \approx -0,6337<0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]0;1[$ telle que $f(\beta)=0$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de β.

À la calculatrice, on trouve : $f(2,44)\approx -0,006$ et $f(2,45)\approx -0,02$. On en déduit : $2,44 \le \beta \le 2,45$.

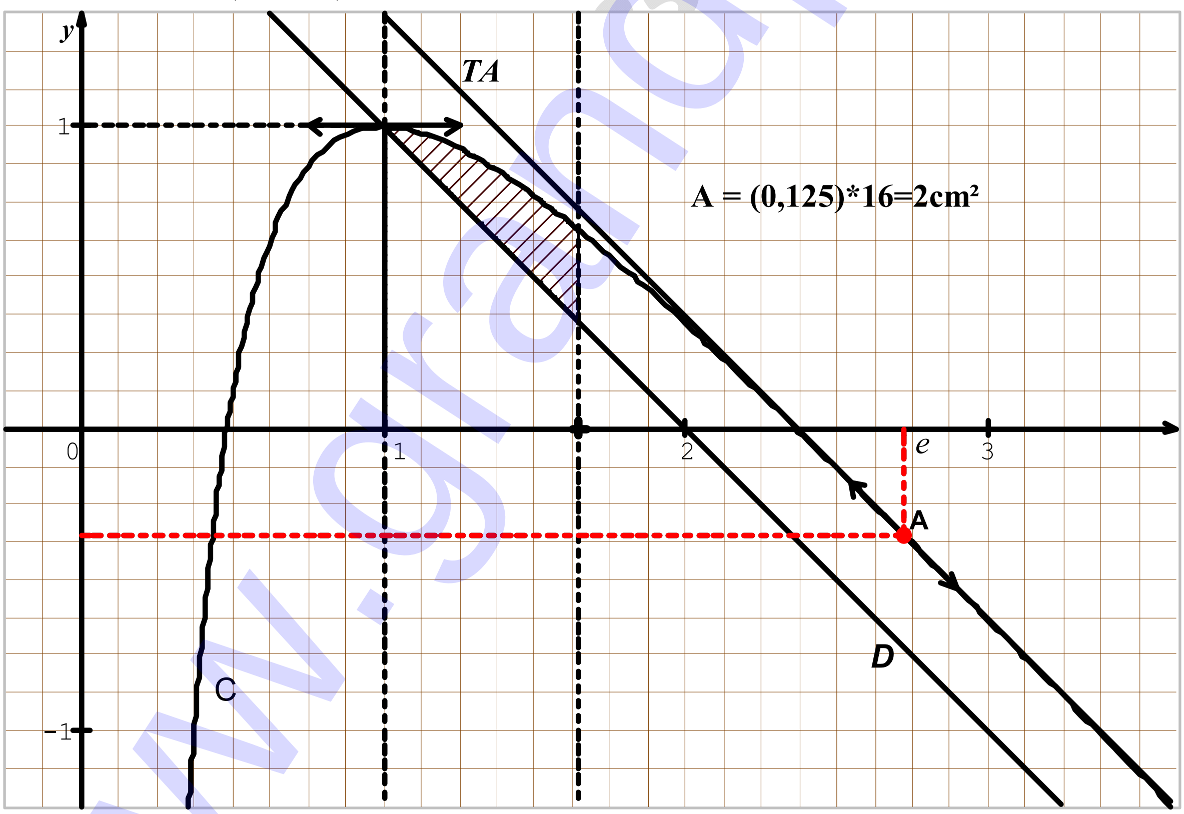
5. voir courbe ci-dessous.

PARTIE C

1. $h(x)=(\ln x)^2$: $h'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\ln x=\dfrac{2\ln x}{x}$, par conséquent une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ est $H(x)=\dfrac{1}{2}\times(\ln x)^2$.On déduit que $F(x)=\dfrac{1}{2}\times(\ln x)^2-\dfrac{1}{2}\times x^2+2x+c$.

2. $A=\left(\int_1^{\sqrt{e}}(f(x)-y)dx\right)u.a=\left(\int_1^{\sqrt{e}}\dfrac{\ln x}{x}dx\right)u.a=16\times\left[H(x)\right]_1^{\sqrt{e}}=16\left(H(\sqrt{e})-H(1)\right)=16H(\sqrt{e})$

$A=8\left(\ln\sqrt{e}\right)^2=8\left(\dfrac{1}{2}\times\ln e\right)^2=2\text{cm}^2$.



PROBLEME 15

A.1 $g(x)=x^2+6-4\ln x$; $g'(x)=2x-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-4}{x}$; $g'(x)=\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$.

Comme $x\in\left]0;+\infty\right[$ $\frac{2(x+\sqrt{2})}{x}>0$ Donc le signe de g'(x) dépend du signe de $x-\sqrt{2}$, d'où le tableau de variation

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	–	0	+	
$f(x)$	‖	↘	$g(\sqrt{2})$	↗	

La fonction g admet un minimum égal à $g(\sqrt{2})=8-2\ln 2>0$.
Par conséquent g(x)> 0 sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

B- 1. $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

On déduit que la droite d'équation : x = 0 est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

3.a. Soit $h(x)=f(x)-y$; $h(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{4}$. $h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$ .Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$. On déduit que la droite Δ d'équation : $y=\frac{x}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

b. Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation f(x) = y c'est-à-dire f(x)-y = 0 ou encore h(x) = 0. donc $\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$. $x\neq0$ *et* $2\ln x-1=0$.

$\ln x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\ln x=(1/2)\ln e=\ln e^{1/2}$ et x = $e^{1/2}=\sqrt{e}$. $y=f(e)=\frac{\sqrt{e}}{4}$. on a donc : $A\left(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{4}\right)$..

c-Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de $h(x)=f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$ sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$, donc il faut étudier de $2\ln x-1$. $2\ln x-1>0$; $\ln x>1/2$, $\ln x>1/2=\ln e^{1/2}$, donc $x>e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$ la courbe C est au dessus de la droite (Δ) . On démontre de même que sur l'intervalle $\left]0;\sqrt{e}\right[$ la courbe C est en dessous de la droite(Δ).

4.a-b $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{x^2}+\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+2+4-4\ln x}{4x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+6-4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^2}$.

c-Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ dépend du signe de g(x) ; or g(x) =8-2ln2 > 0 pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Il s'ensuit que f '(x) > 0 pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

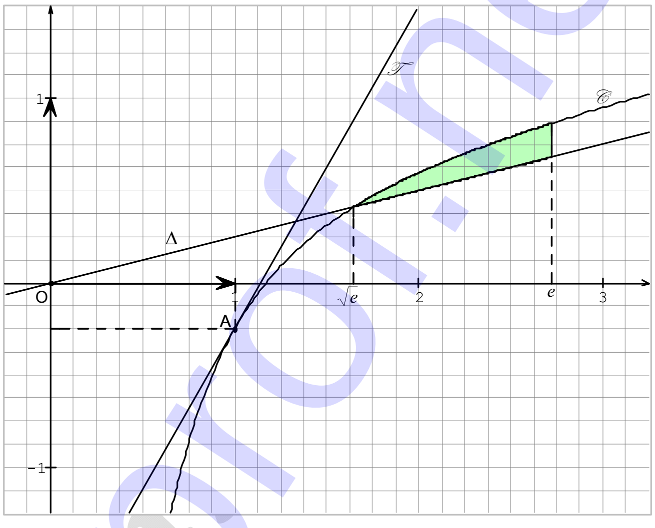
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	7/4	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$		↗		$+\infty$

5. $f'(1)=\frac{1^2+6-4\ln 1}{4\times1^2}=\frac{7}{4}$ et $f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\ln 1}{1}=-\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente au point A d'abscisse 1 est de la forme $y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{7}{4}(x-1)-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}x-2$.

6. voir graphique à la fin du l'exercice.

7. la fonction f est définie et continue, dérivable sur $]0;+\infty[$ et a pour fonction dérivée strictement positive ($f'(x)>0$ sur $]0;+\infty[$), f est aussi continue et dérivable sur $[1;2]\subset]0;+\infty[$, de plus $f(1)=-0,25<0$; $f(2)=1-\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}>0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe une solution Unique $\alpha\in[1;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.à l'aide de la calculatrice , on obtient $f(1{,}17)=-0{,}0007<0$; $f(1{,}18)=0{,}011>0$, donc $1{,}17<\alpha<1{,}18$. Donc $\alpha\approx 1{,}171$.



C1- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec u= ln x .

Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{1}{2}u(x)^2$

2. Donc $H(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.

3- $A=16\times\left[H(e^2)-H(\sqrt{e})\right]$.

$H(e^2)=-\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}(\ln e^2)^2=-\frac{2}{2}+\frac{4}{2}=1$ et

$H(\sqrt{e})=\frac{-1}{2}\ln\sqrt{e}+\frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2=\frac{-1}{4}\ln e+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2$.

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$

On déduit que $A=16\times\left(1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)=16\left(\frac{9}{8}\right)=18\text{cm}^2$

PROBLEME 16

<u>PARTIE A</u> : Etude de fonction f

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ .Il vient $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)\times\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$
donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ .Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ alors l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C.

2)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$ soit $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

c) On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation x =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$ .voir courbe.

3)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{(1+\frac{1}{x})x-(x+2+\ln x)}{x^2}$ $f'(x)=\dfrac{x+1-x-2-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$

b) $f'(x)\geq 0$ $\dfrac{-1-\ln x}{x^2}\geq 0$ $et\ x\in]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $-1-\ln x\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $-\ln x\geq 1\Leftrightarrow\ln x\leq -1$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f'(x) \leq 0 \quad \frac{-1-\ln x}{x^2} \leq 0 \quad et\ x \in]0;+\infty[\Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Donc f '(x) s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{e}$

c) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	1+e	↘	1

PARTIE B :

1) g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{x}$

a) $g'(x) = \frac{x-(x+2)}{x^2}$; $g'(x) = \frac{-2}{x^2}$ Comme $g'(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$ alors la fonction g est strictement décroissante

sur $]0;+\infty[$. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	||	$+\infty$ ↘	1

b) La courbe H admet comme asymptote l'axe des ordonnées et la droite D.

2)a) $f(x) - g(x) = \frac{x+2+\ln x-(x+2)}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$ Sur $]0;+\infty[$ f(x)-g(x) est du signe de ln x

Donc $f(x)-g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ et $f(x)-g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

b) Les deux courbes C et H . se coupent en un point A d'abscisse 1, car $f(x)-g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

c) On en déduit que : C est au-dessous de H sur $]0;1]$ et C est au-dessus de H . sur $[1;+\infty[$

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$	21	11	5	3	2	1,8	1,7	1,5	1,4	1,29	1,25
$f(x)$	-2,03	2,95	3,61	3	2,35	2,2	2,03	1,85	1,72	1,56	1,51

Problèmes de recherches: non résolus

PROBLEME 1

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur] 0; $+\infty$ [par: $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$

On note Cg la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

I. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_g ?

2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.

3. Résoudre dans] 0 ; $+\infty$ [l'équation g(x) = e.

4. Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ .En déduire, pour tout x appartenant à]0; $+\infty$[. le signe de g(x).

5. Tracer C_g en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

PARTIE B : Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$ .On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.(Unités graphiques: 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Soit x appartenant à]0 ; + ∞[. Vérifier que f '(x) =g(x).
2. Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f en son point I d'abscisse1 .Préciser la position de C_f par rapport à (T).
5. Tracer (T) et (C_f)

PROBLEME 2

L'étude d'une fonction f dérivable sur R_+ et définie par $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O ;I ;J) l'unité graphique est 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction dérivable sur]0 ;+∞[et définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation
(on ne demande pas de calculer les limites)
2) Justifier que ∀ x ∈]0 ;+∞[g(x) > 0

Partie B :

1) a- Calculer la limite de f en +∞
   b- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2) a-Démontrer la droite (D) d'équation y =2x-3 est une asymptote à (C) en + ∞
   b- Préciser la position de (C) par rapport à (D)
   c- Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
3 a-Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   b- Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est y = 3x – 4
   c- Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique ∝ puis justifie que 1,3<∝ < 1,4.

Partie C :

On pose Y(x)=f(x) – (3x – 4) et h(x)= - x^2 + 1 – lnx

1 a) Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.
   b) Calculer h(1) puis justifier que
      ∀ x ∈]0 ;1[h (x) > 0
      ∀ x ∈]1 ;+∞ [h(x) < 0
   c) Démontrer que ∀ x ∈]0 ; +∞[$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

2 a)Etudier les variations de Y puis en déduire le signe de Y(x) suivant les valeurs de x.
   b) Déterminer la position de (C) , par rapport à la tangente (T) .
   c) Tracer la courbe (C),la droite (D) et la tangente (T).

PROBLEME 3

- *Etude d'une fonction ln définie par raccordement*

Soit f est la fonction définie, sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$, par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2\ln x + 1}{\ln x - 1}, \forall x \in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0) = 2 \end{cases}$

1)a)Montrer que f est continue en 0
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

2) Etudier le signe de $(\ln x - 1)$ et en déduire les limites à gauche et à droite de f en e .

3) Etudier la dérivabilité de f en o et dresser son tableau de variation

4) Résoudre dans **R** l'équation : $f(x) = 0$.

5) Représenter f dans un repère orthogonal. On précisera la position relative de la courbe représentative de f et de la droite Δ d'équation y = 2.
6) justifier que e^{-1} est un point d'inflexion de C_f

PROBLEME 4

- Etude d'une fonction ln comportant l'expression valeur absolue

On considère la fonction f de R vers R définie par : $f(x)=\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$

1-Etudier le sens de variations de la fonction f.
2-On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
3-Démontrer que (C_f) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnes
4-Construire (C_f)

PROBLEME 5

- Extrait bac blanc regional DRENET Abidjan 4 UP 08 série F2 du 24 février 2015

Partie A
L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x\left[x-(\ln x)^2\right] \text{ si } x \succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ d'unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur définie par : $h(x)=2-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}$

1. a. Calculer h'(x) et étudier les variations de h.
   b. En déduire que $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,h(x)\geq 0$
2. On considère la fonction g dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie par $g(x)=2x-2\ln(x)-(\ln x)^2$
   a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
   b. Calculer g'(x) et montrer que g'(x)=h(x)
   c. Etudier les variations de g
   d. Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et vérifier que $0{,}1\prec\alpha\prec 0{,}2$
   e. Démontrer que $\begin{cases} g(x)\prec 0,\forall x\in\left]0;\alpha\right[\\ g(x)\succ 0,\forall x\in\left]\alpha;+\infty\right[\end{cases}$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Monter que f est continue en 0
3. a. Etudier la dérivabilité de f en 0
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

4. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

b. Interpréter les résultats

c. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\left[-\alpha + 2\ln(\alpha)\right]$

5. a. On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Calculer f′(x) et montrer que f′(x)=g(x) $\forall x \in]0;+\infty[$

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

Partie C

- Déterminer une équation de la tangent (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x-1)$
  a. Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$
  b. En déduire le sens de variation de k′.Calculer k′(1) puis donner le signe de k′.
  c. Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k. *(On ne demande pas les limites)*
  d. En déduire la position relative de (C) et de la droite (T).
- Tracer (C) et (T).On prendra $\alpha = 0{,}1$

PROBLEME 6

- Problème proposé au bac blanc regional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série G2

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. a. Etudier les variations de g
   b. Dresser le tableau de variation de g.
3. a. Calculer g(1)
   b. En déduire le signe de g(x) $\forall x \in]0;+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{2x} + 1 - \frac{1}{2}x$, et ($C_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 4cm

1. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ .Interpréter graphiquement cette limite.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c. Justifier que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C).

d. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

2. a. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

3. a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) tel que la tangente en ce point soit Parallèle à l'asymptote (D).

b. Déterminer une équation de la droite (T), tangente à la courbe au point d'abscisse e.

4. a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.

On appelle B le point d'abscisse α.

c. Montrer que, sur l'intervalle $[2;3]$ l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée β.

5. Dans le repère (O,I,J), Placer les points A et B puis tracer les droites (D), (T) et (C_f).

NB : On donne $\beta=2{,}3$ et $\alpha=0{,}5$

PROBLEME 7

- Problème proposé au bac blanc regional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série B

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur$]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$

1-a) Calculer la limite de g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = \frac{-2x^2-4}{x}$

c) Etablir le tableau. de variation de g.

2-a) Démontrer que l'équation: $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$

b) Démontrer que: $1{,}86 < \propto < 1{,}87$.

c) Démontrer que: $\forall x \in]0;\propto[$; $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\propto;+\infty[$; $g(x) < 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur$]0;+\infty$ par :

$f(x)= \frac{-1}{2}x+3+\frac{2\ln x-1}{x}$ et on désigne par (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (0; I ; J) avec unité 2 cm.

I -a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer que: $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

c) En déduire le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

d) Etablir le tableau de variation de f

2-a) Démontrer en tenant compte de la partie A que: $f(\alpha) = -\alpha - \frac{2}{\alpha} + 3$

b) En déduire un encadrement de f $(\propto)$.

3-a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation: $y= \frac{-1}{2}x+3$est une asymptote à la courbe (C_f).

b) Etudier la position de . (Cf) par rapport à (Δ) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection A.

4)Déterminer les coordonnées du point B de (Cf) où la tangente (T) est parallèle à (Δ)

5)Soit la restriction de f à l'intervalle$]0\,;\propto[$;

a) Calculer h(1) et démontrer que h est une bijection de $]0\,;\propto[$ vers un intervalle K que l'on précisera.

b) Démontrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$et calculer $(h^{-1})'(\frac{3}{2})$ où h^{-1} désigne la bijection réciproque de h.

PARTIE C

1) Tracer (Δ), (T) puis construire *(Cf)* et $(C_{h^{-1}})$ dans le repère (0 ; I ; J)
2) Déterminer la primitive H sur $]0\,;\propto[$ de la fonction f, qui prend la valeur 0 en 1.
3) Justifier que h possède une seule racine β et donner le signe de H
4) Dresser le tableau de variation de la fonction H.

PROBLEME 8

- Extrait bac blanc régional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série B

Partie A

Soit la fonction définie sur$]-1\,;\infty[$vers R $h(x) = x-\ln(1+x)$

1- Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation. (on ne demande pas le calcul de limites)

2- Démontrer que $\forall x \in]-1;+\infty[\ h(x) \geq 0$

Partie B

Soit g la fonction définie sur R^* par $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-1[,\ g(x) = \frac{x^2+5x+4}{x} \\ \forall x \in]-1;0[U]0;+\infty[,\ g(x) = (1+\frac{1}{x})\ln(1+x) \end{cases}$

1- Démontrer que g admet en 0 un prolongement p par continuité que l'on précisera.
2- a) Etudier la continuité de g en -1
3- b) Etudier la dérivabilité de g en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie C

Soit f la fonction définie sur R par $\forall x \in R^*$, f (x) = g(x)

(C) sa courbe représentative dans le plan mini d'un repère orthogonal (O, I, J) OI=1cm et OJ = 2cm

1-a) Démontrer que $\forall x \in]-1;0[U]0;+\infty[\ f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ en déduire le sens de variation de f sur $]-1;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$

b) Calculer f '(x) pour x élément de$]-\infty;-1[$

c) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

d) Dresser le tableau de variation

2-a) Démontrer que la droite (D) admet une branche parabolique en +∞

b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x+5 est asymptote à (C) en -∞

3-a) Préciser les points d'intercession de (C) avec l'axe (OI).

a) Construire soigneusement (C)

Partie D

Soit k la restriction de f à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$

1- Démontrer que k admet une bijection réciproque dont on précisera l'ensemble de départ.
2- Calculer k(1) et en déduire $(k^{-1})'(2\ln 2)$.
3- Dresser le tableau de variation de la fonction H.

PROBLEME 09

- *Extrait bac blanc I.S.T.A.S mars 2012 série F2*

PARTIE A

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°Déterminer D_f

2°Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter les résultats.

3°Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$

4°Dresser le Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

5° Justifier que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

6°Calculer $f(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0;1[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x+4$

1°Déterminer les limites aux bornes de D_f

2°Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

3°Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$

4° Dresser le Tableau de variation de h

5°Déterminer l'équation de la tangente $(T_{0,5})$ au point d'abscisse 0,5

6°Existe-t-il d'autre points de (C_h) où la tangente est parallèle à au point d'abscisse 0,5

7°Tracer (C_h) et $(T_{0,5})$ dans le même repère.

PARTIE C

1) Justifier que l'inéquation $h(x)\geq\frac{13}{3}$
2) Justifier que l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]0;+\infty[$

   On donne, $\forall x\in]0;+\infty[$, $G(x)=\frac{1}{12}x^4-x\ln x+3x+1$
3) Calculer la fonction dérivée de $G(x)$ sur $]0;+\infty[$
4) Quel constat faites-vous ?
5) Dresser le tableau de variation de $G(x)$

PROBLEME 10

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par : f(x) = x + 1 + **Error!**

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. En déduire que C, la courbe représentative de *f*, admet une asymptote *(d)* dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que C, la courbe représentative de *f*, admet la droite *(Δ)* d'équation *y* = *x* + 1 pour asymptote en +∞.
b. Etudier la position de C par rapport à (Δ).

3. a. Calculer la fonction dérivée de *f*.
b. On admet que *f'* est strictement positive sur]0 ; +∞[. En déduire le sens de variation de *f*.

4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C, *(Δ)*, et *(d)*.

PROBLEME 11

Soit la fonction définie sur]2 ; +∞[par :f(x) = x + ln **Error!**

1. a. Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que C, la courbe représentative de *f*, admet une asymptote *(d)* dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que C, la courbe représentative de f,admet la droite (Δ) d'équation *y* = *x* pour asymptote en +∞.

b. Etudier la position de C par rapport à *(Δ)*.

3. a. Calculer la fonction dérivée de *f*.

b. Etudier le signe de f'.

c. En déduire le sens de variation de *f*.

4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C, (Δ), et (d), ainsi que la tangente à la courbe au point 4.

PROBLEME 12

PARTIE A

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :g(x) = 1 – ln x + 2x²

1. Montrer que : g'(x) = **Error!**

2. a. Etudier le signe de *g*(*x*) sur]0 ; +∞[.

b. Calculer g**Error!**

c. Dresser le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[(sans les limites).

3. En déduire que pour tout *x* de]0 ; +∞[, *g*(*x*) est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :f(x) = **Error!** + 2x – 3

On appelle C sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. Etudier la limite de *f* en 0. En déduire que C admet une asymptote que l'on précisera.

2. Etudier la limite de *f* en +∞ et démontrer que la droite *(Δ)* d'équation *y* = 2*x* – 3 est asymptote à C en +∞.

3. Montrer que pour tout *x* strictement positif :f'(x)= **Error!**

En déduire le signe de *f*(*x*) sur]0 ; +∞[.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives *e* et $\sqrt{e}$.

a. Donne les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et B.

b. En déduire que *f* est positive sur [*e* et $\sqrt{e}$].

6. Tracer la droite *(Δ)*, la courbe C et placer A et B.

7. a. Démontrer qu'au point A, la courbe C admet une tangente parallèle à *(Δ)*.

b. Le point A est-il le seul point de C admettant une tangente parallèle à *(Δ)* ?

PROBLEME 13: *(Extrait bac blanc série G2 I.S.T.A.S 2012)*

PARTIE A

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer D_f **2.**Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter les résultats.

3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$ **4.**Dresser le Tableau de variation de f

5. Justifier que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

6. Calculer $f(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0;1[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x+4$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f 2.Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

3. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$

4. Dresser le Tableau de variation de h 5.Déterminer l'équation de la tangente $(T_{0,5})$ au point d'abscisse 0,5

6. Existe-t-il d'autre points de (C_h) où la tangente est parallèle à au point d'abscisse 0,5

7°Tracer (C_h) et $(T_{0,5})$ dans le même repère.

PROBLEME 14

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty;1[$ par $h(x)=\ln(1-x)$.

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty}h(x)$ et $\lim_{x\to1}h(x)$

2. Calculer $h'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty;1[$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

3. a. Calculer $h(0)$ b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $]-\infty;1[$.
   c) En déduire le signe de h sur $]-\infty;1[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{1-x}$.On désigne par (C_f) la courbe de la fonction f

1. Calculer $\lim_{\substack{x\to1\\<}}f(x)$ .Interpréter graphiquement cette limite. b. Calculer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

2. Montrer que $\forall x\in]-\infty;1[,\ f'(x)=\frac{h(x)}{(1+x)^2}$.

3. Donner les variations de f et dresser son tableau de variation sur $]-\infty;1[$.

4. Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, Construire (C_f) .unité graphique : 2 cm

PARTIE C

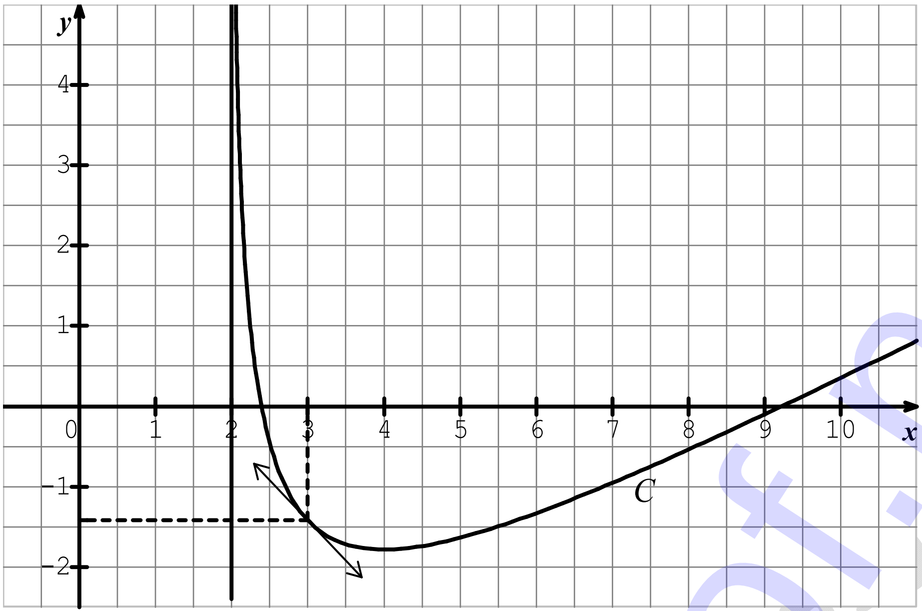
On donne la fonction F définie sur $]-\infty;1[$ par : $F(x)=-\left[x+\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)^2\right]$.

1. Justifie que F est une primitive de la fonction f sur $]-\infty;1[$.
2. Calculer l'intégrale $I=\int_{-5}^{2}f(x)dx$ puis en déduire l'aire A du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses la courbe et les droites d'équations $x=-5$ et $x=2$ en cm^2

PROBLEME 15

- *Lecture graphique et Etude de fonction*

Sur la feuille annexe, qui doit être remise avec la copie, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$.



Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3;-\frac{7}{2}+3\ln 2\right)$.La droite D d'équation x = 2 est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$. On note $f\,'$la fonction dérivée de f .

1. Quelle est la valeur exacte de f (3) ?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$, $f(x)=ax-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B: étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

1. a. Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.

   b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

   c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-5$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. a. Calculer $f\,'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f\,'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$

   b. étudier le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2{,}1;3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9;10]$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β .

<u>Partie C : calcul d'aire</u>

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et

   $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-1)\ln(x-2)$.

 a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

 b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

2. On considère le domaine D du plan compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation x =3 et x = 9.

a. Hachurer le domaine D sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note A la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine D. Exprimer A sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

PROBLEME 16

- Etude d'une fonction comportant les expressions ln et expo
- Intégrales et suites numériques

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette figure sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

PARTIE A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier les positions relatives de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)-\frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout x réel, $f'(x)=\frac{e^{x}-2}{3\left(e^{x}+1\right)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x$ et les droites d'équations x = 0 et x = n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n=\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right)\leq e^{-x}$. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n\leq 1$. La suite (d_n) est-elle convergente ?

PARTIE C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

PROBLEME 17

- Etude d'une fonction ln
- Suites numériques

Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ pour $x>0$ et $f(x)=\frac{1}{2}$, puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x)=x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne par C la représentation graphique de f.

I -Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

a) Étudier le sens de variation de g.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) En déduire le signe de g(x) pour tout x de $]0;+\infty[$

2. Montrer que, pour tout x de [2 ; 3], on a $g(x)=\frac{1}{2}$.

II -1. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x=\frac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en 0.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que f ´(x) = g(x)).

4. a) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=1$).

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite $(\Delta): y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (Δ), la courbe (C_f) et la droite D d'équation $y=x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle [2 ; 3].

I. 1. Soit la fonction h définie sur I par $h(x)=f(x)-x$. Montrer que, pour tout x de I, $h'(x)<0$.

On remarquera que $h'(x)=g(x)-x$.

En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation h(x)=0 admet une unique solution dans I ;

on note α cette solution.

II. 1. Montrer que, pour tout x de I, $0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

2. En déduire que, pour tout x de I, $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

III On définit la suite $(u_n)_{n\in N}$ par $u_0=2$ et, pour tout n de N, $u_{n+1}=f(u_n)$.

On admet que, pour tout n de N, u_n appartient à I.

1. Établir les inégalités suivantes :

(1) pour tout n de N, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$. (2) pour tout n de N, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

3. Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.

PROBLEME 18

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1+2\ln x}{x}$ .On note **C** sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

A. ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On introduit la fonction g définie sur $]0.+\infty[$ par $g(x) = x^2+1-\ln x$.

1) Etudier les variations de g (on ne demande pas la recherche de limites).

2) En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0.+\infty[$.

B. ETUDE DE f ET TRACE DE LA COURBE C.

1)a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe **C**.

c)Calculer f ' (x) et montrer que pour tout x de $]0.+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de f'(x)

2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote en $+\infty$ à la courbe **C**.

b) Déterminer l'abscisse x_A du point A, intersection de la courbe **C** et de la droite (Δ)

c) Etudier la position relative de **C** et (Δ)

3) a) Déterminer la tangente T à C au point d'abscisse $x_B = 1$.

b)Déterminer l'abscisse x_C du point où la courbe admet une tangente T' parallèle à la droite (Δ).

4)a) Calculer l'ordonnée du point D de C d'abscisse $x_D = e$.

b) Montrer que les abscisses x_A , x_B , x_C et x_D des points A, B, C et D sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Placer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points A, B, C et D. Tracer les droites (Δ), T, T' puis la courbe **C**.

C. CALCUL D'UNE AIRE

1) Calculer la dérivé h de la fonction H définie sur $]0.+\infty[$ par H(x) = (ln x)^2.

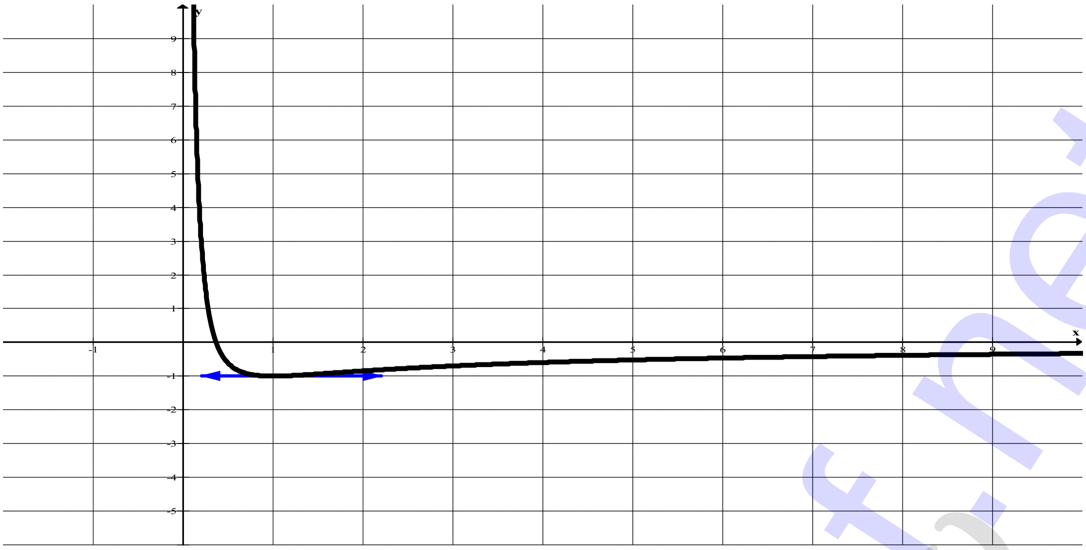
2) Calculer en cm2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, la droite D et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et x = e

PROBLEME 19 : (Extrait bac blanc 2014 I.S.T.A.S.Tle G2)

- Etude d'une fonction et lecture graphique
- Problème économique

Partie A

Soit le graphique ci-dessous d'une fonction g. Par simple lecture :



1. Déterminer D_g.
2. Combien de solution admet l'équation $g(x)=0$
3. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$ puis interpréter les résultats si possible.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ et interpréter le résultat.
5. Déterminer $g(1)$ puis l'équation de la tangente au point d'abscisses 1.
6. Dresser le tableau de variation de g en vous servant du graphique.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle par $f(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x}$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
   b. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter le résultat si possible.
   c. Calculer $f\left(e^{-1}\right)$.
2. Montrer que, pour tout x de D_f, $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ où f désigne la dérivée de la fonction f.
3. Etudier le signe de f'(x) et dresser son tableau de variation
4. a. Montrer que sur $[0{,}3\,;\,0{,}4]$ l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique notée α.
   b. Déterminer la valeur exacte de α
   c. Justifier que $\begin{cases}\forall x\in\,]0;\alpha[\,,\ f(x)\succ 0\\ \forall x\in\,]\alpha;+\infty[\,,\ f(x)\prec 0\end{cases}$
5. Déterminer $f(e)$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(-2e^{-1}\right)$.
6. Justifier qu'une primitive de la fonction f est $F(x)=-\ln x-\dfrac{1}{2}\ln x^2$
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f avec ses éventuelles asymptotes.

Partie C

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de jouets, x appartenant à $]0\,;\,20]$

Une étude faite par l'entreprise a ressorti que le bénéfice réalisé est égal à $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ exprimé en millions de francs cfa .En utilisant les résultats de la partie B :

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $h(x)$
2. Déterminer le nombre minimal de jouet à fabriquer pour que le bénéfice réalisé soit positif

Déterminer le nombre de jouet à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur.

PROBLEME 20

- Problème proposé au bac blanc regional du 24 février 2015. DRENET Abidjan 4 UP 08 série F2

Partie A

L'objectif de ce problème, comportant deux parties est l'étude de la fonction numérique f définie par :

$f(x)=\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ ou ln est le logarithme népérien

PARTIE A

Soit la fonction g définie par : $g(x)=-x^2+x+2$

1. Etudier le signe de la fonction g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. En déduire le signe de - g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$

PARTIE B

Dans cette partie, on étudie la fonction numérique f à variables réelles x définie par

$f(x)=\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ et n désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.(unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f
2. On désire étudier la fonction f sur l'intervalle $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et on admet que

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x}{2}+\ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right), \forall x\in]0;1[\\ f(x)=\dfrac{-x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right), \forall x\in]1;+\infty[\end{cases}$$

a. Justifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$. Puis interpréter graphiquement ces limites.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3.On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et on désigne par f' sa dérivée :

a. montrer que $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-g(x)}{2x(1-x)}, \forall x\in]0;1[\\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x(x-1)}, \forall x\in]1;+\infty[\end{cases}$

b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0;1[\cup]1;+\infty[$

c. Dresser son tableau de variation

4. a. Montrer que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en un seul point
b. On notera x_0 l'abscisse de ce point. Justifier que $0,44\le x_0\le 0,45$
c. Résoudre l'équation $f(x)=-2$

5. Montrer que le point $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour (C_f)

6. a. Montrer que la droite (Δ) équation $y=\dfrac{-x}{2}$ est une asymptote à (C_f)
b. Etudier la position relative de (C_f) et de (Δ) sur $]1;+\infty[$

c. déterminer la valeur de f′(2).

d. En déduire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse x=2

e. tracer la droite (Δ), la tangente (T), la droite d'équation x=1 puis construire l'allure de la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 9.

2ème partie

Etude des fonctions Eponentielles neperiennes

Problèmes résolus

PROBLEME 1:

Partie I : Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(2x^2-5x+2)e^x$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^x=0$).

   En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(2x^2-x-3)e^x$.

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].

   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α.

4. Tracer la courbe C_f et placer son point A d'abscisse α.

Partie II: On désigne par F la fonction définie sur **R** par $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Calculer l'intégrale $I=\int_{0,5}^{2} f(x)dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

PROBLEME 2:

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur **R**

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Etude de la position C_f par rapport à T.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^x$

b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$. En déduire la position de C_f par rapport à T

.

5. Après avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C_f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4	6
$f(x)$										

PARTIE B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Calculer l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

PROBLEME 3:

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=e^{2x}-5e^x+4$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : Limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite D d'équation $y=4$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=(e^x-1)(e^x-4)$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie **A. 2. a)**, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

Partie C : Etude des variations de la fonction f

1. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Montrer en détaillant vos calculs, que $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4}$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.
4. A l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie **B**, donner le tableau de signes $f(x)$ sur **R**.
5. Tracer la droite D puis la courbe C_f, pour x appartenant à l'intervalle $[-4\,;2]$, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive F de f sur **R**.
2. a) Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 4$. Donner une valeur approchée au mm² près de cette aire.

PROBLEME 4:

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=e^{2x}-10e^{x}+16$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x)=(e^x-2)(e^x-8)$.
   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=2e^x(e^x-5)$
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de la fonction f sur **R**.
4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

5. a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.
   b) Construire la droite T puis, sur le même graphique, la partie de la courbe C_f correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle [-3 ; 2,2].
   c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y=16$. On mettra en évidence le point B de C d'abscisse ln 5, ainsi que la tangente à C_f en ce point.
6. a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle [0;ln 2].
   b) On considère le domaine plan D limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 2$. Calculer l'aire A du domaine D. Donner une valeur approchée de A au centième.

PROBLEME 5:

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2e^x-x-2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x)=0$ a exactement deux solutions réelles.

a. vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \le \alpha \le -1,5$.
c. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.(On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B.

   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \le \alpha \le -1,5$)
4. Etablir le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal. (Unité graphique 2 cm)

PROBLEME 6:

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{2}(2-x)\,e^x$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

1. En observant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x\,e^x$,déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)\,e^x$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Calculer la valeur exacte de f (1). En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.Montrer que la droite T a pour équation : $y = \dfrac{e^2}{2}(2-x)$.

2. a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^2}{2}(2-x) - f(x)$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x , $g(x) = \dfrac{1}{2}(2-x)\left(e^2 - e^x\right)$

b) Étudier le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x.

c) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T .

3.Tracer la droite T dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ puis,sur le même graphique, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-4\,;3]$.

Partie C

1. Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)\,e^x + \dfrac{e^2}{2}\left(2x - \dfrac{x^2}{2}\right)$.

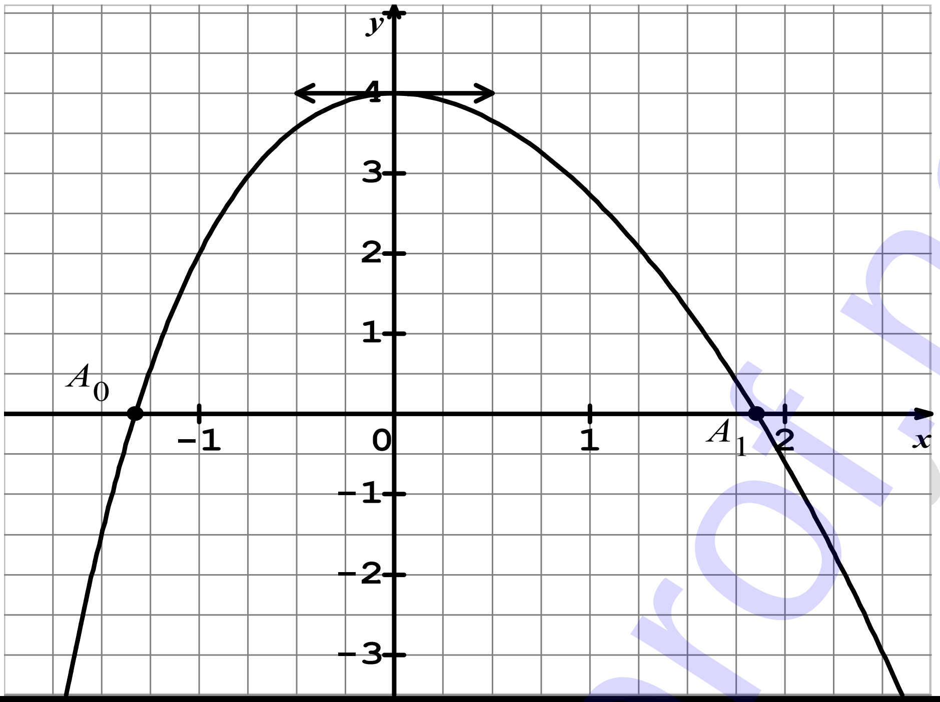
On note G' la dérivée de la fonction G sur $\mathbb{R}$. Calculer $G'(x)$, puis conclure .

2. On note D le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 2 .

a) domaine D graphique la droite T et

b) valeur exacte exprimée en du domaine

En valeur centième.



Hachurer le sur le représentant la courbe $\mathscr{C}$.

Calculer la de l'aire A , unités d'aire, D.

donner la arrondie au

PROBLEME 7:

- *Lecture graphique*
- *Introduction d'inconnues réels pour la détermination de l'expression de la fonction principale*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm. La représentation graphique C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite T sont tracées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan ci-dessous. La courbe C_f passe par les points de coordonnées $(-1\,;2)$ et (0 ; 4).La droite T , parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

PARTIE A : ETUDE GRAPHIQUE

1. Donner les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3.On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b) Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1;2]$.
4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait : $f(x)=(x+a)e^{-x}+bx^2+3$.En utilisant les résultats de la question **1.**, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur R par : $f(x)=(x+1)e^{-x}-x^2+3$
1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}-x^2+3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel, $f'(x)=-x(e^{-x}+2)$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.
      Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel x_1.

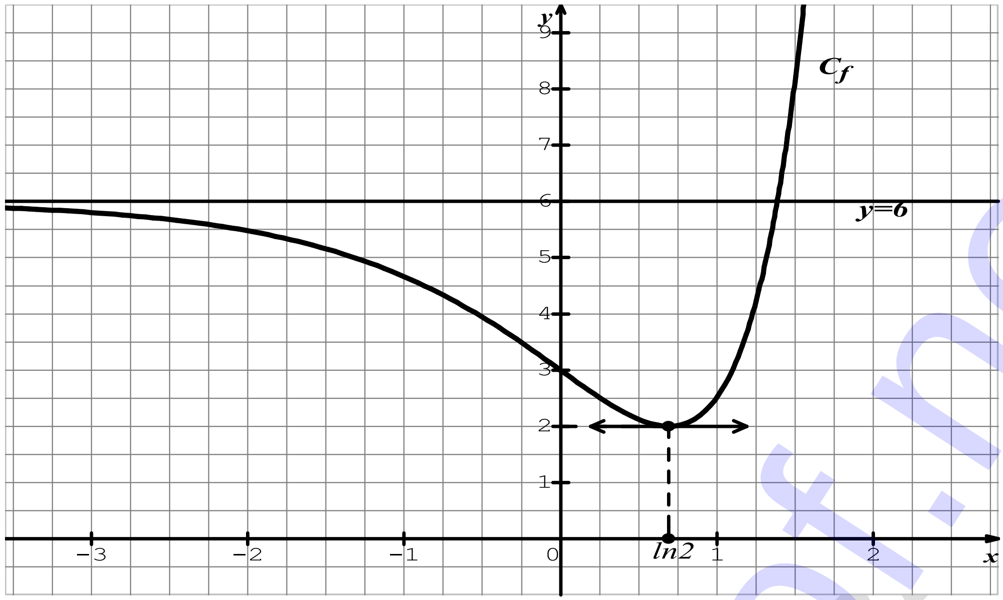
Partie C : Calcul d'une aire

1. a) On considère les fonctions g et G définies sur **R** par $g(x)=(x+1)e^{-x}$ et $G(x)=(-x-2)e^{-x}$.
      Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur **R**.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur **R**.
2. On désigne par P la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$. On appelle A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie P.
   Calculer la valeur exacte de A, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

PROBLEME 8:

- *Lecture graphique et Etude de fonction*

Partie A - Etude de la représentation graphique d'une fonction f



On donne, ci-dessus, la représentation graphique C d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm
en ordonnée. La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse ln 2. La droite d'équation y = 6 est asymptote
horizontale à la courbe C_f en $-\infty$. La courbe C_f admet une tangente de coefficient directeur -2 au point $A(0\,;3)$.Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

Partie B - On admettra maintenant que f est la fonction définie sur R par : $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+6$ et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=(e^{x}-2)^{2}+2$. Calculer $f(\ln 2)$.
2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Quelle propriété de la courbe C_f présentée dans la **partie A**, est ainsi confirmée ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B.1.**
4. a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$
   b) Résoudre sur R l'équation $f'(x)=0$.
   c) Résoudre sur R l'équation $f'(x)>0$.
   d) En déduire sur R, le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de la fonction f. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B.3.a)** et **B.4.**
5. Montrer que l'équation $f(x)=7$ admet une unique solution α sur R. Donner, en le justifiant un encadrement de α à 10^{-1} près.

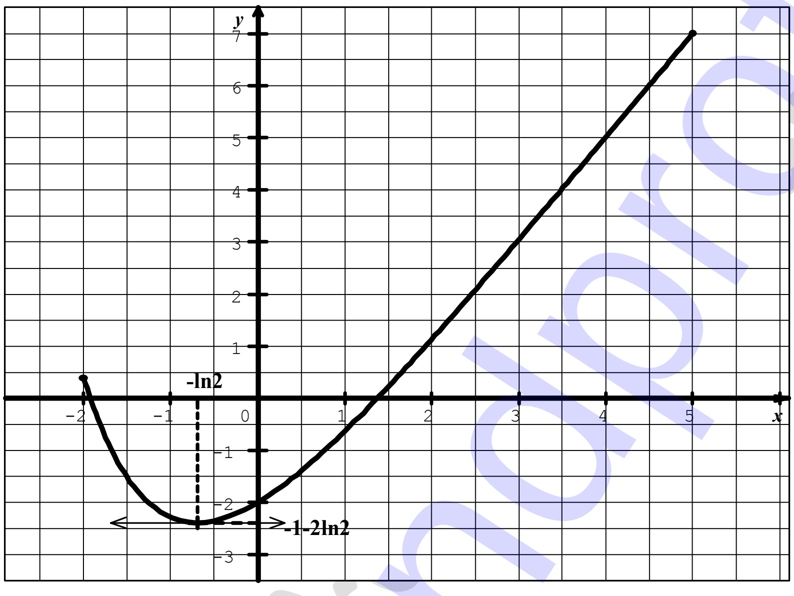
PARTIE C - CALCUL D'UNE AIRE

1. Montrer que la fonction F définie sur **R** par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{x} + 6x$ est une primitive de la fonction f sur **R**.
2. Hachurer sur la figure la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
3. Soit A l'aire en cm² de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur arrondie au centième.

PROBLEME 9:

- Fonction expo et lecture graphique

On donne ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $[-2;5]$.La tangente à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$ est parallèle à l'axe des abscisses et (D) est la droite d'équation $y = 2x - 3$.



Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer $f(0)$, $f'(-\ln 2)$.
2. a.Déterminer graphiquement le nombre de solutions,sur l'intervalle $[-2;5]$, de l'équation f (x) = 0.
 b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) < 0$.

Partie B

La fonction de la partie A est définie sur $[-2;5]$

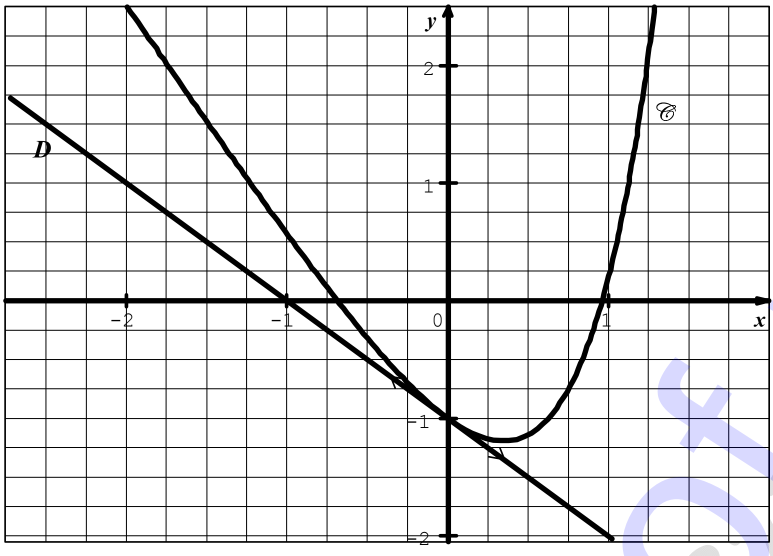
par : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

1. On note f la fonction dérivée de f . Montrer que, pour tout x de [−2;5], $f'(x) = 2 - e^{-x}$.
2. a. Résoudre algébriquement l'équation $f'(x) = 0$.
 b. Donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[-2;5]$.
 c. En déduire le tableau de variations de f .
3. On rappelle que (D) est la droite d'équation $y = 2x - 3$.
 a. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2x - 3$.
 b. Interpréter graphiquement, à l'aide de (C) et (D), le résultat précédent.

PROBLEME 10:

- Fonction expo et lecture graphique

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;2]$.



Partie A

La figure ci-dessous donne une partie de la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan, ainsi que la droite D, tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On note f' la fonction dérivée de f sur $[-2;2]$.

1. Par lecture graphique et sans donner de justification :

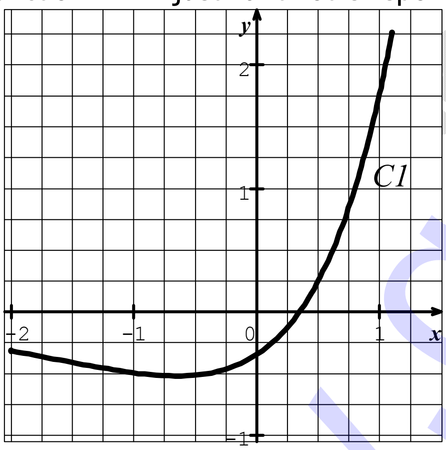
a. Déterminer f (0).

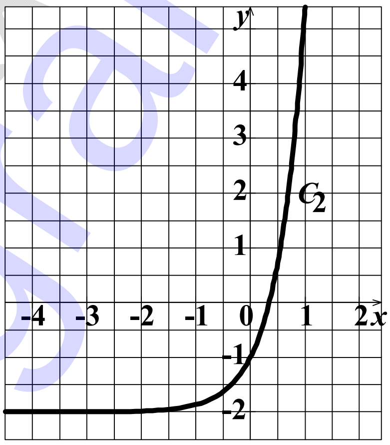
b. Donner le nombre de solutions de l'équation f (x) = 0.
Aucune valeur approchée de la (ou des) solution(s) n'est demandée.

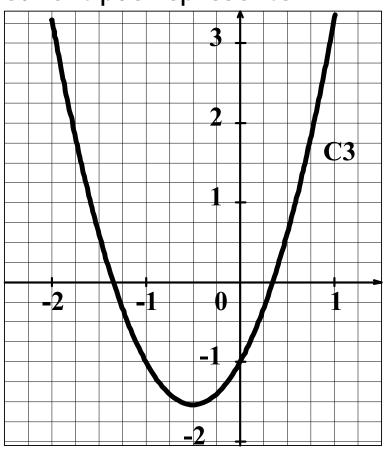
c. Donner le nombre de solutions de l'équation f '(x) = 0.
Aucune valeur approchée de la (ou des) solution(s) n'est demandée.

2. Par lecture graphique et en justifiant votre réponse, déterminer f '(0).

3. L'une des deux courbes C1, C2, C3 ci-après est la courbe de la fonction f ', fonction dérivée de la fonction f . En justifiant votre réponse, éliminer les deux courbes qui ne peuvent pas représenter f '.







Partie B

La fonction f étudiée dans la première partie est définie sur $[-2;2]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x-1{,}5$

1. Calculer $f(0)$.

2.a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

b. Résoudre dans $[-2;2]$, l'inéquation $e^{2x}-2\geq 0$

c. En déduire l'intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

PROBLEME 11:

- *Introduction d'inconnues réels pour la détermination de l'expression de la fonction principale*

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

PARTIE A : ln désigne la fonction logarithme népérien. On note E le point de coordonnées (ln 2;ln 2).

Soient a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$.

1. Calculer la dérivée de g.
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur **R** par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$.
2. En utilisant des formes de $f(x)$, calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que les droites D_1 d'équation $y = x - 2$ et D_2 d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe C_f.
4. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)^2$.
5. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .
6. Construire la courbe C_f, sa tangente en E et ses asymptotes.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur R par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$. En déduire une primitive de f .
2. Déterminer en cm², en valeur exacte puis au mm² près, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

PROBLEME 12:

- *Equations différentielles et Fonction expo*

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(E_1): y' + 2y = x$ où y désigne une fonction numérique de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_2): y' + 2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, est une solution
de l'équation différentielle (E_1).

3. On admet que toute solution φ de l'équation (E_1) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + Ce^{-2x}$ où C est un nombre réel quelconque et u la fonction définie à la question
2. Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_1) telle que : $\varphi(0) = \frac{3}{4}$.

Partie B : étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}$ .On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

2. Étude des variations de la fonction f

a. Déterminer l'expression de la dérivée f ′ de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $e^{-2x}>\frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f .

c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les droites D et T , puis tracer la courbe $\mathscr{C}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à ln2. On note $\boldsymbol{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations $x=\ln 2$ et $x=m$ .Déterminer $\boldsymbol{A}(m)$ en fonction de m.

2. Calculer la limite de $\boldsymbol{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

PROBLEME 13:

- *Equations différentielles et Fonction expo*

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unités graphiques :3 cm en abscisse et 1cm en ordonnée).

I. Résolution d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle : $y'+y=3e^{-x}+x+1$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'+y=0$

2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=3xe^{-x}+x$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3. On admet que toute solution f de l'équation (E) est de la forme $f(x)=u(x)+Ce^{-x}$ où C est une constante réelle et u la fonction définie à la question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que : $f(0)=2$.

II. Étude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x)=e^{-x}(-3x+1)+1$.

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g .

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.)

3. Calculer $g\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

III. Étude de la fonction f déterminée en I.

On rappelle que f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^{-x}(3x+2)+x$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Étude des variations de f .

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D. (On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T est parallèle à la droite D.

5. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les droites D et T. Placer les points A et B puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

IV. Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{F(x) = -f(x) - 3e^{-x} + \frac{x^2}{2} + x}$, est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'aire ***A*** en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations x = 0 et x = 1 et l'axe des abscisses. (On donnera un résultat arrondi au mm^2 .)

PROBLEME 14:

- *Equations différentielles et Fonction expo*

1. Découverte d'une fonction f

a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y est une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant f (0) = 1.

2. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 3e^x + 2x - 4$.

Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $g'(x) - g(x) = 6 - 2x$.

3.Étude de la fonction h = f −g

On considère la fonction h définie pour tout nombre réel x par $h(x) = e^{2x} - 3e^x - 2x + 4$,

et on appelle *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Vérifier que $e^x\left(e^x - 3 - \frac{2x}{e^x} + \frac{4}{e^x}\right)$ pour tout réel x et en déduire la limite de h en $+\infty$.

4. Étude en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de h en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D d'équation y = −2x+4 est asymptote oblique à *C* en $-\infty$.

c. On pose pour tout réel x, $d(x) = h(x) + 2x - 4$;

- vérifier que $d(x) = e^x\left(e^x - 3\right)$.
- étudier le signe de $d(x)$ pour tout nombre réel x.
- en déduire la position relative de la courbe *C* et de la droite D.

<u>5. Étude de la dérivée de h.</u>

a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x et vérifier que $h'(x) = \left(e^x - 2\right)\left(2e^x + 1\right)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ pour tout nombre réel x, en déduire les variations de h et dresser son tableau de variations ; on donnera la valeur exacte du minimum de h.

c. Tracer la droite D et la courbe *C* dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ pour x appartenant a l'intervalle $[-4;1,5]$.

6. Calcul d'une aire

On considère le domaine plan limité par la courbe *C* , la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 3$.

1. Hachurer le domaine sur le graphique précédent.
2. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire ***A*** du domaine J.

PROBLEME 15

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y'-2y=xe^{x}$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y=0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(ax+b)e^{x}$

a. Déterminer a et b pour que $u(x)$ soit solution de l'équation (1).

b. Montrer que $v(x)$ est solution de l'équation (2) si et seulement si $u(x)+v(x)$ est solution de (1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

d. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2e^{x}-x-2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x)=0$ a exactement deux solutions réelles.

a. vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6\le\alpha\le-1,5$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.(On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6\le\alpha\le-1,5$)

4. Etablir le tableau de variation de f .
5. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm)

PROBLEME 16

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-3$

On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (*D*) d'équation $y=2x-3$ est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) en +∞.

2. a. Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante : $f(x)=e^{-x}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$).

3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Déterminer f ′(x) et montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x}$

   En déduire le signe de f ′(x) sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. On considère le point A de la courbe ($\mathscr{C}$) d'abscisse $-\ln 3$.

   a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

   b. On note (T) la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.

   Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut −1. Déterminer l'équation de (T).

6. Construire avec soin la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites (D) .

Partie B

1. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x)=-e^{-x}+x^2-3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$. Hachurer le domaine (E).

   Soit (A) l'aire du domaine (E) en unités d'aire, calculer la valeur exacte de (A).

   Donner une valeur approchée de (A) à 10^{-2} près.
3. Calculer la valeur moyenne μ de f sur [1 ; 3]. Interpréter graphiquement cette valeur.

PROBLEME 17

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.On appelle C la courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$, où a, b et c désignent trois nombres réels tels que :

- le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe C ;
- la courbe C admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1)=2e$.

Partie A

1. Démontrer que $c=-1$.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   a.En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

   b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$).

   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x)=x(2x+5)e^x$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

   Compléter le tableau de valeur suivant , arrondir à 10^{-2} près.

x	-5	-4	-3	$-2,5$	-2	-1	0	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$										

4. Tracer la courbe C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C

On considère les fonctions F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=(2x^2-3x+2)e^x$.

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle D la partie du plan comprise entre C, l'axe des abscisses, les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1/2$.

a. Hachurer D sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire A de D puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

PROBLEME 18

- *Fonction expo et lecture graphique*

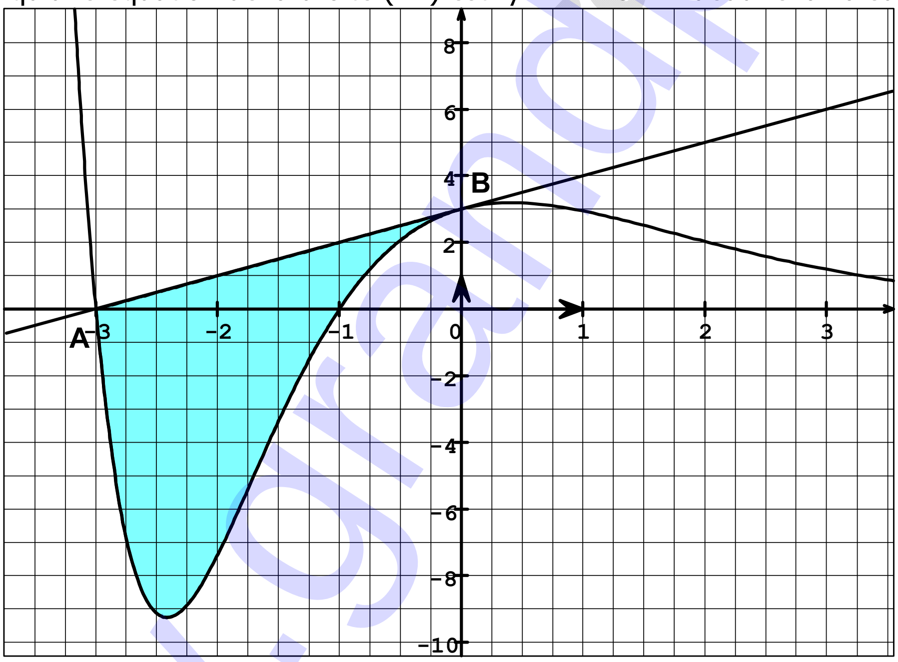
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur **R** par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.sur le graphique ci-dessous, on a représenté C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

On admet que la droite D passe par A et est tangente à la courbe C au point B.

1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B. En déduire f(–3) et f(0).

b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est: y = x + 3. En déduire la valeur de f '(0).



2.a Montrer que, pour tout x appartenant à **R**, $f'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}$.

b. En déduire f '(0) en fonction de b et c.

3.a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système

$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ b-c=1 \\ c=3 \end{cases}$$

Résoudre le système et en déduire l'expression de f(x) en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur R par $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)e^{-x}$.

1. a. Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x)=\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^2\,e^{-x}$

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe C

c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout x appartenant à **R**, $f'(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$

b. Pour tout x réel, étudier le signe de f ′(x) et dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3.Montrer que l'équation f (x) = 2 admet une solution unique α, pour x appartenant à l'intervalle $[-1;0]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur **R** par $F(x)=\left(-x^2-6x-9\right)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur **R**.

2. En déduire une primitive, G, de la fonction g définie sur **R** par g (x) = x + 3 – f (x).

3. On considère la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations x = –3 et x = 0. On désigne par A la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie. Calculer A.

PROBLEME 19

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-1)e^x+1$

I. Calculer g'(x) et étudier son signe .

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé) .

3. Déduire de la question précédente le signe de g(x)

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)e^x+x$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphiques 2cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. a. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x)=g(x)$.

b. En utilisant la partie A, déterminer le tableau de variations de f .

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée α.

b. Calculer f(1) et f(2) , puis en déduire un encadrement de α à 10^{-2} près .

4. a. Montrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

b. Etudier la position de C par rapport à Δ.

c. Montrer qu'il existe un point A de la courbe ou la tangente est parallèle à Δ.

Déterminer les coordonnées du point A.

5. Tracer la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite Δ et la tangente en A à la courbe C

6. a. On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=(x-3)e^x$, calculer $H'(x)$.

b. Soit l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par C, la droite Δ et les droites d'équations x = 0 et x = 2. Déterminer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie à 0,01 près.

PROBLEME 20

Partie A

L'objectif est de déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous est à joindre à la copie, puis d'étudier certaines propriétés de cette fonction.

PARTIE A

On a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, la courbe C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe C passe par les points de coordonnées A (0 ; 4) et B (‑1,5 ; 1).

1. Donner les valeurs de f(0) et de f (‑1,5).
2. On suppose que pour tout nombre réel x, f(x) s'écrit sous la forme suivante : $f(x)=(ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.
   Utiliser les résultats de la question 1. pour déterminer la valeur des nombres réels a et b.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+3)e^{-x}+1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x)=2\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{3}{e^x}+1$.

b. Déterminer alors la limite de f en + ∞ .
   En déduire que la courbe C a une asymptote (D) dont on donnera une équation.
c. Démontrer que cette asymptote (D) coupe la courbe C au point B.
d. Étudier, en le justifiant soigneusement, la position de la courbe C par rapport à la droite (D).
3. Prouver que la dérivée f ' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :
 $f'(x)=(-2x-1)e^{-x}$.
4. Etudier le signe de f ' (x) sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe C au point A.

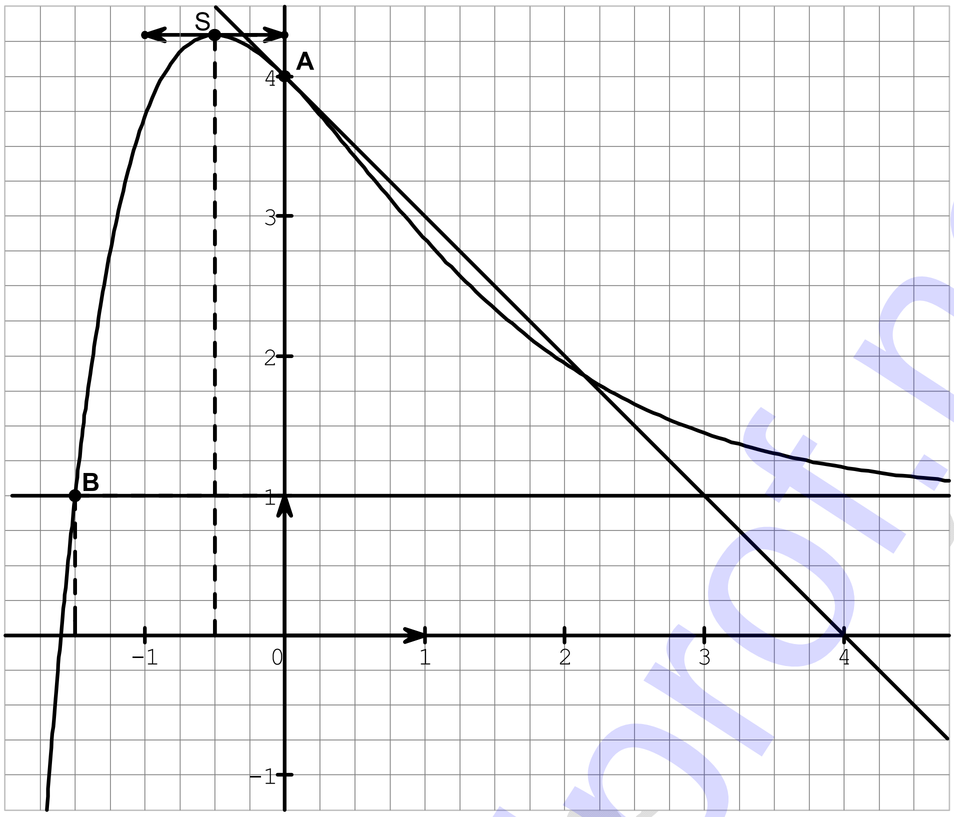
PARTIE C

1. On a représenté la courbe C dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
   Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe C au point E d'abscisse (‑0,5).
   Tracer sur la feuille annexe la tangente Δ.
   Compléter cette figure en représentant l'asymptote (D) et la tangente (T).Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation x = ‑1 et x = 0.
2. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=(-2x-5)e^{-x}+x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit A l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment.

   Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur arrondie au centième.

Annexe du problème



PROBLEME 21

Partie A

L'annexe associée à ce problème est à rendre avec la copie.

Partie A : Signe d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2x-1)e^{x}+1$.

On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

On donne, en annexe $n°1$ une partie du tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

On sait que la limite de la fonction g en $-\infty$ est 1 et que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $+\infty$.

On a de plus $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{\sqrt{e}}+1$

1. À l'aide des indications données dans l'énoncé, compléter le tableau de variations de la fonction g sur l'annexe $n°1$.
2. Calculer la valeur exacte de $g(0)$ et la noter dans le tableau de l'annexe $n°1$.
3. Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$
4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. Déduire des questions précédentes le signe de g (x) selon les valeurs de x.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^{2x}+e^{x}$.

En annexe $n°2$, on trouve la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(unités graphiques : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. La courbe C admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

Que peut-on en déduire pour la limite de la fonction f en $-\infty$?

3. On note $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x) \times e^{x}$.

4. a. En utilisant le résultat de la question 5 de la partie A, déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

c. En prenant $\alpha \approx -1,3$, déterminer une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

5. Soit S la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation : $x = 1$.

a. Hachurer la partie S sur l'annexe $n°2$.

b. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2x} + e^{x}$

Montrer que la fonction *F* est une primitive de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

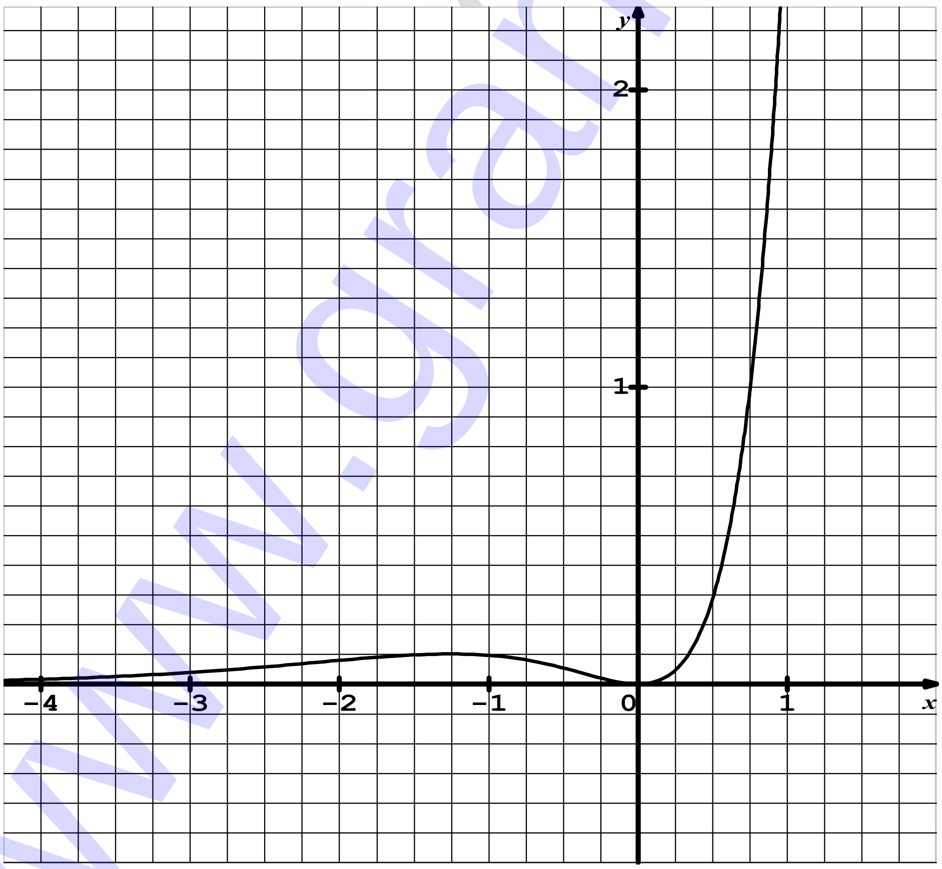
c. On note A l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie S.

Calculer la valeur exacte de A puis son arrondi à 10^{-2} près.

Annexe $n°1$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$				↗			

Annexe $n°2$



PROBLEME 22

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x)=\left(-x+\frac{7}{4}\right)e^{2x}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie I

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel *x*, $f(x)=\left(-xe^{x}+\frac{7}{4}e^{x}\right)e^{x}$

   b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $-\infty$. En déduire que la courbe *C* admet pour asymptote une droite *D*. Donner une équation de cette droite *D*.

   c. Calculer $f(7/4)$. Que peut-on en déduire pour la courbe *C* ?
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Montrer que pour tout nombre réel *x*, $f'(x)=\left(-2x+\frac{5}{2}\right)e^{2x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de *x*.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f. On reportera dans ce tableau les limites et la valeur du maximum.
5. On note T la tangente à la courbe *C* au point d'abscisse 0. Donner le coefficient directeur de la droite T .
6. Construire la tangente T et la courbe *C* .

Partie II

1. On note *F* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\left(-\frac{x}{2}+\frac{9}{8}\right)e^{2x}$

   On note F' la fonction dérivée de la fonction *F*. Calculer $F'(x)$

   Que peut-on en déduire pour la fonction *F* ?
2. On note *D* le domaine limité par la courbe *C* , l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives x = 0 et $x=\frac{7}{4}$.

   a. Hachurer *D* sur le graphique représentant la tangente *T* et la courbe *C* .

   b. Calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine *D*. En donner la valeur arrondie au centième.

PROBLEME 23

<u>Partie A : Détermination d'une fonction</u>

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, *C* la représentation graphique de la fonction

f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et f' la fonction dérivée de f .

On sait de plus que :

- la droite Δ d'équation y = 1 est asymptote à la courbe *C* en $-\infty$;
- la courbe *C* passe par le point A(0 ; 4)
- la courbe *C* admet au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les nombres réels suivants en justifiant la réponse donnée :

   a. f (0) b. $f'(1/4)$ c. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. On admet que, pour tout réel x, $f(x)=a+(bx+c)e^{2x}$ où a, b et c sont trois constantes réelles.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=(2bx+b+2c)e^{2x}$.

b. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres réels suivants :

f (0) ; $f'(1/4)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(on admet que $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$).

3. a. Déduire des questions précédentes que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} a+c=4 \\ \frac{3}{2}b+2c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

4. Résoudre ce système et donner l'expression de f (x) en fonction de x.

Partie B : étude et représentation d'une fonction

On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+(-4x+3)e^{2x}$. *C* est la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. On rappelle que la droite Δ d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe *C* en $-\infty$.
   Étudier la position de la courbe *C* par rapport à la droite Δ.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de la fonction f .
   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et établir son tableau de variations.
3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1/4;1[$.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En utilisant les résultats précédents, construire sur la feuille de papier millimétré, la droite Δ puis la courbe *C* dans le repère

Partie C : calcul d'une aire

On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=(-4x+3)e^{2x}$ et $H(x)=(-2x+5/2)e^{2x}$.

1. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle D la partie du plan comprise entre *C* ,la droite Δ d'équation $y=1$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.
   a. Hachurer D sur le graphique.
   b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm², de l'aire A de D puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

PROBLEME 24

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+3)e^{x}-1$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g.
   En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique · qui appartient à l'intervalle $]-4;0[$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de g(*x*) en fonction des valeurs de *x*.

Partie B: Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^{x}-x$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

(Unités graphiques : 4cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x$ est asymptote la courbe (C_f) en $-\infty$.

c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (Δ) et (C)

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire $f(x)=e^x\left(x+2-\frac{x}{e^x}\right)$. déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Vérifier que pour tout réel, on a $f'(x)=g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ la tangente (T) et l'asymptote (Δ)

(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathscr{R}$ par $H(x)=(x+1)e^x$.

Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathscr{R}$

2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses , la droite l'équation $x=-2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.

PROBLEME 25

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION

On note f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'unités 4 cm en abscisses
et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

2. Étude des variations de la fonction f

a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $e^{-2x}>\frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les droites D et T , puis tracer la courbe $\mathscr{C}$

Partie B : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à ln2. On note $\boldsymbol{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m$. Déterminer $\boldsymbol{A}(m)$ en fonction de m.

2. Calculer la limite de $\boldsymbol{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

Résolutions des problèmes expo

PROBLEME 1:

Partie I : Etude de la fonction f.

1. a) Limite en $+\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-5x+2)e^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-5x+2)\times\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-5x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2) = +\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x = +\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$

1. b) Limite en $-\infty$: En développant, on a : $f(x) = (2x^2-5x+2)e^x = 2x^2e^x - 5xe^x + 2e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}5xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = 0$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

2. a) Calcul de la dérivée du produit $f(x) = (2x^2-5x+2)e^x$ **:** On pose $u = (2x^2-5x+2)$ et $v = e^x$. Donc :

$u' = 4x-5$ et $v' = e^x$,donc $f'(x) = (4x-5)e^x + (2x^2-5x+2)e^x = (2x^2-x-3)e^x$

2. b) Etude du signe de $2x^2-x-3$: $\Delta = (-1)^2 - 4\times2\times-3 = 25$. donc $2x^2-x-3$ admet 2 racines réelles

distinctes : $x_1 = \frac{1-5}{2\times 2} = -1$; $x_1 = \frac{1+5}{2\times 2} = \frac{3}{2}$. Pour tout x réel, on a $e^x > 0$ donc

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad et \quad x = 1{,}5$

Le trinôme $2x^2 - x - 3$ est du signe du coefficient devant x^2, donc positif, en dehors des racines.

x	$-\infty$		-1		$1{,}5$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		+	0	–	0	+	
e^x		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	0	↗	$f(-1)$	↘	$f(1{,}5)$	↗	$+\infty$

2. c) $f(-1) = (2\times(-1)^2 - 5\times(-1) + 2)e^{-1} = (2+5+2)e^{-1} = 9e^1$ et

$f(1{,}5) = (2\times(1{,}5)^2 - 5\times(1{,}5) + 2)e^{1,5} = -e^{1,5} \approx -4{,}48$

3. a) Existence et unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur [2 ; 3] :

La fonction f est dérivable sur l'intervalle [2 ; 3]

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 3] : $f(2) = 0 < 2$ et $f(3) = 100{,}4 > 2$.

Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α sur l'intervalle [2 ; 3].

On obtient les encadrements suivants pour α : $f(2{,}08) \approx 1{,}74 < 2$ et $f(2{,}09) \approx 2{,}02 > 2$, donc

$2{,}08 \le \alpha \le 2{,}09$

4. voir graphique

Partie II: Calcul d'une intégrale.

1. Calcul de la dérivée du produit $F(x) = (2x^2 - 9x + 11)e^x$:

On pose $u = 2x^2 - 9x + 11$ et $v = e^x$. Donc : $u = 4x - 9$ et $v' = e^x$.

$F'(x) = (4x-9)e^x + (2x^2 - 9x + 11)e^x = (2x^2 - 5x + 2)e^x = f(x)$ .Donc F est une primitive de f.

2. Calcul de l'intégrale I :

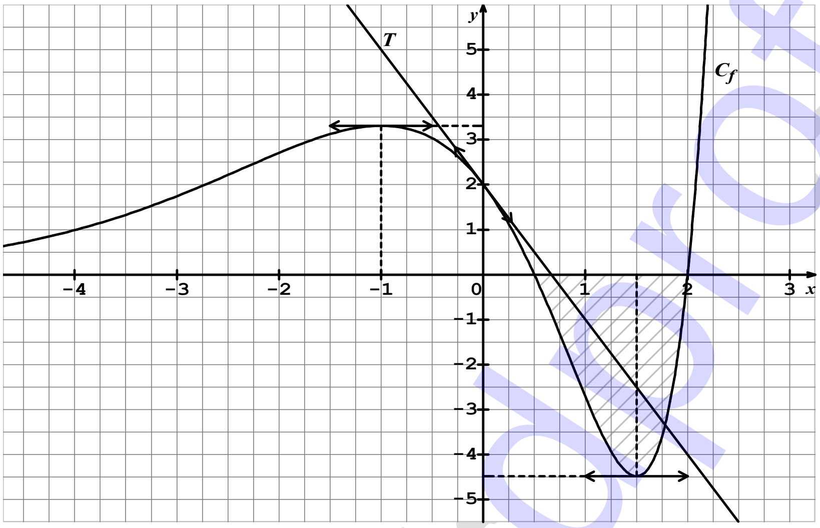
$I = \int_{0,5}^{2} f(x)dx = \int_{0,5}^{2} (2x^2 - 5x + 2)e^x dx = \left[(2x^2 - 9x + 11)e^x\right]_{0,5}^{2}$

$I = (2\times 2^2 - 9\times 2 + 11)e^2 - (2\times(0{,}5)^2 - 9\times 0{,}5 + 11)e^{0,5}$

$I = e^2 - 7e^{0,5} \approx -4{,}15$

3. Interprétation graphique de l'intégrale : On a $f(0{,}5) = 0$ et $f(2) = 0$. D'après les variations de la fonction f, on en déduit que $f(x)$ est négatif sur [0,5 ; 2]. L'intégrale I est donc égale à l'opposée de l'aire (en unités d'aires) délimitée par la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0{,}5$ et $x = 2$ (voir partie hachurée sur le graphique). L'unité d'aire associée à ce repère est égale à :

$1u.a = 2\times 2 = 4cm^2$ .L'aire de ce domaine est donc égal à : $A = -4(e^2 - 7e^{0,5}) = 28e^{0,5} - 4e^2$



PROBLEME 2:

Partie A

1. a) Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

1. b) Montrons que si x est différent de zéro, on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$:

Pour tout réel x différent de zéro, $f(x)=(x+1)^2e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=x^2e^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. a) Montrons que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$: f est dérivable sur **R**. Elle est de la forme uv, avec : $u=(x+1)^2$ et $v=e^{-x}$. u et v sont deux fonctions dérivables sur **R** et on a : $u'=2(x+1)$ et $v'=-e^{-x}$

D'où, pour tout réel x, $f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=\left[2(x+1)-(x+1)^2\right]e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}$

2. b) Etudions le signe de $f'(x)$:

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)=(1-x)(1+x)$, s'annule en 1 et -1, est négatif sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positif sur $[-1;1]$. D'où : $f'(x)$ est négative sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positive sur $[-1;1]$.

Tableau de variation de la fonction f sur **R** :

On a f (-1) = (-1 + 1)²e$^{-(-1))}$ = 0 et f (1) = (1 + 1)²e^{-1} = 4e^{-1}

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$4e^{-1}$	↘	0

3. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 :

Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, $f'(0)=1$ et $f(0)=1$. D'où : $y = 1\times(x-0)+1 = x+1$

4. a) $f(x)-(x+1)=(x+1)^2e^{-x}-(x+1)=(x+1)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]=(x+1)e^{-x}(x+1-e^{x})$:

Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^{x}$

4. b) Calculons $g'(x)$: La fonction g est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a : $g(x)=1-e^{x}$

Etudions le signe de $g'(x)$: $g'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow x\ln e<\ln 1 \Leftrightarrow x<0$

car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Donc : $g'(x)>0$ sur $]-\infty;0[$, $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ et $g(0)=0$.

4. c) Dressons le tableau de variations de la fonction g :

De la question précédente, on en déduit que g est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	$4e^{-1}$	↘	0

4. d) D'après le tableau de variations précédent, la fonction g admet un maximum sur **R** . Ce maximum est

atteint en 0 et vaut 0. Donc, pour tout réel x, $g(x)\le 0$.

Déduisons-en le signe de $f(x)-(x+1)$: Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$

Or, pour tout réel x $e^{-x}>0$, et $g(x)\le 0$. et $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Etudions le signe de $f(x)-(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	0	+	
e^{-x}		+		+		+	
$g(x)$		−	0	−	0	−	
$f(x)-(x+1)$		+	0	−	0	−	

D'où : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[$ ou sur $]0;+\infty[$ et $f(x)-(x+1)=0$ en -1 et 0.

4. e) Déduisons-en la position de C_f par rapport à T : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$,donc C_f est au-dessus

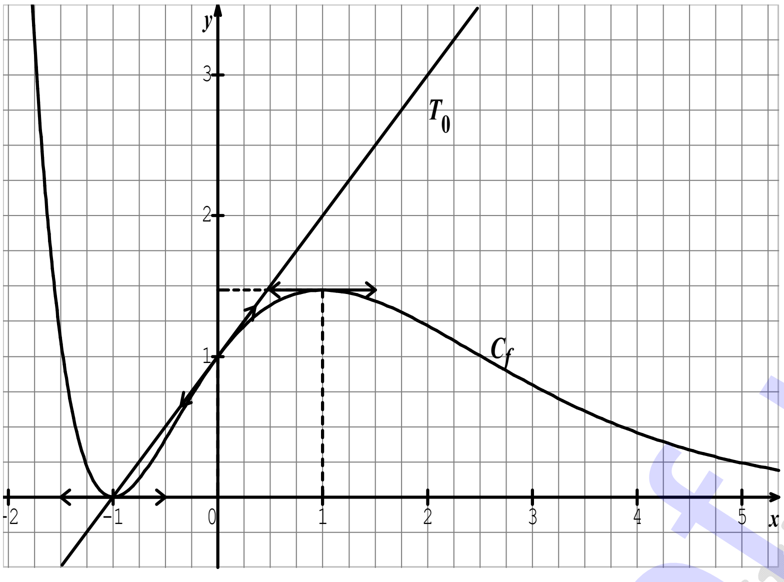
de T sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ donc C_f est en dessous de T sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$,

T et C_f se coupent aux points d'abscisse -1 et 0.

5. Complétons le tableau :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$	7,39	0	0,41	1	1,36	1,47	1,22	0,80	0,46	0,12

Traçons C_f et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:



Partie B

1.Pour tout réel x, $F(x)$ est dérivable. $F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$ .On pose : $u=-x^2-4x-5$. u est dérivable sur **R** et $u'=-2x-4$; $v=e^{-x}$. v est dérivable sur **R** et $v'=-e^{-x}$ Donc :

$F'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(-x^2-4x-5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=(1+x)^2e^{-x}=f(x)$

D'où : F est une primitive de f .

2. Sur [0 ; 3], $f(x)\geq 0$, donc l'aire cherchée est donnée par :

$I=\int_0^3 f(x)dx=[F(x)]_0^3=F(3)-F(0)\left(3^2-4\times 3-5\right)e^{-3}-\left(0^2-4\times 0{,}5-5\right)e^{-0}=26e^{-3}+5$ .Donc $\left(26e^{-3}+5\right)u.a$:

Or, 1 u.a. = 2 × 2 cm² = 4 cm², donc l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$ est égale à

$\left(26e^{-3}+5\right)u.a=4\left(26e^{-3}+5\right)cm^2\approx 14{,}82cm^2$, soit environ 14,82 cm² à 10^{-2} près.

PROBLEME 3:

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Calcul de la limite en $-\infty$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Donc la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x-1)(e^x-4)=e^{2x}-4e^x-e^x+4=e^{2x}-5e^x+4$.

2. b) Calcul de la limite en $+\infty$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-4)=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

Résolution de $f(x)=0$:
$$(e^x-1)(e^x-4)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \; ou \; e^x-4=0$$
$$\Leftrightarrow e^x=1 \; ou \; e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 1=0 \quad ou \quad x=\ln 4$$

Donc les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $0 \; et \; \ln 4$.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. a) Calcul de la dérivée, en utilisant: $f'(x)=2e^{2x}-5e^x=e^x(2e^x-5)$

1. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$. De même :

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{5}{2} \Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

2.

On obtient le tableau de signe suivant pour la dérivée :

x	$-\infty$		$\ln(5/2)$		$+\infty$
$2e^x-5$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul de

$$f(5/2)=e^{2\ln(5/2)}-5e^{\ln(5/2)}+4=e^{\ln(5/2)^2}-\frac{25}{2}+4$$

$$f(5/2)=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+\frac{16}{4}=-\frac{9}{4}$$

3. On en déduit le tableau de variations suivant :
4. On en déduit le tableau de signes suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Représentation graphique

Partie D : calcul d'une aire

1. Soit F une primitive de f : $F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x$
2. a) Soit I l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ln 4]$:

$$I=\int_0^{\ln 4} f(x)dx=\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-5e^x+4)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x\right]_0^{\ln 4}$$

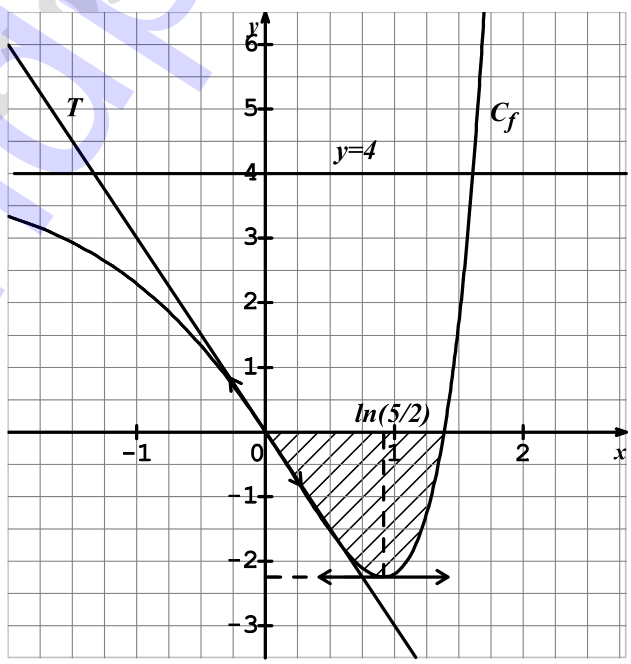
$$I=\left(\frac{e^{2\ln 4}}{2}-5e^{\ln 4}+4\ln 4\right)-\left(\frac{e^0}{2}-5e^0\right)$$

$$I=\left(\frac{e^{\ln 16}}{2}-5\times 4+4\ln 4-\frac{1}{2}+5\right)=\left(4\ln 4-\frac{15}{2}\right)$$

On a montré dans la partie précédente que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0;\ln 4]$, donc l'aire est donnée en unités d'aires par :

$$A=-I=-4\ln 4+\frac{15}{2}=7,5-8\ln 2$$

2. b) L'unité d'aire est donnée par : $1u.a=2cm^2$ donc : $A=2\times(7,5-8\ln 2)=15-16\ln 2\approx 3,91cm^2$.



PROBLEME 4

1. Limite en $-\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=16$

Donc la courbe admet une <u>asymptote horizontale</u> d'équation $y=16$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x-2)(e^x-8)=e^{2x}-8e^x-2e^x+16=e^{2x}-10e^x+16$

2. b) Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-8\right)=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3. a . Pour tout réel x, on a : $f'(x)=2e^{2x}-10e^x=2e^x(e^x-5)$.

3. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :
$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5$

De même : $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>5 \Leftrightarrow x>\ln 5$

On obtient donc le tableau de signe suivant pour la dérivée et les variations de la fonction :

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
e^x-5		$-$	0	$+$	
$2e^x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16	↘	-9	↗	$+\infty$

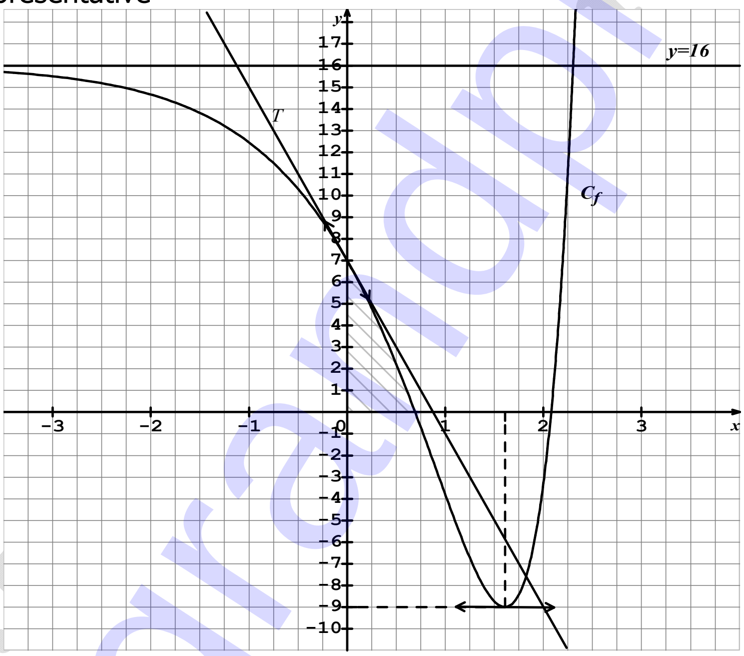
Avec : $f(\ln 5)=e^{2\ln 5}-10e^{\ln 5}+16=e^{\ln 25}-10\times 5+16$
$f(\ln 5)=25-50+16=-9$

4. **Tableau de valeurs :**

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$	**15,5**	**14,7**	**12,5**	7	**-3,8**	**-3,3**	**7,2**

5. a) Le coefficient directeur de la droite tangente au point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé en 0, c'est-à-dire $f'(0)$: $f'(0)=2e^0(e^0-5)=2(1-5)=-8$

5. b) et 5. c) Courbe représentative



6. a) $f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-10e^{\ln 2}+16=e^{\ln 4}-10\times 2+16=4-20+16=0$

Sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$ la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x)\geq 0$.

b) Calcul de l'intégrale de le fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$.

$$I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-10e^x+16)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-10e^x+16x\right]_0^{\ln 2}=\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-10e^{\ln 2}+16\times\ln 2\right)-\left(\frac{e^0}{2}-10e^0+16\times 0\right)$$

$I=\left(\frac{e^{\ln 4}}{2}-10\times 2+16\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-10\right)=\left(2-20+16\ln 2\right)-\left(-\frac{19}{2}\right)=-18+16\ln 2+9{,}5=-8{,}5+16\ln 2$. La fonction f étant positive sur $[0\,;\ln 2]$, alors l'intégrale est égale à l'aire en unité d'aires ; l'unité d'aire est égale à $2\times 0{,}5=1cm^2$ donc : $\left(-8{,}5+16\ln 2\right)cm^2$.

6. c) $\left(-8{,}5+16\ln 2\right)\approx 2{,}59\ cm^2$

PROBLEME 5

PARTIE A :

1) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-2 = +\infty}$

Ecrivons g(x) en mettant en facteur le terme qui croît le plus vite : $g(x) = e^x(2 - xe^{-x} - 2e^{-x})$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $g'(x) = 2e^x - 1 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

Signe de $g'(x)$: On a : $e^x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-ln2		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	ln2-1	$\nearrow$	$+\infty$

Rem : ln 2 - 1 $\approx -0,31$. $g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -1 + \ln 2$

3) a) $g(0) = 2e^0 - 0 + 2 = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$

b) D'après le tableau de variation de g, l'autre solution α est dans l'intervalle $]-\infty$;-ln2[.

Or sur cet intervalle, g est décroissante . La calculatrice donne :

$g(-1,6) \approx 0,004$ et $g(-1,5) \approx -0,054$

Par conséquent $g(-1,5) \leq g(\alpha) \leq g(-1,6)$ et donc $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$

4) Etude du signe de g(x) : Résumons la dans un tableau :

x	$-\infty$	α		-ln2	0	$+\infty$
g	$+\infty$	0	$\searrow$	ln2-1	0 $\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$		0	$+$

Partie B :

1) $f(x) = e^{2x} - xe^x - e^x$. Or on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ fonction composée et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

$f(x) = e^{2x}\left(1 - xe^{-x} - e^{-x}\right)$ Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :

$f'(x) = 2e^{2x} - \left[(x+1)e^x + 1\times e^x\right] = 2e^{2x} - (x+2)e^x$

Mettons e^x en facteur pour faire apparaître g(x) : $\boxed{f'(x) = e^x(2e^x - x - 2) = e^x g(x)}$

Comme, pour tout x réel, $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de g(x).

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f '(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

f	$0 \nearrow f(\alpha) \searrow 0 \nearrow +\infty$

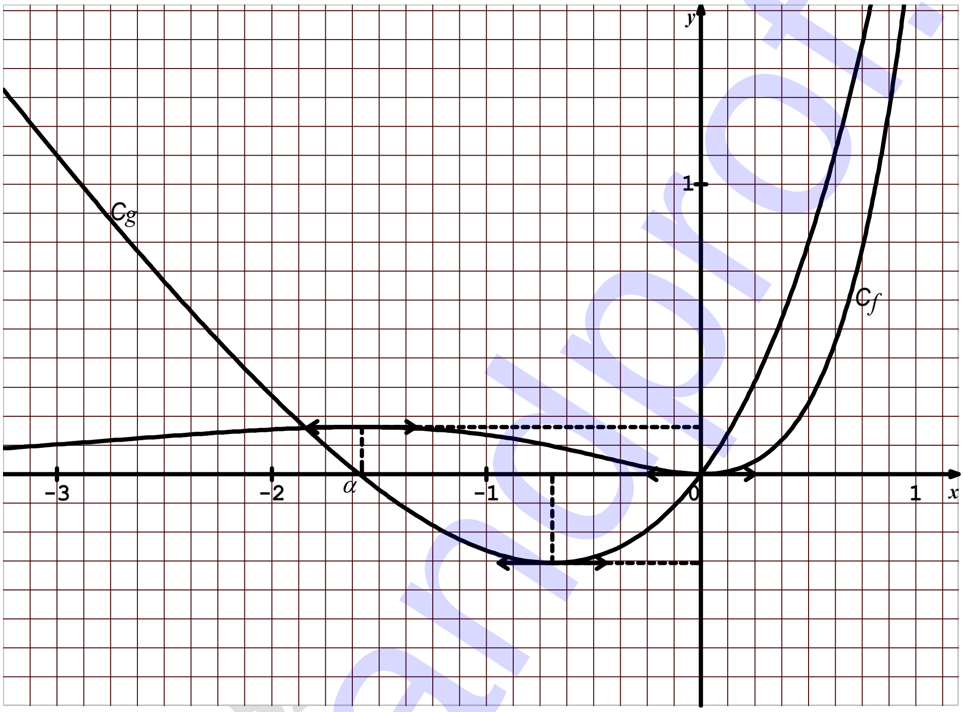
3) On sait que g(α)=0 donc $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ soit $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$.

On obtient donc $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)=\dfrac{\alpha^2+4\alpha+4}{4}-\left(\dfrac{\alpha^2+3\alpha+2}{2}\right)$

soit $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^2-2\alpha}{4}=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}}$

4) Nous l'avons déjà donné à la question 2)

5) La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et comme tangente en O.



PROBLEME 6

Partie A

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}(2-x)e^x=e^x-\dfrac{1}{2}x\,e^x$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}xe^x=0$, par conséquent, par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ .On peut donc en déduire que la courbe C admet la droite d'équation y = 0 comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{2}(2-x)\times e^x$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}(2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{2}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3. a) f est de la forme $\dfrac{1}{2}uv$ avec $u(x)=2-x$ et $v(x)=e^x$; $u'(x)=-1$ et $v'(x)=e^x$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[-1\times e^x+(2-x)e^x\right]=\dfrac{1}{2}\left[(-1+2-x)e^x\right]=\dfrac{1}{2}(1-x)e^x$.

b) Pour tout x réel $e^x>0$ donc f′(x) est du signe de (1 –x) : $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

Donc $f'(x)>0$ sur $]-\infty;1[$, $f'(x)<0$ sur $]1;+\infty[$ et $f'(1)=0$

c) $f(1)=\frac{1}{2}(2-1)\,e^{1}=\frac{e}{2}\approx 1,4$

d) Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	$f(1)$	↘ $-\infty$

Partie B

1. Équation de la tangente : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$; $f(2)=\frac{1}{2}(2-2)e^{2}=0$; $f'(2)=\frac{1}{2}(1-2)e^{2}=-\frac{1}{2}e^{2}$

$y=-\frac{1}{2}e^{2}(x-2)$ soit $y=\frac{e^{2}}{2}(-x+2)$.

2. a) $g(x)=\frac{e^{2}}{2}(-x+2)-f(x) \;=\; \frac{e^{2}}{2}(-x+2)-\frac{1}{2}(2-x)e^{x}=-\frac{e^{2}}{2}x+e^{2}-e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x}$.

On développe $\frac{1}{2}(-x+2)\left(e^{2}-e^{x}\right)=-\frac{e^{2}}{2}x+\frac{1}{2}xe^{x}+e^{2}-e^{x}$ .On trouve les mêmes expressions développées
donc l'égalité est vérifiée .

b) Étude du signe de $\frac{1}{2}(-x+2)\left(e^{2}-e^{x}\right)$

$-x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$

$e^{2}-e^{x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{2}\geq e^{x} \Leftrightarrow \ln e^{2}\geq \ln e^{x} \Leftrightarrow 2\geq x.$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	0	−
$e^{2}-e^{x}$	+	0	−
$g(x)$	+	0	+

c) D'après le tableau ci-dessus $g(x)\geq 0$ donc $\frac{e^{2}}{2}(-x+2)\geq f(x)$ pour tout x .

Donc pour tout réel x la courbe *C* est au-dessous de la tangente T.

3. Tracé ci-après

Partie C

1. $G(x)=\frac{1}{2}(x-3)e^{x}+\frac{e^{2}}{2}\left(2x-\frac{x^{2}}{2}\right)$.

$G'(x)=\frac{1}{2}\left[1\times e^{x}+(x-3)\times e^{x}\right]+\frac{e^{2}}{2}\left(2-\frac{2x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[(1+x-3)e^{x}\right]+\frac{e^{2}}{2}(2-x)=\frac{1}{2}(x-2)e^{x}+\frac{e^{2}}{2}(2-x)$

$G'(x)=-f(x)+\frac{e^{2}}{2}(-x+2)=g(x)$. On peut conclure que G(x) est une primitive de g.

2. a) Voir ci après le domaine D hachuré sur le graphique représentant la droite T et la courbe *C* .

b) *C* est au-dessous de la tangente T donc $A=\left(\int_0^2 \frac{e^{2}}{2}(-x+2)-f(x)\,dx\right)u.a=4\int_0^2 g(x)\,dx=4\left[G(x)\right]_0^2$

$\left[G(x)\right]_0^2=G(2)-G(0)=\frac{1}{2}(2-3)e^{2}+\frac{1}{2}e^{2}\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left[\frac{1}{2}(0-3)e^{0}+\frac{1}{2}\left(0-\frac{0}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}e^{2}+e^{2}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2}+3\right)$

Comme $1u.a=4cm^{2}$,donc on a : $A=\frac{4}{2}\left(e^{2}+3\right)=\left(2\,e^{2}+6\right)$cm². soit $A\approx 20,78$ cm².

PROBLEME 7:

Partie A : Etude graphique et détermination d'une fonction

1. On lit : f(0) = 4 et f(−1) = 2
2. Graphiquement, on lit : $f(x)<0$ pour $x<x_0$ et pour $x>x_1$; $f(x)>0$ pour $x_0<x<x_1$
3. a) $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Cette droite est T,
elle est horizontale, donc $f'(0)=0$.
b) f' est positive quand f est croissante et négative quand f est décroissante.
On lit donc : $f'(x)$ est positive sur $[-1;0]$; $f'(x)$ est négative sur $[0;2]$.
4. $f(x)=(x+a)e^{-x}+bx^2+3$ et $f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}+2bx$ Donc $f(0)=ae^0+3=2$, donc $a+3=4 \Leftrightarrow a=4-3=1$. $f(-1)=(-1+a)e^{-1}+b+3=2 \Leftrightarrow (-1+1)e^{-1}+b+3=2 \Leftrightarrow 0+b=2-3 \Leftrightarrow b=-1$.
On peut aussi vérifier avec $f'(0)$. Donc $f'(0)=e^0-(0+1)e^0+2b=1-1+2b\times 0=0$ $f(x)=(x+1)e^{-x}-x^2+3$

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$; et : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$;
Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad (-\infty-\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$, car $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{-x}-x^2+3\right)="0-\infty"=-\infty$

3. a) En se servant des formules : on a : $f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}-2x=-x(e^{-x}+2)$
b) Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $e^{-x}>0$ et $e^{-x}+2>0$ donc $f'(x)=-x(e^{-x}+2)$ est du signe de $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

4. a) Sur [1 ; 2], la fonction f est dérivable et strictement décroissante de $f(1)=2e^{-1}+2\approx 2{,}74$ à $f(2)=3e^{-2}-1\approx-0{,}59$ et $0\in[f(2);f(1)]$. Donc il existe donc une unique solution de l'équation $f(\alpha)=0$ sur l'intervalle [1 ; 2].
4. b) On procède par encadrements successifs : $1<\alpha<2$: $f(1{,}5)\approx 1{,}37$ donc $1{,}5<\alpha<2$; $f(1{,}8)\approx 0{,}22$ donc $1{,}8<\alpha<2$; $f(1{,}9)\approx-0{,}18$, donc $1{,}8<\alpha<1{,}9$. $f(1{,}8)\approx 0{,}03$ donc $1{,}85<\alpha<1{,}9$; donc $1{,}85<\alpha<1{,}86$

Partie C : Calcul d'une aire

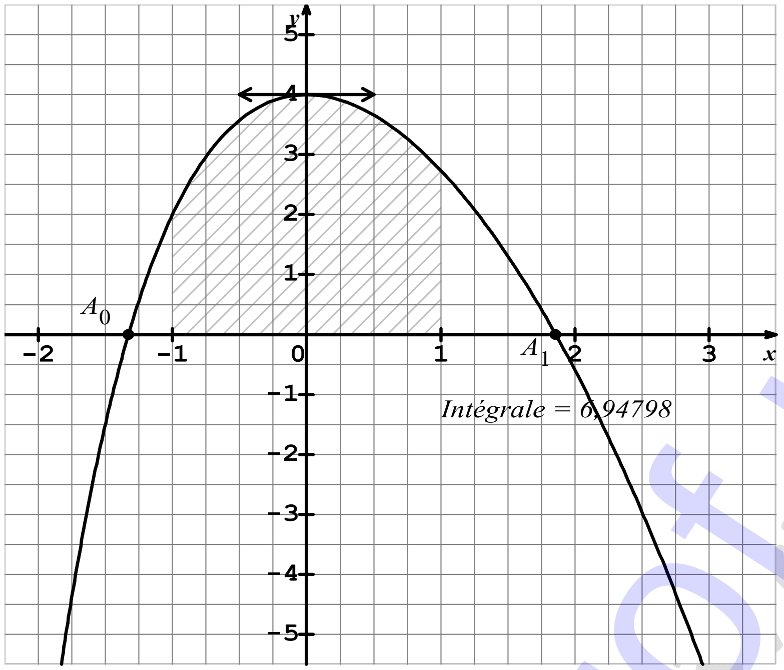
1. a) G est définie et dérivable sur ℝ et sa dérivée vaut (on utilise les formules) :
$G'(x)=-1\times e^{-x}-(-x-2)e^{-x}=(-1+x+2)e^{-x}=(x+1)e^{-x}=g(x)$
Donc G est une primitive de g sur **R**.

1. b) On en déduit que la fonction $F(x)=(-x-2)e^{-x}-\frac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de f sur **R**.

2. L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à 4 cm². De plus, f est positive sur [-1 ; 1]. Donc l'aire A est donnée par : $A=4\int_{-1}^{1}f(x)dx=4\left[F(x)\right]_{-1}^{1}=4\left(F(1)-F(-1)\right)$

Or, $\mathrm{F}(1)=(-1-2)\mathrm{e}^{-1}-\frac{1^3}{3}+3=-3\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{3}+3=-3\mathrm{e}^{-1}+\frac{8}{3}$ et $\mathrm{F}(-1)=(+1-2)\mathrm{e}^{1}+\frac{1^3}{3}-3=-\mathrm{e}+\frac{1}{3}-3=-\mathrm{e}-\frac{8}{3}$

D'où $\mathrm{A}=4\left(\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(-1)\right)=4\left(-3\mathrm{e}^{-1}+\frac{8}{3}-\left(-\mathrm{e}-\frac{8}{3}\right)\right)=4\left(\frac{16}{3}-3\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}\right)\mathrm{cm}^2$.



PROBLEME 8:

Partie A

1. La courbe passe par le point de coordonnées $(\ln 2\,;2)$ donc $f(\ln 2)=2$.
   La courbe passe par le point de coordonnées $A(0\,;3)$ donc $f(0)=3$.
2. La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$ donc $f'(\ln 2)=0$.
   La courbe admet une tangente de coefficient directeur -2 d'abscisse 0 donc $f'(0)=-2$.
3. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=6$ en $-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$.

Partie B

1. On développe : $(e^x-2)^2+2=(e^x)^2-2e^x\times 2+2^2+2=e^{2x}-4e^x+6$. Donc : $f(x)=(e^x-2)^2+2$
2. Calcul de $f(\ln 2)$: $f(\ln 2)=(e^{\ln 2}-2)^2+2=(2-2)^2+2=2$
3. a) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$
3. b) Le calcul de cette limite prouve l'existence de l'asymptote horizontale d'équation $y=6$ en $-\infty$.
4. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2)^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
5. a) $f'(x)=2e^{2x}-4e^x=2e^x(e^x-2)$
5. b) Pour tout réel x, on a $e^x>0$ donc : $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$
5. c) Pour tout réel x, on a $e^x>0$ donc : $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$
5. d) Signe de $f'(x)$ et variations de f

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2		$-$	0	$+$	
$2e^x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	2	↗	$+\infty$

6. Démontrons que l'équation $f(x)=7$ admet une solution unique sur **R**

- la fonction f est dérivable sur $[\ln 2;+\infty[$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\ln 2;+\infty[$;
- 7 est compris entre $f(\ln 2)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $f(x)=7$ admet une solution unique α sur $[\ln 2;+\infty[$.
L'équation $f(x)=7$ n'admet pas de solution sur $]-\infty;\ln 2]$ car f est dérivable et strictement décroissante
sur $]-\infty;\ln 2]$ de 6 à 2, et 7 n'appartient pas à l'intervalle [2 ; 6]. l'équation $f(x)=7$ admet une unique

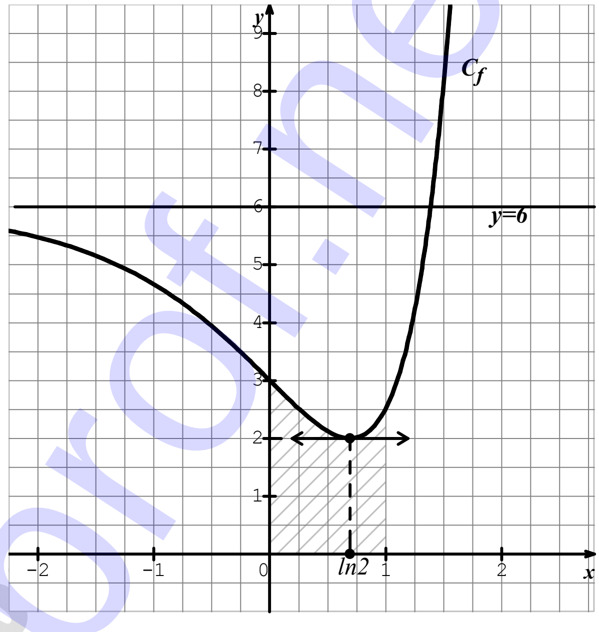
solution sur **R**. Encadrement de la solution $f(1)\approx 2,5$ et $f(2)\approx 31$, donc $1\le \alpha \le 2$
$f(1,4)\approx 6,2$ et $f(1,5)\approx 8,2$ donc $1,4\le \alpha \le 1,5$

Partie C

1. Calcul de la dérivée de F $F'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times e^{2x}-4e^{x}+6=e^{2x}-4e^{x}+6$

On a pour tout réel x : $F'(x)=f(x)$ donc F est une primitive de f sur **R**.

2. Voir courbe ci-dessous.
3. Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] .



$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (e^{2x}-4e^{x}+6)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}+6x\right]_0^1$$

$$I=\left(\frac{e^{2}}{2}-4e+6\right)-\left(\frac{e^{0}}{2}-4e^{0}\right)$$

$$I=\left(\frac{e^{2}}{2}-4e+6-\frac{1}{2}+4\right)=\left(\frac{e^{2}}{2}-4e+9,5\right)$$

La fonction étant positive sur [0 ; 1], l'aire du domaine hachuré est donné par :

$$A=u.a\times I=1\times 1,5\times\left(\frac{e^{2}}{2}-4e+9,5\right)cm^2$$

PROBLEME 9

Partie I

1. a. On lit $f(0)=-2$. Rappelons que par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.Ici, la tangente au point d'abscisse $-\ln 2$ est par hypothèse parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(-\ln 2)=0$.

b. La courbe intercepte deux fois l'axe des abscisses, l'équation $f(x)=0$ admet donc deux solutions.

c. Graphiquement, $f'(x)<0$ quand la courbe est décroissante donc $S=]-2;-\ln 2[$.

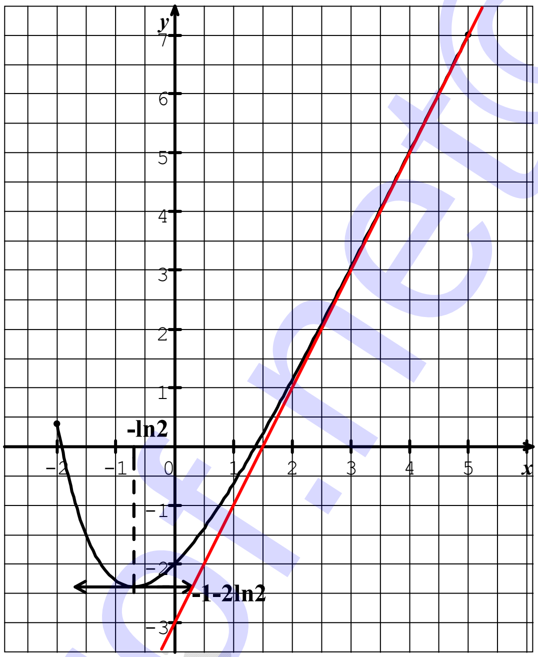
Partie II

On admet ici que $f(x)=2x-3+e^{-x}$.

1. Puisque $(e^{-x})'=-e^{-x}$, on a : $2-e^{-x}$.

2. a. Par conséquent, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2=e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2=\ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2=-x \Leftrightarrow x=-\ln 2$
ce qui est cohérent avec le graphique puisque c'est seulement au point d'abscisse – ln2 qu'il y a un tangente horizontale.

b. On a $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2-e^{-x}<0 \Leftrightarrow 2<e^{-x} \Leftrightarrow$ $\ln 2<\ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2<-x \Leftrightarrow x>-\ln 2$ qui est cohérent avec le Ic. De même, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2-e^{-x}>0 \Leftrightarrow$ $2>e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2>\ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2>-x \Leftrightarrow x<-\ln 2$.



c. On en déduit le signe de la dérivée donc les variations de la fonction :

x	-2		$-\ln 2$		5
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	e^2-7	↘	$-1-2\ln 2$	↗	$7+e^{-5}$

3. a. On a $f(x)>2x-3 \Leftrightarrow 2x-3+e^{-x}>2x-3 \Leftrightarrow$ $e^{-x}>0$: or une exponentielle est toujours positive donc cette inéquation est toujours vraie.
Ainsi, $f(x)>2x-3$ pour tout x de [-2 ;5].

b. Résoudre l'inéquation $f(x)>2x-3$ revient à étudier les positions des courbes C et D ,par conséquent, la courbe C est toujours strictement au dessus de la droite D.

PROBLEME 10

1. a. On lit $f(0)=-1$.

b. La courbe intercepte deux fois l'axe des abscisses, l'équation $f(x)=0$ admet donc deux solutions.

c. On constate que la courbe admet une seule tangente horizontale (en son sommet), l'équation $f'(x)$ admet donc une seule solution.

2. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 : cette tangente est D. Cette droite passe par les points $A(-1;0)$, $B(0;-1)$. Son coefficient directeur est donc $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1$.

3. Le tableau de variations de la fonction et le tableau de signe de la dérivée f' sont :

x	-2		α		2
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

- C_3 ne convient donc pas, le signe de la fonction qu'elle représente n'est pas celui de f'.
- C_1 ne convient pas non plus puisque $f'(0)=-1$. Ainsi, la fonction f' est représentée par C_2 .

Partie B

On admet que $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x-1,5$.

1. $f(0)=\frac{1}{2}e^{0}-2\times 0-1,5=\frac{1}{2}-1,5=-1$

2. a. nous savons que $\left(e^{ax+b}\right)'=ae^{ax+b}$ donc $f'(x)=e^{2x}-2$ (on retrouve bien $f'(0)=-1$).

b. nous avons : $e^{2x}-2\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\geq 2 \Leftrightarrow \ln(e^{2x})\geq \ln 2 \Leftrightarrow 2x\ln e\geq \ln 2 \Leftrightarrow x\geq \frac{\ln 2}{2}$

puisque la fonction ln est croissante .Donc $S=\left[\frac{\ln 2}{2};2\right]$.

c. Sur l'intervalle $\left[\frac{\ln 2}{2};2\right]$, la fonction f est croissante et le sommet a pour abscisse $\frac{\ln 2}{2}$.

$$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{1}{2}e^{\ln 2}-\ln 2-1,5=\frac{1}{2}\times 2-\ln 2-1,5=1-\ln 2-1,5=-0,5-2\ln 2$$

x	-2		$\frac{\ln 2}{2}$		2
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$0,5\times e^{-4}+2,5$	$\searrow$	$-0,5-\ln 2$	$\nearrow$	$-5,5+\frac{e^4}{2}$

PROBLEME 11

Partie A

1. On pose : $u=4e^x$ et $v=e^x+2$ d'où : $u'=4e^x$ et $v'=e^x$ Donc :

$$g'(x)=a-\frac{4e^x(e^x+2)-4e^{2x}}{(e^x+2)^2}=a-\frac{4e^{2x}+8e^x-4e^{2x}}{(e^x+2)^2}=a-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

2. La courbe passe par le point $E(\ln 2\,;\ln 2\,)$ donc : $g(\ln 2)=\ln 2$

$$a\ln 2+b-\frac{4e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)}=\ln 2\Leftrightarrow a\ln 2+b-\frac{8}{4}=\ln 2\Leftrightarrow a\ln 2+b-2=\ln 2$$

La tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses au point E, donc le coefficient directeur de cette tangente est nul, donc : $g'(\ln 2)=0\Leftrightarrow a-\frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2}=0\Leftrightarrow a-\frac{16}{4^2}=0\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$

On réutilise ensuite la relation précédente entre a et b pour trouver b :

$a\ln 2+b-2=\ln 2\Leftrightarrow b-2=0\Leftrightarrow b=2$ .La fonction g est donc donnée par : $g(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$

Partie B

1. On commence par faire apparaître l'expression $x+2$:

$$x-2-\frac{8}{e^x+2}=x+2-4+\frac{8}{e^x+2}=x-2+\frac{-4e^x-8+8}{e^x+2}=x-2-\frac{4e^x}{e^x+2}=f(x)$$

2. Limite en $-\infty$: on utilise la 1ère forme

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=\frac{4\times 0}{0+2}=0$. De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Limite en $+\infty$: on utilise la 2ème forme

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$ .De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Montrons que la droite D_1 d'équation $y=x+2$ est asymptote en $-\infty$;on utilise la 1ère forme et on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=0$ .Donc la droite D_1 d'équation $y=x+2$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe Montrons que la droite D_2 d'équation $y=x-2$ est asymptote en $+\infty$; on utilise la 2ème forme :

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$ .Donc la droite D_2 d'équation $y=x-2$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe .

3. On utilise le résultat de la partie A pour calculer la dérivée, avec $a=1$:

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x+2\right)^2-8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}$$

4. Etude du signe de la fonction dérivée :
Une exponentielle étant toujours strictement positive, le dénominateur de la dérivée est strictement positif.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$. On obtient donc le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$:
On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\left(e^x-2\right)^2$		+	0	+	
$\left(e^x+2\right)^2$		+		+	
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↗	$+\infty$

5. Représentation graphique

Partie C

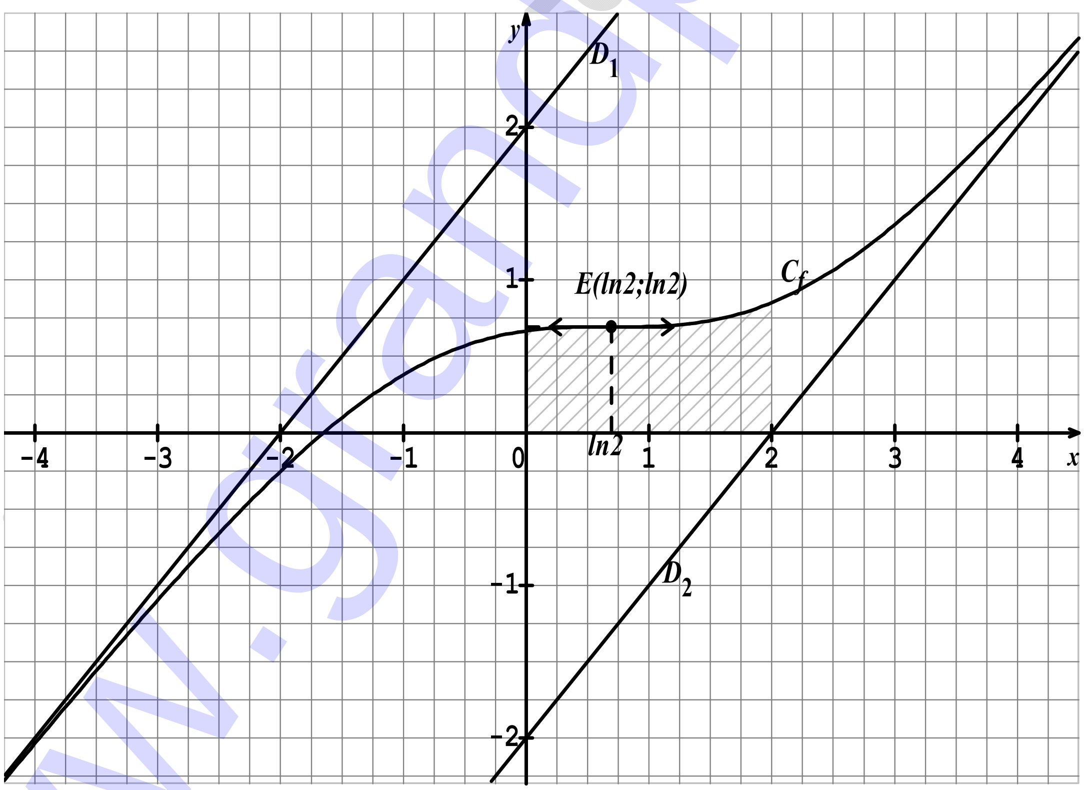
1. la fonction h est de la forme $\frac{u'}{u}=\frac{e^x}{e^x+2}$ dont une primitive est donnée par $\ln u$, avec $u=e^x+2$ donc :
$H(x)=\ln\left(e^x+2\right)$

2. On a : $f(x)=x+2+\frac{4e^x}{e^x+2}=x+2+4h(x)$ donc une primitive de f est donnée par : $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4H(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(e^x+2)$

3. L'unité d'aire associée au repère est égale à **1.u.a =2 × 2 = 4 cm²**. De plus, la fonction f est positive sur l'intervalle [0 ; 2], donc l'aire est donnée par :

$I=\int_0^2 f(x)dx =$

$I=6-4\ln\left(\frac{e^2 \ldots}{3}\right.$



PROBLÈME 12

Partie A : résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle linéaire du premier ordre sont : $y=ke^{-2x}$; $k\in\mathbb{R}$.

2. $u(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{2}$; donc $\mathrm{u'(x)+2u(x)}=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\mathrm{x}-\frac{1}{2}=\mathrm{x}$:
$u(x)$ est donc solution de (E_1).

3. $\varphi(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+ke^{-2x}$, donc $\varphi(0)=\frac{1}{2}\times 0-\frac{1}{4}+ke^{0}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow k=1$. $\varphi(\mathrm{x})=\frac{1}{2}\mathrm{x}-\frac{1}{4}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}$

<u>Partie B : étude d'une fonction</u>

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. On a $e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^{0}=1$, donc $e^{-2x}\times\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\times e^{-2x}+e^{-2x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}=f(x)$

donc $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{2x}=0$, donc
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)=1$

et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$ on a finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

c. On a $d(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=e^{-2x}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}e^{-2x}=0$. Ceci montre que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

2. Étude des variations de la fonction f

a. $\mathrm{f'(x)}=\frac{1}{2}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}$

b. $\frac{1}{2}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}=0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow-2\mathrm{x}=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 4\Leftrightarrow\mathrm{x}=\ln 2$.

$\frac{1}{2}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\geq 0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow-2\mathrm{x}\leq\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-2\ln 2\Leftrightarrow\mathrm{x}\geq\ln 2$ donc $f'(x)\geq 0$ pour $x\geq\ln 2$

$\frac{1}{2}-2e^{-2x}\leq 0\Leftrightarrow e^{-2x}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow-2x\geq\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-2\ln 2\Leftrightarrow x\leq\ln 2$ donc $f'(x)\leq 0$ pour $x\leq\ln 2$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$(\ln 2)/2$	↗	$+\infty$

c. On a $f(0)=-\frac{1}{4}+e^{0}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

$f'(0)=\frac{1}{2}-2e^{0}=\frac{1}{2}-2=\frac{-3}{2}$; une équation de la

Tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0 est donc : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$: $y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{4}$.

d. On a $\ln 2\approx 0{,}69$, donc $\ln 2<1$. Sur l'intervalle [1 ; 2] la fonction f est donc croissante.

D'autre part $f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+e^{-2}\approx 0,38<\frac{1}{2}$ et $f(2)=1-\frac{1}{4}+e^{-4}\approx 0,75>\frac{1}{2}$. Il existe donc un réel unique α de l'intervalle [1 ; 2] tel que $f(\alpha)=\frac{1}{2}$. La calculatrice donne $f(1,3)\approx 0,47$ et $f(1,4)\approx 1,51$, donc $1,3<\alpha<1,4$.De même $f(1,37)\approx 0,499$ et $f(1,38)\approx 1,503$, donc $1,37<\alpha<1,38$.

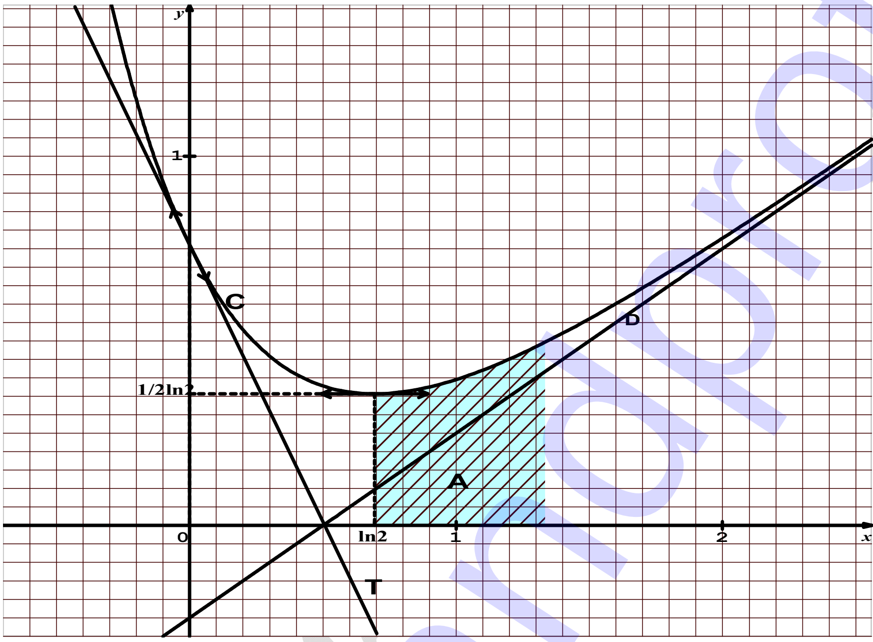
3. Voir plus bas.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On a vu que sur $]\ln 2;+\infty[$, $f(x)>0$, donc l'aire du domaine en unité d'aire est égale à

$$\boldsymbol{A}(m)=\left(\int_{\ln 2}^{m}(f(x)-y)dx\right)u.a=\left(\int_{\ln 2}^{m}e^{-2x}dx\right)u.a=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{\ln 2}^{m}u.a=\left(-\frac{e^{-2m}}{2}+\frac{e^{-2\ln 2}}{2}\right)u.a=\left(\frac{1}{8}-\frac{e^{-2m}}{2}\right)u.a$$

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2m}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{A}(m)=\frac{1}{8}$.



PROBLEME 11

I. Résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions sont de la forme $y=ke^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.

2. La fonction u définie par $u(x)=3xe^{-x}+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x)=3e^{-x}-3xe^{-x}+1$.

$u'(x)+u(x)=3e^{-x}-3xe^{-x}+1+3xe^{-x}+x=3e^{-x}+x+1$, donc u est une solution de (E).

3. Avec $f(x)=3xe^{-2x}+x+ke^{-x}$, $f(0)=2\Rightarrow f(0)=3\times 0\times e^{0}+0+ke^{0}=k=2$ $f(x)=e^{-x}(3x+2)+x$

II. Étude d'une fonction auxiliaire g

1. $g(x)=e^{-x}(-3x+1)+1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-e^{-x}(-3x+1)-3e^{-x}=e^{-x}(3x-4)$

2. Comme $e^{-x}>0$ quel que soit le réel x, $g'(x)$ est du signe de $3x-4$.

Or $3x-4>0\Leftrightarrow x>4/3$ et $3x-4<0\Leftrightarrow x<4/3$

Conclusion : sur $]-\infty;4/3[$, g est croissante et de la même façon sur $]4/3;+\infty[$ est décroissante.

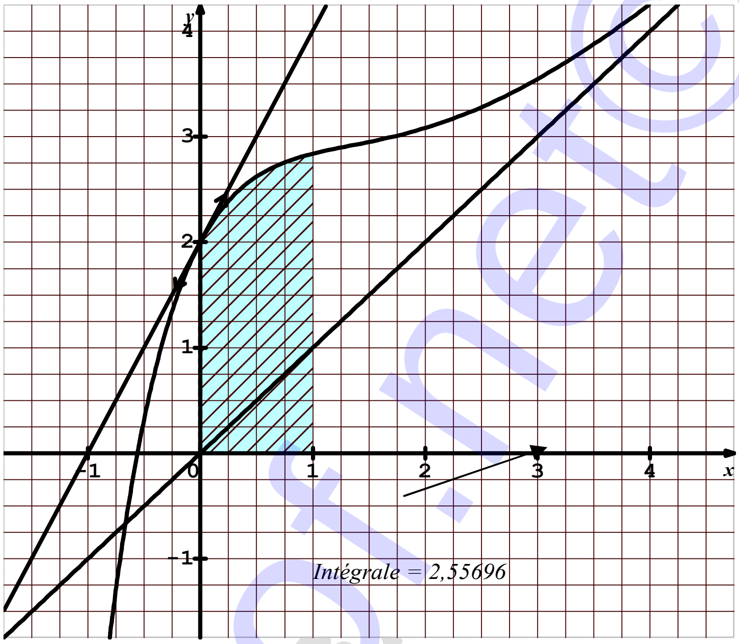
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$4/3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$f(4/3)$	↗	$+\infty$

$g(4/3)=e^{-4/3}(-3\times 4/3+1)+1=-3e^{-4/3}+1\approx 0,21>0$

Le minimum de la fonction étant supérieur à zéro, on peut en déduire que la fonction g est positive non nulle sur $\mathbb{R}$ .Donc $g(x)>0$.

III. Étude de la fonction f déterminée en I.



1. Étude des limites.

a. $f(x)=e^{-x}(3x+2)+x=3xe^{-x}+2e^{-x}+x$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} = e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ (vu formulaire) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(somme des limites)

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} = e^{-x} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+2)=3$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+2)e^{-x}=-\infty$ (produit des limites)et comme et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ par somme des limites on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2. Étude des variations de f .

a. f est une somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

donc

$f'(x)=-e^{-x}(3x+2)+3e^{-x}+1=e^{-x}(-3x+1)+1=g(x)$.

b. On a vu que pour tout réel, $g(x)>0$, donc la positivité de $f'(x)$ entraîne la croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

D'où le tableau de variations :

3. On a $f(x)-x=e^{-x}(3x+2)+x-x=e^{-x}(3x+2)$ et on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} = e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} = e^{-x}(3x+2)=0$, ce qui montre que la droite D d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe C en +∞.

La position de C par rapport à D est donnée par le signe de la différence $f(x)-x=e^{-x}(3x+2)$

Comme $e^{-x}>0$ quel que soit le réel x, $f(x)-x$ est du signe de $3x+2$.

Or $3x+2>0 \Leftrightarrow x>-2/3$ et $3x+2<0 \Leftrightarrow x<-2/3$

Donc si $x<-2/3$, C est au dessous de D et si $x>-2/3$, C est au dessus de D.

Le point commun A a pour abscisse $-2/3$.

4. La droite D a un coefficient directeur égal à 1. Il faut donc trouver le(s) point(s) de D où le nombre dérivé de f est égal à 1, soit : $f'(x)=e^{-x}(-3x+1)+1=1 \Leftrightarrow e^{-x}(-3x+1)=0 \Leftrightarrow -3x+1 \Leftrightarrow x=-1/3$

Le seul point de C où la tangente a un coefficient directeur égal à 1 est le point d'abscisse $x=-1/3$

IV. Calcul d'une aire

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F(x)=-f(x)-3e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}+x$.

$F'(x)=-f'(x)+3e^{-x}+x+1=-e^{-x}(-3x+1)+1+3e^{-x}+x+1=3xe^{-x}+e^{-x}-1+3e^{-x}+x+1$

$F'(x)=3xe^{-x}+2e^{-x}+x=f(x)$. Donc F est une primitive de la fonction f .

2. On a vu que sur $[0;1]$, la fonction f est croissante ; comme f (0) = 2, on en déduit que sur $[0;1]$, la fonction f est positive.

Conclusion : l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est égale à l'intégrale : $A=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)u.a=\left([F(x)]_0^1\right)u.a$; $A=\left(F(1)-F(0)\right)u.a$

$F(1)=-f(1)-3e^{-1}+\frac{1}{2}+1; F(1)=\frac{3}{2}-\frac{3}{e}-f(1)$; $f(1)=3e^{-1}+2e^{-1}+1=\dfrac{5}{e}+1$, donc

$F(1)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{e}-\left(\dfrac{5}{e}+1\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{e}$.

$F(0) = -f(0) - 3e^0 = -f(0) - 3$; $f(0) = 2e^0 = 2$; donc $F(0) = -f(0) - 3 = -2 - 3 = -5$
Comme l'unité d'aire est égale à
3×1 = 3 cm² l'aire est égale à $\boldsymbol{A} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{8}{e} + 5\right) = 3\left(\frac{11}{2} - \frac{8}{e}\right) cm^2$ soit environ 7,67 cm² au mm² près.

PROBLEME 13

Partie A :

1) L'équation (2) sans second membre a, d'après le cours, pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{2x}$ avec k réel quelconque.

2) a) On a $u'(x) = (ax+b)e^x + ae^x = (ax+a+b)e^x$

Donc $u(x)$ est solution de l'équation différentielle (1) $\Leftrightarrow (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x$

Comme $e^x \neq 0$ pour tout réel x, u est solution de l'équation différentielle(1)
$\Leftrightarrow ax + a + b - 2ax - 2b = x$

c'est à dire si et seulement si , pour tout x réel , $-ax + a - b = x$ soit
$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ soit $a = -1$ et $b = -1$. La fonction $x \mapsto u(x)$ cherchée est donc définie par $u(x) = -(x+1)e^x$

b) On sait que $u'(x) - 2u(x) = xe^x$. $v(x)$ est solution de (2)

$\Leftrightarrow v(x)' - 2v(x) = 0 \Leftrightarrow v(x)' - 2v(x) + u(x)' - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (v'+u')(x) - 2(v+u)(x) = xe^x$

$\Leftrightarrow (v(x)+u(x))' - 2(v(x)+u(x)) = xe^x \Leftrightarrow u(x)+v(x)$ est solution de (1)

Remarque : On peut aussi supposer que $v(x)$ est solution de (2) et en déduire que $u(x)+v(x)$ est solution de (1) puis supposer que (u+v) est solution de (1) et en déduire que v est solution de (2).

c) Soit f une solution de (1). On peut poser $f(x) = u(x) + v(x)$.(On a alors $v(x) = f(x) - u(x)$)

On sait que $u(x)+v(x)$ est solution de (1) $\Leftrightarrow$ $v(x)$ est solution de (2).

Les solutions de (1) sont donc les fonctions f définies par : $x \mapsto -(x+1)e^x + ke^{2x}$ (k $k \in \mathbb{R}$)

d) On cherche k tel que $f(0) = 0$ $\quad f(0) = 0 \Leftrightarrow -e^0 + ke^0 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

La solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto -(1+x)e^x + e^{2x}$

Partie B :

1) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-2 = +\infty}$

Ecrivons g(x) en mettant en facteur le terme qui croît le plus vite : $g(x) = e^x(2 - xe^{-x} - 2e^{-x})$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $g'(x) = 2e^x - 1 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

Signe de $g'(x)$: On a : $e^x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

<u>Tableau de variations</u> :

x	$-\infty$		-ln2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	ln2-1	↗	$+\infty$

Rem : ln 2 - 1 $\approx -0{,}31$. $g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -1 + \ln 2$

3) a) $g(0) = 2e^0 - 0 + 2 = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$

b) D'après le tableau de variation de g, l'autre solution α est dans l'intervalle]$-\infty$;-ln2[.

Or sur cet intervalle, g est décroissante . La calculatrice donne : $g(-1,6)\approx 0,004$ et $g(-1,5)\approx -0,054$

Par conséquent $g(-1,5)\leq g(\alpha)\leq g(-1,6)$ et donc $-1,6\leq \alpha \leq -1,5$

4) Etude du signe de g(x) : Résumons la dans un tableau :

x	$-\infty$		α		-ln2		0		$+\infty$
g	$+\infty$	↘	0		ln2-1	↗	0		$+\infty$
signe de $g(x)$		+	0	–			0	+	

Partie C :

1) $f(x)=e^{2x}-xe^{x}-e^{x}$. Or on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ fonction composée et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$

$f(x)=e^{2x}\left(1-xe^{-x}-e^{-x}\right)$ Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :

$f'(x)=2e^{2x}-\left[(x+1)e^{x}+1\times e^{x}\right]=2e^{2x}-(x+2)e^{x}$

Mettons e^{x} en facteur pour faire apparaître g(x) : $\boxed{f'(x)=e^{x}(2e^{x}-x-2)=e^{x}g(x)}$

Comme, pour tout x réel, $e^{x}>0$, $f'(x)$ est du signe de g(x).

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	0	+	
f	0	↗	f(α)	↘	0	↗	$+\infty$

3) On sait que g(α)=0 donc $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ soit $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$.

On obtient donc $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)=\dfrac{\alpha^2+4\alpha+4}{4}-\left(\dfrac{\alpha^2+3\alpha+2}{2}\right)$

soit $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^2-2\alpha}{4}=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}}$

4) Nous l'avons déjà donné à la question 2)

5) La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et comme tangente en O.

PROBLEME 17

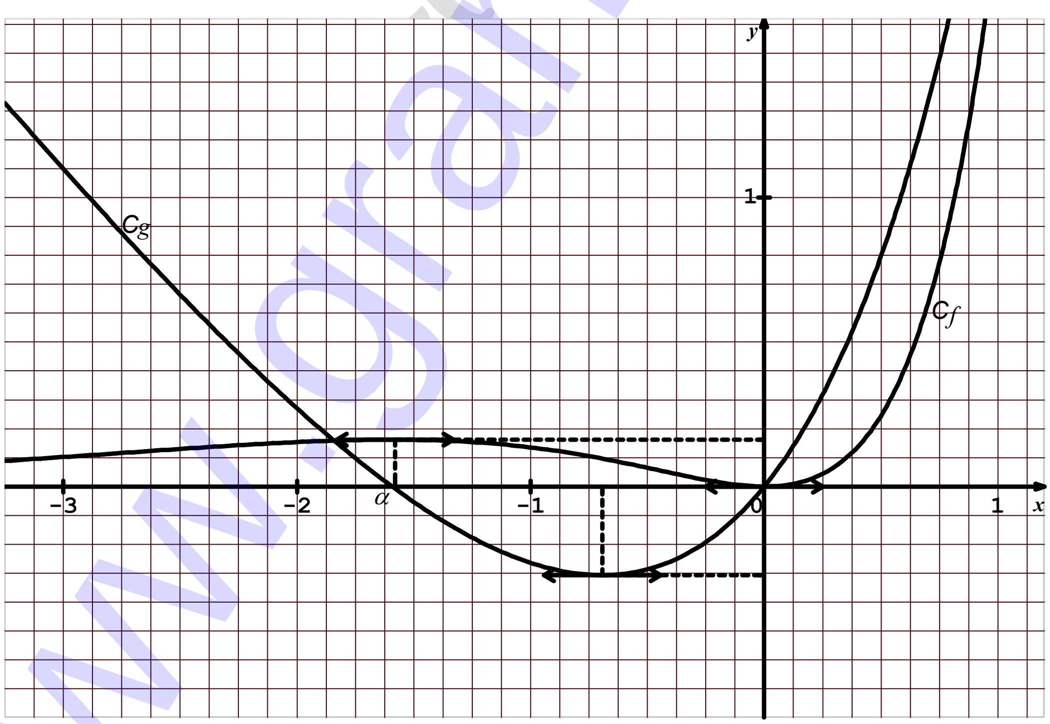
Partie A :

1. • le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe C signifie que $f(0)=-1$

• la courbe C admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses signifie que $f'(0)=0$

• $f(1)=2e$.

On va convertir ces



hypothèses sous forme d'équation :

La première condition se traduit par : $f(0)=(a\times 0+b\times 0+c)e^{0}=c=-1$

2. Calculons la fonction dérivée de f : on a :

$f'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=(ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$.

$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$

La deuxième condition se traduit par : $f'(0)=(b+c)e^0=0$, donc $b+c=0$ et $b=-c=1$

$f(1)=2e$ se traduit par : $f(1)=(a+b+c)e^1=2e$, donc $a+b+c=2$, donc $a=2-b-c=2-1+1=2$.

Partie B

1. $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+x-1)=2\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, comme produit des limites .

2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ et $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x=2x^2e^x+xe^x-e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.On déduit que la droite d'équation

$y=0$ est une asymptote horizontal à la courbe *C* au voisinage de $-\infty$.

3. $f'(x)=(2x^2+(4+1)x)e^x=x(2x+5)e^x$, donc $f'(x)=x(2x+5)e^x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x(2x+5)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ x=-5/2$, puisque ($e^x>0$)

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	

4. $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$: $f(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^2+x-1\right)e^x=0\Leftrightarrow\left(2x^2+x-1\right)=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-1)=9>0$, donc on a : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-3}{2\times2}=-\dfrac{4}{4}=-1$ et

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ f(-1)=0 \text{ et } f(\frac{1}{2})=0$$

par conséquent la courbe *C* coupe l'axe des abscisses en deux points A et B des coordonnées respectives

$A(-1;0)$ et $B(1/2;0)$.

x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$f(x)$	$0{,}3$	$0{,}45$	$0{,}70$	$0{,}74$	$0{,}68$	$0{,}45$	0	$-0{,}60$	-1	0	$1{,}85$	$5{,}44$

Partie C

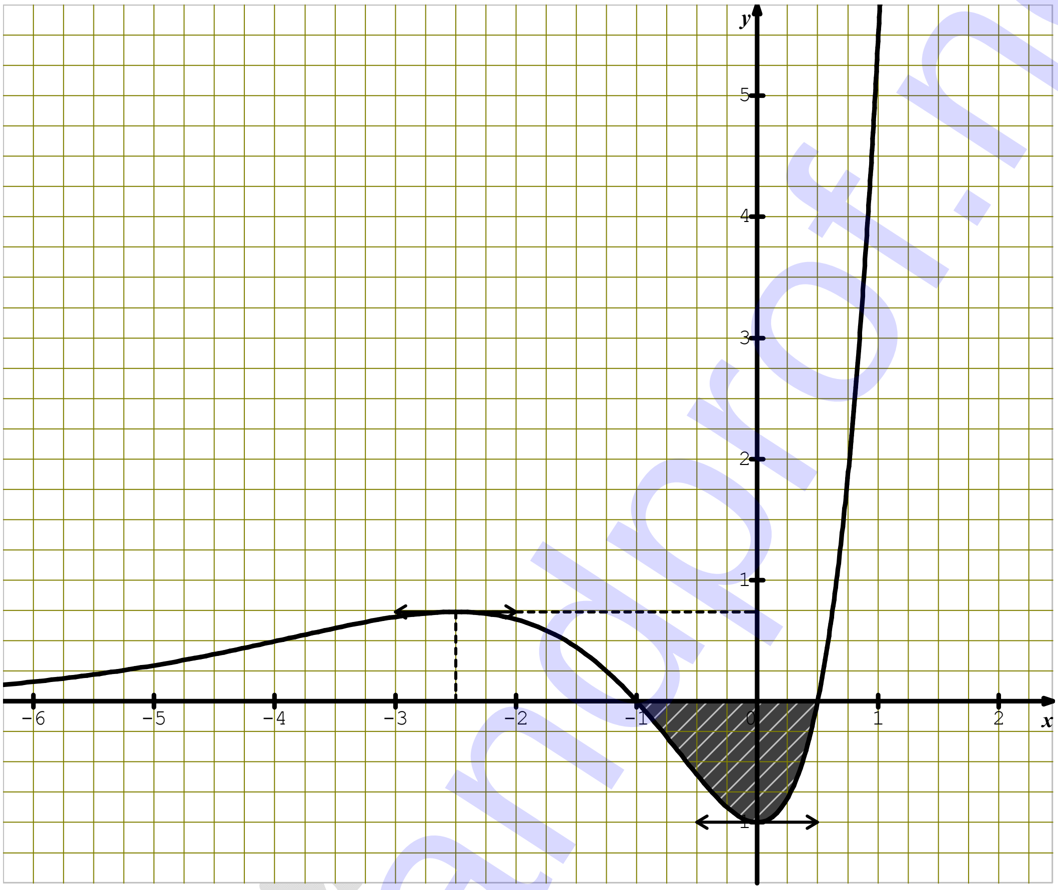
$F(x)=(2x^2-3x+2)e^x$: $F'(x)=(4x-3)e^x+(2x^2-3x+2)e^x=(2x^2+4x-3x+2-3)e^x=(2x^2+x-1)e^x$

On déduit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La courbe *C* est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1;1/2]$, donc $f(x)\le0$ sur cet intervalle et on a : $A=-\left(\int_{-1}^{1/2}f(x)\right)u.a=\left(-\left[F(x)\right]_{-1}^{1/2}\right)\times 4=4\left(F(-1)-F(1/2)\right)$

$F(-1)=(2+3+2)e^{-1}=\dfrac{7}{e}$ et $F(1/2)=(2\times(1/2)^2-3/2+2)e^{1/2}=\left(1/2-3/2+2\right)\sqrt{e}=\sqrt{e}$

$A=4\left(\dfrac{7}{e}-\sqrt{e}\right)cm^2\approx 3,706cm^2$



PROBLEME 18

Partie A :

1. a) Les coordonnées du point A sont (‑3, 0) et celles du point B sont (0,3).

Comme les points A et B appartiennent à la courbe C_f alors $f(-3)=0$ et $f(0)=3$.

b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a=\dfrac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}=\dfrac{3-0}{0-(-3)}=1$ d'où a = 1

De plus l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est 3. Donc l'équation de la droite (AB) est : $y=x+3$.

2. a) $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$. Posons $u(x)=ax^2+bx+c$; $v(x)=e^{-x}$ $u(x)=2ax+b$ $v'(x)=-e^{-x}$

Comme f = $u\,v$ alors f' = $u'\,v$ + $v'\,u$. On a donc pour tout réel x :

$$f'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=\left((2ax+b)-(ax^2+bx+c)\right)e^{-x}=\left(2ax+b-ax^2-bx-c\right)e^{-x}$$

D'où $f'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}$.

b) On en déduit : $f'(0)=b-c$.

3. a) $f(-3)=0$ équivaut à $f(-3)=(9a+3b+c)e^{3}=0\Rightarrow 9a+3b+c=0$ car e $^{-3}$ · 0.

$f(0)=3$ équivaut à $f(0)=ce^{0}=c=3$ .Comme la droite (AB) est tangente à la courbe C_f en B alors le coefficient directeur de cette tangente est $f'(0)$. Comme $f'(0)=1$ alors on a $b-c=1$.

On obtient donc le système suivant : $\begin{cases}9a-3b+c=0\\ b-c=1\\ c=3\end{cases}$

b) On en déduit le système d'équations vérifiées par a, b et c :
On obtient successivement les systèmes d'équations suivants:

$\begin{cases}9a-3b+c=0\\ b-c=1\\ c=3\end{cases}$ $\begin{cases}9a-12+3=0\\ b=4\\ c=3\end{cases}$ $\begin{cases}9a=9\\ b=4\\ c=3\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\ b=4\\ c=3\end{cases}$ On en déduit $f(x)$ = (x^2 + 4x + 3) e^{-x}.

PARTIE B

1. a) Pour tout x · 0 $f(x)=\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)x^2e^{-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)=0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$.

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_f.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$ D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2. a) Comme $f'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}$ et que a = 1, b = 4 et c = 3

alors $f'(x)=\left(-x^2+(2-4)x+4-3\right)e^{-x}=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$. Soit $f'(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$.

b) $f'(x)$ est du signe de $-x^2-2x+1$ car $e^{-x}>0$ pour tout réel x.

Pour étudier le signe de $-x^2-2x+1$, il faut calculer le discriminant puis les racines éventuelles.

$\Delta=8$ $x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{-2}$ $x_1=-1+\sqrt{2}$

ou $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{-2}$ $x_2=-1-\sqrt{2}$

$f'(x)$ ≺ 0 pour x appartenant à l'intervalle
$]-\infty;-1-\sqrt{2}]\cup[-1+\sqrt{2};+\infty[$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		··	0	+	0	·	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$f(-1+\sqrt{2})\approx 3,2$	↗	$f(-1-\sqrt{2})\approx -9,2$	↘	0

f ' (x) = 0 pour x appartenant à l'intervalle $\left[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right]$.Il en résulte le tableau de variation de la fonction f.

c) L'ordonnée de chacun des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses

est $f(-1-\sqrt{2}) \approx -9{,}2$ à 10^{-1} près par défaut et $f(-1+\sqrt{2}) \approx 3{,}2$ à 10^{-1} près pas excès.
3. *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0]$ de plus *f*(-1) = 0 et *f*(0) = 3..Comme 2 appartient à l'intervalle [0 ; 3] alors il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle [-1 ; 0] solution de l'équation $f(x)=2$. A l'aide d'une calculatrice on en déduit que $-0{,}53 \le \alpha \le -0{,}52$
En effet, *f*(-0,53) ≈ 1,972 et *f*(-0,52) ≈2,002.

PROBLEME 23

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE.

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{R}$ par : $g(x)=e^x(x+3)-1$

1) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

$g(x)=x\,e^x+3e^x-1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-1=0-1=-1$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$. On déduit que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe
C au voisinage de $-\infty$.

2) $g'(x)=e^x(x+3)+e^x$; $g'(x)=e^x(x+3+1)$; $g'(x)=e^x(x+4)$. $g'(x)$ est du signe de $x+4$ car $e^x>0$,
on en déduit que : g est strictement décroissante sur $]-\infty;4]$ et g est strictement croissante sur $[4;+\infty[$.
Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	
$g(x)$	-1 ↘	$-e^{-4}-1$	↗ 2	$+\infty$

3) Comme la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]-4;0[$ et que $g(-4)$ et $g(0)$ sont de signes contraires alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-4;0[$ $(g(-4)=-e^{-4}-1<0$
et $g(0)=e^0(0+3)-1=3-1=2>0)$

4) On en déduit des questions précédentes que : $g(x)\le 0$ si et seulement si $x\le\alpha$ et $g(x)\ge 0$ ssi $x\ge\alpha$

PARTIE B : ETUDE D'UNE FONCTION ET TRACE DE SA COURBE REPRESENTATIVE.

Soit f la fonction définie par $f(x)=-x+(x+2)e^x$

1) a) $f(x)=-x+xe^x+2e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2e^x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x+2\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=+\infty+0=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) $f(x)-(-x)=(x+2)e^x=xe^x+2e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=0$ alors la droite (D) d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$

c)Les positions relatives de (D) et (C_f) sont données par le signe de $(x+2)$ car $e^x>0$.On en déduit que (C_f) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $[-2;+\infty[$

2) $f(x)=e^x\left(-\dfrac{x}{e^x}+(x+2)\right)$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$

alors $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x}+(x+2)\right)=+\infty$ .On a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) $f'(x)=-1+e^x+(x+2)e^x=-1+(x+3)e^x$ d'où $f'(x)=g(x)$

.

4) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) L'équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0 est : $y-f(0)=f'(0)x$

avec $f(0)=2$ et $f'(0)=2$ .D'où : $y=2x+2$

6) A l'aide d'une calculatrice on obtient : $\alpha=-0,79$ à 10^{-2} près par défaut et $f(\alpha)=1,34$ à 10^{-2} près par excès.

7) Voir courbe

Partie C : Calcul d'une aire.

1) $H(x)=(x+1)e^x$. $H'(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$.

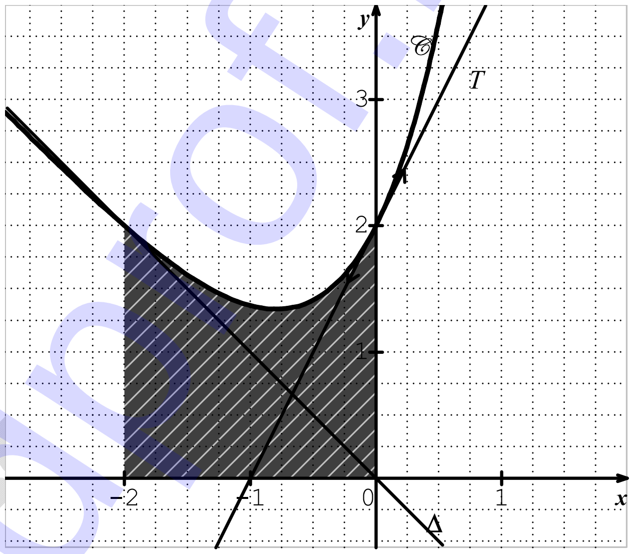
On en déduit une primitive F de f

$$F(x)=-\frac{x^2}{2}+(x+1)e^x$$

2) $$A=\int_{-2}^{0} f(x)dx=[F(x)]_{-2}^{0}=\left[-\frac{x^2}{2}+(x+1)e^x\right]_{-2}^{0}$$

$A=1-(-2-e^{-2})=3+e^{-2}$ unités d'aire.

On a donc $A=\left(3+e^{-2}\right)\times 6$ cm² soit $A=\left(18+6e^{-2}\right)$ cm² C'est-à-dire 18,81 cm² à 10^{-2} près par défaut



PROBLEME 25

Partie B : étude d'une fonction

1. a. $\lim_{x\to+\infty} -2x=-\infty$ et $\lim_{u\to-\infty} e^u=0$ et comme $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. On a $e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^0=1$, donc $e^{-2x}\times\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\times e^{-2x}+e^{-2x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}=f(x)$

donc $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ Or $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$, $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x}=0$, donc $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)=1$

et comme $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty$ on a finalement : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

c. On a $d(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=e^{-2x}$ et $\lim_{u\to+\infty} e^{-2x}=0$. Ceci montre que la droite D d'équation

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

est asymptote à la courbe C en +∞.

2. Étude des variations de la fonction f

a. $f'(x)=\frac{1}{2}-2e^{-2x}$

b. $\frac{1}{2}-2e^{-2x}=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -2x=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 4 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

$\frac{1}{2}-2e^{-2x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x}\leq\frac{1}{4} \Leftrightarrow -2x\leq\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-2\ln 2 \Leftrightarrow x\geq\ln 2$ donc $f'(x)\geq 0$ pour $x\geq\ln 2$

$\frac{1}{2}-2e^{-2x}\leq 0 \Leftrightarrow e^{-2x}\geq\frac{1}{4} \Leftrightarrow -2x\geq\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-2\ln 2 \Leftrightarrow x\leq\ln 2$ donc $f'(x)\leq 0$ pour $x\leq\ln 2$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(\ln 2)/2$	$\nearrow$	$+\infty$

c. On a $f(0)=-\frac{1}{4}+e^{0}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

$f'(0)=\frac{1}{2}-2e^{0}=\frac{1}{2}-2=\frac{-3}{2}$; une équation de la Tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0 est donc : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$: $y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{4}$.

d. On a $\ln 2\approx 0,69$, donc $\ln 2<1$. Sur l'intervalle [1 ; 2] la fonction f est donc croissante.

D'autre part $f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+e^{-2}\approx 0,38<\frac{1}{2}$ et $f(2)=1-\frac{1}{4}+e^{-4}\approx 0,75>\frac{1}{2}$.

Il existe donc un réel unique α de l'intervalle [1 ; 2] tel que $f(\alpha)=\frac{1}{2}$.

La calculatrice donne $f(1,3)\approx 0,47$ et $f(1,4)\approx 1,51$, donc $1,3<\alpha<1,4$.

De même $f(1,37)\approx 0,499$ et $f(1,38)\approx 1,503$, donc $1,37<\alpha<1,38$.

3. Voir plus bas.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On a vu que sur $]\ln 2;+\infty[$, $f(x)>0$, donc l'aire du domaine en unité d'aire est égale à

$$\boldsymbol{A}(m)=\left(\int_{\ln 2}^{m}\left(f(x)-y\right)dx\right)u.a=\left(\int_{\ln 2}^{m}e^{-2x}dx\right)u.a=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{\ln 2}^{m}u.a=\left(-\frac{e^{-2m}}{2}+\frac{e^{-2\ln 2}}{2}\right)u.a=\left(\frac{1}{8}-\frac{e^{-2m}}{2}\right)u.a$$

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2m}=0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{A}(m)=\frac{1}{8}$.

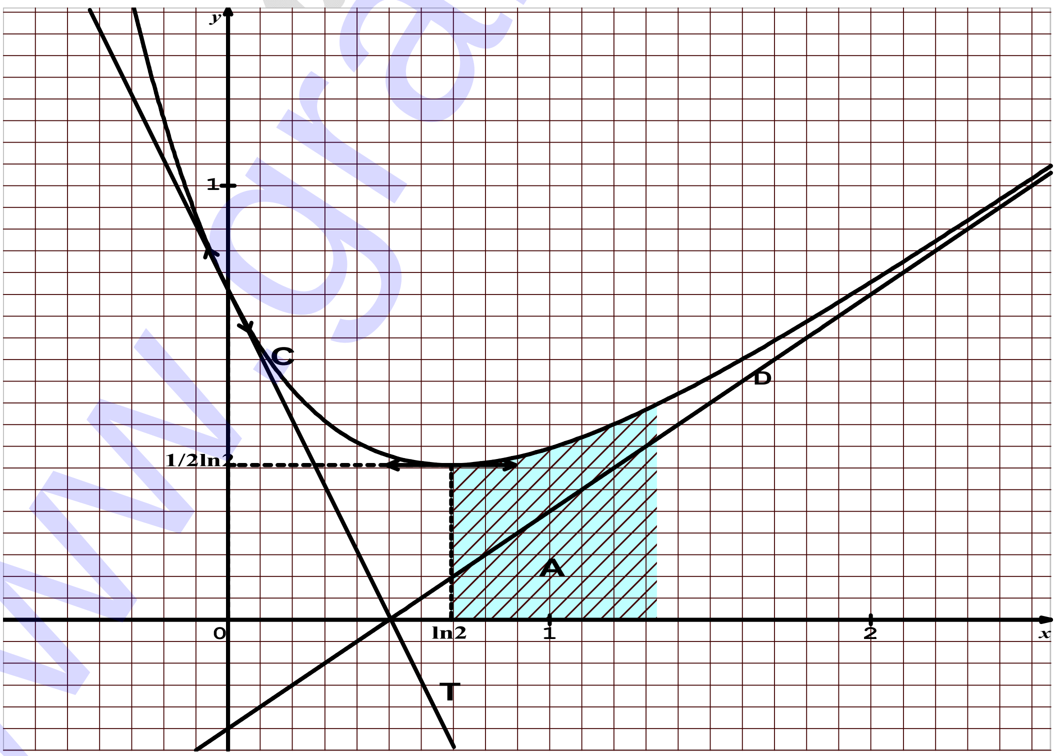
Problèmes de recherches non résolus

Problème exp non résolus

PROBLEME 1

Le plan *P* est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (L'unité graphique est 5 cm.)

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$



On note C la courbe

représentative de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$.

I - **Étude d'une fonction auxiliaire**

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^{x}(x-2)-1$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étude des variations de g
   a) Calculer la fonction dérivée g'de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Résolution de l'équation $g(x)=0$
   a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution,notée α ,appartenant à l'intervalle [1 ; 3].
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   c) vérifier que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$ (on pourra utiliser $g(\alpha)=0$)
4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

II - Étude de la fonction f

1. Étude de la limite en $+\infty$.
   a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{1+x\,e^{-x}}$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Étude des variations de f
   a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}+x)^{2}}$ où g est la fonction définie en 1.
   b) Déduire de la question I.4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   c) Calculer $f(\alpha)$ en fonction de α et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.
4. Construire la courbe *C* et la droite *D* dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note B l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées
et la droite d'équation x = 1.

1. Hachurer sur le graphique le domaine B.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[.
3. En déduire la valeur exacte de B, puis une valeur approchée arrondie au

PROBLEME 2

- *Extrait bac blanc I.S.T.A.S série F2 2014*

Le pan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).unité graphique : 2cm

On considère la fonction f de R dans R définie par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ C désigne la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$

1. Vérifier que pour tout x élément de R, $f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ et $f''(x)=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$
2. Calculer g'(0) et g(0)
3. a. Etudier le sens de variation de la fonction g
   b. Expliciter le signe de g'(x) suivant les valeurs de x
4. Expliciter le signe de g(x) suivant les valeurs de x

PARTIE B

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Démontrer que la fonction f est impaire.
   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent
3. a. Etudier le sens de variation de f
   b. Etablir le tableau de variation de f .
4. a. Vérifier que la droite (T) : $y=\frac{1}{2}x$ est tangente à (C) au point 0
   b. Etudier la position relative de (C) et (T). (On pourra utiliser la partie A)
5. Tracer (T) puis construire (C) avec soin.
6. a. Démontrer que f définit une bijection de R dans $]-1;1[$
   b. Calculer (h^{-1}) (0) où h^{-1} est la bijection réciproque de h.
7. a. Construire la courbe représentative (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).
   b. Pour tout y de $]-1;1[$ exprimer h^{-1} (y) en fonction de y.

PARTIE C

1. a. Vérifier que pour tout x de R : $f(x)=1-2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$
   b) En déduire une primitive F de f de f sur R
1) Calculer l'aire A_1 du domaine du plan compris entre (C), la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation x=1
3. Hachuré sur le graphique, le domaine du plan dont les coordonnées (x ; y) des points vérifient : $0\le x\prec 1,\ 0\le y\prec 1$ et $f(x)\le y\le h^{-1}(x)$
4. Calculer l'aire A_2 du domaine précédent. (On utilisera A_1 et un carré précis).

PROBLEME 3

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :f(x) = $e^{2x} - e^x$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel x, on a :$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a. Calculer f'(x) pour tout réel x et étudier son signe.
b. Calculer f(-ln 2). On détaillera les calculs.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite T et la courbe C_f .

PROBLEME 4

On considère la fonction f définie sur R par :f(x) = $e^{2x} - e^x - 6$

On note *f'* sa fonction dérivée sur R.

1. a. Calculer *f'*(*x*) et montrer que l'on a pour tout nombre réel *x* : *f'*(*x*) = $e^x(2e^x - 1)$

b. Étudier les variations de la fonction *f* sur R.

2. a. Calculer la limite de *f* en -∞.

b. Calculer la limite de *f* en +∞ (on pourra mettre en facteur le nombre e^x dans l'expression de $f(x)$).

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* en précisant les limites de *f*.

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction *f* sur R est égal à **Error!**

c. D'après le tableau de variation de la fonction *f*, quel est le nombre de solutions sur R de l'équation (E_1) suivante : (E_1) : $f(x) = 0$. Tracer la droite T et la courbe C_f .

PROBLEME 5

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels R par :$f(x) = e^{-x} + 2x - 3$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

b. Déterminer la limite de la fonction f en -∞.

On pourra établir au préalable que pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{-x} (1 + 2xe^x - 3e^x)$

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (C).

b. Étudier la position relative de la droite (d) par rapport à la courbe (C).

3. Étude des variations de la fonction f

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, f'(x) = **Error!**

où f' est la dérivée de la fonction f.

b. Résoudre dans R l'équation d'inconnue x :$f'(x) = 0$

c. Etudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur R.

d. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

e. Calculer f(1) et déterminer le signe de f(x) pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

4. Tracer la droite (d) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

PROBLEME 6

Partie A

On note g la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par :$g(x) = e^{-x}(-3x + 1) + 1$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur R, et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de g en +∞ et en -∞).

3. Calculer g(**Error!**) et en déduire le signe de la fonction g sur R.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble R des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x + 2) + x$$

On note C sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de f en +∞.

b. Déterminer la limite de f en -∞.

2. Étude des variations de f.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C en +∞, et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite D. (On notera A leur point d'intersection.)

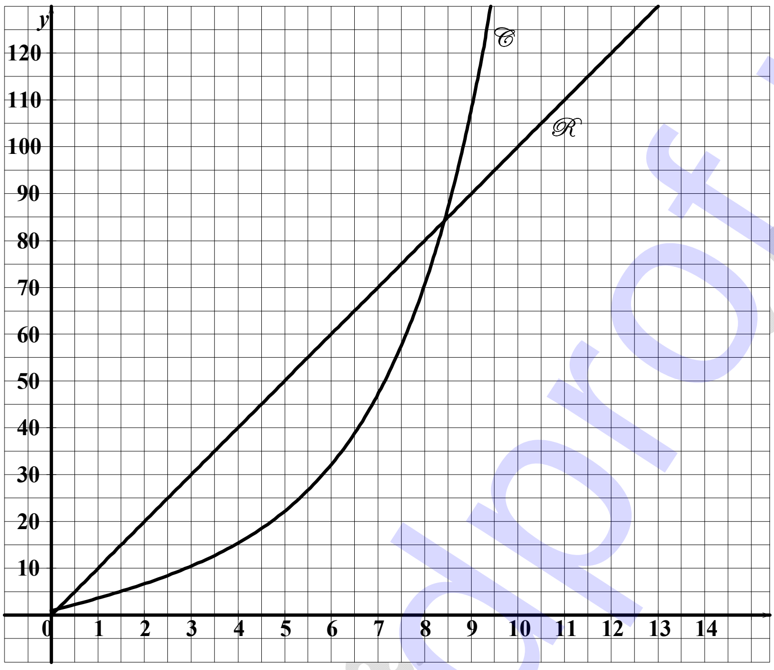
4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C où la tangente T est parallèle à la droite D .

5. Tracer, dans le repère (O, I, J), les droites D et T . Placer les points A et B puis tracer la courbe C .

PROBLEME 7

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A
Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs. On désigne par x, le nombre de centaines de sacs fabriqués par jours dans l'entreprise .Le coût de fabrication de x centaines de sacs, exprimé en centaines d'euros, est donné par $C(x)=2x+e^{0,5x}$.
Chaque sac est vendu 10 euros , on note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, correspondant à la vente de x centaines de sacs : $R(x)=10x$.
Partie 1 : lecture graphique



Voici les représentations graphiques des fonctions $\mathscr{C}$ et R.
1. parmi ces deux représentations graphiques , quelle est celle de la fonction R ?
2. à l'aide du graphique, recopier et compléter le tableau suivant :

x			8
$C(x)$	10		
$R(x)$		40	

3. Arrondi à la centaine de sacs, combien de centaines de sacs faut-il fabriquer pour que l'entreprise soit certaine d'être bénéficiaire ?

Partie 2
On note $B(x)$ le bénéfice journalier, exprimé en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise
1. Montrer que $B(x)=8x-e^{0,5x}$
2 .a. Calculer $B'(x)$. La notation B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
   b. Montrer que dans $[0;15]$, résoudre $B'(x)\leq 0$ revient à résoudre $e^{0,5x}\geq 16$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0;15]$.
   d. En déduire la valeur exacte de x pour laquelle B admet un maximum.
      On donnera une valeur arrondie de cette valeur exacte à 10^{-2} près .
3. En déduire la valeur maximale du bénéfice arrondi à l'euro.

PROBLEME 7

Partie A
I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1000[$ par : $f(x)=0,5x+e^{-0,5x+0,4}$
1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;1000[$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1000[$ et vérifier que f admet un minimum en 0,8.

II. Une entreprise fabrique des objets. f (x) est le coût total de fabrication, en milliers d'euros, de x centaines d'objets. Chaque objet fabriqué est vendu 6 € .

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût total de fabrication soit minimum?
2. Vérifier que le bénéfice, en milliers d'euros, obtenu par la vente de x centaines d'objet est : $B(x)=0,1x-e^{-0,5x+0,4}$.

a. Étudier les variations de B sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Montrer que l'équation $B(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0;1000[$.
Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

c. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets.

PROBLEME 8

Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle $2y'+y=0$, dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels R. y′ désigne la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant f (2) = e.
Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=e^{2-x/2}$.
3. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x)=(2x+1)[f(x)]^2-9$.
Montrer que $g(x)=(2x+1)e^{4-x}-9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par *C* la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de g (x) lorsque x tend vers −∞.
2. a. Montrer, que pour tout nombre réel x, $g(x)=2e^4xe^{-x}+e^4e^{-x}-9$.
   b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de g (x) lorsque x tend vers −∞.
   c. En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
3. a. On désigne par g ′ la fonction dérivée de la fonction g .Montrer que pour tout réel x,
   $g'(x)=(1-2x)e^{4-x}$.
   b. Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. a. Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.
   b. Démontrer que l'équation g (x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [−1 ; 0].
   c. Donner l'arrondi au centième de α .
5. Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe *C* au point d'abscisse 4.
6. a. Compléter le tableau de valeurs de g qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie. On arrondira les valeurs à l'unité.
   b. Tracer la droite Δ, la droite D, puis la courbe *C* , dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=(-2x-3)e^{4-x}-9x$ .est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g .
2. a. Hachurer la partie H du plan délimitée par la courbe *C* , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 4.

b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie H du plan.

c. En déduire en cm² la valeur arrondie au centième de l'aire de H .

On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée

PROBLEME 9

Partie A: Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E): y'+5y=5x^3+3x^2+5$, où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+5y=0$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=ax^3+b$, soit solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=ke^{-5x}+x^3+1$ où k est un nombre réel.
   a) Vérifier que h est solution de l'équation (E).
   b) Déterminer le réel k tel $h(0)=2$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3e^{-5x}+x^3+1$.

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   b) Établir que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; 1].
   c) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α.
   d) Déterminer selon les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x^3+1$. La représentation graphique Γ de la fonction u, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.
   a) On pose, pour tout réel x $d(x)=f(x)-u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la courbe Γ.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire

On appelle P la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1/2$ et $x=1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie P du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire A de la partie P du plan.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation unités en ordonnée

PROBLEME 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$ .On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en +∞.

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif *x*, $f(x)=\frac{e^x}{x}(x\ln x+1)$

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$. En déduire la limite de *f* en 0.

b. Montrer que la courbe *C* admet une asymptote D dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$

1. a. On désigne par g' la dérivée de la fonction g .

Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif *x*, $g'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}$

b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction *g* est strictement croissante sur l'intervalle]0 ;+∞[.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1/2;1]$

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. Déduire des questions B1° et B2° le signe de $g(x)$, pour *x* appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=e^x g(x)$, pour tout nombre *x* appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[.

b. En déduire le signe de *f'*(*x*) sur l'intervalle]0 ;+∞[.

2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

b. Calculer une valeur approchée à 10.1 près de $f(\alpha)$, en prenant 0,6 pour valeur approchée de α .

3. a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5
$f(x)$ à 10^{-2} près									

b. Construire l'asymptote D et la courbe *C* pour *x* appartenant à l'intervalle]0 ; 2,5].

4. Montrer que la fonction *F*, définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par $F(x)=e^x\ln x$ est une primitive de f .

5. On désire calculer l'aire de la partie E du plan comprise entre la courbe *C* , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de E en unités d'aires, puis en cm^2 .

PROBLEME 11

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-x}-x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f

Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; l].

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Préciser le signe de f(x) sur l'intervalle [0 ; l].

Partie B : Calcul de Faire d'une partie du plan

La représentation graphique *C* de la fonction f, dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie D limitée par la courbe *C* l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l' aire de la partie D du plan.

Partie C: Étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty;\alpha[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}$ (où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B) et on note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Vérifier que, pour tout $x\in]-\infty;\alpha[$ $g(x)=\dfrac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$

b) En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

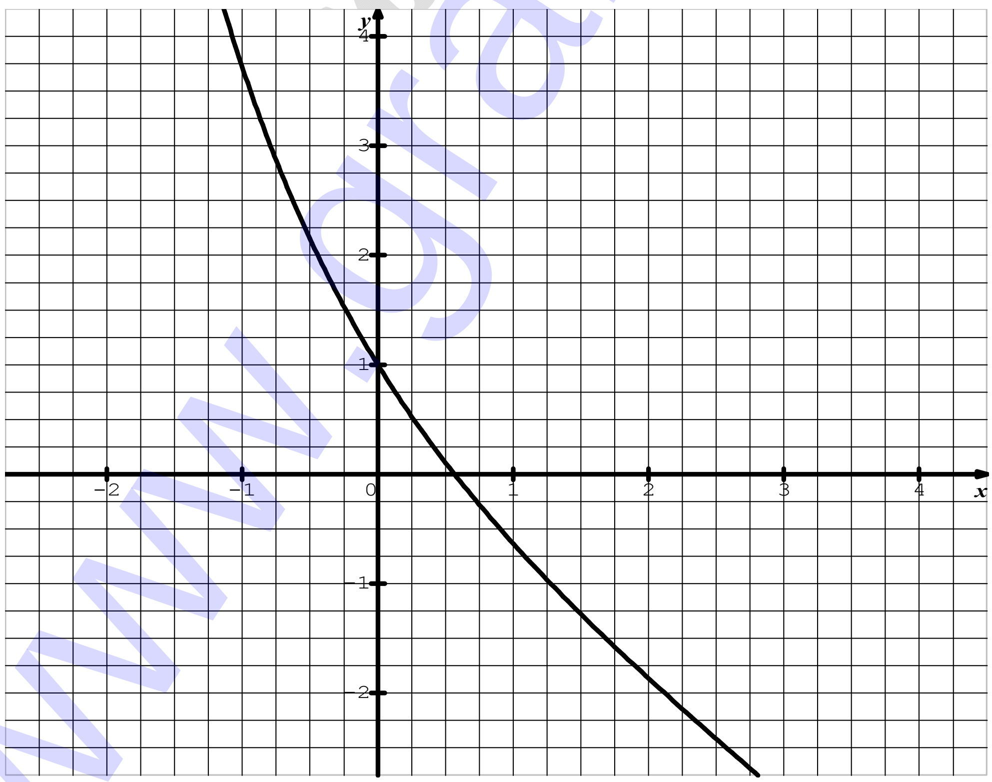
2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α. Interpréter graphiquement cette limite.

3. a) La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout $x\in]-\infty;\alpha[$:

$$g'(x)=\frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}-x)^2}$$

b) En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty;\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

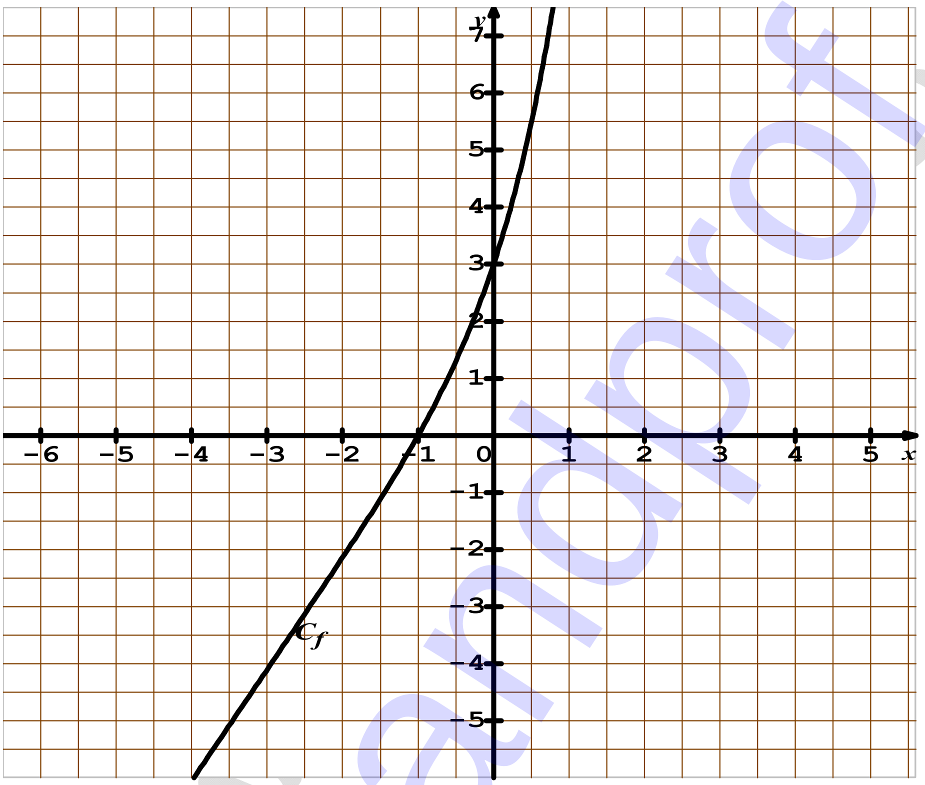
4. Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie



PROBLEME 12

A. Etude d'une fonction

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{x}+2x+2$. Sa courbe représentative est donné dans un repère orthogonal ci –dessous



I. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant
à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
$y=x+1$	$y=2+2x$	$y=2$

3. a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x)=3+4x+\frac{3}{2}x^{2}+x^{2}\varepsilon(x)$$

Pour les question 3b 3c, une seule réponse A , B, C est exacte indiquer sur la copie
La lettre correspondant à la réponse choisie .On ne demande pas unejustification
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse0 est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*

$y=3$	$y=3+4x$	$y=\frac{3}{2}x^2$

c) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
Au dessus de la tangente T pour tout x	Au dessous de la tangente T pour tout x	Au dessous de la tangente T quand $x<0$ et au dessus quand $x>0$

B. Calcul intégral

1. On note $I=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx$. Montrer que $I=4$

2.On note $J=\int_{-1}^{1}(x+1)e^{x}dx$. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e+e^{-1}$

3.a) On note $K=\int_{-1}^{1}f(x)dx$, où f est la fonction définie dans la partie B .

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b) Donner la valeur de K arrondie à 10^{-2}.

c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1;1]$, $f(x)\geq 0$.

Donner une interprétation graphique d e K.

PROBLEME 13

Partie A : Etude d'une fonction exponentielle

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=(2x-1)e^{-x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) En écrivant, pour tout réel x, $f(x)=2xe^{-x}-e^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe C ?

2.

a)Calculer la fonction dérivée f'de la fonction f, puis démontrer que, pour tout réel x $f'(x)$ est du signe de $(-2x+3)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3.

a) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

b) Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T ') à la courbe C aux points d'abscisses $3/2$ et $1/2$.

c) Tracer (T), (T ') et la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie B : Détermination d'une primitive

1.Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=-f'(x)+2e^{-x}$.

2.En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

PROBLEME 14

Partie I

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=e^{2x}-e^{x}$. On appelle f' la fonction dérivée de f et C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm. On remarquera que, pour tout réel x, on a $e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
4. Tracer la droite T et la courbe C.

Partie II

1. étudier le signe de f (x) suivant les valeurs du réel x.
2. Calculer $I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$.
3. On considère la partie D du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations x = 0 et x = ln2. Hachurer la partie D sur le graphique.
   Déterminer l'aire de D. On exprimera le résultat en centimètres carrés.

Etude d'une fonction à partir d'un(e): -Tableau de variation -representation graphique

PROBLEME 1

x	0	2	$+\infty$
f'(x)		0	
f'(x)	1 ↗	4	↘ $-\infty$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus

2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

PROBLEME 2

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	
f'(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus
2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

PROBLEME 3

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	
f'(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus
2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

PROBLEME 4

x	0		2		5		$+\infty$
f'(x)			0		0		
f'(x)	1	↗	4	↘	-4	↗	-2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus
2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

PROBLEME 5

x	0		-1		2		$+\infty$
f'(x)		-		+		-	
f'(x)	1	↘ 0		$-\infty$ ↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘	-2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus
2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

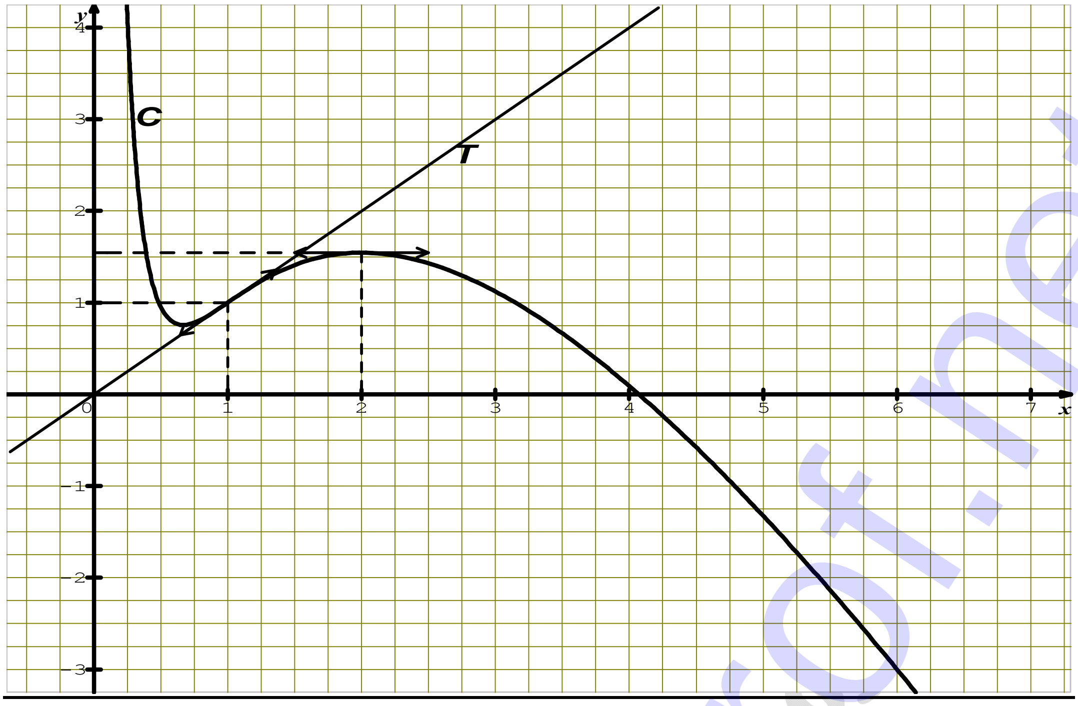
PROBLEME 6

x	0		-1		2		$+\infty$
f'(x)		-		+		-	
f'(x)	0	↗ 1		$+\infty$ ↘ 0 ↙ $+\infty$		$+\infty$ ↘	-2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dont le tableau de variation est ci-dessus
2. Déterminer aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter graphiquement
4. A partir du tableau de variation représenter graphiquement la fonction g et ses asymptotes

PROBLEME 7

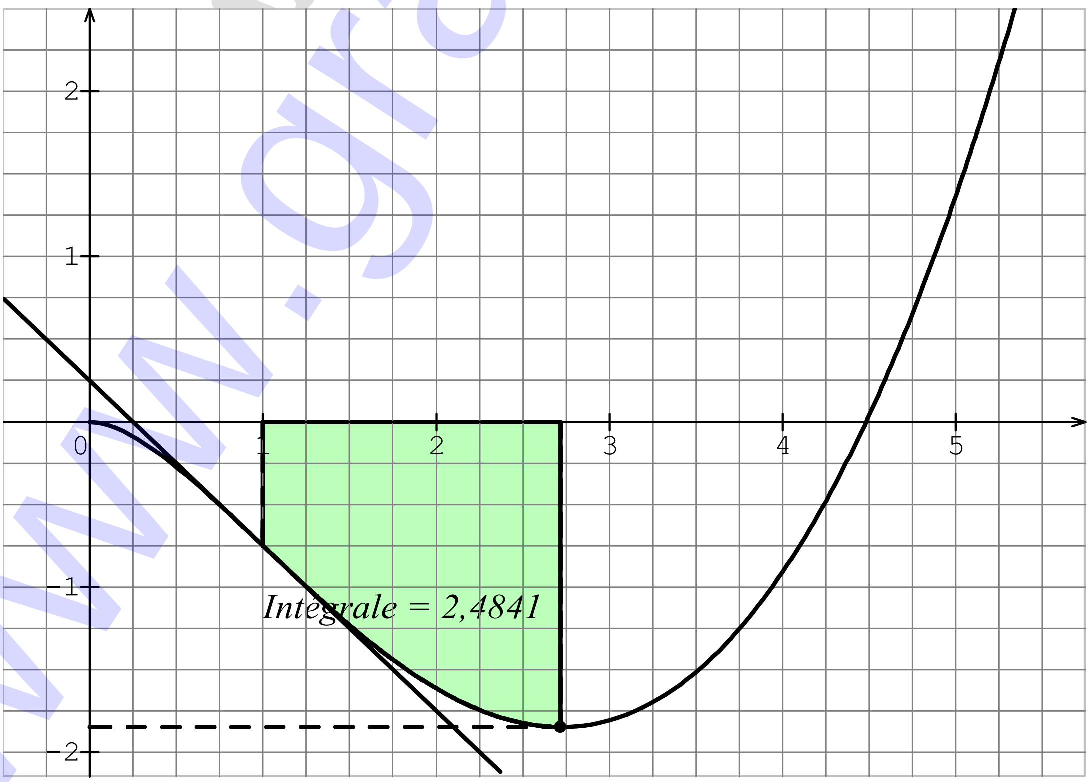
Soit la représentation graphique suivant :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction représenter ci-dessus
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter le résultat des limites
4. Déterminer l'équation de la tangente (T)
5. Dresser le tableau de variation de la fonction

PROBLEME 7

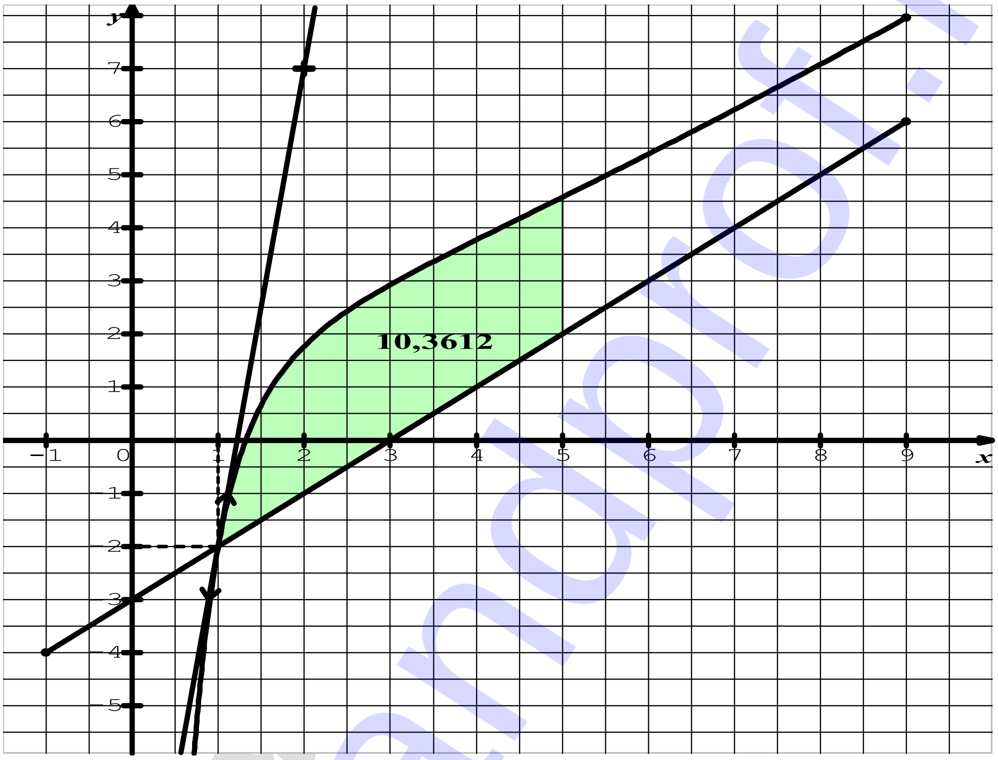
Soit la représentation graphique suivante :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction représenter ci-dessus
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter le résultat des limites
4. Déterminer l'équation de la tangente (T)
5. Dresser le tableau de variation de la fonction
6. Donner sous forme d'intégrale l'aire de la partie du plan hachuré.

PROBLEME 7

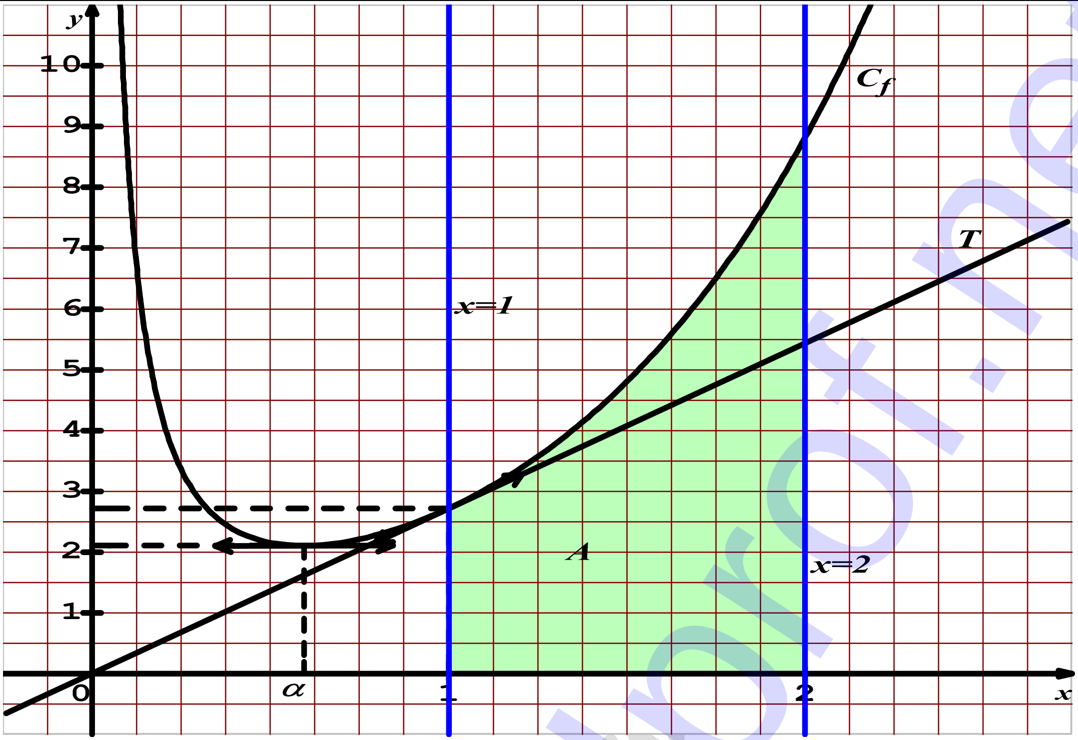
Soit la représentation graphique suivante :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction représenter ci-dessus
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter le résultat des limites
4. Déterminer l'équation de la tangente (T)
5. Dresser le tableau de variation de la fonction
6. Donner sous forme d'intégrale l'aire de la partie du plan hachuré.

PROBLEME 7

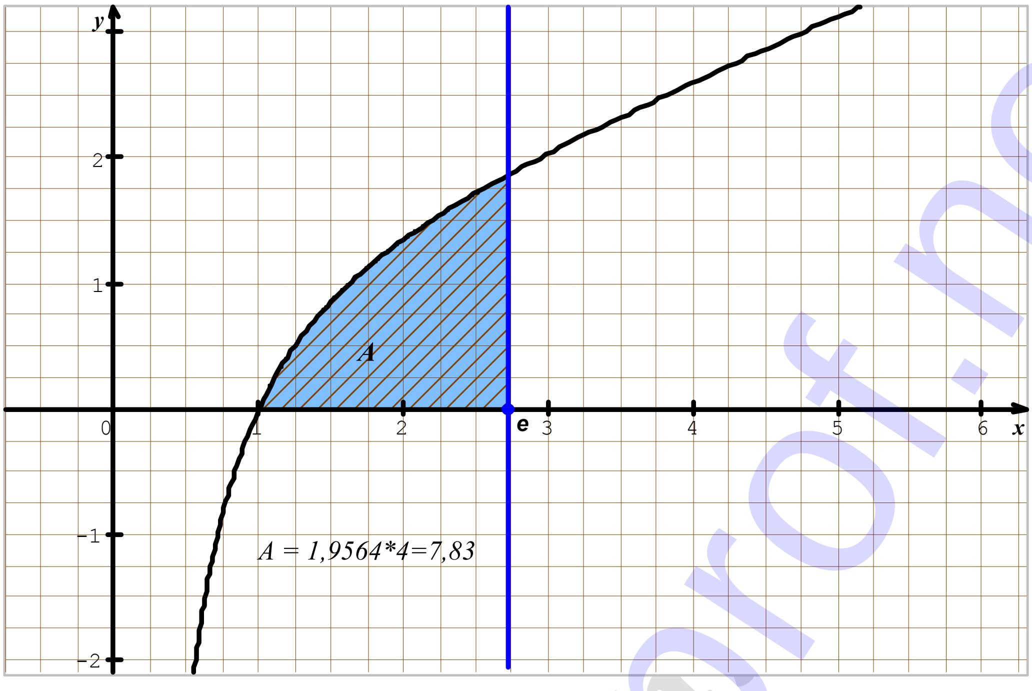
Soit C_f la représentation graphique suivante :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction représenter ci-dessus
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter le résultat des limites
4. Déterminer l'équation de la tangente (T)
5. Dresser le tableau de variation de la fonction
6. Donner sous forme d'intégrale l'aire de la partie du plan hachuré.

PROBLEME 7

Soit la représentation graphique suivante :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction représenter ci-dessus
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
3. Interpréter le résultat des limites
4. Déterminer l'équation de la tangente (T)
5. Dresser le tableau de variation de la fonction
6. Donner sous forme d'intégrale l'aire de la partie du plan hachuré.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;15]$ par : $f(x)=2\ln(x+1)+1$

1. On désigne par f'la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;15]$.
   a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0;15]$
   b. Etablir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;15]$
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir au dixième).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$			3,2		4,2	4,6	4,9	5,2			5,8		6,1	6,3		

3. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (unité : 1cm)
4. Soit D la droite d'équation : $y=0,8x$. Tracer le droite (D) dans le repère précédent .

Partie B

Une entreprise fabrique des pièces pour avion . on note x le nombre de pièces fabriquées par mois ($0\leq x\leq 15$).Chaque mois , les coûts de production , exprimés en milliers d'euros , sont sonnés par : $f(x)=2\ln(x+1)+1$.

Le prix de vente d'une pièce est 0,8 milliers d'euros .

1. Si l'entreprise vend x pièces , déterminer la recette exprimée en milliers d'euros .
2. Vérifier que le bénéfice mensuel est : $B(x)=0,8x-1-2\ln(x+1)$.
3. Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$, puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire .

4. En justifiant graphiquement la réponse, donner le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise soit bénéficiaire .