COLLEGE PRIVE LAÏC DE L'ESPERANCE			
B.P. : 13450	TEL : 22 20 95 21	YAOUNDE	Année Scol. 2011-2012
Département de Mathématiques		**BACCALAUREAT BLANC N°2**	**Examinateur : M Joseph AWONO**
Epreuve de MATHS	**T[le] C**	**Durée :** 4 H / **Coef : 5**	

Exercice I 4pts

Soit p un nombre premier et n un entier naturel strictement supérieur à p, on note

$$A=\frac{(n-p+1)(n+p)}{2} \quad \text{et} \quad B=\frac{(n-p)(n+p+1)}{2}$$

1 Montre que A et B sont des entiers naturels (1pt)

2 a) Démontre que pour tous entiers relatif a et b, d est un diviseur de a et b si et seulement si d *est un* diviseur commun de a et $a-b$ (0,75pt)

b) Soit S un entier naturel tel que

S = *PG c d* (A,B). *Montre que* $\delta=1$ *ou* $\delta=p$

3 a) On suppose $p=2$, détermine δ suivant les différents restes de la division Euclidienne de n par 4 (0,5pts).

b) si $p>2$, Démontre que $S=p$ si et seulement si $n\equiv 0\ (p)$ *ou* $n\equiv p\text{-}1\ (p)$ (0,75pt)

c) En déduire que p est un diviseur commun de A et B démontre que d divise *p 0,5pt*

Exercice II 3pts ACR (Apprendre Comprendre Réussir)

1. $ABCD$ est un parallélogramme du plan et p et Q sont du plan tel que $\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ *et* Q est le symétrique du milieu du segment $[AD]$ par rapport à A

Démontre que Q , P et C sont alignés. (0,75pt)

2. $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace , P, Q, R et S sont les points tel que $\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AD}=3\vec{AQ}$ $\vec{CR}=\frac{1}{3}\vec{CB}$ et $\vec{CS}=\frac{1}{3}\vec{CD}$; soit I et J les milieux perspectifs de $[AC]$ et $[BD]$ démontre que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes. (1pt)

3. On suppose que les points A *et* B ont pour coordonnées respectifs dans l'espace …… muni du repère Orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $(2;-1;-1)$ et $(-1;1,-3)$; a) Détermine et construis les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) des points M de … tels que : $M\in(\Gamma_1) \Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MB}=0$ (0,75pt)

$M\in(\Gamma_2) \Leftrightarrow 3MA^2-2MB^2=66$ (0,75pt)

Exercice III 1pt

Sans calculer les intégrales, justifie les égalités suivantes

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1-e^t}{1+e^t}dt=0$ (0,25pt) (2) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} t^2 \cos t\, dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 \cos t\, dt$ (0,25pt)

(3) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} t^2 \sin 2t\, dt=0$; (0,25pt) $\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{2-2}{2+t}\right)dt=0$

Problème ACR (Apprendre Comprendre Réussir)

Partie A 11,75pts

Soit la fonction F de R *vers* R définie par :

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

1. Détermine l'ensemble de définition de F et le signe de F. (1pt)

2- Soit x_0 un nombre réel de l'intervalle $[1;+\infty]$ et h un nombre réel tel que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$ $x=x_0+h$

a) calcule la limité en 0 des fonctions :

$\varphi : h\to F(x_0+h)$ et $\psi : h\to F\frac{(x_0+h)-F(x_0)}{h}$

Puis détermine la dérivée de F puis en déduire son sens de variation (0,5pt)

3 a) En utilisant une intégration par parties

Calcule l'intégrale $\int_{x1}^{x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ pourtant $x \in \left]1,+\infty\right[$ (0,5pt)

b) En déduire que pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$ $F(x) < 1$ (0,5pt)

Partie B

1 a) Etudie le signe des fonctions $f : x \to \ln(1+x) - x$ et $g : x \to x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ dans l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0,+\infty\right[$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad (0{,}25pt)$$

2. Soit la suite (Un) définie par son terme général

$$\text{Un} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

On considère les suites (v_n) et (w_n) de termes généraux perspectifs :

$$V_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k \qquad \text{et } W_n = \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

a) Démontre que : $V_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ et $W_n = \frac{1}{6n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3}$ (1pt)

b) Démontre que :

$$Wn \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq Vn \qquad (0{,}5pt)$$

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{e}$ (0,25pt)

Partie C

On considère la fonction

$fa : x \to \ln\left|\frac{ax+1}{x+a}\right|$ ou a un paramètre réel

1) Détermine l'ensemble de définition Da de f_a sous la forme d'une réunion d'intervalle de R suivant les valeurs de a (0,5pt)

2) a)Dresse le tableau de variation de *fa* pour les cas :

$a \in \left]-\infty;-1\right[U \left]0.+\infty\right[$ et $a \in \left]-1;0\right[U \left]1,+\infty\right[$ (1,5pt)

b) En déduire l'équation $f_a(x) = 0$ admet deux solutions dans deux intervalles à préciser pour les deux cas du 2 a). (0,5pt)

3- Construis (C_a) courbe représentative de *fa* dans les deux cas suivants $a = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{-1}{2}$ (1,5pt)

FIN