Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation *Office du Baccalauréat du Niger (OBN)* *Etablissement Public à Caractère Administratif* **Année : 2020**	**SUJET DE** : Mathématiques *Epreuve du 1er groupe* **SERIE/SPECIALITE** : D **Coefficient** : 5 **Durée** : 4H

EXERCICE 1 *(4 points)*

1) Résoudre dans C, l'équation : $z^2 + 2z + 10 = 0$. **(0,5 point)**
2) Déterminer les nombres complexes u et v tels que :

$$\begin{cases} -2u + v = 1 + 13i \\ -u + v = 4 + 8i \end{cases}$$ **(0,5 point)**

3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -1 - 3i$, $z_C = 3 - 5i$ et $z_D = 7 + 3i$.
   a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ (unité 1 cm). **(0,5 point)**
   b) Démontrer que le triangle (BAD) est rectangle en A, et le triangle (BCD) est rectangle en C. **(1 point)**
   c) En déduire que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre I et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure. **(1 point)**
4) Démontrer que les points C' et D', images respectives des nombres conjugués de z_C et z_D, sont sur le cercle (Γ).**(0,5 point)**

EXERCICE 2 *(4 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1) Démontrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$. **(1 point)**
2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$. **(1 point)**
   b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. **(1,5 points)**
   c) En déduire la limite de la suite (u_n). **(0,5 point)**

PROBLEME *(12 points)*

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur IR par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

Partie A

1) **a)** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote. Préciser la position de C par rapport à l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

(0,5 + 0,5+ 0,5 points)

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. **(0,5 point)**

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. On calculera les valeurs exactes des extremums. **(1 + 0,5 + 1+ 0,5 points)**

3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes de coordonnées. **(1 point)**

4) Soit T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Déterminer le coefficient directeur de T. **(0,5 point)**

5) Construire T et C. **(0,5 + 1 points)**

Partie B

1) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$y''-2y'+y=2e^x. \quad \textbf{(1 point)}$$

2) Soit F la fonction numérique définie sur IR par :

$$F(x) = 2e^x + 2f(x) - f'(x).$$

a) Démontrer que F est une primitive de f. **(0,5 point)**
Calculer $F(x)$. **(1 point)**

b) En déduire l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan , ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ (α est un réel négatif). **(1 point)**

Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$. **(0,5 point)**