

Sujet

Exercice: (08 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2) Pour tout nombre entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 2$
 - a) Calculer v_0, v_1 et v_2 .
 - b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
 - c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) On pose $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ et $t_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
Exprimer s_n en fonction de n puis en déduire t_n en fonction de n

Problème: (12 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(0)=0$ et, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$$

- 1) Démontrer que f est dérivable en 0
- 2) Dresser le tableau de variation de f
- 3) Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal (unités $2cm$).

a. Soit A le point de (C) d'abscisse 1 . Ecrire une équation de la droite (T) tangente en A à (C)

b. Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose $\varphi(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$

(x) et la position de (C) par rapport à (T) .

Tracer la courbe (C) et la droite (T)

Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$

Déduisez-en le signe de φ