BAC SM Mathématiques

MEPU-A/SNESCO BACCALAUREAT - SESSION 2013

Profils : Sciences Mathématiques

Epreuve de : Mathématiques Coefficient : 4 Durée : 4 heures

Sujet

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $8x+5y=1$ où $(x;y)$est un couple de nombre entiers relatifs.

1.Donner une solution particulière de l'équation (E) et résoudre l'équation (E).

2.Soit N un nonibre naturel tel qu'il existe un couple (a; b) de nombres entiers vérifiant :

$\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple $(a;-b)$ est solution de l'équation (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. Résoudre l'équation : $8x+5y=100, (x:y:)\in\mathbb{Z}$?

EXERCICE 2

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=2a$ et $AC=a$ ou a est un nombre réel strictement positif donné.

1.a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points du plan tels que :

$||\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}||=||\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}||$

2. Soit H le point du plan défini par : $\vec{AH}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AC}$ Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;1)$ et $(C;-2)$

PROBLEME

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+x-2xlnx\ si\ x\in]0,+\infty[$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repere orthonormé (O,I,J).

A.) On considère la fonction numérique g définie sur:

$g(x)=x-1-2lnx$

1. Calculer les limites respectives de gà droite en 0 et en $+\infty$

2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa derivé.

Determiner g' et étudier son signe.

Endéduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

Vérifier que $g(1)=0$.

3. Demontrer qu'il existe un unique réel a tel que $a \in]3;4[$ et g(a) = 0.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par :

$h(x) = 2lnx + 1$

1. Démontrer que $\forall x \in]3;4[;\ h(x) \in]3;4[;$

2. On considere la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3{,}5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que : Une $\forall n \in N. U_n \in [3;4]$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U1.

Démontrer que par récurrence que la suite (Un)n∈ \Bbb N est croissante.

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(On admettra que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la valeur de a précédante et on prendra $a = 3,5$

.

C)1. Démontrer que la fonction f est continue a droite en 0.

2. La fonction fest-elle dérivatle à droite en 0 ?

Justifier votre votre réponse. En donner une interprétation graphique.

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x lend vers $+\infty$.

4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x lend vers $+\infty$, puis interpreter graphiquement ce résultat.

5. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$et on note f' sa dérivée.

Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[;\ f'(x) = g(x)$,

6. En utilisant les résultats de A, déterminer le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.

Tracer la courbe (C).

7. Soit t un nom!re réel tel que: $0 < t < 1$.

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A(t) de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations: $x = t\ et\ x = 1$.

Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.