

## Sujet

### Exercice 1

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$  est divisible par 111.

3. a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers. b) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation :

$$x^3 - y^3 = 469$$

### Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  direct. Soit  $z \in C$  où  $C$  désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons  $Z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  réels.

1. Soit  $M(z)$  un point du plan complexe et  $M'(z')$  l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ . Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$  et  $\theta$ .

2. On considère dans  $C$  l'équation  $(E)$  d'inconnue  $z$  qui suit,

$$(E) : \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$$

Résoudre l'équation  $(E)$ .

3. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = -4\sqrt{3} - 4i$  et  $b = a = -4\sqrt{3} + 4i$ . Calculer  $OA$ ,  $OB$  et  $AB$ . En déduire la nature du triangle  $OAB$ .

4. On désigne par  $C$  le point d'affixe  $c = \sqrt{3} + i$  et par  $D$  son image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminer l'affixe du point  $D$ .

5. On appelle  $G$  le barycentre des points pondérés  $(0; 1)$ ;  $(D, -1)$  et  $(B, -1)$ .

a) Montrer que le point  $G$  a pour affixe  $g = -4\sqrt{3} + 6i$

b) Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sur une figure (unité graphique 1cm)

6. Déterminer une mesure en radians de l'angle  $(\vec{GA}, \vec{GC})$ .

En déduire la nature du triangle  $GAC$ .

## PROBLEME

### Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :  $g(x) = \frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1. a) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2. a) Démontrer que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

b) En déduire le sens de variation de  $g$ .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .

3. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0, \forall x \in ]0; +\infty[$  admet une solution unique.

b) Justifier que  $2,55 < a < 2,56$

c) Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]a; +\infty[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]a; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

### Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

(Unité graphique :  $OI = 2cm$  et  $OJ = 10cm$ ).

1. a) calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que :  $f(x) = \frac{-1+a}{a^2} e^{-a}$

3. a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = e^{-a} \times g(x)$

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de  $f$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1 est

$$y = -\frac{3}{e} + \frac{4}{e}$$

5. Construire  $(T)$  et la courbe  $(C)$  dans le plan muni du repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra  $e = 2,6$ .

### Partie C

Soit  $h$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :  $h(x) = e^{-x} \ln x$  Démontrer que  $h$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Soit  $\Upsilon$  un nombre réel tel  $\Upsilon > 3$ .

a) Calculer, en  $cm^2$  et en fonction de  $\Upsilon$ , l'aire  $A(\Upsilon)$  de la partie du plan comprise entre  $(C)$ ,  $(OI)$  et les droites d'équation  $x = 3$  et  $x = \Upsilon$ . Calculer  $\lim_{\Upsilon \rightarrow +\infty} A(\Upsilon)$

<https://grandprof.net> ©