BAC SM Mathématiques

MEPU-A/SNESCO BACCALAUREAT - SESSION 2019

Profils : Sciences Mathématiques

Epreuve de : Mathématiques Coefficient : 4 Durée : 4 heures

## Sujet

**Exercice 1:**

Les suites d'entiers naturels $(x_n)$ et $(y_n)$ sont définies sur $\mathbb{N}$ par:

$x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$

$y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $x_n = 2^{n+1} + 1$

2) a)Calculer le $PGCD$ de $x_8$ et $x_9$ puis celui de $x_{2002}$ et $x_{2003}$.

Que peut-on déduire pour $x_8$ et $x_9$ d'une part, pour $x_{2002}$ et $x_{2003}$ d'autre part?

b) $x_n$ et $x_{n+1}$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel $n$?

3) a)Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $2x_n - y_n = 5$

b) Exprimer $y_n$ en fonction de $n$.

c)En utilisant les congruences modulo $5$, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel $p$ le reste de la division euclidienne de $2^p$ par $5$.

d) On note $d_n$ le $PGCD$ de $x_n$ et $y_n$ pour tout entier naturel $n$. Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que $x_n$ et $y_n$ soient premiers entre eux.

**Exercice 2:**

A) Une urne contient boules blanches ( $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), $5$ boules rouges et $3$ boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

Montrer que $p(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$

B) Pour les questions suivantes, $n = 4$

1) Calculer $p(4)$

2) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux

boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de $30$ francs.

Pour chaque tirage :

-Si les deux boules sont de même couleur il reçoit alors $40$ francs ;

-Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors $5$ francs;

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut etre positif ou négatif). On désigne par $X$ la variable aléatoire egale au gain du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par $X$?

b) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

c) Calculer l'espérance de $X$.

**Partie A:**

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) Etudier les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de la fonction sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau devariation.

3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans une solution unique $a$ tel que:
$(0,940 < a < 0,9414)$

Etudier le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$

**Partie B:**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

On note $(C)$ la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Calculer $f'(x)$, ou $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$, et vérifier que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de $f$.

4) a) Démontrer l'égalité: $f(a) = \frac{(2a-5)^2}{2a-7}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : x-> \frac{(2a-5)^2}{2a-7}$ sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{2}[$

En déduire, à partir de l'encadrement de $a$ obtenu dans la partie $A$, un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $f(a)$.

5) Démontrer que la droite $(D)$, d'equation $y = 2x - 5$, est asymptote à $(C)$ en $+\infty$.

Préciser la position de $(C)$ par rapport à $(D)$.

6) Tracer la droite $(D)$ et la courbe $(C)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(unité graphique 2cm)

**Partie C:**

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm l'aire $A$ de la portion du plan délimitée par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

**Partie D:**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $3$, on considère les points $A_n, B_n$ et $C_n$ d'abscisse $n$ appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite $(D)$ et à la courbe $(C)$; soit $u_n$ le réel défini par $u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à $3$, on a : $u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$?

b) Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Pouvait-on prévoir ce résultat?