BAC SM Mathématiques

MEPU-A/SNESCO BACCALAUREAT - SESSION 2020

Profils : Sciences Mathématiques

Epreuve de : Mathématiques Coefficient : 4 Durée : 4 heures

Sujet

Exercice 1: (05 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :
$a_n = 4 \times 10^n - 1; b_n = 2 \times 10^n - 1; c_n = 2 \times 10^n + 1$

1. a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3

   b) Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

   c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

   d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

   En déduire la décomposition en facteurs premiers de a

   e) Montrer que $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(b_n; 2)$.

   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

   a) Justifier le fait que l'équation (E) possède au moins une solution.

   b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3, déterminer une solution particulière de (E).

   c) Résoudre l'équation (E). Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

   $2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43 - 47 - 53 - 59 - 61 - 67$
   $-71 - 73 - 79 - 83 - 89 - 97$

Exercice 2: (05 points)

Partie1: On considère la fonction p définie sur $\forall z \in \mathbb{C}$;
$p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i$

1. a) Calculer $p(i)$.

   b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que: $p(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$

Nb : Cette version est une version transcrite des extraits de l'originale. Elle peut donc contenir des erreurs de frappe, d'orthographe ou de données. Prière de nous faire parvenir toutes erreurs à l'adresse suivante : contact@exam224.com

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-(3+i)z+2+2i=0$.
3. En déduire dans les solutions de l'équation (E) : $p(z)=0$.

Partie2: Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{u};\vec{v})$ d'unité $5cm$.

On pose $z_0=2$ et $\forall\in\mathbb{N}, z_{n+1}=-2$

On note A, le point du plan d'affixe z_n

1. a) Calculer z_1 et z_2

   b) Placer les points A_0,A_1, et A_2 dans le plan complexe.
2. On considère la suite U définie par: $\forall n\in N, U_n=|z_{n+1}-z_n|$

   a) Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

   b) Démontrer que la suite est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$

   c) Exprimer U_n en fonction de n.

Problème : (10 points)

Partie A: On considere la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$g(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\ln x$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{(x^2+1)^2-2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$
3. a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $2x(1-x^2)<(x^2+1)^2$

   b) En déduire le signe de $g'(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de g.
4. a) Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$

   b) Démontrer que : $g(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ et $g(x)>1$

Partie B : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ part : $\begin{cases} f(x)=x\ln x-\ln(x^2+1) \\ f(0)=0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(0,I,J)$. (Unité graphique: $1cm$ en abscisse et $2cm$ en ordonnée).

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Démontrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse une demi-tangente verticale.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation graphique.
4. a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=g(x)$

   b) Déterminer le sens de variation de f

   c) Dresser le tableau de variation de f

Nb : Cette version est une version transcrite des extraits de l'originale. Elle peut donc contenir des erreurs de frappe, d'orthographe ou de données. Prière de nous faire parvenir toutes erreurs à l'adresse suivante : contact@exam224.com

5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]0; +\infty[$

   b) Vérifier que: $2,22 < \alpha < 2,23$

6. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1], -\ln 2 \leq f(x) < 0$

7. Construire (C) dans le repère $(0, I, J)$. On prendra $\alpha = 2,22$

Nb : Cette version est une version transcrite des extraits de l'originale. Elle peut donc contenir des erreurs de frappe, d'orthographe ou de données. Prière de nous faire parvenir toutes erreurs à l'adresse suivante : contact@exam224.com