

REPUBLIQUE GABONAISE  
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2012 MATHÉMATIQUES

Série : A1

Durée : 4 heures

Coef : 4

**Exercice 1** (5 points)

Pour lancer un nouveau produit sur un marché, une société effectue un sondage auprès des potentiels clients.

Le tableau suivant donne les résultats du sondage où  $X$  représente le nombre des clients (en centaines) et  $y$  le prix du produit (en milliers de FCFA)

$x_i$	42	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	28	27
$y_i$	10	11	13	15	17	19	22	25	28	32	36	40	44	47

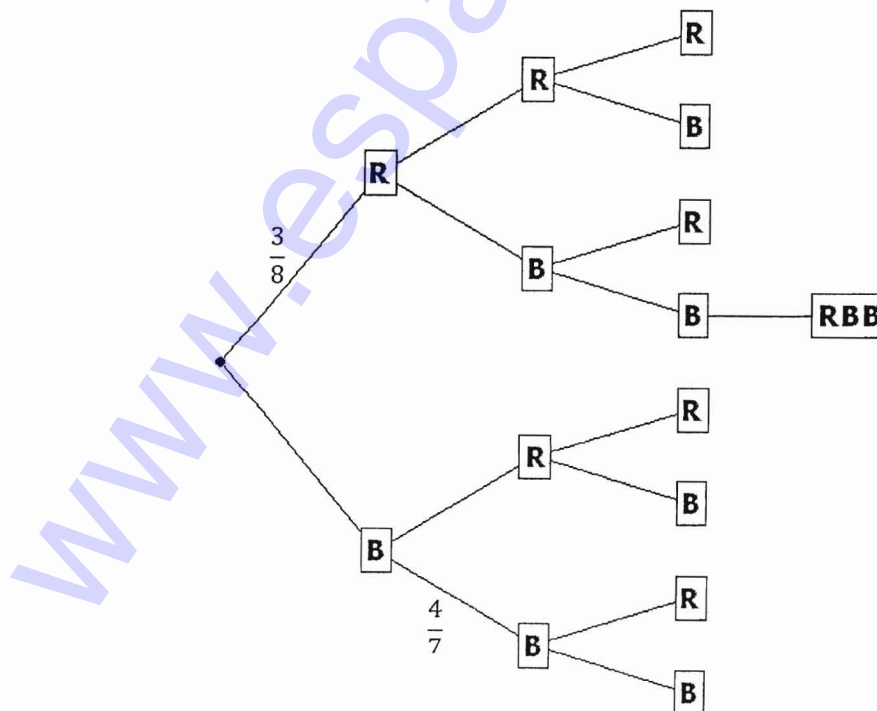
- Représenter le nuage de points correspondant dans un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique :  
1 cm pour en abscisses ;  
1 cm pour 2 unités en ordonnées.  
Et pour origine le point de coordonnée (26 ; 10).
- Calculer les coordonnées du point moyen  $G(\bar{x} ; \bar{y})$  et le placer sur le graphique précédent.
- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .
- Déterminer une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  par la méthode de moindres carrés.

**Exercice 2** (5 points)

Une urne contient 8 jetons 5 blancs et 3 rouges.

On tire un premier jeton, puis un deuxième, puis un troisième (sans remettre les jetons tirés).

- Recopier et compléter l'arbre suivant.



- Calculer la probabilité de l'événement  $A$  : « Obtenir 3 jetons blancs ».

- 3) Décrire par une phrase l'événement contraire de  $A$ . Calculer sa probabilité.
- 4) Déterminer la probabilité de l'événement  $B$  : « Obtenir 2 jetons rouges ».
- 5) Calculer la probabilité de l'événement  $C$  : « Obtenir un jeton blanc au deuxième tirage ».

**Problème** (10 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; I, J)$  d'unité graphique 2 cm.

**Partie A :** Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = 1 - x - 2\ln x$ .

- 1) Calculer  $h'(x)$  où  $h'$  est la dérivée de la fonction  $h$ .
- 2) Étudier le sens de variation de  $h$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $h$  (le calcul des limites n'est pas demandé).
- 4) a) Calculer  $h(1)$ .  
b) En déduire le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie B :** Étude de la fonction  $f$

- 1) Déterminer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis interpréter graphiquement ces résultats
- 2) Soit  $f'$  la dérivée de  $f$ .  
a) Calculer  $f'(x)$ .  
b) Montrer que pour  $x$  élément de  $]0 ; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$ .  
c) En déduire le sens de variation de  $f$ .  
d) Etablir le tableau complet des variations de  $f$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]1 ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ .  
b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]\frac{1}{2} ; 1[$ .  
c) Vérifier que  $0,56 < \alpha < 0,57$ .
- 4) Tracer la courbe  $C$ . (on prendra  $\alpha \approx 0,56$ )

**Partie C :** Calcul d'aire

On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$F(x) = \ln x - \frac{1 + \ln x}{x}$$

- 1) Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
- 2) Calculer la valeur exacte de l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,  
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET TECHNIQUE,  
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,  
DE LA CULTURE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

REPUBLIQUE GABONAISE  
Union – Travail – Justice

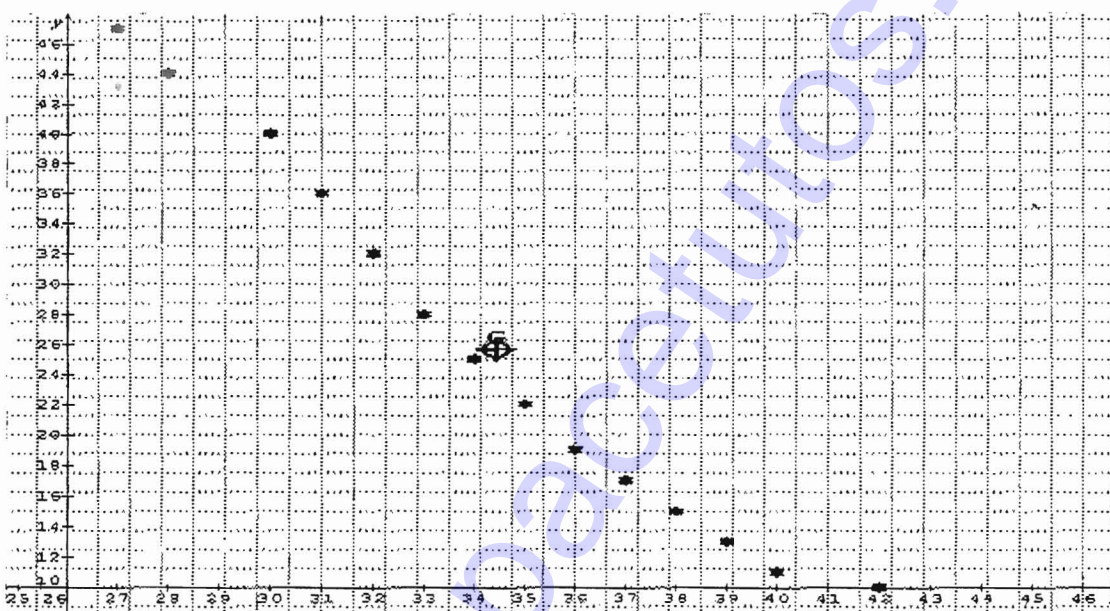
DIRECTION GÉNÉRALE DES EXAMENS ET CONCOURS

DIRECTION DU BACCALAURÉAT

Proposition de correction BAC 2012  
Série A1

**Exercice 1 (5 points)**

1. Nuage de points



2. Coordonnées du point moyen

$$\bar{x} = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i = 34,4286 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} y_i = 25,6429$$

Voir figure pour le point G.

3. Détermination du coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = -51,7755$$

$$V(x) = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i^2 - (\bar{x})^2 = 19,102057 \quad \text{et} \quad V(y) = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} y_i^2 - (\bar{y})^2 = 144,086413$$

d'où  $r = -0,986899$

#### 4. Droite de régression de $y$ en $x$

L'équation de la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés est donnée par

$$y = ax + b$$

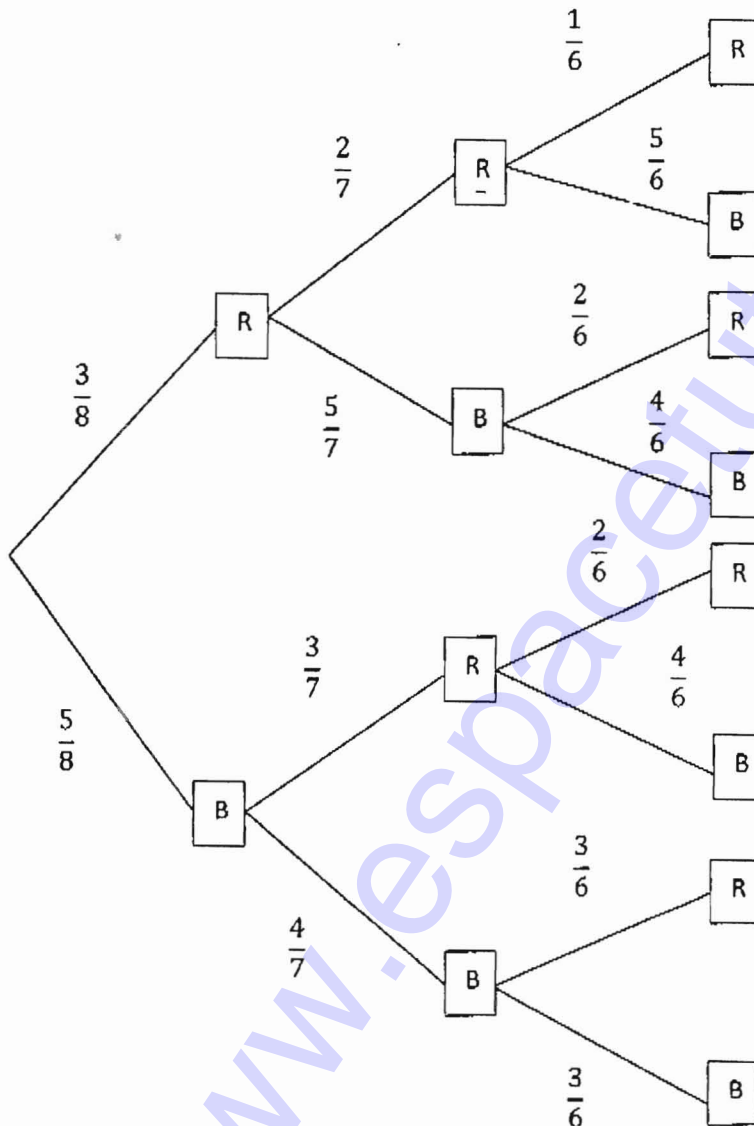
avec :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} = -2,71047 \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} = 118,96047$$

d'où  $y = -2,71x + 118,96$ .

#### Exercice 2

##### 1. Arbre complet



##### 2. Probabilité de l'évènement $A$

$$p(A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

##### 3. $\bar{A}$ : « Obtenir au moins un jeton rouge »

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

## 4. Probabilité de l'évènement B

$$p(B) = p(RRB) + p(RBR) + p(BRR) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{15}{56}$$

## 5. Probabilité de l'évènement C

$$p(C) = p(RBR) + p(RBB) + p(BBR) + p(BBB) = \frac{35}{56}$$

**Problème****Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire**

## 1. Dérivée

$$h'(x) = -1 - \frac{2}{x}$$

## 2. Sens de variation

$$h'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0 \text{ pour } x \in ]0; +\infty[ :$$

la fonction  $h$  est strictement décroissante.

## 3. Tableau de variation

$x$	0	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$		

4. a) Calcul de  $h(1)$ 

$$h(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$$

b) D'après le sens de variation de  $h$ , on a :

$$0 < x < 1 \Rightarrow h(x) > h(1)$$

$$x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1)$$

or  $h(1) = 0$ , on obtient :

$$h(x) > 0 \text{ pour } x \in ]0; 1[ \text{ et } h(x) < 0 \text{ pour } x \in ]1; +\infty[$$

**Partie B : Etude de la fonction  $f$** 

## 1. Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (x + \ln x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0$$

**Interprétation graphique**

L'axe des abscisses ( $y = 0$ ) et l'axe des ordonnées ( $x = 0$ ) sont asymptotes à  $(C)$

## 2. a) Dérivée

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x + \ln x)}{x^4} = \frac{-x^2 + x - 2x \ln x}{x^4}$$

## b) Vérification

$$f'(x) = \frac{x(1 - x - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - x - 2 \ln x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}$$

c) Sens de variation de  $f$ 

Comme  $x > 0$ ,  $f'(x)$  a le signe de  $h(x)$ .

$f'(x) > 0$  pour  $x \in ]0; 1[$  et  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$ .

$f'(x) < 0$  pour  $x \in ]1; +\infty[$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .



MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,  
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET TECHNIQUE,  
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,  
DE LA CULTURE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

REPUBLIQUE GABONAISE  
Union – Travail – Justice

-----  
DIRECTION GÉNÉRALE DES EXAMENS ET CONCOURS

-----  
DIRECTION DU BACCALAURÉAT

PROPOSITION DE  
GRILLE DE CORRECTION BAC 2012  
Série A1

Exercice 1 (5 points)

1)	Repère orthogonal		0,25 point	1
	Nombre de points $\leq 7$		0	
	Nombre de points entre 7 et 9		0,5	
	Nombre de points $\geq 10$		0,75	
2)	Calcul de $\bar{x}$ (avec ou sans formule)		0,25	0,75
	Calcul de $\bar{y}$ (avec ou sans formule)		0,25	
	Repérage du point G sur le graphique		0,25	
3)	Coefficient de corrélation (résultat plaqué)		1	2
	Covariance	Formule	0,25	
		Résultat	0,25	
	Variance de x	Formule	0,25	
		Résultat	0,25	
	Variance de y	Formule	0,25	
		Résultat	0,25	
	Coefficient de corrélation	Formule	0,25	
Résultat		0,25		
4)	Equation juste (plaquée)		0,5	1,25
	Coefficient directeur	Formule	0,25	
		Résultat	0,25	
	Ordonnée à l'origine	Formule	0,25	
		Résultat	0,25	
	Equation		0,25	

Exercice 2 (5 points)

1)	Arbre complété	Quatre premières branches	0,25x4	2
		Quatre derniers nœuds	0,25x4	
2)	Démarche	Structurée	0,5	0,75
		Peu structurée	0,25	
		Résultat juste $p(A)$ et/ou plaqué	0,25	
3)	Phrase correcte		0,25	0,75
	Formule $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$		0,25	
	Résultat juste		0,25	
4)	Démarche	Structurée	0,5	0,75
		Peu structurée	0,25	
		Résultat juste $p(B)$ et/ou plaqué		

A1

5)	Démarche	Structurée	0,5	0,75
		Peu structurée	0,25	
	Résultat juste $p(C)$ et/ou plaqué		0,25	

## Problème (10 points)

## Partie A (3 points)

	Dérivée	$x \mapsto 1 - x$	0,25	1
		$x \mapsto \ln x$	0,25	
		$x \mapsto -2\ln x$	0,5	
	Résultat direct		1	
	Résultat avec erreur de signe		0,75	
2)	Signe de $h'(x)$		0,5	0,75
Sens de variation de la fonction $h$		0,25		
3)	Tableau de variation		0,25	0,25
4)	a)	Calcul de $h(1)$	0,25	0,25
	b)	Signe de $h(x)$	Démarche structurée + résultat	0,75
			Démarche peu structurée + résultat	0,5
			Résultat plaqué	0,25

## Partie B (5,5 points)

1)	Limite en 0	Justification	0,25	0,5	
		Résultat	0,25		
	Limite en $+\infty$	Justification	0,25	0,5	
		Résultat	0,25		
Interprétation			0,25x2	0,5	
2)	a)	Démarche	0,25	0,75	
		Développement	0,25		
		Résultat après réduction	0,25		
	b)	Vérification	0,25	0,25	
	c)	Signe de $f'(x)$	Sens de variation de $f$	0,25	0,5
				0,25	
	d)	Calcul de $f(1)$	Tableau de variation complet	0,25	0,75
				0,5	
	3)	a)	Justification	0,25	0,25
		b)	Théorème des valeurs intermédiaires	$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$	0,25
Reste du théorème et conclusion				0,25	
c)	$f(0,56) \times f(0,57) < 0$	0,25	0,25		
4)	Repère		0,25	0,75	
	Courbe		0,5		

## Partie C (1,5 point)

1)	Vérification	Calcul de $F'(x)$	Calcul	0,25	0,75
			Résultat après simplification	0,25	
		Conclusion		0,25	
2)	Unité d'aire		0,25	0,75	
	Interprétation de l'aire sous forme d'une intégrale		0,25		
	Résultat		0,25		