

**DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES Tle D :**

25 /10/2021

Durée : 2h

Ce sujet comporte deux pages

EXERCICE1 : (2 points) Pour chacune des affirmations suivantes recopie le numéro de la ligne suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou Faux si l'affirmation est fausse.

- Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si E et F sont deux événements de U de probabilités non nulles, alors $P_E(E) = P_E(F)$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[-2 ; 3]$ et si $f(-2) \times f(3) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]f(3) ; f(-2)[$.
- A et B étant deux événements indépendants d'un univers Ω , on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- Soit f une fonction d'un intervalle I sur un intervalle J . Si f est continue et strictement décroissante sur I alors sa bijection réciproque g est strictement décroissante sur I .

EXERCICE2 : (2 points) Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	ENONCES	Réponses																	
1	Soit f une fonction et α un nombre réel. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $] \alpha ; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td></tr> <tr><td>B</td><td>$-\infty$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>D</td><td>α</td></tr> </table>	A	0	B	$-\infty$	C	$+\infty$	D	α									
A	0																		
B	$-\infty$																		
C	$+\infty$																		
D	α																		
2	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>Fait la maladie</td> <td>Ne fait pas la maladie</td> </tr> <tr> <td>Vacciné</td> <td>15</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>Non vacciné</td> <td>18</td> <td>12</td> </tr> </table> <p>Ce tableau donne les résultats d'une enquête effectuée dans une population de 70 personnes. On choisit au hasard un individu. La probabilité que cet individu fasse la maladie sachant qu'il est vacciné est</p>		Fait la maladie	Ne fait pas la maladie	Vacciné	15	25	Non vacciné	18	12	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>$\frac{15}{70}$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$\frac{15}{33}$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$\frac{15}{40}$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$\frac{33}{40}$</td></tr> </table>	A	$\frac{15}{70}$	B	$\frac{15}{33}$	C	$\frac{15}{40}$	D	$\frac{33}{40}$
	Fait la maladie	Ne fait pas la maladie																	
Vacciné	15	25																	
Non vacciné	18	12																	
A	$\frac{15}{70}$																		
B	$\frac{15}{33}$																		
C	$\frac{15}{40}$																		
D	$\frac{33}{40}$																		
3	$a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt[3]{\sqrt{a b^5}} =$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>$a^5 b^5$</td></tr> <tr><td>B</td><td>ab</td></tr> <tr><td>C</td><td>$a^{12} b^{11}$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$a^4 b^3$</td></tr> </table>	A	$a^5 b^5$	B	ab	C	$a^{12} b^{11}$	D	$a^4 b^3$									
A	$a^5 b^5$																		
B	ab																		
C	$a^{12} b^{11}$																		
D	$a^4 b^3$																		
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos\left(\frac{\pi x + 15}{x-1}\right) =$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>$-\infty$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>C</td><td>π</td></tr> <tr><td>D</td><td>n'existe pas</td></tr> </table>	A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	π	D	n'existe pas									
A	$-\infty$																		
B	$+\infty$																		
C	π																		
D	n'existe pas																		

EXERCICE3 : (7 points)

f est une fonction continue sur son ensemble de définition, de représentation graphique (C_f) dans un repère orthonormé (O, I, J) et admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	2	$4,5$	$+\infty$
$f(x)$	-1	0	$-\infty$	$9,5$	1

Le tableau de variation ci-dessus indique les variations de la fonction f sur différents intervalles. Les flèches indiquent que f est croissante sur $]-\infty; -3[$ et $]2; 4,5[$, et décroissante sur $] -3; 2[$ et $]4,5; +\infty[$. Les points $-\infty$ et $9,5$ sont des limites à l'infini.

- Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- Précise les asymptotes éventuelles à (C_f) . Justifie ta réponse.
- f est-elle prolongeable par continuité en 2 ? en $4,5$? Si oui définis ces prolongements.
- Détermine les images par des intervalles $] -\infty; 2[$ et $]4,5; +\infty[$ par f .
- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 4,5[$.
- Détermine le signe de f sur D_f .
- Soit g la restriction de f à $] -\infty; -3[$.
 - Justifie que g réalise une bijection de $] -\infty; -3[$ dans un intervalle J à déterminer.
 - Dresse le tableau de variation de g^{-1} , bijection réciproque de g sur son ensemble de définition.
- Calcule les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(2 - \frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-3}{5-3f(x)}$

EXERCICE4 (4 points) Une urne contient 5 boules : 3 blanches et 2 noires.

On tire au hasard une boule de l'urne, puis sans la remettre dans l'urne, on en tire une seconde.

On note : B_1 l'évènement « la 1^{ère} boule tirée est une boule blanche » ;
 N_1 l'évènement « la 1^{ère} boule tirée est une boule noire » ; B_2 l'évènement « la seconde boule tirée est une boule blanche » ; N_2 l'évènement « la seconde boule tirée est une boule noire ».

- Construis l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
- Donne les probabilités suivantes :
 - $P(N_1)$
 - $P_{N_1}(B_2)$.
- Justifie que $P(N_1 \cap B_2) = 0,3$
 - Calcule $P(B_2)$.

EXERCICES (Situation complexe) (3 points) :

Un cordonnier fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la fonction

$$B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150, \quad x \text{ représentant le nombre de sacs fabriqués et vendus.}$$

Il aimerait connaître l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabriqués compris entre 5 et 17.

En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement cohérent, aide ce cordonnier à répondre à sa préoccupation.

Exercice 5 : (5 pts)

CM1 : 0,75

Utilisation de la leçon sur les limites et continuité.

Recherche de l'image d'un intervalle par une fonction continue.

CM2 : 2,5

Etude des variations et tableau de variation de la fonction bénéfice :

$$\forall x \in [5; 17], B'(x) = 3x^2 - 75x + 450 = 3(x - 10)(x - 15)$$

B est strictement croissante sur $[5; 10]$ et sur $[15; 17]$

B est strictement décroissante sur $[10; 15]$

x	5	10	15	17
$B'(x)$		0	0	
$B(x)$	1587,5	1900	1837,5	1875,5

Cherchons l'image de $[5; 17]$ par $B(x)$

B est continue et strictement croissante sur $[5; 10]$, $B([5; 10]) = [1587,5; 1900]$

B est continue et strictement décroissante sur $[10; 15]$, $B([10; 15]) = [1837,5; 1900]$

B est continue et strictement croissante sur $[15; 17]$, $B([15; 17]) = [1837,5; 1875,5]$

Donc $B([5; 17]) = [1587,5; 1900]$.

CM3 (cohérence de la production) 1,25

CP 0,5

Donc pour un nombre de sacs compris entre 5 et 17 il aura un bénéfice entre 158750 frs et 190000 frs.

CORRIGE ET BAREME DU DEVOIR COMMUN TD DU 25/10/2021

Exercice1 : (4 x 0,5pts)

1.F / 2.V / 3.F / 4.F

Exercice2 : (4 x 0,5 pts)

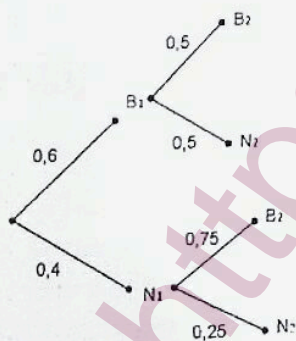
1.C / 2. C / 3.B / 4.A

Exercice3 : (7 pts)

- 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 4,5\}$ 0,25
- 2)
- Asymptote verticale d'équation $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ 0,25 + 0,25
 - Asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ 0,25 + 0,25
 - Asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 0,25 + 0,25
- 3)
- f n'est pas prolongeable par continuité en 2 0,25
 - f est prolongeable par continuité en 4,5. Ce prolongement est $h: \begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ h(4,5) = 9,5 \end{cases}$ 0,25 + 0,5
- 4) $f(]-\infty; 2[) =]-\infty; 0]$ et $f(]4,5; +\infty[) =]1; 9,5[$ 0,25 + 0,25
- 5) f est continue et strictement croissante sur $]2; 4,5[$, elle réalise une bijection de $]2; 4,5[$ dans $] -\infty; 9,5[$ et $0 \in] -\infty; 9,5[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]2; 4,5[$ 0,75
- 6) $x \in] -\infty; 2[\cup]2; \alpha]$ $f(x) \leq 0$; $x \in]\alpha; 4,5[\cup]4,5; +\infty[$ $f(x) > 0$ 0,75
- 7) a. f est continue et strictement croissante sur $] -\infty; -3]$ donc sa restriction g à $] -\infty; -3]$ réalise une bijection de $] -\infty; -3]$ dans $J =] -1; 0]$ 0,75
- b.
- | | | |
|-------------|-----------|----|
| x | -1 | 0 |
| $g^{-1}(x)$ | $-\infty$ | -3 |
- 0,5
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(2 - \frac{1}{x}) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-3}{5-3f(x)}$ 0,5 + 0,5

Exercice 4 : (4pts)

1)



- 1
- 2) a. $p(N_1) = 0,4$ et b. $p_{N_1}(B_2) = 0,75$ 0,5 + 0,5
- 3) a. $p(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0,3$ 1
- b. $p(B_2) = p(B_2 \cap N_1) + p(B_2 \cap B_1) = 0,3 + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0,6$ 1