DEVOIR DE MATHEMATIQUES

EXERCICE N°1

Réponds par VRAI (V) ou FAUX (F) aux affirmations suivantes

N°	QUESTIONS	REPONSES
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [f(b); f(a)]$	
2	Si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors f réalise une bijection de K dans $f(K)$	
3	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle K et si $0 \in f(K)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans K	
4	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ)	

EXERCICE N°2

Une des réponses proposées est exacte. Choisis-la.

	QUESTIONS	REPONSES A	B	C
1	$f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$	-2	0	1
2	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x+4}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	2
3	$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$	1	$+\infty$	0
4	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. On peut prolonger f par continuité en 1 en posant $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ldots\ldots$	0	-1	2

Exercice 3

La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et a pour tableau de variation le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$ 1	‖ $+\infty$	$\searrow$	1

En utilisant ce tableau, donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(-2+\frac{1}{x}\right) ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x^2) ; \quad \lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f\left(\frac{-1}{x}\right) ; \quad \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right).$$

EXERCICE N°4

On considère la fonction polynôme définie par $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Calcule les limites de p aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudie les variations de p et dresse son tableau de variation.
3) Démontre que l'équation $p(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in]1,6; 1,7[$.
4) Démontre que $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $p(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$ $p(x) > 0$.
5) On considère la fonction f définie de R *vers* R *par* $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$
   a) Calcule les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1; +\infty[$
   b) Démontre que $f'(x) = \frac{p(x)}{(1+x^3)^2}$
   c) Etudie les variations de f et trace son tableau de variations.
   d) Donne une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   e) Trace la courbe de f ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE N°5

Les élèves du club photo de ton établissement s'exercent à la photographie. Ils savent qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette. Ils savent également qu'en optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance p moyenne harmonique des distances a et r (les distances sont exprimées en mètre).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de <<5m à l'infini».

Ils te sollicitent à cet effet. En s'appuyant sur tes connaissances, détermine la distance de mise au point à choisir . On donne $\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$

LCA   DEVOIR DE MATHEMATIQUES- T^{le} D18   année scolaire :2021-2022

WAYORO MARIE

DUREE : 01 HEURE 20min

EXERCICE 1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Réponds par vrai (V) ou faux (F) aux affirmations suivantes :

1-a et l sont des nombres réels et f une fonction numerique tel que $a \notin D_f$, si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors f est prolongeable Par continuité en a V

2-La courbe représentative de la fonction f définie sur $]a\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

3-Soit g une fonction numérique .Si pour tout $x \in]a\,;+\infty[$, $g(x) \geq x^2$ alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ V

4-Soit f une fonction continue sur$[a\,;b]$, pour tout nombre réel k, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

EXERCICE 2 (4 points)

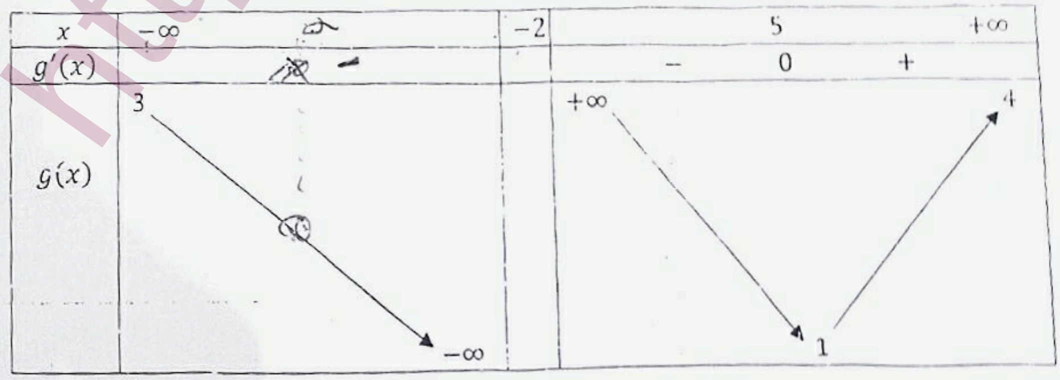
Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Indique la réponse exacte en notant par exemple : 1-A ou 1-B ou 1-C

N°	AFFIRMATIONS	A	B	C
1	$\lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{5x^2+1}$ est egale à	$+\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$-\infty$
2	$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin x}$ est égale à	1	0	-1
3	f et g sont deux fonctions. a , b et l sont soient des nombres réels, soit $-\infty$ soit $+\infty$; si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim_{x \to b} f(x) = l$ alors	$\lim_{x \to a} fog(x) = b$	$\lim_{x \to a} gof(x) = l$	$\lim_{x \to a} fog(x) = l$
4	Soit f une fonction numérique telle que $2 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+3}{x^2}$ d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ est égale à	0	$+\infty$	2

EXERCICE 3 (7 points)

Soit g une fonction continue sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$ et admettant le tableau de variation suivant :

horizontale, verticale, verticale, horizontal



On note (C) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1-Precise les asymptotes à la courbe (C) en justifiant ta réponse.

2-Determine l'image de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par g $(]-1\,;+\infty[)$

3-Soit h la restriction de g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$

a) Justifie que la fonction h réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-2[$ sur un intervalle E à préciser

b) Donne le sens de variation de la fonction h^{-1} bijection réciproque de h

4-Demontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$.

5-A l'aide du tableau de variation détermine le signe de g sur son ensemble de définition (aucune justification n'est demandée).

EXERCICE 4 (5 points)

Lors d'un cours de biologie en Terminale D, le professeur des SVT a informé la classe qu'une étude sur l'évolution dans le Temps de la population P à venir, à compter de cette année, d'une espèce animale dans un pays, est estimée par la formule : $P(t) = 3600\frac{2t+1}{t^2+3}$, où t désigne le nombre d'années qui s'écouleront depuis cette année. Préoccupés par l'évolution de cette espèce animale ils voudraient déterminer la population de cette espèce après une très longue période.

En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds aux préoccupations de ces élèves