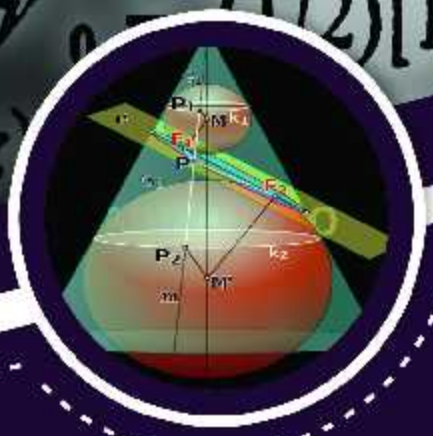
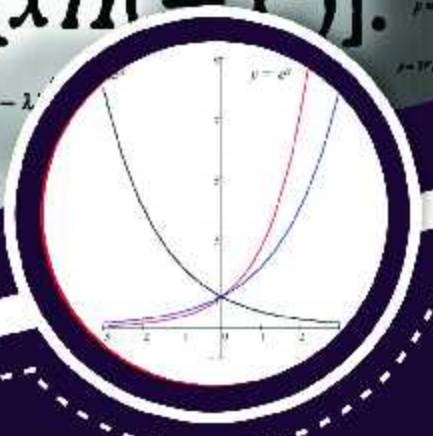
MATHEMATIQUES en Tle C

100% GRATUIT





EXERCICES

Des exercices de savoir, savoir-faire, et savoir-etre après chaque leçon

COURS

Cours détaillés et illustrés selon l'Aproche Par Compétence (APC)

NOUVEAU PROGRAMME

Cours et exercices selon le nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp Les grandprofs de Maths

CE DOCUMENT EST LIBRE ET GRATUIT IL NE PEUT ETRE VENDU

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est l'œuvre des enseignants du groupe WhatsApp dénommé « Grandprofs de maths(GPM) ». Ce groupe a vu le jour le 12-05-2017. Cette collection est la mise en pratique de l'un de ses objectifs majeurs. Rendu à sa deuxième édition, c'est le fruit de près de trois mois de travail organisé par les administrateurs dans des sous-groupes (13 ateliers).

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette collection n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, encore moins le cours de l'enseignant. Il vient juste en appuis à ces documents. Dans le fond et la forme, chaque chapitre de cette collection est conforme au nouveau programme et respecte la structure de l'APC pour les classes de la 6ème en première.

Cette deuxième édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner aux administrateurs qui ont travaillé inlassablement pour mener le projet à bon port. Il s'agit de : *M. Guela Kamdem Pierre* **,** *M. Pouokam Léopold Lucien* **,** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **et le fondateur du groupe** *M. Ntakendo Emmanuel.* **A ce dernier, nous devons toutes les couvertures de cette deuxième édition. Un coup de chapeau est à donner à certains enseignants qui ont fait de la réussite de ce projet, un objectif à atteindre pendant les vacances : ce sont les chefs d'ateliers. Nous avons** *M. Siyapdje Henri* **(6ème),** *M.Joseph Fogang* **(5ème),** *M.Ngongang Nivel* **(4ème),** *M.Jidas Tchouan* **(3ème),** *M. Simplice Dongmo* **(2^{nde}A$_4$),** *M. Guela Kamdem Pierre* **(2^{nde}C),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(1^{ère}A$_4$),** *M.*

Nguefo Takongmo **(1ère C),** *M. Jidas Tchouan* **(1ère D-TI),** *M. Bayiha André Ghislain* **(Tle A4),** *M. Ouafeu Tokam Guy Paulin* **(Tle C) et** *M. Nganmeni Konguep Hervé Battiston* **(Tle D-TI). Nous ne saurons terminer sans féliciter tous les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet et y ont consacré leur précieux temps non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 164 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours réalisés.**

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que des éventuelles coquilles que pourrait contenir chacun des documents de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants voulant intégrer ce groupe WhatsApp ou désirant prendre part à la 3ème édition qui débutera en Mai 2020 sont priés bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre* **(697 473 953 / 678 009 612),** *M. Pouokam Léopold Lucien* **(696 090 236/ 651 993 749),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(699 494 671) et** *M. Ntakendo Emmanuel* **(676 519 464).**

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Projet Grandprofs de math(GPM)

2ème édition

Atelier TleC

Table des matières

1-Arithmétique1: divisibilité dans $\mathbb{Z}$ **Page 6 - 11**

Ouafeu tokam Guy Paulin, **CES bilingue d'AWAE, Collège notre reine de lourdes, 676093969 (Chef d'atelier)**

2-Nombres complexes **Page 12 - 22**

+237 99007339

3-Calculs vectoriels **Page 23 - 43**

Onguene Assouga Éric, **Lycée de Mofole 694577986**

4-Limites et continuité **Page 44 - 50**

Nganmeni Konguep Hervé Battiston, **Lycée Classique et Moderne de MVOMEKA'A, Collège la Grâce de Tchetgna, 674565834\695042682**

5-Arithmétique 2: Nombres premiers, PPCM et PGCD de deux nombres entiers relatifs non nuls **Page 51 - 64**

Nganmeni Konguep Hervé Battiston, **Lycée Classique et Moderne de MVOMEKA'A, Collège la Grâce de Tchetgna, 674565834\695042682**

6-Dérivées, primitives et étude de fonctions **Page 65 - 76**

Feudjio Alexis Patrice, **Lycée d'Odza, 679141672 /699716116**

7-Espaces vectoriels applications linéaires **Page 77 - 94**

Tiagho Olivier, **694226038**

8-Transformation du plan complexe **Page 95 - 100**

Ouafeu Tokam Guy Paulin, **CES bilingue d'AWAE, Collège notre reine de lourdes, 676093969**

9-Fonction logarithme népérien **Page 101 - 109**

Balla Adalbert Bienvenu, **Lycée de Mintom, 696114441/651595682**

10-Applications affines et isométries du plan **Page 110 - 125**

Ouafeu Tokam Guy Paulin, **CES bilingue d'AWAE, Collège notre reine de lourdes, 676093969**

11-Fonction exponentielle népérien et fonction puissance **Page 126 - 135**

Mme Kouesseu **+237 6 96 36 73 05**

12-Suites numériques **Page 136- 146**

Onguene Assouga Éric, **Lycée de Mofole 694577986**

13-Intégration **Page 147 - 166**

Balla Adalbert Bienvenu, **Lycée de Mintom, 696114441/651595682**

14-Coniques **Page 167 - 182**

Wamba Rolin Cédrique, **Lycée technique de Mvengue, 653000605/690064352**

15-Equations différentielles **Page 183 - 194**

Balla Adalbert Bienvenu, **Lycée de Mintom, 696114441/651595682**

16-Applications de l'espace **Page 195 - 225**

Nguefo Takongmo Amour , **Lycée d'Abondo, 679985838**

17-Probabilités **Page 226 - 238**

Roméo Feudjio **(+237 694068687)**

CHAP 1 : ARITHMETIQUE

I/ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Cours rédigé par **OUAFEU TOKAM GUY PAULIN**

Date : 23 Août 2018

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette lecon, l'éleve doit etre capable de :

-Déterminer l'ensemble des diviseurs et des mulitiples d'un entier relatif.

-Utiliser les regles de calculs sur les congruences pour déterminer le reste de la division euclidienne.

- Utiliser les regles de calcul sur les congruences pour déterminer les criteres de divisibilité en base 10.

1) Relation de divisibilité :

a/ Définition :

Soient $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}^*$, on dit que a est divisible par b ou que b est un diviseur de a, ou que a est un multiple de b s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=bk$. Cette relation entre a et b se note $a|b$.

Exemple : $3|21$ car $21=7\times3$, $5|5$ car $5=5\times1$

Remarque : L'ensemble des diviseurs d'un entier b est noté $\mathfrak{D}(b)$ et l'ensemble des multiples d'un entier relatif a est noté $a\mathbb{Z}$.

Exemples : $2\mathbb{Z}$ = {……. ;-6 ; -4 ; -2 ;0 ; 2 ; 4 ; 6 ;……..} et $\mathfrak{D}(6)$ = {-6 ; -3 ; -2 ;-1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

Resoulvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (x-1)(y+3) =21

Comme x-1 et y+ 3 sont des entiers relatifs, il s'en suit que (x-1)| 21 et (y+3)| 21

Or $\mathfrak{D}(21)$ = {-21 ;-7 ; -3 ;-1 ; 1 ; 3 ; 7 ;21 }

D'où les systemes suivants : $\begin{cases}x-1=21\\y+3=1\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=1\\y+3=21\end{cases}$;

$\begin{cases}x-1=-21\\y+3=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=-1\\y+3=-21\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=3\\y+3=7\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=7\\y+3=3\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=-3\\y+3=-7\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=-7\\y+3=-3\end{cases}$

Donc S= {(22 ;-2) ; (2 ;19) ; (-20 ;-4) ; (0 ;-24) ; (4 ;4) ; (8 ;0) ; (22 ;-2) ; (-2 ;-10) ; (-6 ;--6)

Activité d'apprentissage

Enoncé :

Soient x , y , z et t des entiers relatifs non nuls .Répondre aux questions ci-dessous en se servant de la définition de la divisibilité.

(i)On suppose que x|y et y|x. Justifier l'existence de deux entiers relatifs k_1 et k_2 tels que $x=y\,k_1$, $y = x\,k_2$ et $k_1\,k_2 = 1$. Puis conclure .

(ii) On suppose que t|x et t|y , Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que mx+ny=tk quels que soient m et n entiers relatifs. Puis conclure .

(iii) On suppose que x|y et z|t, Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que yt=xzk. Conclure et en déduire que $x^m|y^m$, m étant un entier naturel.

(iv) On suppose que x|y et d un entier non nul , Justifier l'existence d'un entier relatif k tel que yd=xdk. Conclure .

(v) On suppose que x|y, montrer que tout multiple de y est multiple de x.

(vi) On suppose que x|y, montrer que $|x| \leq |y|$.

Solution de l'activité d'apprentissage :

(i) On sait par hypothese que : ($\mathbf{x|y} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ y = k_1 x$) et ($\mathbf{y|x} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ x = k_2 y$) ,

d'où $y = k_1 x = k_1 k_2 y$; par conséquent $k_1 k_2 = 1$ car y est non nul.

Or (($k_1 k_2 = 1$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ ($k_1 = k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = -1$)), donc **x = y ou x = - y .**

(ii) On sait par hypothese que ($\mathbf{t|x} \Leftrightarrow \exists$ k'' $\in \mathbb{Z}$ / x=k''t) et ($\mathbf{t|y} \Leftrightarrow \exists$ k' $\in \mathbb{Z}$ / y=k't) ,

d'où mx + ny = mk''t + nk't = (mk''+nk') t. Il suffit de poser k = mk''+nk', Il s'en suit que **t|mx+ny .**

(iii) On sait par hypothese que ($\mathbf{x|y} \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ y = k_1 x$) et ($\mathbf{z|t} \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ t = k_2 z$) ,

d'où $yt = k_1 x \, k_2 z = k_1 k_2 zx$. Il suffit de prendre $k = k_1 k_2$, il s'en suit que **xz|yt . (1)**

En particulier, Supposons x|y et montrons que $x^m|y^m$. Procédons par recurrence ;

Soit P(m) la proposition :'' $x^m|y^m$ pour tout entier naturel m''.

Si m=1, on a x|y qui est vraie par hypothese . Soit m un entier naturel stictement supérieur à 1, supposons que P(m) est vraie et montrons que P(m+1) est aussi vraie . C'est-à-dire que $x^{m+1}|y^{m+1}$.

On sait que P(m) vraie signifie $x^m|y^m$ (2) . De plus par hypothese, x|y (3). En appliquant la proprieté montrée precedemment (1) aux relations (2) et (3) on obtient $x^m \times x | y^m \times y$, c'est-à-dire $x^{m+1}|y^{m+1}$.

d'où P(m+1) est vraie. Donc p(m) est vraie pour tout entier naturel m.

(iv) évident

(v)Supposons x|y et montrons que x divise tout multiple de y. Soit t un multiple de y, alors il existe k élement de $\mathbb{Z}$ tel que t =ky .Puisque x|y , alors il existe k' élément de $\mathbb{Z}$ tel que y=k'x .Ainsi, t peut s'écrire t=k k'x avec kk' element de $\mathbb{Z}$; donc x|t.

(vi) Par hypothese , ($x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^* \ / \ y = kx$) , d'où $|y| = |k| . |x|$. Or $|k| \geq 1$

Il s'ensuit que $|y| \geq |x|$.

b/ Propriétés :

Soient *a, b , c , d* $\in \mathbb{Z}^*$

P*$_1$: *a|b et b|a* $\Leftrightarrow$ *a = b ou a = - b ;

P$_2$: Si *d|a et d|b* alors pour tous entiers relatifs *u et v* , *d|(au+bv) ;*

P$_3$: Si *a|b et c|d* , alors *ac|bd* ;

P$_4$: Si *a|b* , alors pour tout entier naturel *k* , $a^k|b^k$;

P_5 : Si d est un entier relatif non nul , alors $a|b \Leftrightarrow ad|bd$;

P_6 : Si $b|a$, alors $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.

P_7 : Si $b|a$ alors $|b| \leq |a|$

Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1) 2^n divise- t-il 4^n pour tout entier n ?
2) Montrer que $|n^2-1| \leq |n^4-1|$ pour tout entier relatif n.
3) Montrer que si n est impair, alors $n(n^2+3)$ est pair.
4) a. Trouver les entiers naturels strictement supérieurs à 1 dont les cubes divisent 18360.
   b. En déduire dans $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation $b^3(2b^2+2b+1)=18360$.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. On pose $A=n^2-2n+2$, $B=n^2+2n+2$

a) Factoriser n^4+4
b) Montrer que $A|n^4+4$ et $B|n^4+4$
c) Montrer que tout diviseur de A qui divise n divise 2.
d) Montrer que tout diviseur commun de A et B divisent $4n$

2) Division Euclidienne

a/ Axiomes fondamentaux de $\mathbb{N}$:

Nous admettons les axiomes suivants sur la structure de l'ensemble des entiers naturels

Principe du bon ordre

-Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

-Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élement.

Principe de descente infinie :

-Toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est stationnaire à partir d'un certain rang.

Activité d'apprentissage

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On pose $Q = \{ k \in \mathbb{N} / a - bk \geq 0 \}$. On suppose dans un premier temps que $a \geq 0$

(i) Justifier que Q est non vide.
(ii) Justifier que Q est majoré par a et qu'il admet un plus grand élément q.
(iii) On pose $r = a-bq$, Justifier que $r \geq 0$ et que $r < b$.

On suppose dans un second temps que $a < 0$, on pose $Q' = \{ k \in \mathbb{N} / -a \geq bk \}$.D'après ce qui précède on sait qu'il existe un couple $(q,r) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tel que $-a=bq+r$ et $0 \leq r < b$.

(iv)Si $r=0$,déterminer q' et r' tel que $a=bq'+r'$ avec $0 \leq r' < b$.
(v)Si $r \geq 1$, montrer que en posant $q'=-q-1$ et $r'=b-r$,on peut écrire que $a=bq'+r'$ avec $0 \leq r' < b$

Soient (q,r) , $(q',r') \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tels que $a=bq+r=bq'+r'$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$ et $q \neq q'$
(vi)Justifier que $b \leq |r-r'| < b$, puis en déduire une absurdité.
(vii)En déduire que $r=r'$ et $q=q'$.

b/ Théorème :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a=bq+r$ et $0 \leq r < |b|$. Dans cette expression a est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple : La division Euclidienne de 12839 par 2567 s'écrit par $12839 = 5\times2567 + 4$

La division Euclidienne de - 26 par 5 s'écrit par $-26 = 5\times(-6) + 4$

Exercice d'application : Déterminer tous les chiffres dont le reste de la division euclidienne par 2 est 4

3) Système de numération

a/Définition :

Soit $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ et $x \in \mathbb{N}^*$. L'expression $x = x_n a^n + x_{n-1}\, a^{n-1} + \cdots + x_2\, a^2 + x_1 a + x_0$ avec $x_n \neq 0$, $0 \leq x_i < a$ pour tout i =0,…,n ; est l'écriture de x dans le système de numération de base a. On note $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0}^{a}$

Exemple : $18 = \overline{10010}^2 = 0\times2^0 + 1\times2^1 + 0\times2^2 + 0\times2^3 + 1\times2^4$, $35 = \overline{1022}^3$

Remarques :

R1 : l'écriture $\overline{x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0}$ ou $x_n x_{n-1} \ldots \ldots x_1 x_0$ est dans la base 10 ou décimale

R2 : En base 16 ou hexadécimale, on represente les nombres 10, 11, 12, 13 ,14 , 15 respectivement par A, B , C , D, E ; F.

R3 : La base 2 est appelée base binaire, elle n'utilise que des chiffres 0 et 1.

Exercice d'application :

i)Ecrire en base 6 le nombre 453

ii). Un nombre s'écrit 36723 dans le système décimal et $\overline{442003}^b$ en base b. Déterminer **b**

4) Relation de congruence :

a/Définition (congruence modulo un entier)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n si $n|(b-a)$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a-b = kn$. On note $a \equiv b$ mod[n] ou $a \equiv b[n]$; se lit '' a congru à b modulo n''

Exemple : $6 \equiv 1$ mod[5] car $6 - 1 = 5 = 5\times1$; $25 \equiv 4$ mod[7] car $25 - 4 = 21 = 7\times3$; $6 \equiv -1$ mod[7]

Activité d'apprentissage :

Soit a et b deux entiers relatifs, n un entier naturel tels que $a \equiv b$ mod[n] . On désigne par r , r', q et q' respectivement les restes et quotients de a et b dans la division euclidienne par n .

(i) Montrer que $a-b = n(q-q') + (r-r')$

(ii) En déduire que $r = r'$

Solution : (i) On sait par hypothèse que $a = nq+r$ et $b = nq'+r'$,

par conséquent $a-b = (nq+r) - (nq'+r') = nq+r - nq'-r' = n(q-q') + (r-r')$.

(ii)On sait par hypothèse que $a \equiv b$ mod[n] , ce qui veut dire que $a-b$ est multiple de n. Entre autres $a-b = n(q-q') + (r-r')$ traduit l'écriture de la division euclidienne de $a-b$ par n à condition que $r > r'$ car $r-r' < |b|$. Sinon, considérer $b-a = n(q'-q) + (r'-r)$. Comme $a-b$ est multiple de n, $r-r' = 0$. D'où $r = r'$.

Propriété : Si $a \equiv b\ mod[n]$, alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Exemple : On sait que $11 \equiv 6$ mod[5] , or le reste de la division euclidienne de 6 par 5 est 1. D' où 1 est aussi le reste de la division euclidienne de 11 par 5.

Conséquence : Si a ≡ b mod[n] et que $0 \leq b <$ n alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.

Ainsi les restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel n sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 …. ; n-1.

b/ Propriétés :

P1 : $a \equiv a\ mod[n]$

P2 : Si $a \equiv b\ mod[n]$ et $b \equiv c\ mod[n]$, alors $a \equiv c\ mod[n]$

P3 : Si $a \equiv a'\ mod[n]$, $b \equiv b'\ mod[n]$ alors : $a+b \equiv a'+b'\ mod[n]$

P4 : Si $a \equiv a'\ mod[n]$, $b \equiv b'\ mod[n]$ alors : $ab \equiv a'b'\ mod[n]$

P₅ : *Si $a \equiv a'$ mod[n] , $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $ka \equiv ka'$ mod[n]*
P₆ : *Si $a \equiv a'$ mod[n] , $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $a^k \equiv a'^k$ mod[n]*
P₇ : *$a \equiv 0$ mod[n] $\Leftrightarrow$ a est multiple de n*
Remarque : Si *pgcd(k ,n)=1, alors ($ka \equiv ka'$ mod[n]avec $k \in \mathbb{Z}^*$) $\Longrightarrow$ ($a \equiv a'$ mod[n])*

Preuve des propriétés:

P₁ : *a-a = 0* qui est un multiple de *n*. D'où le résultat

P₂ : Supposons que *$a \equiv b$ mod[n] et $b \equiv c$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers ***k et k'*** tels que ***a-b=kn et b-c=k'n***
D'où *a-c = (a-b) +(b-c) =kn +k'n =(k+k') n,* donc **a-c** est multiple de ***n* et** *$a \equiv c$ mod[n]*

P₃ : Supposons que *$a \equiv a'$ mod[n] et $b \equiv b'$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers k et k' tels que ***a-a'=kn et b-b'=k'n***
D'où a+b =a'+kn +b'+k'n =(a'+b') +(n+n')k , ce qui implique *(a+b) –(a'+b')* est multiple de *n*
Donc a+b $\equiv$ a'+b' mod[n]

P₄ : *Supposons* que *$a \equiv a'$ mod[n] et $b \equiv b'$ mod[n]*
Il s'ensuit qu'ils existent deux entiers ***k et k' tels que a=a'+kn et b=b'+k'n***
D'où ab = (a'+kn)(b'+k'n)=a'b'+a'k'n+knb'+kk'n²=a'b'+ n(a'k'+kb'+kk'n)
Donc ab $\equiv$ a'b' mod[n]

P₅ : Supposons que *$a \equiv a'$ mod[n] , soit $k \in \mathbb{Z}^*$*
Il s'en suit qu'il existe un entier ***k'*** tels que ***a-a'=k'n ,*** en multipliant cette égalité par k on obtient ***k(a-a')=kk'n ,*** Ce qui signifie ***(ka-ka')=kk'n, donc*** *ka $\equiv$ ka' mod[n]*

P₆ : *Supposons que $a \equiv a'$ mod[n] , soit $k \in \mathbb{Z}^*$* et p(k) la proposition *$a^k \equiv a'^k$ mod[n]*
Pour k = 1, on a *$a \equiv a'$ mod[n]* .Ce qui est vraie par hypothèse. *Donc p(1) est vraie*
Soit k> 1. supposons que p(k) est vraie et montrons que p(k+1) est aussi vraie , c'est-à-dire que
$a^{k+1} \equiv a'^{k+1}$ mod[n]. D'après la propriété 4, $a^k \equiv a'^k$ mod[n] et $a \equiv a'$ mod[n] impliquent que
$a^k \times a \equiv a'^k \times a'$ mod[n]. D'où le résultat.

P₇ : Soit *a* tel que *$a \equiv 0$ mod[n]*. Ce qui signifie qu' il existe un entier *k* tel *que a-0= kn . Donc a=kn* est un multiple de *n*

Exercice d'application :

(i) Trouver le reste de la division euclidienne de 17^{53} par 5
(ii)Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 de 2^n , pour *n* entier naturel
(iii) En déduire les solutions x dans ℕ de $2^n \equiv x$*-4[3]* en fonction de tout entier naturel *n.*
(iv) Résoudre dans ℤ , *$n^3 + 2n + 1 \equiv 1$ mod[4]*
(v) Soit A = $\overline{5x23}^{\,6}$, montrer que *A $\equiv$ x - 4 [7]* . En déduire la valeur de *x* pour laquelle A est divisible par 7.

4) Congruence et critères de divisibilités :

Activité d'apprentissage :

I. Soit x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{\,a}$ tel que *a*| x
   i) Justifier l'existence d'un entier q tel que x_0= (q-$x_n a^{n-1} - x_{n-1}\, a^{n-2} - \cdots - x_1)\, a$
   ii) En déduire que x_0= 0
   iii) Réciproquement, si on suppose que x_0= 0 , montrer que *a*| x
   iv) En déduire la règle de divisibilité en base 10

II. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que x=$(x_n 10^{n-1} + x_{n-1}\, 10^{n-2} + \cdots + x_1)\, 10 + x_0$

ii) En déduire que x≡ x_0 mod[2] et x ≡ x_0 mod[5]

iii) Si x≡ 0 mod[2] (respectivement x≡ 0 mod[5]) , déterminer x_0

III. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que x=$(x_n 10^{n-2} + x_{n-1}\, 10^{n-3} + \cdots + x_2)\, 10^2 + x_1 10 + x_0$

ii) En déduire que x ≡ $\overline{x_1 x_0}$ mod[4] et x ≡ $\overline{x_1 x_0}$ mod[25]

iii) Si x≡ 0 mod[4] (respectivement x≡ 0 mod[25]) , déterminer $\overline{x_1 x_0}$

IV. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que pour tout entier naturel i on a $10^i \equiv 1$ mod [3] et $10^i \equiv 1$ mod [9]

ii) En déduire que x≡ $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 + x_0$ mod [3] (respectivement mod[9])

iii) Si x≡ 0 mod[3] (respectivement x≡ 0 mod[9]) , déterminer $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 + x_0$

V. Dans cette partie x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

i) Montrer que pour tout entier naturel p , $10^p \equiv (-1)^p$ mod [11]

ii) En déduire que x ≡ $(-1)^n x_n + (-1)^{n-1} x_{n-1} + \cdots + (-1)^2 x_2 + (-1)^1 x_1 + (-1)^0 x_0$ mod [11]

iii) En déduire que x≡ $(x_0 + x_2 + x_4 + \dots.) - (x_1 + x_3 + x_5 + \dots.)$ mod[11]

Propriétés :

Soit x = $\overline{x_n x_{n-1} \dots \dots x_1 x_0}^{10}$

P1 : x est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si $x_0 \equiv 0$ mod[2] (respectivement $x_0 \equiv 0$ mod[5])

P2 : x est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si $x_1 x_0 \equiv 0$ mod[4] (respectivement $x_1 x_0 \equiv 0$ mod[25])

P3 : Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)

P4 : Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme des chiffres de rang paire diminué de la somme des chiffres de rang impair est multiple de 11

Exercice d'application :

1/ Déterminer le reste de la division de 478987 par 4 et par 25

2/Montrer que 5296 est divisible par 4

3/Vérifier que 12475 est divisible par 25

4/ Déterminer le reste de la division de 478987 par 3.

5/ 165789 est 'il multiple de 11 ?

Devoirs :

1) Pour tout entier naturel *n*, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
   a/ Montrer que $A_{n+3} \equiv A_n$ *[7]*.
   b/ Déterminer l'ensemble S des entiers naturels *n* tels que $A_n \equiv 0$ *[7]*
   c/ Les nombres $x = \overline{1110}^2$, $y = \overline{1010100}^2$, $z = \overline{1001001000}^2$ sont'ils divisibles par 7 ?
2) a/ Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tels que $5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13.
   b/ Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, le reste de la division euclidienne par 3 de $B = 2n^3 - n^2 + 2$.
3) Un nombre entier N = $\overline{abcca}^5 = \overline{bbab}^8$
   a/Montrer que $309a + 15c = 226b$.
   b/Montrer que $2b \equiv 0[3]$; en déduire b.
   c/Montrer que $3a \equiv 1[5]$; en déduire *a* et *c*
   d/ Ecrire N dans la base 10.

CHAP : NOMBRES COMPLEXES I

Compétences attendues

- Connaître un nouvel ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$ et manipuler les opérations dans $\mathbb{C}$;
- Savoir écrire un nombre complexe sous la forme algébrique ;
- Savoir écrire un nombre complexe sous la forme trigonométrique et sous la forme exponentielle ;
- Savoir faire le lien entre les aspects algébriques, trigonométriques et exponentielles ;
- Connaître et appliquer la formule de Moivre et les formules d'Euler pour linéariser les expressions trigonométriques ;
- Savoir factoriser tous les polynômes à coefficients réels à l'aide de polynômes de degré uniquement un, à coefficients complexes ;
- Déterminer, interpréter et utiliser les racines n-ièmes d'un nombre complexe ;
- Savoir résoudre les équations de l'ensemble des nombres complexes.

PLAN DU COURS

LECON I : INTRODUCTION DE L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ - ETUDE ALGEBRIQUE *Durée : 3h*

LECON II : ETUDE TRIGONOMETRIQUE – ETUDE EXPONENTIELLE *Durée : 2h*

LECON III : EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$ *Durée : 2h*

LECON IV : TRAVAUX DIRIGES *Durée : 2h*

LECON I : INTRODUCTION DE L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ - ETUDE ALGEBRIQUE

Compétences attendues

- Connaître un nouvel ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$ et manipuler les opérations dans $\mathbb{C}$;
- Savoir écrire un nombre complexe sous la forme algébrique.

Activité

On considère les équations (E1) : $x^2 + 4 = 0$ et (E2) : $x^2 + 4x + 20 = 0$

1. (E1) admet-elle une solution dans IR ? Justifier votre réponse.
2. En conservant les règles de résolution d'une équation dans IR et en supposant qu'il existe un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$, démontrer que (E1) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i
3. Reprendre les deux questions précédentes en utilisant l'équation (E2).

Solution

1er cas : (E1) : $x^2 + 4 = 0$

1. $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ (ce qui absurde dans IR car $x^2 \geq 0$) alors (E1) n'admet pas de solution dans IR
2. $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$
   $\Leftrightarrow x^2 = 4i^2$ alors $x = -2i$ ou $x = 2i$ $\boxed{S = \{-2i; 2i\}}$

2ème cas : (E2) : $x^2 + 4x + 20 = 0$

1. $x^2 + 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = -16$ (ce qui absurde dans IR car $(x+2)^2 \geq 0$) alors (E2) n'admet pas de solution dans IR
2. $x^2 + 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = -16$
   $\Leftrightarrow (x+2)^2 = (4i)^2$ alors $x = -2 + 4i$ ou $x = -2 - 4i$
   $\boxed{S = \{-2 - 4i; -2 + 4i\}}$

I.1. Introduction de l'ensemble $\mathbb{C}$

Dans l'ensemble IR des nombres réels, il n'est pas possible de déterminer la racine carrée d'un nombre négatif ; par conséquent, lorsque le discriminant d'une équation du second degré est négatif, cette équation n'admet pas de solution dans IR. L'existence d'un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$

permet de résoudre de tels problèmes. On obtient alors les expressions de la forme : $a+ib$ où $(a,b) \in IR^2 / \ i^2 = -1$. De telles expressions sont appelées « Nombres complexes » et l'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Cet ensemble vérifie les propriétés suivantes :

- *L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels IR*
- *Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$*
- *L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que celles dans IR*
- *Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels.*

Exemple : $-5+3i$; $-i+1$; $-2i$; 5 ; $\sqrt{5}+2i$; $i-\frac{1}{2}$; … sont des nombres complexes

I.2. Etude Algébrique

I.2.1. Vocabulaire

Soit z un nombre complexe tel que $z = a+ib$ avec $a+ib$ où $(a,b) \in IR^2 / \ i^2 = -1$

- $a+ib$ est la forme algébrique de z
- Le nombre réel a est appelé *partie réelle de z et notée $\mathcal{R}e(z)$*
- Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire de z et notée $\mathcal{I}m(z)$*
- Si $b = 0$ alors $z = a$ on dit que $z \in IR$
- Si $a = 0$ alors $z = ib$ on dit que z est imaginaire pur et on note $z \in iIR$

I.2.2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Par convention, les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que ceux dans IR

Propriétés

Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes

P1- $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$

P2- $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$

P3- $z + z' = (a+a') + i(b+b')$

P4- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)i$

P5- $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ $avec\ z \neq 0$

P6- $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ $avec\ z' \neq 0$; $zz' = 0$ $si\ et\ seulement\ si\ z = 0\ ou\ z' = 0$

P7- $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$; $(z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z^2$

$(z-z')(z+z') = z^2 - z'^2$

P8- $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}$ **(Binôme de Newton)**

P9- $z^0 = 1$; $z^n \times z^m = z^{n+m}$; $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$ $z \neq 0$; $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ $z \neq 0$

(on pourra démontrer certaines de ces propriétés)

Exercice d'application

1. Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :
   $z_1 = (1+i)(3-4i)$; $z_2 = (1-i\sqrt{3})^3 - 4i$; $z_3 = (4-i)(4+i) - (1+i)^2$; $z_4 = (2+i)^4$
2. Soit $z = x+iy$ un nombre complexe non nul. Déterminer dans chacun des cas la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
   a). $Z = z^2 + 1$; b). $Z = z^2 - (z+2)(z+4)$; c). $Z = \frac{1}{1+z}$; d). $Z = \frac{i-z}{1-z}$
3. Soit $z = x+iy$ avec $z \neq -i$. On considère le nombre complexe $Z = \frac{z-i}{z+i}$
   a. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

I.2.3. Conjugué et module d'un nombre complexe

I.2.3.1. Conjugué d'un nombre complexe

Activité

On pose $A = \frac{4+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ et $B = \frac{4+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$

1. Ecrire A sans radical au dénominateur
2. Que peut-on dire des expressions $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$?
3. Reprendre la démarche précédente pour l'expression B.
4. Que peut-on conclure ? *(L'Enseignant pourra faire le rapprochement pour dégager la notion de conjugué d'un nombre complexe)*

Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ « lire z barre » et défini par $\bar{z} = a - ib$

Exemple : $\overline{1+\imath} = 1-i$; $\overline{1-\imath\sqrt{3}} = 1+i\sqrt{3}$; ; $\bar{\imath} = -i$; $\bar{3} = 3$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$

P1- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

P2- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $avec\ z' \neq 0$

P3- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

P4- $z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2iIm(z)$; $z\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

P5- $z = \bar{z}$ si et seulement si z est réel ; $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire

I.2.3.2. Module d'un nombre complexe

Activité

Soit un nombre complexe $z = 4 + 3i$ et $\bar{z}$ son module

1. Calculer $\sqrt{(4)^2 + (3)^2}$ et $\sqrt{z\bar{z}}$
2. Que remarque-t-on ?

Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. On appelle Module de z le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$ et noté $|z|$. On a : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : $\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$; $|1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$; $|4| = \sqrt{(4)^2} = 4$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes

P1- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

P2- $|zz'| = |z| \times |z'|$

P3- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

P4- $|z + z'| = |z| \leq |z'|$

P5- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$

P6- $\forall n \in IN^*,\ |z^n| = |z|^n \quad ; \quad |kz| = |k||z|$

Exercice pratique

1. Donner le module et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :
   $z_1 = (1-i)(4+3i)$; $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z_3 = \left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{77}$; $z_4 = -2\left(\sqrt{2} - i\right)^{77}$
2. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la suite de terme général z_n définie par :
   $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}i \end{cases} \quad n \in IN$
   a. Montrer que $\forall n \in IN^*, |z_n| < 1$
   b. On pose $z_n = x_n + iy_n$ et $u_n = z_n - i$ avec x_n et y_n des réels $\forall n \in IN$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1 + i$

I.3. Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur

Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un nombre complexe $z = 3 + 2i$ et un point M(3 ; 2) du plan.

1. Place le point M dans ce repère
2. Quel rapport peut-on établir entre les composantes de M et celles de z ?
3. Conclure

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté dans ce repère par :

- Un unique point M(a ; b) appelé **Image ponctuelle** de z
- Un unique vecteur $\overrightarrow{OM}(a; b)$ appelé **Image vectorielle** de z

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ « une affixe »

On note : M(z) ou M(a + ib)

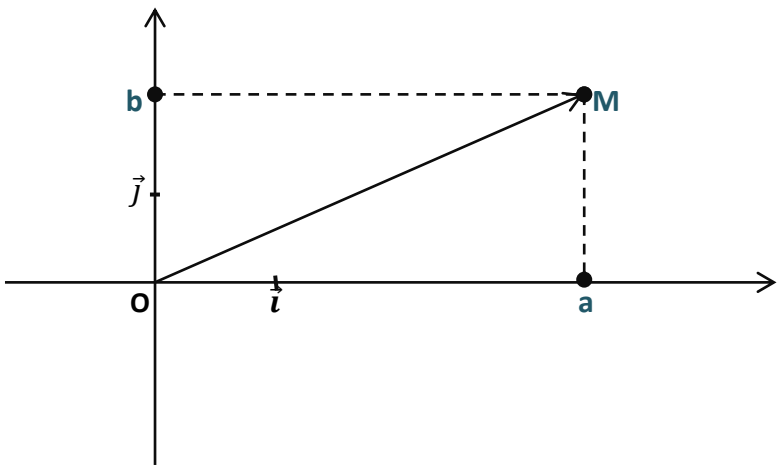
$\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a + ib)$

Remarques

R1. Les complexes $z = a \in IR$ sont les nombres réels et sont représentés sur l'axe des abscisses

R2. Les nombres complexes $z = ib \ avec \ b \in IR$ sont les imaginaires purs et sont représentés sur l'axe des ordonnées.

R3. Le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est alors appelé **Plan complexe.**



Propriétés

Soient les points A et B du plan tels que $A(z_A)$ et $B(z_B)$ Puis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$

P1/. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $\alpha z_{\overrightarrow{AB}} = \alpha(z_B - z_A)$ $avec\ \alpha \in IR$

P2/. $A = B$ si et seulement $z_A = z_B$

P3/. Soient A_1, A_2, A_3, …, A_n n points d'affixes respectives z_{A_1}, z_{A_2}, z_{A_3}, …, z_{A_n} et α_1, α_2, α_3, …, α_n n réels dont la somme est nulle. Si $G = bar\{(A_1, \alpha_1);\ (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3); \ldots;\ (A_n, \alpha_n)\}$ alors : $Z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$

P4/. Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ d'affixes respectives z et z' puis α et β deux réels. On a :

$\alpha\vec{u} + \beta\overrightarrow{u'} = \alpha z + \beta z'$; $\vec{u} + \overrightarrow{u'} = z + z'$ et $\vec{u} - \overrightarrow{u'} = z - z'$

Exercice pratique

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives i, 2i et 1+2i.

1. Placer ces points dans le repère
2. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses
3. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport au point O
4. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
5. Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$ et $-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
6. Déterminer les affixes du centre de gravité du triangle ABC

LECON II : ETUDE TRIGONOMETRIQUE – ETUDE EXPONENTIELLE

Compétences attendues

- Savoir écrire un nombre complexe sous la forme trigonométrique et sous la forme exponentielle ;
- Savoir faire le lien entre les aspects algébriques, trigonométriques et exponentielles ;
- Connaître et appliquer la formule de Moivre et les formules d'Euler pour linéariser les expressions trigonométriques.
- Déterminer, interpréter et utiliser les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

II.1. Argument d'un nombre complexe non nul

Activité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit un point M d'affixe z et α la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$. On pose $z = \sqrt{3} + i$

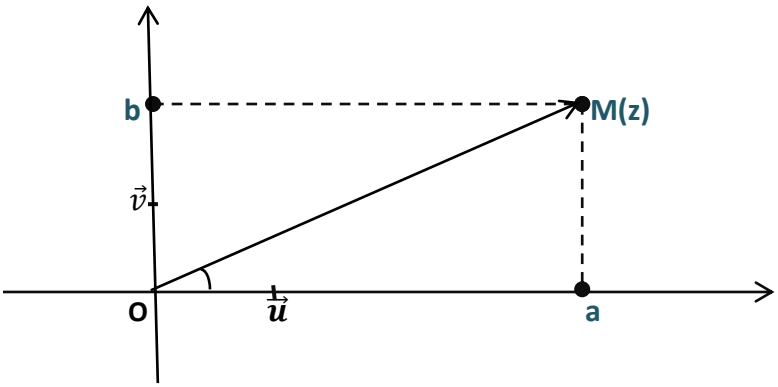
1. Calculer le module $|z|$ de z
2. Déterminer α tels que : $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{|z|}$ et $sin\alpha = \frac{1}{|z|}$
3. Conclure
4. Même démarche pour M'(z') tel que z'=1+i

Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z et on note $arg(z)$ toute mesure den l'angle $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$

On note : $arg(z) = mes(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$



Détermination pratique de $arg(z)$

Soit un nombre complexe $z = a + ib$

1. Déterminer le module de z noté $|z|$
2. Déterminer alors α tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{a}{|z|} \\ sin\alpha = \frac{b}{|z|} \end{cases}$
3. Déterminer l'argument de $z' = 1 + i$

Remarques

- Le nombre complexe zéro n'a pas d'argument
- Si α et α' sont des arguments de z alors il existe $k \in \mathbb{Z}/\alpha = \alpha' + 2k\pi$
- Si le réel α est un argument d z, on note $\arg(z) = \alpha$ ou $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ avec k $\in \mathbb{Z}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $\forall n \in IN$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$ on a :

P1/. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$

P2/. $\arg(z^n) = n\arg(z) = \alpha + 2k\pi$

P3/. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ et $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$

P4/. $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \; et \; \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$

Exercice

Dans chacun des cas suivants, déterminer un argument de z.

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = i$; $z_3 = -1$; $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_5 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2})$; $z_6 = \sqrt{2}\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$;

$z_6 = \left(\frac{1}{1+i}\right)^4$

II.2. Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité

Soit un nombre complexe z et M un point du plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $M(z)$ et $z = a + ib$. Désignons par r le module de z et α un argument de z. Exprimer z en fonction de $r, cos\alpha \; et \; sin\alpha$.

Définition

Tout nombre complexe non nul z est caractérisé par son module $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z) + 2k\pi$

- L'écriture $z = [r, \alpha]$ est la forme polaire de z
- L'écriture $z = r(cos\alpha + isin\alpha)$ est la forme trigonométrique de z
- L'écriture $z = re^{i\alpha}$ est la forme exponentielle de z

Exemple : $1 = e^{i0}$; $-1 = e^{i\pi}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Propriétés

Soit $n \in IN$, $\alpha = \arg(z) + 2k\pi$, $|z| = r$ et $\beta = \arg(z') + 2k\pi$, $|z'| = r'$

P1/. **Formule de Moivre** : $z^n = r^n(cos\alpha + isin\alpha)^n = r^n(cosn\alpha + isinn\alpha)$

P2/. $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$; $re^{i\alpha} \times r'e^{i\beta} = rr'e^{i(\alpha+\beta)}$

P3/. $\frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\beta}} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\alpha-\beta)}$; $\left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha}$

Exemple

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

On a : $zz' = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $z^5 = 243e^{i\frac{5}{4}\pi}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\frac{z}{z'} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Exercice pratique

1. Donner une écriture trigonométrique et une écriture exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

   $z_1 = 3i$; $z_2 = -3$; $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_4 = 2(1 + i)\sqrt{3}$; $z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)$; $z_6 = \left(\frac{1}{1+i}\right)^4$

   $z_7 = (1 + i)^{1992}$; $z_8 = \left(-i + \sqrt{3}\right)^{37}$
2. Donner une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

   $z_1 = \left(3e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^3$; $z_2 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}$; $z_3 = \left(e^{3i\frac{\pi}{8}}\right)^4 \left(e^{-i\pi}\right)^3$
3. Soit le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
   a. Donner une écriture exponentielle de a^2 et en déduire celle de a
   b. Donner les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

II.3. Formules d'Euler

Activité

Soit $z = cos\theta + isin\theta$ et $\bar{z}$ son conjugué.

1. Montrer que $z + \bar{z} = 2cos\theta$ et $z - \bar{z} = 2sin\theta$
2. En déduire $cos\theta$ et $sin\theta$ en fonction de z et $\bar{z}$
3. Justifier que si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$. En déduire $cos\theta$ et $sin\theta$ sous forme exponentielle

Propriétés

$\forall\theta\epsilon IR$, $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ puis $\forall n\epsilon\mathbb{Z}$, $cosn\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ et $sin\, n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ ce sont les formules d'Euler.

II.4. Utilisation de la formule de Moivre et des formules d'Euler : duplication et linéarisation d'un polynôme trigonométrique

II.4.1. Duplication d'un polynôme trigonométrique

Définition

Dupliquer ou développer un polynôme trigonométrique c'est exprimer cosnθ et sinnθ en fonction des puissances de cosθ et sinθ.

Méthode

On utilise la formule de Moivre pour écrire $cos(n\theta) + isin(n\theta) = (cos\,\theta + isin\,\theta)^n$ que l'on développe avec le binôme de Newton.

Exemple

Ecrire $cos3x\ et\ sin3x$ en fonction des puissances de $cosx\ et\ sinx$

1ère étape : on pose $cos3x + isin3x = (cosx + isinx)^3$

2ème étape : on développe cette expression en utilisant le binôme de Newton :

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

On a : $cos3x + isin3x = (cosx + isinx)^3$

$= cos^3x + 3icos^2xsinx - 3cosxsin^2x - isin^3x$

$= (cos^3x - 3cosxsin^2x) + i(3cos^2xsinx - sin^3x)$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que :

$cos3x = cos^3x - 3cosxsin^2x^2$ et $sin3x = 3cos^2xsinx - sin^3x$

Application : exprimer $cos4x\ et\ sin4x$ en fonction des puissances de $cosx\ et\ sinx$

II.4.1. Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Définition

Linéariser un polynôme trigonométrique c'est exprimer $sin^n\theta$ ou $cos^n\theta$ en fonction de $cosk\theta$ et $sink\theta$ avec k un entier allant de 0 à n.

Méthode

On utilise les d'Euler. On écrit d'abord : $\forall n \epsilon \mathbb{Z}$, $cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ et $sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$

Ensuite on développe à l'aide du binôme de Newton et enfin regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple : linéariser sin^3x

$$sin^3x = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8i}\left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta})$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}(sin3\theta - 3sin\theta) = -\frac{1}{4}sin3\theta + \frac{3}{4}sin\theta$$

Application : linéariser $sin^4x + cos^4x$; $cos^3x \times sin^2x$

II.5. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une racine n-ième de z est un nombre complexe u tel que $u^n = z$.

Il y a n racines n-ièmes $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ de $z = \rho e^{i\theta}$, ce sont : $\boldsymbol{u_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}}$ avec $k = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Propriété

Les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$

Remarques

R1/. La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe nulle est nulle

R2/. 1 admet n racines n-ièmes telles que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Cas pratique

Déterminons les racines cubiques de $z = 1 + i$

On pose u tel que $u^3 = z$

- Cherchons le module et $|z|$ et l'argument ρ de z

  $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

- Les racines cubiques de z seront les nombres complexes u de la forme : $u_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i\rho+2ik\pi}{n}}$ avec $k = \{0, 1, 2\}$

- On obtient alors : $u_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{\pi}{4}+2i0\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{\pi}{4}}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\pi}{16}}$

$$u_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{\pi}{4}+2i\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{9\pi}{4}}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i9\pi}{16}}$$

$$u_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{\pi}{4}+4i\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{17\pi}{4}}{4}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i17\pi}{16}}$$

Exercice d'application

Déterminer les racines 5-ièmes de $z = 2i$

LECON III : EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

Compétences attendues

- Savoir factoriser tous les polynômes à coefficients réels à l'aide de polynômes de degré uniquement un, à coefficients complexes ;
- Savoir résoudre les équations de l'ensemble des nombres complexes.

III.1. Racines carrées d'un nombre complexe

Activité

On pose : $z = 5 + 12i$ et $z_1 = a + ib$ deux nombres complexes.

1. Montrer que si $z_1 = a + ib$ est tel que ${z_1}^2 = z$ alors le couple $(a; b)$ est solution du système :
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = 12 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$
2. En déduire les valeurs ${z_1}'$ et ${z_2}'$ de z_1
3. Que peut-on dire de ${z_1}'$ et ${z_2}'$?

Définition

Pour $z \epsilon \mathbb{C}$, une racine carrée de z est un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = z$. Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Détermination pratique

On pose $z = \alpha + i\beta$ et $\delta = x + iy$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (\text{égalité de modules}) \quad (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha \quad (\text{égalité des parties réelles}) \quad (2) \\ 2xy = \beta \quad (\text{égalité des parties imaginaires}) \quad (3) \end{cases}$$

(1) Et (2) permettent de déterminer les valeurs de x et y

(3) permet de déterminer le signe de x et celui de y

Exemple

On pose $z = 3 - 4i$. Déterminons les racines carrées de z

On pose $\delta = x + iy$ chacune des racines de z

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \ ou \ x = 2 \\ y = -1 \ ou \ y = 1 \end{cases}$$

(3) nous permet de dire que les x et y sont de signes opposés alors :

$\delta_1 = -2 + i$ et $\delta_2 = 2 - i$ sont les racines carrées de $z = 3 - 4i$

Exercice d'application

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants

a). $z = 1$; b). $z = 1 + i$; c). $z = 6 - 8i$; d). $z = -5 + 12i$

III.2. Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

a, b et c sont des nombres complexes $(a \neq 0)$

Activité

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E1) : $z^2 + z + 1 = 0$ et (E2) : $iz^2 - iz - 3 - 1 = 0$

1. Dans chacun des cas, calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et déterminer les racines carrées de Δ. Que remarque-t-on ?
2. Déterminer les solutions de (E1) en utilisant la même démarche que dans IR
3. Déterminer les solutions de (E2) en exploitant successivement les racines de Δ obtenues. Que remarques-t-on ?

Généralisation

Soit l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$ a, b et c sont des nombres complexes $(a \neq 0)$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ

- Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet une solution double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

Exemple

Soit les équations $(E1): z^2 + 2z + 5 = 0$; $(E2): z^2 + z + \frac{1-i}{4} = 0$

- $(E1): z^2 + 2z + 5 = 0$

  $\Delta = -16 = 16i^2$ La racine carrée de Δ est alors $\delta = 4i$ et les solutions de (E1) seront :

  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i$

- $(E2): z^2 + z + \frac{1-i}{4} = 0$

  $\Delta = i$ Les racines carrées de Δ sont alors $\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\delta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Pour déterminer les solutions de (E2), on choisira l'une des deux racines et appliquer les formules: $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ alors $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i)$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i)$

NB : pour chaque cas il faut écrire l'ensemble solutions

Exemple

1. Calculer les racines carrées de $-i$, $3-4i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2+z-1=0$; $2z^2+(-10-10)z+24-10i=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2+\left(i-\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}=0$ puis l'équation $z^4+\left(i-\sqrt{2}\right)z^2-i\sqrt{2}=0$
4. Montrer que si $p(z)=z^2+bz+c$ possède pour racines $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors $z_1+z_2=-b$ et $z_1z_2=c$
5. Trouver les paires de nombres dont la somme vaut i et le produit 1

III.2. Résolution des équations se ramenant au second degré

Cette partie sera exposée à travers deux exercices pratiques. L'Enseignant peut proposer d'autres.

Exercice 1

Soit l'équation $(E): z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$

1. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 2

Soit l'équation $(E): z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$

1. Démontrer que $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u=z+\frac{1}{z} \\ u^2-5u+4=0 \end{cases}$
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

TRAVAUX DIRIGES (voir fiche)

♣ Table des matières ♣

1 CALCUL VECTORIEL **2**

1.1 Leçon 1 : Généralisation des résultats barycentriques 2

1.1.1 Introduction : 2

1.1.2 Activité 3

1.1.3 Barycentre de n points pondérés 3

1.1.4 Lignes de niveaux 7

1.2 Leçon 2 : GÉOMÉTRIE DANS L 'ESPACE : PRODUIT VECTORIEL 11

1.2.1 Introduction 11

1.2.2 Activié 12

1.2.3 Orientation de l'espace 13

1.2.4 Produit vectoriel 15

1.2.5 Applications du produit vectoriel 17

1.2.6 Sphères 20

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

CALCUL VECTORIEL

1.1 Leçon 1 : Généralisation des résultats barycentriques

Objectifs ; À la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

- ♣ Simplifier les écritures : $M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$ et $M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ (on considèrera les cas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$)
- ♣ Rechercher les lieux géométriques dans le plan et dans l'espace .
- ♣ Déterminer les différentes lignes et surfaces de niveaux .

Remarque **1.1.1.** *Les considérations envisagées dans cette parties , sont valables dans le plan et dans l'espace . $\mathcal{W}$ désignera suivant les besoins du lecteur , le plan $\mathcal{P}$ ou l'espace $\mathcal{E}$.*

1.1.1 Introduction :

Définition **1.1.1.** (***point pondéré***)

Un point pondéré est un couple (A, α) où A est un point et α un nombre réel généralement non nul , appelé ***Coefficient ou masse*** *.*

Définition **1.1.2.** (***système de points pondérés***)

Un système de points pondérés est une collection de points pondérés , dans laquelle un même point pondéré peut apparaitre plusieurs fois .

Définition **1.1.3.** (***masse totale d'un système de points pondérés***)

La masse totale d'un système de points pondérés est la somme des coefficients de différents points pondérés qui constituent ce système .

Exemple **1.1.1.** *soient A , B , C et D quatre de $\mathcal{W}$ et $S = \{(A, 1); (B, -4); (C, \pi); (D, 2)\}$ est un système de points pondérés de masse totale $1 - 4 + \pi + 2 = \pi - 1$.*

1.1.2 Activité

L'unité de longueur est le centimètre . ABC est un triangle rectangle en C de sens direct tel que $BC = 2$ et $AC = 3$. G est le barycentre du système $\{(A,2);(B,5);(C,-3)\}$ et E un point du plan tel que $\vec{BE} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$.

1. Faire une figure et construire les points G et E .
2. Montrer que E est le barycentre des points B et C affectés des coefficients à déterminer .
3. Montrer en utilisant la notion de barycentre que les points A , E et G sont alignés .
4. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que $AM^2 + EM^2 = 35$ et représenter $(\mathcal{C})$.
5. On considère le repère $(C,\vec{i},\vec{j})$, tels que : $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{CA}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{CB}$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points A , B , C , E et G dans le repère $(C,\vec{i},\vec{j})$
   (b) Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ dans ce repère .

Remarque **1.1.2.** *On utilisera la relation de construction suivante :*

$$G = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{CG} = \frac{a}{a+b+c}\vec{CA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{CB}.$$

1.1.3 Barycentre de n points pondérés

Théorème : Existence et unicité du barycentre

Soit $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de points pondérés de masse totale $m = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$; Si $m \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{GA_i} = \vec{0}$.

Preuve . *d'après la relation de Chasles on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{GA_i} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\vec{GA_1} + \vec{A_1A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{GA_1} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{A_1A_i}.\end{aligned}$$

Posons $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{A_1A_i}$ *et factorisons* $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{GA_1}$ *par* $\vec{GA_1}$ *(qui est indépendant de l'indice i) ;*

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_1\vec{A}_i = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) G\vec{A}_1 + \vec{u}$ *; d'où finalement* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = mG\vec{A}_1 + \vec{u}$ *. Nous avons donc l'équivalence des deux conditions suivantes*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \vec{0} \iff A_1\vec{G} = \frac{\vec{u}}{m}.(puisque\ \ \vec{u} \neq 0)$$

Posons $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{m}$ *; ainsi :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \vec{0} \iff A_1\vec{G} = \vec{v}.$$

Or , nous savons qu'étant donné un point A_1 *et un vecteur* $\vec{v}$ *; il existe un unique point* G *tel que* $A_1\vec{G} = \vec{v}$ *, donc il existe un unique point* G *tel que ,* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \vec{0}$ *.*

Définition 1.1.4. (***barycentre***)

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ *un système de points pondérés de masse totale non nulle . L'unique point* G *vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \vec{0}$ *est appelé barycentre du système* $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ *.*

Notation 1.1.1. *On note G = bar* $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & ... & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ *ou* $G = bar\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); ...; (A_n, \alpha_n)\}$.

Remarque 1.1.3. *Cas particulier : lorsque* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$ *; le point G est appelé* ***isobarycentre*** *ou centre de gravité de la figure dont les sommets sont les points du système* $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$

Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{A}_i$

Soit M un point quelconque de $\mathcal{W}$ et G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.

- $1^{er} cas\ \ m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ **:** soit G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ (G existe car $m \neq 0$) ; on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (M\vec{G} + G\vec{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{G} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{G}$ (car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G\vec{A}_i = \vec{0}$) .

  Conclusion : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{A}_i = mM\vec{G}$.
- $2^{ime} cas\ m = 0$: dans ce cas la barycentre G n'existe pas , cependant pour tout point N on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (M\vec{N} + N\vec{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M\vec{N} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N\vec{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N\vec{A}_i$

(car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$) .

Conclusion : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$ est constant (c'est à dire indépendant de M) .

Remarque 1.1.4. *Les résultats précédents sont remarquables dans le sens où ils permettent de réduire une somme de n vecteurs à un seul vecteur , ce qui facilite par exemple la recherche des lieux géométrique .*

Remarque 1.1.5. *La somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$ est appelée* ***fonction vectorielle de Liebniz associé au système de points pondérés*** $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ *qu'on note* $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$.

Exemple 1.1.2.

1. *Soient A , B , C et D des points fixés de $\mathcal{W}$ et M un point variable de $\mathcal{W}$; simplifier les écritures suivantes :*
   - *(a)* $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$
   - *(b)* $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$
   - *(c)* $3\vec{MA} + 5\vec{MB} - 4\vec{MC} + 6\vec{MD}$.
2. *$ABCD$ est un carré . Déterminer les lieux géométriques suivants (on donnera les ensembles caractéristiques dans le plan et dans l'espace) :*
   - *(a)* $E = \{M/ \ \|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\| \ \}$
   - *(b)* $E' = \{M/ \ \|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| \ et \ \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| \ soient \ colinaires\}$
   - *(c)* $E" = \{M/ \ \|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| \ \}$

Propriétés du barycentre

Propriété 1.1.1. ***(Homogénéité du barycentre)*** *: Le barycentre reste inchangé , si l'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels non nuls , on a :*

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & ... & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \hline \end{array} \iff G = bar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & ... & A_n \\ \hline k\alpha_1 & k\alpha_2 & ... & k\alpha_n \\ \hline \end{array}$ *(avec $k \neq 0$) .*

Propriété 1.1.2. ***(Associativité) :*** *On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondant . Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de point pondéré de barycentre G ; on a :*

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & ... & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \hline \end{array} \iff G = bar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G' & A_{p+1} & ... & A_n \\ \hline m' & \alpha_{p+1} & ... & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ *(où G' =* $bar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & ... & A_p \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_p \\ \hline \end{array}$

avec $m' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ *)*

Exemple 1.1.3. $G = bar\{(A,1);(B,2);(C,3)\} = bar\{(G',3);(C,3)\}$ *où* $G' = bar\{(A,1);(B,2)\}$ *; et finalement on s'aperçoit que* G *est le milieu du segment* $[G'C]$ *.*

Propriété 1.1.3.

♣ *Soient les points* A_1 , A_2 , A_3 , ... *et les réels* α_1 , α_2 , α_3 , ... *tels que* $\forall i,j \in \{1,2,3,...\}\ \alpha_i + \alpha_j \neq 0$ *: Pour* $i \neq j$ *, si* G *est le barycentre de* $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2)\}$ *;* $\{(A_3,\alpha_3);(A_2,\alpha_2)\}$, $\{(A_1,\alpha_1);(A_3,\alpha_3)\}$, ... , *alors les droites* (A_1A_2) , (A_2A_3) , (A_1A_3) , ... *sont concourantes en* G

♣ $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline\end{array} \iff G \in (AB)$.

♣ $G \in [AB]$ *ssi* a *et* b *sont de même signe .*

♣ $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline\end{array}$ *alors* $G \in (ABC)(plan)$.

Propriété 1.1.4. *Lors de la réduction de la somme* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$ *ci-dessus , nous avons obtenu :* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i} = m\vec{MG}$ *. Ce résultat étant valable pour tout point M de l'espace .*

Considérons un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *de l'espace et remplaçons* M *par* O *, la relation devient :* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i} = m\vec{OG} \iff \vec{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OA_i}}{m}$ *(*) . Pour tout i tels que* $1 \leq i \leq n$ *, notons* (x_i,y_i,z_i) *les coordonnées du point* A_i *; notons également* (x_G,y_G,z_G) *les coordonnées de G .*

L'interprétation de la relation (*) en terme de coordonnées nous donnent :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{m} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{m} \\ z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{m} \end{cases}$$

Exemple 1.1.4. *Soit* ABC *un triangle ; on note a , b et c les longueurs respectives des cotés* $[BC]$ *;* $[AC]$ *et* $[AB]$ *. Soit* U *le barycentre des points pondérés* (B,b) *et* (C,c) *. On note E et F les points définis par les égalités vectorielles suivantes :* $\vec{AE} = \dfrac{b}{b+c}\vec{AB}$ *et* $\vec{AF} = \dfrac{c}{b+c}\vec{AC}$ *.*

1. *Déterminer la nature exacte du quadrilatère* $AEUF$ *.*
2. *En déduire que* (AU) *est la bissectrice intérieur du triangle* ABC *issue de* A *.*
3. *En déduire que* $\Omega = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline\end{array}$ *est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle* ABC *(On pourra introduire si on le veut les points V et W définis par V =*

$bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$) et W = $bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline a & c \\ \hline \end{array}$

1.1.4 Lignes de niveaux

Cas de la ligne de niveau de l'application φ : $M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$

La ligne de niveau de l'application $\varphi : M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{W}$, tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) . On a deux cas de figure :

1. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Le barycentre G du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ existe ; nous avons après introduction du point G dans l'application φ :
   $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GM^2 + \varphi(G) = k \Longleftrightarrow GM^2 = \dfrac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.
   Posons $GM = k'$ où $k' = \dfrac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$; on a les conclusions suivantes :
   (a) Si $k' < 0$, l'ensemble des points $M/\varphi(M) = k$ est vide .
   (b) Si $k' = 0$, $\{M/\varphi(M) = k\} = \{G\}$.
   (c) Si $k' > 0$, nous avons deux situations :
      i. Si $dim\mathcal{W} = 2$, l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{k'}$; en dimension 2 cet ensemble est appelé ligne de niveau ;
      ii. Si $dim\mathcal{W} = 3$, l'ensemble des points M est la sphère de centre G et de rayon $R = \sqrt{k'}$; cet ensemble est appelé surface de niveau .
2. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$: Soit I un point quelconque de $\mathcal{W}$, on a :
   $\varphi(M) = 2\vec{MI}.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i I\vec{A}_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i IA_i^2 = k$, posons $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I\vec{A}_i$; cela nous donne :
   $\varphi(M) = 2\vec{u}.\vec{MI} + \varphi(I) = k \Longleftrightarrow \vec{u}.\vec{MI} = \dfrac{k-\varphi(I)}{2}$. Posons $\vec{u}.\vec{MI} = \lambda$ avec $\lambda = \dfrac{k-\varphi(I)}{2}$.
   (a) Si $\vec{u} \neq \vec{O}$, l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$ est la droite affine de vecteur normal $\vec{u}$ (dim2) ou le plan de vecteur normal $\vec{u}$ (dim3) .
   (b) Si $\vec{u} = \vec{O}$ on a les deux cas de figure suivant :

i. Si $\lambda = 0$, l'ensemble des points M est l'espace tout entier .

ii. Si $\lambda \neq 0$, l'ensemble des points M est vide .

Remarque 1.1.6. *Les courbes de niveaux sont soit les lignes de niveaux , soit les surfaces de niveaux .*

L'application φ est encore appelée ***fonction scalaire de Leibniz***

Remarque 1.1.7. *ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 7$ et $BC = 4$. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité de ABC (l'unité de mesure est le cm)*

1. *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 38$.*
2. *Calculer AG et BG .*
3. *Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2+MC^2 = 65$*

Ligne de niveau de l'application $M \longmapsto \vec{MA}.\vec{MB}$

C'est le lieu géométrique des points M tels que $\vec{MA}.\vec{MB} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)
Soit I milieu du segment $[AB]$, on montrer que $\vec{MA}.\vec{MB} = k \iff MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}$; en posant $k' = k + \dfrac{AB^2}{4}$ on peut conclure comme suit :

1. Si $k' = 0$ alors l'ensemble des points M est réduit au singleton $\{I\}$.
2. Si $k' < 0$ l'ensemble des points est vide .
3. Si $k' > 0$, alors l'ensemble des points M cherché est :
   (a) Dans le plan le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{k'}$.
   (b) Dans l'espace la sphère de centre I et de rayon $R = \sqrt{k'}$.

Exemple 1.1.5. *$ABCD$ est un carré de sens direct .*

1. *Écrire A comme barycentre des points B , C et D .*
2. *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\vec{MA}.\vec{MC} + \vec{MC}.\vec{MD} - LMC^2 = 0$.*

Ligne de niveau de l'application $M \longmapsto \dfrac{MA}{MB}$

C'est le lieu géométrique des points M tel que $\dfrac{MA}{MB} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) . On a les cas de figures suivantes :

1. Si $k = 0$ alors $M = A$ avec $M \neq B$.
2. Si $k < 0$, alors l'ensemble des points M cherché est vide .

3. Si $k = 1$, alors on $\frac{MA}{MB} = 1 \Longleftrightarrow MA = MB$; on a :
   (a) Dans le plan l'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.
   (b) Dans l'espace l'ensemble des points M cherché est le plan médiateur du segment $[AB]$.

4. Si $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
   $\frac{MA}{MB} = k \Longleftrightarrow \vec{MG}.\vec{MG'} = 0$ (où G = bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & -k \\ \hline \end{array}$ et G' = bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & k \\ \hline \end{array}$) ; conclusion :
   (a) Dans le plan l'ensemble de points M cherché est le cercle de diamètre $[GG']$.
   (b) Dans l'espace , on aura plutôt la sphère de diamètre $[GG']$.

Remarque 1.1.8. *On peut être plus explicite avec cette ligne de niveau en prenant plutôt* $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & -k^2 \\ \hline \end{array}$

Exemple 1.1.6. *Déterminer et construire l'ensemble* (E) *des points* M *du plan tel que :* $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

Ligne de niveau de l'application $M \longmapsto Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}})$

C'est le lieu géométrique des points M tel que $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \theta$. Nous supposons A et B deux points distincts du plan et M distinct de A et B .

Remarque 1.1.9. *Trois points A , M et B sont alignés ssi* $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = 0$ *ou* $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \pi$.

(a) Si $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = 0$ *, alors l'ensemble des points* M *est la droite* (AB) *privé du segment* $[AB]$.

(b) Si $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \pi$ *,l'ensemble des points* M *est le segment* $[AB]$ *privé des points* A *et* B .

On suppose que $\theta \in]-\pi; 0[\bigcup]0; \pi[$. Soit O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $Mes(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 2\theta$ (O est l'intersection de la médiatrice $[AB]$ et de la perpendiculaire issue en A à (AP) ; P étant un point tel que $Mes(\widehat{\vec{AP}, \vec{AB}}) = \widehat{\theta}$) . $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O passant par A et B .
L'ensemble des points M du plan $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \theta$ est l'un des deux arcs privés des points A et B définis sur $(\mathcal{C})$ par la corde $[AB]$.

Remarque 1.1.10. *(a) Si $\widehat{\theta}$ est droit , l'ensemble des points M du plan tel que $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \theta$ est un demi cercle de diamètre $[AB]$, privés des points A et B .*

(b) L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) \equiv \theta(\pi)$ est le cercle $\mathcal{C}$ sauf les points A et B .

(c) Quatre points A , B , C et D sont cocycliques ou bien alignés si et seulement si $Mes(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) \equiv Mes(\widehat{\vec{DA}, \vec{DB}})(\pi)$.

Exemple 1.1.7.

A et B sont deux points quelconques distincts du plan . Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

1. $Mes(\widehat{\vec{MA}; \vec{MB}}) = -\frac{\pi}{4}$.
2. $Mes(\widehat{\vec{MA}; \vec{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}(\pi)$.
3. $Mes(\widehat{\vec{MA}; \vec{MB}}) = -\frac{\pi}{2}$.
4. *A et B sont deux points distincts du plan . Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants .*
   (a) $\frac{MA}{MB} = 2$.
   (b) $MA^2 + MB^2 = AB^2$.
5. *ABC est un triangle du plan . On considère l'application g du plan dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M associe le réel g(M) défini par :* $g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ *, (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) . Soit $G = bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.*

   (a) Déterminer g(A) , g(B) , g(C) et g(G) .

   (b) Démontrer que pour tout points M du plan que $g(M) = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + g(G)$.

   (c) En déduire que : $g(A) = (\alpha + \beta + \gamma)GA^2 + g(G)$, $g(B) = (\alpha + \beta + \gamma)GB^2 + g(G)$ *et* $g(C) = (\alpha + \beta + \gamma)GC^2 + g(G)$.

   (d) Démontrer que $\alpha g(A) + \beta g(B) + \gamma g(C) = 2(\alpha + \beta + \gamma)g(G)$.

   (e) Déduire que $g(G) = \frac{\beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 + \alpha\beta AB^2}{\alpha + \beta + \gamma}$.

   (f) Soit ABC un triangle équilatéral de coté a ; $G = bar\{(A, -1); (B, 4); (C, 1)\}$

      i. Construire G .

      ii. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$.

(g) Dans un triangle ABC non équilatéral et non aplati , on considère l'orthocentre H , le centre O du cercle circonscrit , le centre de gravité G de ce triangle et I milieu de [AB]

i. Exprimer $\vec{OG}$ en fonction de $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$.

ii. Soit $\vec{u} = 3\vec{OG} - \vec{OH}$. Montrer que $\vec{u}.\vec{AB} = 0$.

iii. On admet aussi que $\vec{u}.\vec{AC} = 0$; déduire que $3\vec{OG} - \vec{OH} = \vec{0}$ et conclure .

1.2 Leçon 2 : GÉOMÉTRIE DANS L 'ESPACE : PRODUIT VECTORIEL

Objectifs ; À la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

- ♠ Reconnaitre l'orientation d'une base à l'aide des différentes méthodes appropriées .
- ♠ Définir et calculer l'expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe .
- ♠ Utiliser le produit vectoriel et ses propriétés pour :
  1. Déterminer un vecteur normal à un plan ;
  2. Étudier la position relative de deux plans
  3. Le calcul d'aire et volume ... etc
- ♠ Caractériser une sphère par son rayon et son centre ...etc et étudier la position relative d'une sphère et d'un plan .

1.2.1 Introduction

Définition 1.2.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan euclidien orienté .On appelle* ***produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$*** *le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :*

1. $\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls ;*
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *sinon .*

Remarque 1.2.1. *Dans la définition donnée ci-dessus dans le petit 2 les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux .*

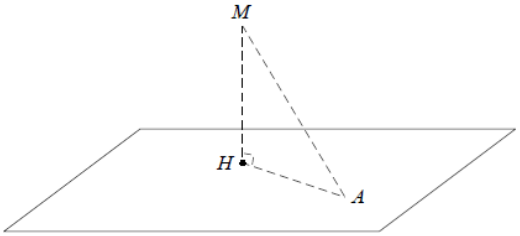
Exemple 1.2.1. *Le vecteur nul est orthogonal à tous vecteurs du plan .*

Définition 1.2.2. ***(trièdre) :*** *En géométrie dans l'espace , un trièdre est la donnée de trois plans deux à deux sécants selon trois droites (ou axes) , lesquels sont orientés et en général ordonnées .*

Définition 1.2.3. *On dit que quatre points de l'espace A , B , C et D sont coplanaires si les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont linéairement dépendants .*

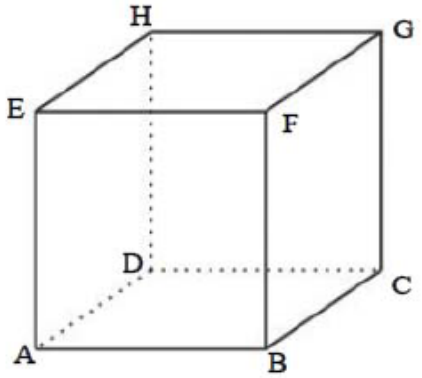
Remarque 1.2.2. *(O, I, J, K) est un repère de l'espace si les points O , I , J et K sont non coplanaires .*

Définition 1.2.4. *Soit M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan représenté par le parallélogramme ci-dessous*



On appelle projection orthogonale de M sur $\mathcal{P}$, comme l'indique la figure ci-jointe , le point H intersection de la droite passant par M et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

1.2.2 Activié



La figure ci-jointe représente un cube $ABCDEFGH$ .On souhaite démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) ; pour ce faire nous allons utiliser le produit scalaire par deux approches
(avec Chasles en introduisant les points et en définissant un repère de l'espace) .

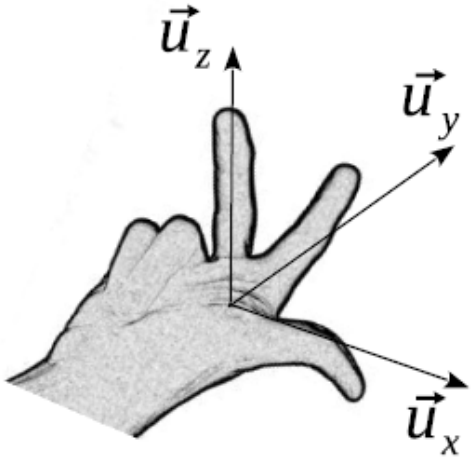
1. En utilisant le produit scalaire et l'égalité $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$, démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) .
2. On suppose que $AB = a$ (avec $a > 0$) et on pose $\vec{i} = \dfrac{\vec{AB}}{AB}$, $\vec{j} = \dfrac{\vec{AD}}{AD}$ et $\vec{k} = \dfrac{\vec{AE}}{AE}$.
   (a) Démontrer que $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace .
   (b) Déterminer dans la base $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées des vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{CF}$ et $\vec{FH}$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1 .

(d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et le plan (CFH) et en déduire la distance du point A au plan (CFH) .

1.2.3 Orientation de l'espace

Il existe plusieurs règles mnémotechniques pour fixer une orientation de l'espace (**règle : des trois doigts de la main droite , du bonhomme d'ampère , tire bouchon ...etc**) parmi celle-ci nous allons plus nous attarder sur les deux premières .

Règle des trois doigts de la main droite



Considérons $(\vec{U_x}, \vec{U_y}, \vec{U_z})$ une base orthonormée (BON) de l'espace ; on associe les vecteurs de bases aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite($\vec{U_x}$ dans la direction du pouce , $\vec{U_y}$ dans la direction de l'indexe et $\vec{U_k}$ dans la direction du majeur) . Cette base est considérée comme **directe** , si on peut la réaliser à l'aide de la règle **des trois doigts de la main droite** (main gauche renverra au sens indirecte comme l'indique la figure 1.1-suivante) .

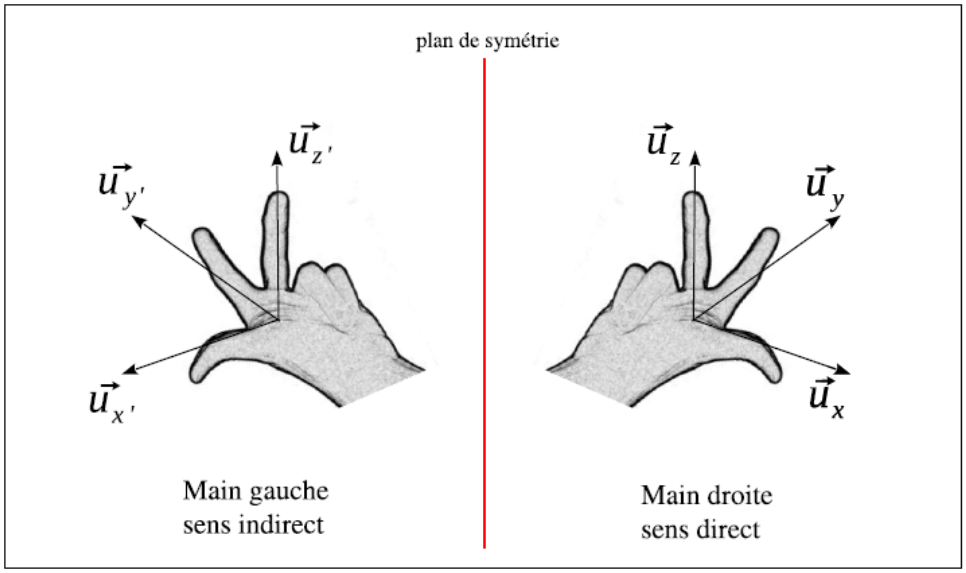
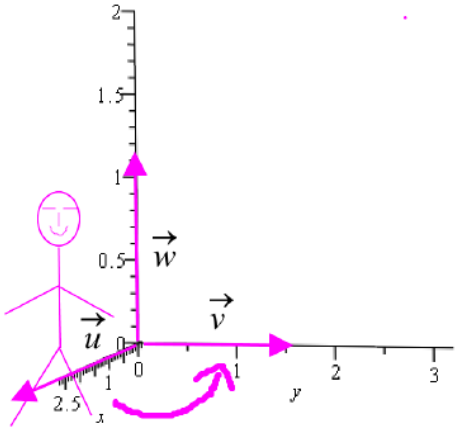


FIGURE 1.1 –

Règle du bonhomme d'ampère



Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; Soit un observateur se tenant debout , dans l'axe $(O, \vec{w})$ ou à un plan parallèle à cet axe ; les pieds en O et regardant le vecteur $\vec{u}$ comme l'indique la figure ci-après .

Un repère est dit **directe** si l'observateur a le vecteur $\vec{v}$ à sa gauche ; Il est dit **indirecte** dans le cas contraire . Par permutation $(\vec{u} \longrightarrow \vec{v} \longrightarrow \vec{w} \longrightarrow \vec{u})$ circulaire les bases

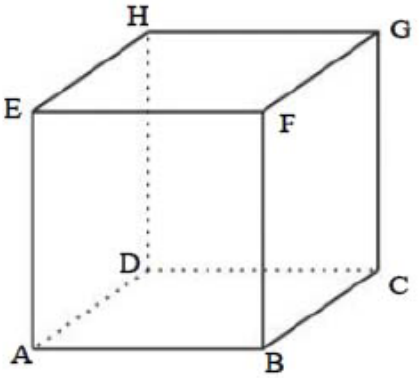
$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ sont directes et la base $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$ est indirecte .

Choisir une orientation de l'espace , c'est choisir de travailler avec les repères directes ou les repères indirectes . Si on fixe un repère de l'espace on est libre de choisir une orientation arbitraire (directe ou indirecte)

Remarque 1.2.3. *On peut aussi utiliser* ***la règle du tire bouchon*** *; par rapport au schéma du bonhomme ci-dessus :* ***la rotation amenant le vecteur*** $\vec{u}$ ***sur le vecteur*** $\vec{v}$ ***fait avancer le tire bouchon dans la direction du vecteur*** $\vec{w}$ ***; alors*** $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ***est un repère orthonormé directe*** .

Dans la suite de cette leçon les repères ou bases considérés seront orthogonaux et directes .

Exemple 1.2.2. *Soit* $ABCDEFGH$ *un cube d'arête 1 ;*



1. *Repères orthonormés direct de l'espace :* $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$,$(B, \vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BF})$
2. *Repères orthonormés indirecte :* $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$, $(C, \vec{CD}, \vec{BC}, \vec{CG})$.
3. *Bases orthonormés directes :* $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$
4. *Bases orthonormés indirectes : ...etc*

.

Propriété 1.2.1. *Considérons une base* $\mathcal{B}$ *de l'espace*

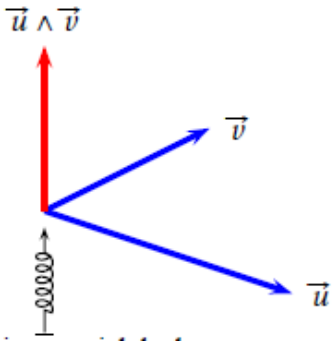
- *Permuter deux vecteurs d'une base change son orientation , ainsi les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ sont de sens contraires .*
- *Si on échange un des vecteurs de $\mathcal{B}$ avec son opposé , on change l'orientation de $\mathcal{B}$ ainsi les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ sont de sens contraires .*
- *Si on effectue une permutation circulaire des éléments de $\mathcal{B}$ alors on ne change pas son orientation .*

1.2.4 Produit vectoriel

Définition et Propriétés

Notation 1.2.1. *Dans toute cette partie $\mathcal{W}$ représentera l'espace orienté .*

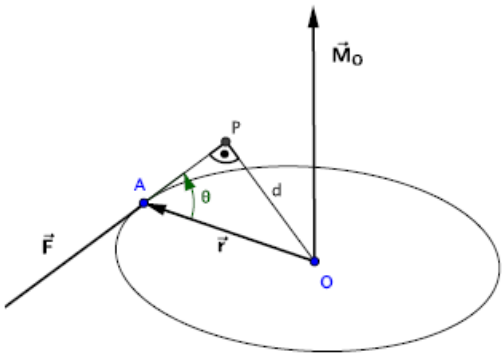
Définition 1.2.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ .On appelle produit vectorielle de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ainsi défini :*



1. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
2. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :
   - ☞ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
   - ☞ $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe de $\mathcal{W}$;
   - ☞ $\| \vec{u}\wedge\vec{v} \| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times | sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) |$

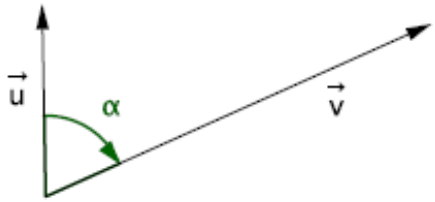
Notation 1.2.2. *$\vec{u}\wedge\vec{v}$ ou $\vec{u}\times\vec{v}$ lit $\vec{u}$ **vectoriel** $\vec{v}$*

Exemple 1.2.3. *Moment d'une force $\vec{M_O}$. On a : $d = rsin(\theta)$.*



En Mécanique , le moment d'une force $\vec{F}$appliquée au point A , par rapport à un point O (voir figure ci-jointe) , est défini par :
$\vec{M_O} = \vec{OA}\wedge\vec{F} = \vec{r}\wedge\vec{F}$ *; où $\vec{r} = \vec{OA}$ est le vecteur bras de levier (voir figure ci-jointe) .*
La norme du moment est donc :
$\| \vec{M_O} \| = \| \vec{r} \| \times \| \vec{F} \| \times | sin(\theta) |$.

Exemple 1.2.4. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs donnés ci-dessous :*



On donne : $\| \vec{u} \| = 5$, $\| \vec{v} \| = 10$ *et* $\alpha = \frac{\pi}{3}$. *Calculer* $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|$ *et dire si* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *pointe vers l'intérieur de la page ou l'extérieur de celle-ci . Faire le même travail en changeant le sens du vecteur* $\vec{u}$.

Propriété 1.2.2. ***Propriétés immédiates (conséquences de la définition)***

- *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux , alors* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *est une base orthonormé directe de* $\mathcal{W}$.
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires .*
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\vec{k}$ *; où* $\vec{k}$ *est un vecteur normal unitaire au plan défini par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Remarque 1.2.4. *On peut faire les remarques suivantes qui peuvent aussi être vues comme des propriétés :*

☞ *Des points* A , B *et* C *de l'espace sont alignés ssi* $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$ *;*

☞ *Si* $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ *alors les points* A , B *et* C *de l'espace sont non alignés et définissent un plan dont un vecteur normal est* $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$. *(un vecteur normal du plan* $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ *est* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *).*

☞ *Pour étudier la position relative de deux plans* (P_1) *et* (P_2) *on peut déterminer deux vecteurs* n_1 *et* n_2 *respectivement normaux des plans* (P_1) *et* (P_2) *, alors on a :*

- *Si* $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \vec{0}$ *alors* $(P_1) \,||\, (P_2)$,
- *Si* $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} \neq \vec{0}$ *, alors* (P_1) *et* (P_2) *sont sécants suivant une droite dont un vecteur directeur est* $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$ *(si* $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$ *alors* $(P_1) \perp (P_2)$ *)*

Propriété 1.2.3. *Soient* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w} \in \mathcal{W}$ *et* λ *un scalaire :*

P_0 $\forall \vec{u} \in \mathcal{W}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ ***(alternance)***

P_1 **:** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ ***(le produit vectoriel est antisymétrique ou anticommutative)*** .

P_2 **:** ***Bilinéarité :***

☞ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ *;*

☞ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

P_3 **:** $(\lambda.\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda.\vec{v}) = \lambda.(\vec{u} \wedge \vec{v})$ ***(multiplication par un scalaire)***

P_4 **:** $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \times \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$ ***(Identité de Lagrange)*** *preuve à faire*

P_5 **:** *Une base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est caractérisée par les 9 conditions suivantes (règle de permutations cycliques) :*

☞ $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$;

☞ $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$;

☞ $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$;

☞ $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$.

Remarque **1.2.5.** *En général , il y'a pas d'associativité c'est à dire :*
$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

Expression analytique du produit vectoriel (ou définition algébrique du produit vectoriel)

Théorème **1.2.1.** *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de composantes respectives (x, y, z) et (x', y', z') sur une même base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les composantes sur cette même base de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se calcul comme suit :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - y'z, zx' - zx, xy' - x'y)$$

Preuve . *Prouvons le théorème donné di-dessus :*
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Utilisant la bilinéarité du produit vectoriel et la propriété (P_5) ci -dessus on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\
&= xx'\vec{i} \wedge \vec{i} + xy'\vec{i} \wedge \vec{j} + ... + zy'\vec{k} \wedge \vec{j} + zz'\vec{k} \wedge \vec{k} \\
&= xy'\vec{k} - xz\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i} \qquad (\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}) \\
&= (yz' - y'z, zx' - zx, xy' - x'y).
\end{aligned}$$

D'où le résultat

Remarque **1.2.6.** *Simuler (par des exemples) aussi la méthode du déterminant d'ordre 3 pour le calcul des coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

Exemple **1.2.5.** *On donne $\vec{a}(2; 6, -5)$ et $\vec{b}(0; -1, -5)$ calculer $\vec{a} \wedge \vec{b}$.*

1.2.5 Applications du produit vectoriel

Activité

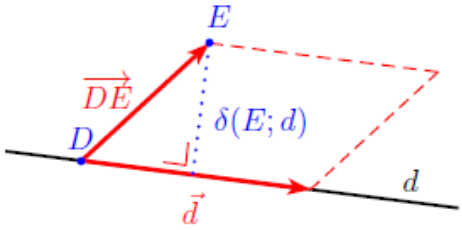
On considère les deux plans d'équations : $(P) : 3x - 2y + 5z = 4$ et $(P') : 3x + 2y + 5z = 4$.

1. Déterminer une équation paramétrique de (P) .
2. Déterminer un vecteur directeur de la droite (D) intersection de (P) et (P') .
3. Déterminer une équation paramétrique de (D) .

Propriété 1.2.4. *On donne les premières applications directes suivantes :*

Détermination du vecteur normal à un plan : *Soit trois points distincts A , B et C non alignés et le plan (ABC) . Un vecteur normal au plan (ABC) est : $n = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$*

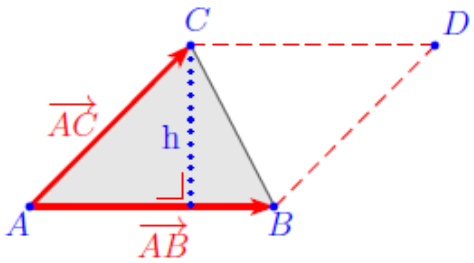
Distance d'un point à une droite :



Soit d la droite de repère $(D;\vec{d})$ et E un point de l'espace . alors la distance du point E à la droite (d) notée $d(E;d)$, est donnée par la formule :

$$d(E;d) = \frac{\| \vec{ED} \wedge \vec{d} \|}{\| \vec{d} \|} .$$

Aire d'un parallélogramme et d'un triangle : *Soit $ABCD$ un parallélogramme ;*



Ci-jointe, on voit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ engendrent le parallélogramme $ABCD$. On montre aisément que l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ vaut $S = \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \|$.

On remarque que l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCD$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \|$.

Propriété 1.2.5. *On va introduire la notion suivante :*

On appelle ***produit mixte*** *de trois vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{W}$, pris dans cet ordre , le nombre réel noté $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et défini par la formule : $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.*

Indépendance linéaire : *Le produit mixte permet de déterminer si trois vecteurs (ou quatre points) sont coplanaires : $\vec{u}$, $\vec{v}$,$\vec{w}$ sont coplanaires $\Longleftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.*

Équation cartésienne d'un plan : *Soient trois points distincts A , B et C non alignés et le plan*

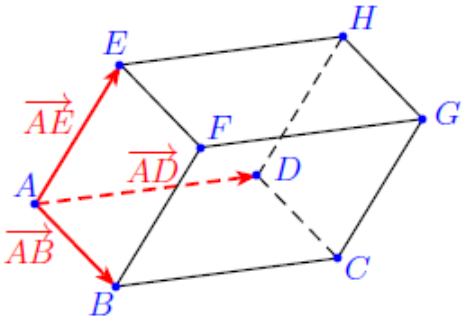
(ABC) ; l'équation cartésienne du plan (ABC) est déterminée par :
Soit $M(x,y,z) \in (ABC) \Longleftrightarrow [\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \vec{AM}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$.

Exemple 1.2.6. *On donne les points* $A(7;1;-3)$, $B(8;2;-2)$ *et* $C(0;1;6)$.

1. *Déterminer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs* $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ *et déduire l'aire du triangle* ABC .
2. *Déterminer une équation du plan* (ABC) .
3. *Soit* $E(2,-2,3)$ *déterminer* $d(E;(ABC))$.
4. *Déterminer le vecteur* $\vec{u}$ *tel que* $[\vec{u};\vec{AB};\vec{AC}] = 0$.

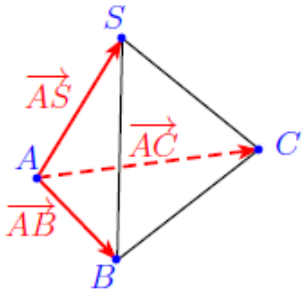
Proposition 1.2.1. *Nous donnerons ici les formules de volumes d'un parallélépipède , d'un tétraèdre et du calcul de la distance entre deux droits non parallèles .*

Calculs de volume :



Ci-jointe, on voit que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ *et* $\vec{AE}$ *engendrent un parallélépipède .*
Volume du parallélépipède = Aire du parallélogramme $\times$ *hauteur du parallélépipède on a :*

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{A} \times h \\ &= \| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \| \times \frac{| \vec{AB}.(\vec{AD} \wedge \vec{AE}) |}{\| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \|} \\ &= | \vec{AB}.(\vec{AD} \wedge \vec{AE}) | = | [\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE}] | \end{aligned}$$



et on montre que le volume du tétraèdre $SABC$ *ci-jointe est* $V = \frac{1}{6} | \vec{AB}.(\vec{AC} \wedge \vec{AS}) | = | [\vec{AB};\vec{AC};\vec{AS}]$.

Distance entre deux droites non parallèles : *Soient* $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$ *deux droites non parallèles , de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$*, passant respectivement par les points* M *et* M' *. On a :*
$d((\mathcal{D});(\mathcal{D}')) = \dfrac{\| \vec{MM'}.(\vec{u} \wedge \vec{u'}) \|}{\| \vec{u} \wedge \vec{u'} \|}$

Exemple 1.2.7. *Soient les points* $A(-1,-1,7)$, $B(-2,1,6)$, $C(0,1,6)$, $D(1,-1,7)$, $E(2,-2,3)$, $F(1,0,2)$, $G(3,0,2)$ *et* $H(4,-2,3)$.

1. *Vérifier que le polyèdre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède .*
2. *Calculer son volume .*
3. *Soient les points $A'(2,-1,1)$, $B'(5,5,4)$, $C'(3,2,-1)$ et $S(4,1,3)$. Calculer le volume du tétraèdre $SA'B'C'$.*
4. *Soient les points $I(2,1,3)$, $J(1,2,1)$, $K(-1,-2,-2)$ et $L(1,-4,0)$.*
   (a) *Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (IJ) et (KL)*
   (b) *Calculer la distance entre ces deux droites .*

1.2.6 Sphères

Définition 1.2.6. *On appelle sphère $\sum$ de centre Ω et de rayon r ($r \in \mathcal{R}^*{}_+$) l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance r du centre Ω . On a donc $M \in \sum \Longleftrightarrow \delta(M,\Omega) = \| \Omega M \| = r$*

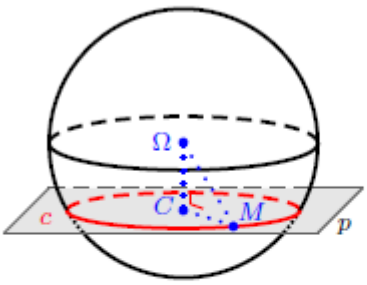
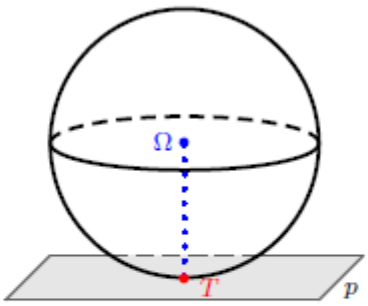
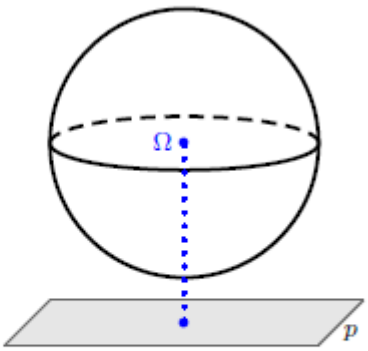
Notation 1.2.3. *On note $\sum(\Omega, r)$; la sphère de centre Ω et de rayon r .*

Proposition 1.2.2. *L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.*

Proposition 1.2.3. *Soit R un repère orthonormal de l'espace . La sphère de centre $A(a,b,c)$ et de rayon $r \in \mathcal{R}^*{}_+$ admet comme équation cartésienne :*
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (z-c)^2 - r^2 = 0$.

Exemple 1.2.8. *Soit la sphère $\sum$, donnée par l'équation générale :*
$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y + 6z + 22 = 0$ *Déterminer le centre et le rayon de $\sum$.*

Proposition 1.2.4. ***Sphères et plans***

		
$\delta(\Omega;p) < r$	$\delta(\Omega;p) = r$	$\delta(\Omega;p) > r$
Un cercle c d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Soit $\sum$ une sphère de centre Ω et de rayon r . Soit p un plan de l'espace et C (voir figure ci-dessous) ou T le projeté orthogonal de Ω sur p .

☞ *Si $\delta(\Omega, p) > r$ alors $p \cap \sum = \varnothing$;*

☞ *Si $\delta(\Omega, p) = r$ alors $p \cap \sum = \{T\}$;*

☞ *Si $\delta(\Omega, p) < r$ alors $p \cap \sum$ est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{r^2 - \delta^2(\Omega, p)}$.*

Dans le deuxième cas on dit que p est le plan tangent à la sphère $\sum$ au point T .

Exemple 1.2.9. *Soient la sphère $\sum$: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ et le plan $p : 2x - 2y - z - 9 = 0$*

1. *Prouver que le plan p coupe la sphère $\sum$.*
2. *Montrer que L'intersection de p et $\sum$ est un cercle dont on déterminera les caractéristiques*

Remarque 1.2.7. *À partir d'exercices étudier la position relative entre deux sphères et entre une sphère et une droite .*

Table des matières

1 LIMITES ET CONTINUITES **2**

1.1 Limites . . . 2

1.1.1 Rappel sur les limites . . . 2

1.1.2 Opérations sur les limites . . . 2

1.1.3 Propriétés de comparaison . . . 3

1.2 Branches infinies . . . 4

1.3 Continuité . . . 4

1.3.1 Fonctions continue en un point . . . 4

1.3.2 Fonction continue sur un intervalle . . . 5

1.3.3 Calcul approché des zéros d'une fonction . . . 6

1.3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 6

1.3.4 Fonction continue strictement monotone . . . 6

LIMITES ET CONTINUITES

Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ☞ Savoir calculer la limite d'une fonction en levant l'indétermination.
- ☞ Savoir étudier graphiquement la continuité d'une fonction.
- ☞ Savoir et connaitre appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
- ☞ Déterminer l'image d'un intervalle en utilisant la monotonie ou le tableau de variation d'une fonction.

1.1 Limites

1.1.1 Rappel sur les limites

- ☞ On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arriver sont des parties de $\mathbb{R}$.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble constitué des éléments qui ont une image par f.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ est l'ensemble des nombres réels qui n'annulent pas q.
- ☞ Le domaine de définition d'une fonction irrationnelle $i = \sqrt{g}$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $g(x) \geqslant 0$.
- ☞ Si f et g sont des fonctions numériques, alors $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$ et $D_{f\times g} = D_f \bigcap D_g$.

Exemple : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x-4}{|\,x\,|-2}$; $g(x) = \sqrt{4+x} + \dfrac{2}{\sqrt{4-2x}}$; $h(x) = \sqrt{|\,3x-2\,|-1}$ et $t(x) = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x+2}$

1.1.2 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur leur domaine, l et l' deux réels non nuls.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	0	∞	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	0	0
$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	l+l'	l	∞	∞	$+\infty$	$-\infty$	F.I	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x)$	$l\times l'$	0	∞	∞	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I	0
$\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x)$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	F.I	F.I	F.I	0	∞	F.I
$\lim\limits_{x\to x_0} \mid f(x) \mid$	$\mid l \mid$	$\mid l \mid$	$\mid l \mid$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$ si $l\geq 0$	$\sqrt{l}$ si $l\geq 0$	$\sqrt{l}$ si $l\geq 0$		$+\infty$			0		0

Remarque 1.1.1 :

- ☞ La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.
- ☞ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- ☞ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$, et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

Exercice d'application 1.1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\tan(2x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{2x^2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x+2)$ et $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-\sqrt{x+6}}$

1.1.3 Propriétés de comparaison

Propriété 1.1.1 :

Soit f, g et h trois fonctions numériques d'une variable réelle admettant des limites en x_0

- ☞ *Si $f\leq g$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.*
- ☞ *Si $f\leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.*
- ☞ *Si $f\leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.*
- ☞ *Si $g\leq f\leq h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.*
- ☞ *S'il existe un nombre réelle l et un intervalle $[A;+\infty[$ tels que :*

  $\forall x\in[A;+\infty[, |f(x)-l|\leq g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Exercice d'application 1.2 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes positives définit par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n+4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\leq 4$.
2. Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Vérifier que $4-U_{n+1}=\frac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{3U_n+4}}$.

4. (a) Montrer que : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$.

   (b) En déduire que : $4 - U_{n+1} \leq 4(\frac{3}{4})^n$

5. Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 Branches infinies

Pour étudier les branches infinies d'une fonction numérique f, on procède comme suit :

On calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

☞ Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f.

☞ Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors la courbe de f admet **une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de f admet **une branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de f.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$, alors la courbe de f admet **une branche parabolique de direction** celle de la droite d'équation $y = ax$.

$(**)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$ n'existe pas, alors la courbe de f admet une **direction asymptotique**, celle de la droite d'équation $y = ax$.

$(*)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas, alors la courbe de f n'admet ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

NB : On illustrera avec des figures.

Exercice d'application 1.3 :

Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

$a)\ f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 10}$, $b)\ f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$, $c)\ f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, $d)\ f(x) = 2x + 4 + \cos(x)$.

1.3 Continuité

1.3.1 Fonctions continue en un point

Définition 1.3.1 :

Soit f une fonction définie sur son domaine de de définition D_f et $x_0 \in \mathbb{R}$.

*On dit que f est **continue en** x_0 lorsque $x_0 \in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Propriété 1.3.1 :

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f et $x_0 \in \mathbb{R}$.

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0.

Exercice d'application 1.4 :

On considère la fonction numérique f définit par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & si\, x \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si\, x < 0 \end{cases}$

Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f en 0.

Remarque 1.3.1 :

Si une fonction f n'est pas définie en x_0 mais admet **une limite finie** en x_0, alors on peut prolonger cette fonction par continuité en x_0.

Si g est **le prolongement par continuité** de f en x_0, alors $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$

Exemple 1.3.1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. f est-elle prolongeable par continuité en 1, en -1 ? Si oui définir le prolongement par continuité g de f.

1.3.2 Fonction continue sur un intervalle

Définition 1.3.2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de son domaine de définition.

On dit que f est continue sur I, lorsque f est continue en tout point de I.

Propriété 1.3.2 :

☞ *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$*

☞ *Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de son domaine de définition.*

☞ *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.*

♠ *Les fonctions $f+g$, kf, $f \times g$ et $|f|$ sont continues sur I.*

⋯ *Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.*

⋯ *Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.*

☞ *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.*

Soit f une fonction continue sur I, telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J.

La fonction gof est continue sur I.

☞ *Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est soit un intervalle, soit un singleton.*

☞ *Soit f une fonction numérique admettant une limite à droite de a et à gauche de b. Alors*

⋯ *Si f est **continue et strictement croissante** sur un intervalle I contenant a et b, alors*

$f([a\,;b]) = [f(a)\,;f(b)]$, $f(]a\,;b]) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)]$, $f([a\,;b[) = [f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$,

$f(]a\,;b[) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$ *et* $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$.

⋯ *Si f est* ***continue et strictement décroissante*** *sur un intervalle I contenant a et b, alors* $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)]$, $f(]a\,;b]) = [f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$, $f([a\,;b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)]$, $f(]a\,;b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$ *et* $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$.

Exercice d'application 1.5 :

Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + x - 2$ $\quad I = [-2\,;3]$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ $\quad I =]0\,;+\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

1.3.3 Calcul approché des zéros d'une fonction

1.3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.3.1 :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

T_1) *Si f est une fonction* ***continue*** *sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

T_2) *Si f est une fonction* ***continue et strictement monotone*** *sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un unique nombre réel $\alpha \in [a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Exercice d'application 1.6 :

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle I, puis déterminer par balayage un encadrement à 10^{-1} près de cette solution.

1. $x^4 - 3x = 1$ $\quad I =]1\,;2]$
2. $\cos(x) = x$ $\quad I = \mathbb{R}$

1.3.4 Fonction continue strictement monotone

Rappel :

Soit $f : A \to B$ une fonction numérique.

☞ f est dite **injective** si et seulement si pour tous éléments x_1 et x_2 de A, on a : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

☞ f est dite **surjective** si et seulement si pour tout élément y de B, il existe au moins un élément x de A tel que $y = f(x)$.

☞ f est dite **bijective** si et seulement si pour tout élément y de B, il existe un unique élément x de A tel que $y = f(x)$.

☞ Une fonction est injective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe un ou zéro point.

☞ Une fonction est surjective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe en au moins un point.

☞ Une fonction est bijective lorsque chaque droite horizontale coupe la courbe en un unique point.

Propriété 1.3.3 :

*Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

☞ *f réalise une bijection de I vers $f(I)$.*

☞ *La bijection réciproque, notée f^{-1}, est continue sur l'intervalle $f(I)$.*

☞ *f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f.*

☞ *Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$)*

Exercice d'application 1.7 :

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} et tracer sur le même graphique les courbes représentatives de f et f^{-1} :

1. $f(x) = x^3 \qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x - \sin(x) \qquad I =]-3\pi\,;\,3\pi[$

Table des matières

1 NOMBRES PREMIERS, PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS RELATIFS 3

1.1 NOMBRES PREMIERS . . . 3

1.2 Nombres premiers . . . 4

1.2.1 Définition . . . 4

1.2.2 Critère d'arrêt ou test de primalité . . . 4

1.2.3 Infinité de nombres premiers . . . 4

1.2.4 Décomposition, diviseur d'un entier . . . 5

1.3 PPCM et PGCD de deux entiers relatifs . . . 5

1.3.1 PPCM de deux entiers relatifs . . . 5

1.3.1.1 Définition . . . 5

1.3.1.2 Propriétés . . . 6

1.4 PGCD de deux entiers relatifs . . . 6

1.4.1 Définition et propriétés . . . 6

1.4.1.1 Définition . . . 6

1.4.1.2 Propriétés . . . 7

1.4.2 Nombres premiers entre eux . . . 8

1.4.2.1 Définition et propriétés . . . 8

1.4.3 Algorithme d'Euclide . . . 8

1.5 Théorème de Bézout et théorème de Gauss . . . 9

1.5.1 Identité de Bézout . . . 9

1.5.2 Théorème de Bézout . . . 10

1.5.3 Le théorème de Gauss et son corollaire . . . 10

1.5.3.1 Théorème de GAUSS . . . 10

1.5.3.2 Corolaire du théorème de Gauss . . . 10

1.6 Equations diophantiennes . . . 11

1.6.1 Définition . . . 11

1.6.2 Résolution des équations diophantiennes . . . 11

1.6.3 Méthode de résolution des équations diophantiennes du premier degré 12
1.7 Le petit théorème de Fermat et son corolaire 13

NOMBRES PREMIERS, PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS RELATIFS

1.1 NOMBRES PREMIERS

Objectifs

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- ☞ Reconnaitre si un nombre est premier.
- ☞ Déterminer le nombre de diviseur d'un entier
- ☞ Déterminer des entiers connaissant leur PGCD et leur PPCM.
- ☞ Calculer le PGCD de deux entiers en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- ☞ Reconnaitre deux entiers premiers entre eux.
- ☞ Utiliser l'identité de Bezout pour montrer que deux entiers sont premiers entre eux et déterminer une solution particulière de l'équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.
- ☞ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ un système d'équation liant deux entiers x et y avec leur PGCD ou leur PPCM.
- ☞ Utiliser le théorème de Gauss pour :
- ♣ résoudre des problèmes de divisibilité ;
- ♣ résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ des équations linéaires $ax + by = c$ dont les coefficients sont des entiers.

1.2 Nombres premiers

1.2.1 Définition

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p.

Exemple 1.2.1 :

- ♠ 2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont des nombres premiers.
- ♠ $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ et $8 = 2 \times 4$ ne sont pas des nombres premiers.

Remarque 1.2.1 :

- ☞ 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur positif)
- ☞ Un entier naturel non premier est parfois appelé un **nombre composé**.

1.2.2 Critère d'arrêt ou test de primalité

Propriété 1.2.1 :

Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier.

Si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$

Preuve:

- ☞ Si n est premier, il admet un diviseur premier : lui-même.
- ☞ Si n n'est pas premier, l'ensemble D des diviseurs d de n tels que : $2 \leq d < n$ n'est pas vide.
  D'après le principe du bon ordre, D admet un plus petit élément p.
  Si p n'était pas premier, alors il admettrait un diviseur d' tel que $2 \leq d' < p$ qui diviserait aussi n.
  Ceci contredirait la minimalité de p dans D. Donc p est premier.
- ☞ On a donc p premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$ (car p est le plus **petit diviseur** de n).
  En multipliant l'inégalité $p \leq q$ par p, on obtient : $p^2 \leq pq \Leftrightarrow p^2 \leq n$ d'où $2 \leq p \leq \sqrt{n}$. ■

Remarque 1.2.2 :

Le critère d'arrêt s'énonce encore comme suit :

"si n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, alors n est premier."

Exercice d'application 1.1 :

Montrer que 89 est un nombre premier.

1.2.3 Infinité de nombres premiers

Propriété 1.2.2 :

Il existe une infinité de nombres premiers

Preuve:

Procédons par l'absurde

Supposons qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers : p_1, p_2, ⋯, p_i, ⋯, p_n.

Soit N un nombre entier non premier, supérieur à 2 : $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n + 1$.

D'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier. Soit p_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ce diviseur premier.

p_i divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n$ et N donc p_i divise $1 = N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n-1} \times p_n$.

Ceci est absurde car $p_i \geq 2$.

Conclusion : il existe une infinité de nombres premiers. ■

1.2.4 Décomposition, diviseur d'un entier

Propriété 1.2.3 :

- ♣ ***Théorème fondamental de l'arithmétique :***

  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe des nombres premiers $P_1, P_2, \cdots P_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ tels que : $n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$.

  Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs prêt.

- ♣ *Soit x un entier naturel se décomposant en un produit de facteurs premiers de la forme : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$. Alors le nombre de diviseur positif de x est $N = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \times \cdots \times (1+\alpha_k)$*

Preuve : TPE (travail personnel de l'élève)

Exercice d'application 1.2 :

1. Décomposer 14616 en produit de facteur premier et préciser le nombre de ces diviseurs positifs.
2. Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.
3. Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.
4. Dresser la liste des nombres premiers inférieur à 100.

1.3 PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

1.3.1 PPCM de deux entiers relatifs

1.3.1.1 Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

L'ensemble des multiples strictement positif commun à a et b contient ab et est donc non vide : il admet donc un plus petit élément que l'on appelle le plus petit commun multiple de a et b. On le note $PPCM(a\,;b)$

Remarque 1.3.1 :

Il découle de cette définition que pour tout entier relatifs a et b, on a

1. $PPCM(a\,;b) = PPCM(|a|\,;|b|)$.
2. $PPCM(a\,;b) = PPCM(b\,;a)$.
3. $Max(a\,;b) \leq PPCM(a\,;b) \leq ab$

1.3.1.2 Propriétés

Propriété 1.3.1 :

P_1) *Soit x et y deux entiers naturels tels que : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$ et $y = P_1^{\beta 1} \times P_2^{\beta_2} \times \cdots \times P_k^{\beta_k}$.*
Alors $PPCM(a\,;b) = \prod_{i=0}^{k} P_i^{max(\alpha_i\,;\beta_i)}$

P_2) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors $b \mid a \Leftrightarrow PPCM(a\,;b) = a$.*

P_3) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif c, on a :*
$(a \mid c$ et $b \mid c) \Leftrightarrow PPCM(a\,;b) \mid c$.

P_4) *Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls. Alors $PPCM(ka\,;kb) = kPPCM(a\,;b)$.*

Activité :

Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$.
On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

1. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$.
   (a) Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
   On appelle d cette valeur. d est appelé le PGCD de a et de b.
   (b) Démontrer que tous les diviseurs de d conviennent comme valeur de a.
   (c) Existe-t-il d'autres valeurs possibles pour a ?
2. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12.
   On pose : $l = al'$ et $L = aL'$
   (a) Que peut-on dire de $PGCD(l'\,;L')$ si $a = 12$? Pourquoi ?
   (b) Vérifier, dans le cas $a = 12$, que $l'^2L' = 45$.
   (c) Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles dont on donnera les dimensions.

1.4 PGCD de deux entiers relatifs

1.4.1 Définition et propriétés

1.4.1.1 Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
L'ensemble des diviseurs strictement positif commun à a et b noté $D(a\,;b)$ contient 1 et est fini : il admet donc un plus grand élément que l'on appelle le **plus grand commun diviseur** de a et b. On le note $PGCD(a\,;b)$.

Exemple 1.4.1 :

$PGCD(24\,;\,18) = 6$, $PGCD(60\,;\,84) = 12$, $PGCD(150\,;\,240) = 30$

Remarque 1.4.1 :

Il découle de cette définition qu'on a :

1. pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(|a|\,;\,|b|)$.
2. pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(b\,;\,a)$.
3. pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq PGCD(a\,;\,b) \leq Min(a\,;\,b)$.

1.4.1.2 Propriétés

Propriété 1.4.1 :

P_1) *Soit x et y deux entiers naturels tels que : $x = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$ et $y = P_1^{\beta 1} \times P_2^{\beta_2} \times \cdots \times P_k^{\beta_k}$.*
Alors $PGCD(a\,;\,b) = \prod_{i=0}^{k} P_i^{min(\alpha_i\,;\,\beta_i)}$

P_2) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors $b \mid a \Leftrightarrow PGCD(a\,;\,b) = b$.*

P_3) *Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls. Alors $PGCD(ka\,;\,kb) = kPGCD(a\,;\,b)$.*

P_4) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif c, on a :*
$(c \mid a$ et $c \mid b) \Leftrightarrow c \mid PGCD(a\,;\,b)$.

P_5) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors $PGCD(a\,;\,b) \times PPCM(a\,;\,b) = ab$*

Preuve : TPE (travail personnel de l'élève)

Remarque 1.4.2 :

☞ De la propriété P_3), on a : $PGCD(a\,;\,1) = 1$ et $PGCD(a\,;\,a) = a$

Exemple 1.4.2 :

☞ $PGCD(75\,;\,0) = 75$.

☞ $PGCD(-36\,;\,-12) = PGCD(36\,;\,12) = 3$.

☞ $PGCD(72\,;\,6) = 6$ car 6 divise 72.

☞ $PGCD(720\,;\,60) = 10PGCD(72\,;\,6) = 60$.

☞ $PGCD(15\,;\,1) = 1$.

Exercice d'application 1.3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants (Σ) : $\begin{cases} PGCD(x\,;\,y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$ et (Γ) : $\begin{cases} PPCM(x\,;\,y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$
2. Déterminer les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels tels que :
   $2\mu + 3\delta = 11$ avec $\mu = PPCM(a\,;\,b)$ et $\delta = PGCD(a\,;\,b)$.

1.4.2 Nombres premiers entre eux

1.4.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.4.1 :

Deux nombres entiers relatifs sont dit premiers entre eux (où étrangers) si leur PGCD est égal à 1

Exemple 1.4.3 :

1) $PGCD(9\,;4) = 1$, donc 4 et 9 sont premiers entre eux.

2) $PGCD(a\,;1) = 1$, donc 1 est premier avec tout entier.

3) Tout nombre premier p est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas.

Attention : Il ne faut pas confondre des nombres premiers entre eux et des nombres premiers. 4 et 9 ne sont pas premiers et pourtant ils sont premiers entre eux.

Par contre, deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Propriété 1.4.2 :

P_1) *Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux :*

- *Tout diviseur de a est premier avec b ;*
- *Pour tous entier naturels n et m, a^n est premier avec b^m*

P_2) *Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b.*

Si $a = da'$ et $b = db'$, alors d est le PGCD de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

Preuve : TPE (travail personnel de l'élève)

1.4.3 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le $PGCD$ de deux entiers naturels non nuls.

Il repose sur la propriété suivante :

Propriété 1.4.3 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que b ne divise pas a.

La suite des divisions euclidiennes suivantes finit par s'arrêter. Le dernier reste non nul est alors le PGCD de a et de b.

$$\begin{array}{lll}
\text{Division de } a \text{ par } b & a = bq_0 + r_0 & \text{avec } b > r_0 \geq 0 \\
\text{Division de } b \text{ par } r_0 & a = r_0q_1 + r_1 & \text{avec } r_0 > r_1 \geq 0 \\
\text{Division de } r_0 \text{ par } r_1 & r_0 = r_1q_2 + r_2 & \text{avec } r_1 > r_2 \geq 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Division de } r_{n-2} \text{ par } r_{n-1} & r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & \text{avec } r_{n-1} > r_n \geq 0 \\
\text{Division de } r_{n-1} \text{ par } r_n & r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0 &
\end{array}$$

On a alors $PGCD(a\,;b) = r_n$.

Preuve:

☞ Montrons que $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0)$

Soit $D = PGCD(a\,;b)$ et $d = PGCD(b\,;r_0)$.

D divise a et b, donc D divise $r_0 = a - bq_0$, d'où D divise b et r_0 ie D divise d. Ainsi $D \leq d$.

d divise b et r_0, donc d divise $a = bq_0 + r_0$, d'où d divise a et b ie d divise D. Par conséquent $d \leq D$.

On déduit de ces deux inégalités que $D = d$, d'où $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0)$

☞ La suite des restes : $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n$ est une suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ car :

$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_n$.

D'après le principe de descente infinie, il existe alors n tel que $r_{n+1} = 0$

☞ De proche en proche, on en déduit que :

$PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r_0) = \cdots = PGCD(r_{n-2}\,;r_{n-1}) = PGCD(r_{n-1}\,;r_n)$

Or r_n divise r_{n-1}, donc $PGCD(r_{n-1}\,;r_n) = r_n$

☞ Conclusion : $PGCD(a\,;b) = r_n$. Le dernier reste non nul est le PGCD. ■

Exemple 1.4.4 :

♦ Calculer $PGCD(4539\,;1958)$ de deux façons différentes, puis déterminer $PPCM(4539\,;1958)$

1.5 Théorème de Bézout et théorème de Gauss

1.5.1 Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et $D = PGCD(a\,;b)$.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = D$.

Preuve:

Soit G l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma+nb$ où m et n sont des entiers relatifs.

☞ G est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car $|a| \in G$.

En effet si $a > 0$, alors $|a| = a = 1a + 0b \in G$ et si $a < 0$, alors $|a| = -a = -1a + 0b \in G$.

D'après le principe du bon ordre, G admet un plus petit élément d tel que $d = au + bv$.

☞ $D = PGCD(a\,;b)$ divise a et b, donc D divise $au + bv = d$ et donc $D \leq d$.

☞ Montrons que d divise D (il suffira de montrer que d divise a et b).

En divisant a par d, on a $a = dq + r$ avec $d > r \geq 0$. Ainsi, on a :

$r = a - dq = a - auq - bvq = a(1 - uq) + b(-vq)$

Si $r \neq 0$ alors $r \in G$, or $r < d$ et d est le plus petit élément de G, ce qui est contradictoire.

Donc $r = 0$ et par conséquent d divise a.

En procédant de la même façon, on montre que d divise b.

d divise a et b, donc d divise $D = PGCD(a\,;b)$, d'où $d \leq D$

☞ $D \leq d$ et $d \leq D$, donc $D = d$. ■

1.5.2 Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au+bv=1$.

Preuve : exercice

Exemple 1.5.1 :

Deux entiers naturels consécutifs n et $n+1$ sont premiers entre eux car $(1)(n+1)+(-1)(n)=1$.

Exercice d'application 1.4 :

1. Montrer que $a=2n+1$ et $b=3n+2$ sont premiers entre eux, $n\in\mathbb{N}$
2. Si a et b sont premiers entre eux et a et c sont premiers entre eux alors a et bc sont premiers entre eux (a, b, $c\in\mathbb{N}$).
3. Montrer que 59 et 27 sont premier entre eux, puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tel que : $59x+27y=1$

1.5.3 Le théorème de Gauss et son corollaire

1.5.3.1 Théorème de GAUSS

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Preuve:

Si a divise le produit bc, alors il existe un entier k tel que $bc=ka$.

Si a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que : $au+bv=1$. En multipliant cette dernière égalité par c, on a :

$acu+bcv=c$, or $bc=ka$, donc $acu+kav=c$, d'où $a(cu+kv)=c$.

Ainsi, a divise c. ■

Exercice d'application 1.5 :

1. Trouver tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tels que : $5(x-1)=7y$.
2. Soit p un entier naturel premier. Montrer que si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.
3. Déduire de la question 2) que si pour tout entier naturel n, p divise a^n, alors p divise a.
4. Soit n un entier naturel non nul. Si a est premier avec n et si $ab\equiv ac[n]$, alors $b\equiv c[n]$ avec $c\neq 0$.
5. Si a et b sont premiers entre eux, alors $PPCM(a\,;b)=ab$

1.5.3.2 Corolaire du théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a.

Preuve:

Si b et c divisent a, alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que :

$a = kb$ $\quad$ $a = k'c$ $\quad$ donc : $\quad$ $kb = k'c$.

b divise $k'c$, or $PGCD(b\,;\,c) = 1$ donc, d'après le théorème de GAUSS, b divise k', d'où $k' = k''b$ et par conséquent, $a = k'c = k''bc$. Ainsi, bc divise a. ■

Exercice d'application 1.6 :

1) Montrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$ 2) Montrer que $n(n^6-1)$ est divisible par 42.

1.6 Equations diophantiennes

1.6.1 Définition

On appelle **équation diophantienne** toute équation de la forme $ax+by=c$ avec a, b et c sont des entiers relatifs et où les inconnues x *et* y sont des entiers relatifs.

1.6.2 Résolution des équations diophantiennes

Propriété 1.6.1 :

P_1) *L'équation diophantienne* $ax+by=0$ *a pour ensemble solution* $\{(bk\,;\,-ak)\ k\in\mathbb{Z}\}$.

P_2) *Soit* a *et* b *deux nombres premiers entre eux.*

Si l'équation diophantienne $ax+by=c$ *admet une solution particulière* $(x_0\,;\,y_0)$, *alors elle possède une infinité de solutions qui sont données par* $(x=x_0+bk\,;\,y=y_0-ak)$, $k\in\mathbb{Z}$.

P_3) *Soient* a, b *et* c *des entiers et* $d=PGCD(a\,;\,b)$.

L'équation $ax+by=c$ *admet des solutions entières si, et seulement si,* d *divise* c.

Preuve:

1) Si a et b sont premiers entre eux, alors : $ax+by=0 \Rightarrow ax=-by\,(\star)$.

Donc b divise ax et d'après le théorème de Gauss, b divise x car $PGCD(a\,;\,b)=1$. Ainsi, il existe un entier k tel que $x=bk$.

En remplaçant x par sa valeur dans $(\star)$, on a : $abk=-by$ ie $y=-ak$.

Réciproquement, $a(kb)+b(-ak)=abk-abk=0$ donc le couple $(bk\,;\,-ak)$ est une solution de $ax+by=0$.

D'où l'équation diophantienne $ax+by=0$ a pour ensemble solution $\{(bk\,;\,-ak)\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors en posant $a=da'$ et $b=db'$ avec $d=PGCD(a\,;\,b)$ et en remplaçant a et b par leur valeur dans l'équation, on aura après simplification $a'x+b'y=0$ avec $PGCD(a'\,;\,b')=1$. En procédant comme ci-dessus, on obtiendra le résultat escompté.

2) Supposons que l'équation diophantienne $ax+by=c$ admet une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$.

On a : $ax_0+by_0=c$ et $ax+by=c$.

En soustrayant membre à membre et en regroupant, on aura $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

D'après la propriété 1), on a $x-x_0=bk$, $y-y_0=-ak$, $(k\in\mathbb{Z})$ donc $x=x_0+bk$ et $y=y_0-ak$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Réciproquement, $a(x_0 + kb) + b(y_0 - ak) = ax_0 + abk + by_0 - abk = (ax_0 + by_0) + abk - abk = c$.

Donc le couple $(x_0 + bk\,;\, y_0 - ak)$, $(k \in \mathbb{Z})$ est bien une solution de l'équation $ax + by = c$.

3) $\Rightarrow$) Supposons que l'équation diophantienne $ax + by = c$ admet une solution $(x_0\,;\, y_0)$ ie $ax_0 + by_0 = c$.

En posant $d = PGCD(a\,;\, b)$, on a $d|a$ et $d|b$ donc $d|ax_0 + by_0$ ie $d|c$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit c un entier tel que $d = PGCD(a\,;\, b)$ divise c.

On a : d divise c entraine que $c = dk \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D'après l'identité de Bézout, $d = PGCD(a\,;\, b)$ entraine que $au + bv = d \quad (u,\, v \in \mathbb{Z})$.

En multipliant la dernière égalité par k, on obtient : $auk + bvk = dk$ ie $a(uk) + b(vk) = c$.

Donc il existe $x_0 = uk$ et $y_0 = vk$ tels que $ax_0 + by_0 = c$. ■

Remarque 1.6.1 :

1) L'équation diophantienne $ax + by = 1$ admet des solutions si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.

2) La "remontée" des égalités de l'algorithme d'Euclide permet de fournir une solution particulière d'une équation diophantienne.

1.6.3 Méthode de résolution des équations diophantiennes du premier degré

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $ax + by = c$, on procède comme suit :

- ♣ On détermine le $PGCD(a\,;\, b)$, puis on déduit si l'équation admet des solutions ou non.
- ♣ On cherche à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution particulière $(x_0\,;\, y_0)$ de cette équation.
- ♣ On recherche ensuite l'ensemble des solutions en soustrayant membres à membres l'équation et l'égalité de la solution particulière.
- ♣ On applique le théorème de Gauss, puis l'on vérifie que les solutions trouvées vérifient bien l'équation.

Exemple 1.6.1 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $(\Sigma) : 4x - 32y = 2\,;\ (E) : 17x - 33y = 1$ et $(F) : 544x - 944y = 1160$

Solution:

Résolution de l'équation (Σ) : $4x - 32y = 2$.

Comme $PGCD(4\,;\, 32) = 4$ et 4 ne divise pas 2, alors l'équation (Σ) n'admet pas de solution.

Résolution de l'équation (E) : $17x - 33y = 1$.

Comme 17 et 33 sont premier entre eux, alors l'équation (E) admet des solutions.

Déterminons une solution particulière de (E).

$17\times2-33\times1 = 1$, donc le couple $(2\,;\, 1)$ est une solution particulière de (E). Ainsi, on a : $\begin{cases} 17x - 33y &= 1 \\ 17(2) - 33(1) &= 1 \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$17(x-2) - 33(y-1) = 0 \Leftrightarrow 17(x-2) = 33(y-1)\ (*)$

33 divise $17(x-2)$ et $PGCD(17\,;\, 33) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 33 divise $x - 2$.

On a donc : $x-2=33k$, $k\in\mathbb{Z}$ ie $x=33k+2$

En remplaçant x par sa valeur dans $(*)$ et en réduisant, on obtient $y=17k+1$.

Réciproquement, le couple $(33k+2\,;\,17k+1)$ vérifie l'équation (E), donc $S=\{(33k+2\,;\,17k+1),\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Résolution de l'équation $(F):544x-944y=1160$**.**

Déterminons le $PGCG(944\,;\,544)$

$944=544(1)+400$

$544=400(1)+144$

$400=144(2)+112$

$144=112(1)+32$

$112=32(3)+16$

$32=16(2)+0$

Solution particulière de (F)

$16=112-3(32)$

$=112-3(144-112)$

$=112(4)+144(-3)$

$=4(400-144(2))+144(-3)$

$=4(400)+144(-11)$

$=4(400)+(-11)(544-400)$

$=400(15)+544(-11)$

$=15(944-544)+544(-11)$

$=944(15)+544(-26)$

$16=544(-26)-944(-15)$

$160=544(-260)-944(-150)$

L'équation (F) admet donc $(-260\,;\,-150)$ comme solution particulière et on a : $\begin{cases} 544x-944y &= 160 \\ 544(-260)-944(-150) &= 160 \end{cases}$

Par soustraction membres à membres, on obtient :

$544(x+260)-944(y+150)=0\Leftrightarrow 34(x+260)=59(y+150)\,(*)$

59 divise $34(x+260)$ et $PGCD(34\,;\,59)=1$, donc d'après le théorème de Gauss, 59 divise $x+260$.

On a donc : $x+260=59k$, $k\in\mathbb{Z}$ ie $x=59k-260$

En remplaçant x par sa valeur dans $(*)$ et en réduisant, on obtient $y=34k-150$.

Réciproquement, le couple $(59k-260\,;\,34k-150)$ vérifie l'équation (F), donc $S=\{(59k-260\,;\,34k-150),\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice d'application 1.7 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $4x+6y=4$, $15x+8y=5$ et $3x+7y=1$

1.7 Le petit théorème de Fermat et son corolaire

Propriété 1.7.1 :

☞ *Le petit théorème de Fermat :*

Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p (ie $a^{p-1}\equiv 1(p)$).

☞ *Corolaire du petit théorème de Fermat :*

Si p est un nombre premier et a un entier naturel, alors a^p-a est divisible par p (ie $a^p\equiv a(p)$).

Preuve : Exercice

Remarque 1.7.1 :

Attention la réciproque du corolaire du petit théorème de Fermat n'assure pas la primalité de p.

En effet, on a : $3^{123} \equiv 3(123)$ mais 123 n'est pas un nombre premier.

Exemple 1.7.1 :

1) Sans utiliser la calculatrice, montrer que 23 divise $(3^{11}-1)(3^{11}+1)$.

2) Le nombre $2^{971}-2$ est-il divisible par 971 ? (On vérifiera que 971 est un nombre premier).

3) Montrer que $n(n^6-1)$ est divisible par 42.

Solution:

1) Montrons que 23 divise $(3^{11}-1)(3^{11}+1)$.

On a : $(3^{11}-1)(3^{11}+1) = (3^{11})^2 - 1^2 = 3^{22}-1$.

3 et 23 sont des nombres premiers, donc ils sont premiers entre eux. D'après le petit théorème de Fermat, 23 divise $3^{22}-1 = (3^{11}-1)(3^{11}+1)$.

2) Vérifions si le nombre $2^{971}-2$ est divisible par 971.

971 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13, ni par 17, ni par 19, ni par 23, ni par 29, ni par 31, ni par 37 et $37^2 = 1369 > 971$. Donc 971 est un nombre premier.

Comme 971 est un nombre premier, alors le corolaire du petit théorème de Fermat permet de conclure que $2^{971}-2$ est divisible par 971.

3) Montrons que $n(n^6-1)$ est divisible par 42.

$n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) = n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$. Or le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2 et le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 3, donc 2 et 3 divisent $n(n-1)(n+1)$. D'où 2 et 3 divisent $n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1) = n(n^6-1)$ et par suite $2\times 3 = 6$ divise $n(n^6-1)$ car 2 et 3 sont premiers entre eux (corolaire du théorème de Gauss).

D'autre part, 7 est un nombre premier et les entiers 6 et 7 sont premiers entres eux donc d'après le petit théorème de Fermat 7 divise n^6-1 ; donc 7 divise $n(n^6-1)$. Comme 6 et 7 sont premiers entre eux, alors $6\times 7 = 42$ divise $n(n^6-1)$ (corolaire du théorème de Gauss). ■

Exercice d'application 1.8 :

1) Soit p un nombre premier.

1-a) Démontrer que pour tout entier naturel k strictement compris entre 0 et p, p divise C_p^k.

1-b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b, on a : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p[p]$.

1-c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel a, $a^p \equiv a[p]$.

1-d) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec p, on a : $a^{p-1} \equiv 1[p]$

2) Monter que pour tout entier naturel n, $n^2(n^4-1)$ est divisible par 12.

3) On suppose $p \geq 5$. Démonter que p^2-1 est divisible par 3.

CHAPITRE : DERIVEE, PRIMITIVES ET ETUDE DES FONCTIONS

Leçon 1 : Dérivée

Objectifs

- Montrer qu'une fonction est dérivable en un point et sur un intervalle.
- Calculer la dérivée d'une fonction dérivable.
- Utiliser la dérivée pour étudier les variations et dresser le tableau de variations.
- Déterminer une équation de la tangente en un point de la courbe et donner une approximation affine d'une fonction.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer les formules.

EXERCICES

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de cet ensembles.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1, 2 et 4.
3. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa dérivée f'.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

1.1 Dérivabilité en un point et sur un intervalle

- Une fonction f est dérivable en un point d'abscisse x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est fini. Cette limite finie est appelé nombre dérivé de f en x_0 et noté $f'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable à gauche d'un point d'abscisse x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \to x_{0<}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est fini. Cette limite finie est appelé nombre dérivé de f à gauche de x_0 et noté ${f_g}'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable à droite d'un point d'abscisse x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \to x_{0>}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est fini. Cette limite finie est appelé nombre dérivé de f à droite de x_0 et noté ${f_d}'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable en un point d'abscisse x_0 si f est dérivable à gauche, à droite de x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Remarque Pour montrer que f est dérivable en x_0, on peut aussi montrer que $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}$ est fini.

- Une fonction est dérivable sur un intervalle I de l'ensemble de définition. si f est dérivable en tout point de cet intervalle.
- On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction f, l'ensemble des réels x telle que f soit dérivable en x.

Exemple :

✓ Une fonction polynôme est dérivable sur toute partie de $\mathbb{R}$.
✓ Une fonction rationnelle est dérivable sur toute partie de son ensemble de définition.
✓ Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$, alors f est dérivable en x si et seulement u est dérivable en x et si $u(x) > 0$.
✓ Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur toute partie de $\mathbb{R}$.

- Si une fonction f est dérivable en un point d'abscisse x_0, alors la courbe de f admet en ce point une **tangente** (T) d'équation : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.
- Si une fonction f est dérivable à gauche (respectivement à droite) d'un point d'abscisse x_0, alors la courbe de f admet en ce point une **tangente à gauche (respectivement à droite)** (T_g) (respectivement (T_d) d'équation : $\boldsymbol{y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **(respectivement** $\boldsymbol{y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

Remarque :

❖ Soit f une fonction et $x_0 \in D_f$. Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable au point d'abscisse x_0 et la courbe de f admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) d'équation $x = x_0$.
❖ Si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et que $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0. Dans ce cas la courbe de f admet en ce point deux demi tangentes (une à gauche et l'autre à droite) : Ce point est appelé point anguleux.

Propriétés

- Une fonction dérivable en un point d'abscisse x_0 est continue en ce point. La réciproque n'est pas toujours vraie. **Exemple :** La fonction f définie par $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
- Si deux fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I, alors :
  ✓ Les fonctions $f + g, f - g$ et $f \times g$ sont dérivables sur I.
  ✓ La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$.
  ✓ La fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I si $\forall x \in I, f(x) > 0$.

1.2 Fonction dérivée

1.2.1 Définition

On appelle fonction dérivée d'une fonction dérivable f la fonction f' qui à tout réel x de l'ensemble de dérivabilité, on associe $f'(x)$, nombre dérivée de f en x.

Exemple : $f(x) = x^2, \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = , \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$. Donc $f'(x) = 2x$

1.2.2 Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = c$(constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -sinx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

1.2.3 Opération sur les dérivées

Soit u une fonction dérivable sur I et v dérivable sur J.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = au(x)$	$f'(x) = au'(x)$	$I \cap J$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$	$I \cap J$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$	$I \cap J$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2}$	$I \cap J \setminus \{x/v(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\{x \in I/u(x) > 0\}$
$f(x) = u(x)^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nu'(x) \times u(x)^{n-1}$	I

$f(x)=\frac{1}{v(x)}$	$f'(x)=-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$	$J\setminus\{x/v(x)=0\}$
$f(x)=\frac{1}{v(x)^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=-\frac{nv'(x)}{v(x)^{n+1}}$	$J\setminus\{x/v(x)=0\}$
$f(x)=u\circ v(x)$	$f'(x)=v'(x)\times u'\circ v(x)$	$\{x\in J/v(x)\in I\}$

Exemple : Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes : $f(x)=\cos(x^2+2x-1)$; $g(x)=(x-1)\sqrt{x-1}, h(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3}$

1.2.4 Dérivée de la bijection réciproque.

Si f est une fonction continue et monotone sur un intervalle I, alors f admet une bijection de I vers $f(I)$, On note f^{-1} sa bijection réciproque. On suppose que f est dérivable sur I.

Si, $f'(x)\neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et
$\forall x\in f(I), (f^{-1})'(x)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}$.

Remarque : Pour calculer $(f^{-1})'(x)$, il est conseillé d'exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exemple. On considère la fonction f définit par $f(x)=\tan x$.

1. Montrer que f admet une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle à préciser.
2. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

1.2.5 Dérivée successives

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle K.

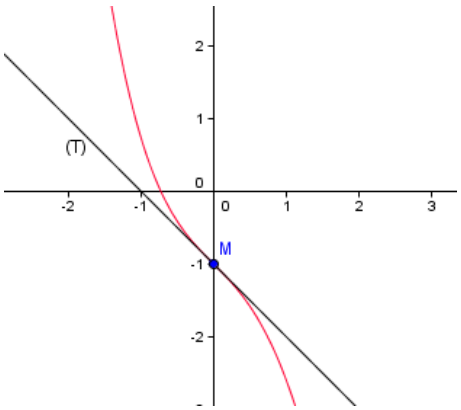
- f' est la dérivée d'ordre 1 encore notée $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur K, alors $f''=(f')'$ est la dérivée seconde encore notée $f^{(2)}$
- Si f'' est dérivable sur K, alors $f'''=(f'')'$ est la dérivée d'ordre 3 encore notée $f^{(3)}$
- De manière progressive, si f est n fois dérivable sur K, alors $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$ est la dérivée d'ordre n de f.

Exemple. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable.
2. Calculer la dérivée d'ordre 4 de f.
3. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K, et $x_0 \in K$. Si la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point M d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.



Remarque : Si le point M d'abscisse x_0 est un point d'inflexion alors la courbe traverse la tangente en ce point.

Exemple. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x + 5$ Possède deux points d'inflexion dont on précisera les abscisses.

1.2.6 Variations d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ✓ f est croissante sur I si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- ✓ f est décroissante sur I si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- ✓ f est constante sur I si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.
- ✓ Si f est croissante sur I ou décroissante sur I, alors f est monotone sur I

Etudier les variations d'une fonction c'est préciser les intervalles où la fonction est soit décroissante, soit croissante. On peut regrouper les variations d'une fonction dans un tableau appelé tableau de variations.

Exemple :

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   a) Dresser le tableau de variations de g.
   b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$
   a) Montrer que $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x^2-1}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

1.2.7 Inégalité des accroissements finis.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, $a, b \in K \; tel \; que \;\; a < b$. S'il existe deux réels m et tels que $\forall x \in [a,b], m \leq f'(x) < M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

En particulier si $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exemple. Démontrer que $\forall x \in [1;2]$:

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}(x-1) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}(x-1)$
2. $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}\right| \leq \sqrt{2}(x-2)$

Leçon 2 : Primitives

Objectifs :

- Savoir calculer les primitives de fonctions composées de fonctions usuelles dans les cas simples
- Utiliser les propriétés pour la détermination des primitives plus complexes.
- Déterminer la primitive qui vérifie une condition donnée.

Exercice

1. Donner une fonction dont la dérivée est $2x$. Cette fonction est appelée une primitive de $2x$.
2. Donner une primitive de $3x^2; \frac{1}{x^2} \; et \; 1 + \tan^2 x$.

2.1 Primitive d'une fonction continue

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un singleton, et $f \; et \; F$ deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

Définition On dit que F est une primitive de f sur E si et seulement si F est dérivable sur E, de fonction dérivée f, c'est-à-dire $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soient f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : f(x)=2x et F(x) = x^2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a : F'(x) = f(x). F est donc une primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Remarquez que la fonction G : x↦x²+1 est aussi **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème Soit f une fonction continue sur l'intervalle I.

- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur E. L'ensemble des primitives de f sur E est l'ensemble des applications définies de I dans $\mathbb{R}$ par : x ↦F(x) + K, où K est un réel arbitraire.

Remarque : Soient F une primitive de f sur I et G : x ↦F(x) + K une primitive quelconque de f. On a : $G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + K = y0 \Leftrightarrow K = y_0 - F(x_0)$. $(x_0 \in I)$. Il existe donc une primitive et une seule G telle que : $G(x_0) = y_0$, c'est l'application G de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

Ainsi :

- Toute fonction f continue sur I admet une infinité de primitives
- Toute fonction f continue sur I admet une unique primitive sur I qui prend une valeur donnée y_0 en un point donné x_0 de I.

Exemple Une primitive de la fonction f : $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto x^2 + K$.

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2 est: $x \mapsto x^2 + K$ avec : $4 + K = 0 \Leftrightarrow K = -4$. C'est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2 - 4$.

2.2 Primitive des fonctions usuelles

Soient un entier naturel non nul n, un nombre réel α différent de -1, un entier relatif k, et un élément (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. C est une constante réelle
Le calcul des fonctions dérivées permet d'établir le tableau suivant, dans lequel F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué I.

f	I	F
$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto C$
x↦ a	$\mathbb{R}$	x↦ $ax + C$
$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x \mapsto x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^* (ou\ \mathbb{R}_-^*)$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + C$
$x \mapsto x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + C$

$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$x \mapsto \tan x + C$
$x \mapsto \frac{1}{sin^2 x}$	$]k\pi, \pi+k\pi[$	$-\operatorname{cotan} x + C$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+C$

Exemple

1. Une primitive de : $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto \frac{x^4}{4}$.
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ *est* :
   $x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire : $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

2.3 Opération sur les primitives

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de primitive F *et* G respectivement. Soient λ un réel.
  - Une primitive de $f+g$ est $F+G$.
  - Une primitive de λf est λF
- Soit u *et* v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. n un entier naturel non nul et α un réel distinct de -1. Les résultats suivants sont des conséquences des propriétés des fonctions dérivées. C est une constance réelle.

Ecriture de *f*	**Primitive *F***	**Contraintes**
$f = u'u^n$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	
$f = \frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+C$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}+C$	
$f = u'v + v'u$	$F = uv + C$	
$f = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$F = \frac{u}{v}+C$	$\forall x \in I, v(x) \neq 0$

$f = u'e^u$	$F = e^u + C$	
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\lvert u\rvert + C$	$\forall x \in I, u(x) > 0 \; ou \; u(x) < 0$
$f = v' \times u' \circ v$	$F = u \circ v + C$	

Exemple. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive sur K.

1. $f(x) = (2x+1)\cos(x^2+x-2)\,; K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2\sqrt{(2x-1)^3}; K =]\frac{1}{2}; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}; K =]0; \pi[$
4. $f(x) = (2x+3)(x^2+3x-1); K = \mathbb{R}$

Leçon 3 : Etude des fonctions

Objectifs

- Montrer qu'un point est centre de symétrie de la courbe d'une fonction.
- Montrer qu'une droite est axe de symétrie de la courbe d'une fonction.
- Etudier la parité d'une fonction et donner une conséquence graphique.
- Etudier les branches infinies la courbe d'une fonction.
- Donner une allure de la courbe d'une fonction.

3.1 Parité et périodicité d'une fonction

- Une fonction f est dite paire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f \; et \; f(-x) = f(x)$. Si la fonction f est paire alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, on peut étudier et représenter la courbe de cette fonction sur $[0; +\infty[\cap D_f$ et le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
- Une fonction f est dite impaire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f \; et \; f(-x) = -f(x)$. Si la fonction f est impaire alors sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Dans ce cas, on peut étudier et représenter la courbe de cette fonction sur $[0; +\infty[\cap D_f$ et le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Remarque : Etudier la parité d'une fonction c'est si cette fonction est paire ou impaire ou ni paire, ni impaire.

- Une fonction f est dite périodique de période P ou P-périodique si P est le plus petit réel tel que $\forall x \in D_f, x + P \in D_f et \; f(x+P) = f(x)$. Si une fonction f est P-périodique alors sa courbe est identique sur les intervalles de longueur P. Dans ce cas on peut étudier et représenter la courbe de f sur $[0; P] \cap D_f$ et le reste de la courbe s'obtient par des translations de vecteurs $-P\vec{\imath}$ et $P\vec{\imath}$.

3.2 Elément de symétrie

Soit f une fonction de courbe C_f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Le point $A(a\,;b)$ est centre de symétrie de la courbe de la fonction f si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
  i. $\forall x \in D_f;\ a-x, a+x \in D_f \ et\ f(a-x)+f(a+x)=2b.$
  ii. $\forall x \in D_f;\ 2a-x \in D_f \ et\ f(2a-x)+f(x)=2b.$
  iii. Dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe C_f de f est celle d'une fonction impaire.

  Remarque : Si un point M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X\,;Y)$ dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ alors $\begin{cases} x = X+a \\ y = Y+b \end{cases}$.

  Exemple. Montrer que le point $A(2\,;3)$ est centre de symétrie de la fonction $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$
- La droite (D) d'équation $x=a$ est axe de symétrie de la courbe de la fonction f si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
  i. $\forall x \in D_f;\ a-x, a+x \in D_f \ et\ f(a-x)=f(a+x).$
  ii. $\forall x \in D_f;\ 2a-x \in D_f \ et\ f(2a-x)=f(x).$
  iii. Dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe C_f de f est celle d'une fonction paire où $A(a;0)$.

  Exemple. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est axe de symétrie de la fonction $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+5}$.

3.3 Branches infinies à la courbe d'une fonction.

Définition 1 : Branches infinies

La courbe d'une fonction f admet une branche infinie dans l'un des cas suivant :

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (Dans ce cas, on peut avoir une branche parabolique ou une asymptote oblique)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ (Dans ce cas on a une asymptote horizontale)
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (Dans ce cas, on a une asymptote verticale)

Définition 2 : Asymptote

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique en ∞ à la courbe de la fonction f. $(a\neq 0)$
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, alors la droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale en ∞ à la courbe de la fonction f.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, alors la droite d'équation $x=x_0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction f.

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)=0$, alors les courbes des fonctions C_f et C_g sont asymptotes.

Méthode : Recherche d'une branche infinie en l'infini.

Soit f une fonction. Pour étudier la branche infinie en l'infinie, on calcule $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$:

✓ Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, alors la droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale en ∞.

✓ Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, on calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$:

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a;\ a\neq 0$, on calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$:
  - ❖ Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$, alors la courbe C_f de f admet une branche parabolique de direction La droite (D): $y=ax$.
  - ❖ Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$, alors la droite (D): $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f.

Exemple. Etudier les branches infinies de la fonction $f(x)=\frac{x^2+4x-7}{1-2x}$.

3.3 Plan d'étude d'une fonction

On étudie une fonction f pour en donner les propriétés importantes, et on peut aussi en tracer le graphe, ou l'ensemble des points d'un plan de coordonnées $(x,f(x))$: celui-ci résume en une image un grand nombre de caractéristiques de la fonction. Mais une telle étude pout être faite pour d'autres motifs, par exemple pour montrer que la fonction est partout positive : en effet, une telle information se déduit facilement du tableau de variation. Notons que l'étude d'une fonction réciproque peut être faite de deux façons : soit par la méthode usuelle, soit en étudiant la fonction dont elle est réciproque. Les deux graphes se déduisent par échange des coordonnées x et y, autrement dit par symétrie par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y=x$).

L'étude d'une fonction se décompose en un certain nombre d'étapes :

➢ Détermination du domaine de définition et le calcul des limites aux bornes de ce domaine.

- Etude de la parité et de la périodicité afin de réduire le domaine d'étude. (Cette étape n'est pas obligatoire)
- On étudie les variations et on dresse le tableau de variations.
- On étudie les éventuels branches infinies.
- Le tracé de la courbe : On pourra déterminer les éventuels points de contact de la courbe avec les axes du repère ; Tracer les éventuelles tangentes et asymptotes.

Exercice : Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et C sa courbe représentative.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que C admet une demi tangente parallèle à (OI) au point d'abscisse 0.
2. Etudier les variations de f
   Démontrer que C admet trois asymptotes dont on précisera les équations.
3. Tracer C

Classe de Terminale C

Chapitre : ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

Objectifs :

- ✓ Définir un espace vectoriel et un sous-espace vectoriel, puis définir des systèmes libres et liés d'un sous-espace vectoriel ;
- ✓ Comprendre la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- ✓ Définir une base d'un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension ;
- ✓ Reconnaître les isomorphismes d'espaces vectoriels réels de dimension finie ;
- ✓ Reconnaître les formes linéaires et les utiliser sur quelques applications ;
- ✓ Définir une application linéaire par sa matrice, déterminer son noyau et son image ;
- ✓ Distinguer les types d'applications linéaires et utiliser leur composition pour définir de nouvelles transformations.

Leçon 1 : ESPACES VECTORIELS

1.1 Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

a) Définition

Soit E un ensemble non vide dont les éléments notés $\vec{u}$ se nomment vecteurs. On munit E :

- ➢ D'une loi de composition interne, notée $(+)$, nommée addition vectorielle :

  $\forall(\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in E^2,\ \vec{u}_1+\vec{u}_2 \in E.$

- ➢ D'une loi de composition externe, notée $(\cdot)$, nommée multiplication par un réel :

  $\forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\vec{u} \in E, (\alpha\cdot\vec{u}) \in E.$

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel si et seulement si :

(1) $(E,+)$ est un groupe commutatif (ou abélien). C'est-à-dire :

$i)\ \forall(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3) \in E^3, \vec{u}_1+(\vec{u}_2+\vec{u}_3)=(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+\vec{u}_3$ **(Associativité)**

$ii)\ \forall(\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in E^2,\ \vec{u}_1+\vec{u}_2=\vec{u}_2+\vec{u}_1$ **(Commutativité)**

$iii)\ \exists\vec{0} \in E, \forall\vec{u} \in E, \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ **(Elément neutre)**

$iv)\ \forall\vec{u} \in E, \exists(-\vec{u}) \in E, \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}.$ **(Elément symétrisable)**

(2) La loi externe (.) vérifie les propriétés suivantes :

$i)\ \forall\vec{u} \in E, 1.\vec{u}=\vec{u}$

$ii)\ \forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in E^2, \alpha.(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=\alpha.\vec{u}_1+\alpha.\vec{u}_2$

$iii)\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall\vec{u} \in E, (\alpha+\beta).\vec{u}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$

$iv)\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall\vec{u} \in E, \alpha.(\beta\,\vec{u})=(\alpha\times\beta).\vec{u}$

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels réels

b) Combinaisons linéaires des vecteurs

- **Définition**

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le n −uplet $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ est une famille finie de E.

Pour tout choix des n réels $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$, la structure d'espace vectoriel de E entraîne :

$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{u}_k=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n\in E$.

Un vecteur $\vec{u}$ de E est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ s'il existe des réels $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ tels que $\vec{u}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n$.

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de E.

- $\mathcal{F}\subset E$ et $\mathcal{F}\neq\emptyset$ car $\vec{0}_E\in\mathcal{F}$.
- Soit $\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{F}$. Alors il existe des réels $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ et $\beta_1,\ \beta_2,\dots,\ \beta_n$ tels que :

  $\vec{u}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n$ et $\vec{v}=\beta_1\vec{u}_1+\beta_2\vec{u}_2+\cdots+\beta_n\vec{u}_n$. Pour tous réels a et b, on a :

$$a\vec{u}+b\vec{v}=a(\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n)+b(\beta_1\vec{u}_1+\beta_2\vec{u}_2+\cdots+\beta_n\vec{u}_n)$$

$$=(a\alpha_1+b\beta_1)\vec{u}_1+(a\alpha_2+b\beta_2)\vec{u}_2+\cdots+(a\alpha_n+b\beta_n)\vec{u}_n.$$

Ainsi, $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(\vec{u},\vec{v})\in\mathcal{F}^2,\ a\vec{u}+b\vec{v}\in\mathcal{F}$: On dit que $\mathcal{F}$ est une partie de E stable par combinaison linéaire.

c) Notion de sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une partie F d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $F\neq\emptyset$

ii) $\forall(\vec{u},\vec{v})\in F^2,\ \vec{u}+\vec{v}\in F$. (On dit que F est stable pour la loi $(+)$)

iii) $\forall\vec{u}\in F,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha.\vec{u}\in F$. (On dit que F est stable pour la loi $(.)$).

Remarque : Les conditions ii) et iii) peuvent se résumer par : $\forall(\vec{u},\vec{v})\in F^2,\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in F$.

Exercice résolu

$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel réel. On pose : $F=\{\vec{u}(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,-x+y+2z=0\}$ et $G=\{\vec{u}(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,-x+2y+z=3\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution

1. **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.**

- On a : $\vec{0}_{\mathbb{R}^3}=(0;0;0)\in\mathbb{R}^3$ et $-(0)+0+2(0)=0$. Donc $\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\in F$ et par conséquent, $F\neq\emptyset$.
- Soit $\vec{u},\vec{v}\in F$, soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Montrons que $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}\in F$.

  $\vec{u}\in F$ implique $\vec{u}(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,-x+y+2z=0$ et $\vec{v}\in F$ implique $\vec{v}(x';y';z')\in\mathbb{R}^3,-x'+y'+2z'=0$

  Ainsi, $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}=(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)+(\beta x';\ \beta y';\ \beta z')$

  $=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z')$

  Il est clair que $(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z')\in\mathbb{R}^3$. De plus, on a :

  $-(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')=\alpha(-x+y+2z)+\beta(-x'+y'+2z')$

$= \alpha.0 + \beta.0$ car $\vec{u}, \vec{v} \in F$.

$= 0$. Donc $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \in F$.

Ainsi, F est stable par combinaison linéaire. On conclut donc que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Vérifions si G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Montrons par un contre-exemple que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Considérons les vecteurs $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(0;2;-1)$.

On a : $(1;2;0) \in \mathbb{R}^3$ et $-(1) + 2(2) + (0) = 3$, donc $\vec{u} \in G$.

De même, $(0;2;-1) \in \mathbb{R}^3$ et $-(0) + 2(2) + (-1) = 3$, donc $\vec{v} \in G$.

$\vec{u} + \vec{v} = (1;2;0) + (0;2;-1)$

$= (1;4;-1) \in \mathbb{R}^3$ et $-(1) + 2(4) + (-1) = 6 \neq 3$.

Donc $\vec{u} + \vec{v} \notin G$. G n'est pas stable par l'addition, par suite G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Autre méthode : $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0;0;0) \notin G$ car $-0 + 2(0) + 0 = 0 \neq 3$. Ainsi, G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

✓ **Quelques propriétés**

Soit E un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel.

P_1) $\{\vec{0}_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

P_2) Le vecteur nul de E noté $\vec{0}_E$ appartient à tout sous-espace vectoriel de E.

P_3) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

P_4) La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas toujours un sous- espace vectoriel de E.

Preuve de P_3)

Soit E un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, alors $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$. Donc $\vec{0}_E \in F \cap G$ et par conséquent, $F \cap G \neq \emptyset$.

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in (F \cap G)$, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in (F \cap G)$.

$$\vec{u}, \vec{v} \in (F \cap G) \Longrightarrow \begin{cases} \vec{u} \in F \text{ et } \vec{u} \in G \\ \vec{v} \in F \text{ et } \vec{v} \in G \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha\vec{u} \in F \text{ et } \alpha\vec{u} \in G \\ \beta\vec{v} \in F \text{ et } \beta\vec{v} \in G \end{cases}$$

$\Longrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$ et $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in G$ car F et G deux sous-espaces vectoriels de E

$\Longrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in (F \cap G)$. Ainsi, $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.

D'où $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Contre-exemple de P_4)

Considérons les ensembles $A = \{(a;0)/\ a \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0;b)/\ b \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de E.

$\vec{u}(1;0) \in A$ et $\vec{v}(0;1) \in B$.

Par l'absurde, supposons que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E. Alors, $\vec{u} + \vec{v} = (1;1) \in A \cup B$;

ce qui est absurde car $(1;1) \notin A$ et $(1;1) \notin B$. Donc $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Considérons à présent $A = \{(a;0)/\ a \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(b;c)/\ b;c \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de E.

Pour tous réels $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(a;0)+\beta.(b;c)=(\alpha a+\beta b;\ \beta c)\in B$. Donc $(\alpha a+\beta b;\ \beta c)\in A\cup B$

Donc, $A\cup B$ est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, **la réunion de deux sous-espaces vectoriels peut être (ou ne pas être) un sous-espace vectoriel.**

Remarque : Si $A\subset B$ ou $B\subset A$, alors $A\cup B$ est un sous-espace vectoriel.

1.2 Base et dimension d'un espace vectoriel

❖ Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- **La famille $\mathcal{F}$ est dite liée** si et seulement si, l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. Les vecteurs d'une famille liée sont dits linéairement dépendants.

  De manière générale, pour montrer qu'une famille de n vecteurs est liée, il faut montrer que :

  $\exists(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n)\in\mathbb{R}^n,(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)$ **tels que** $\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n=\vec{0}$ **.**

- **La famille $\mathcal{F}$ est dite libre** si elle n'est pas **liée**. C'est-à-dire si et seulement si, toute égalité de la forme $\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n=\vec{0}$ implique $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

  Les vecteurs d'une famille libres sont dits linéairement indépendants. On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ de l'espace vectoriel de E est libre si et seulement si, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice résolu

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{u}(-2;5)$ et $\vec{v}(6;\ -15)$. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(-1;1;0)$.
   a) Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille libre.
   b) Soit x un nombre réel, et le vecteur $\vec{w}(2x;\ x^2;-3)$.
   Déterminer x pour que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit liée.

Solution

1. **Montrons que la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est liée**.

On cherche $(\alpha;\ \beta)\in\mathbb{R}^2$, $(\alpha;\ \beta)\neq(0;0)$ tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$.

On a : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\ \alpha(-2;5)+\beta(6;-15)=(0;0)$

$$\Rightarrow(-2\alpha+6\beta;5\alpha-15\beta)=(0;0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+6\beta=0\\5\alpha-15\beta=0\end{cases}\text{ d'où }\ \alpha=3\beta.$$

Il suffit de prendre $(\alpha;\ \beta)=(1;3)$. Donc le système $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée.

2. a) **Montrons que la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est libre**

soit $\alpha;\ \beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\alpha=\beta=0$.

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\ \alpha(1;0;-1)+\beta(-1;1;0)=(0;0;0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=0\\\beta=0\\-\alpha=0\end{cases}\text{ d'où }\ \alpha=\beta=0.$$ Donc la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est libre.

b) **Déterminons x pour que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit liée.**

On cherche α; β et γ trois réels non nuls tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha(1;0;-1)+\beta(-1;1;0)+\gamma(2x;x^2;-3)=(0;0;0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha-\beta+2\gamma x=0} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{\beta+\gamma x^2=0} & \textbf{(2)} \\ \boldsymbol{-\alpha-3\gamma=0} & \textbf{(3)} \end{cases}$$

L'égalité (3) donne : $\alpha=-3\gamma$, et l'égalité (2) donne : $\beta=-\gamma x^2$.

(1) devient : $-3\gamma+\gamma x^2+2\gamma x=0$ soit encore $\gamma(x^2+2x-3)=0$

ce qui implique : $x^2+2x-3=0$ car $\gamma\neq 0$

par suite, $x=1$ ou $x=-3$.

Ainsi, **la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée si et seulement si $x\in\{-3;1\}$.**

- **La famille $\mathcal{F}$ est dite génératrice de E** si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$. C'est-à-dire : $\forall\vec{u}\in E,\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n/\ \vec{u}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n$.

❖ **Base et dimension d'un espace vectoriel**

Soit E un espace vectoriel réel. $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est **une base de E** si $\mathcal{B}$ est une famille **libre et génératrice de E.**

On appelle **dimension de E** et on note $\dim E$, **le nombre de vecteurs** constituant une base de E.

Si une base de E comporte n vecteurs, alors $\dim E=n$.

Conséquences :

i) Si F **est un sous-espace vectoriel de E,** alors $\dim F\leq \dim E$.

ii) Si $\dim F=1$, alors F est une **droite vectorielle**

iii) Si $\dim F=2$, alors F est un **plan vectoriel.**

Convention : $\dim\{0_E\}=0$

Bon à savoir : toute famille libre de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est une base.

1.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLEMENTAIRES

a) Somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

Définition : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E.

L'ensemble des vecteurs qui sont une somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme de F et G** et noté $F+G$.

On a : $F+G=\{\vec{u}\in E/\ \exists(\vec{x},\vec{y})\in F\times G,\vec{u}=\vec{x}+\vec{y}\}$.

Montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Par définition, $F+G\subset E$.
- On a : $\vec{0}_E=\vec{0}_E+\vec{0}_E$ avec $\vec{0}_E\in F$ et $\vec{0}_E\in G$. D'où $\vec{0}_E\in F+G$, c'est-à-dire $F+G\neq\emptyset$.
- Soit $\vec{u},\vec{v}\in F+G$. Montrons que $\vec{u}+\vec{v}\in F+G$.

$\vec{u},\vec{v}\in F+G$ donc $\exists(\vec{x}_1,\vec{y}_1)\in F\times G/\ \vec{u}=\vec{x}_1+\vec{y}_1$ et $\exists(\vec{x}_2,\vec{y}_2)\in F\times G\ /\vec{v}=\vec{x}_2+\vec{y}_2$.

On a : $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)$

$= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \in F + G$ car $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in F$ et $(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \in G$.

Alors, $\vec{u} + \vec{v} \in F + G$.

- Soit $\vec{u} \in F + G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha.\vec{u} \in F + G$.

$\vec{u} \in F + G \Leftrightarrow \exists(\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G \ / \ \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$.

On a : $\alpha.\vec{u} = \alpha.(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha.\vec{x} + \alpha.\vec{y}$. Or $\alpha.\vec{x} \in F$ et $\alpha.\vec{y} \in G$ d'où $\alpha.\vec{u} \in F + G$.

Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété : Soit F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

On a : $\boldsymbol{dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - dim(F \cap G)}$.

Exercice d'application

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

On donne $F = \{(a + b; a; a - b); a, b \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(2a - 2b; 3a; a + 2b); a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et préciser leur dimension.
2. Donner une équation cartésienne de F et une équation cartésienne de G.
3. Déterminer $F \cap G$ et $dim(F \cap G)$.
4. Déterminer $F + G$ et $dim(F + G)$. Que remarque-t-on ?

Solution

1. **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E et précisons sa dimension.**

- Par définition, $F \subset E$.
- On a : $\vec{0}_E = (0; 0; 0) \in F$ car $(0; 0; 0) = (0 + 0; 0; 0 - 0)$ et $0 \in \mathbb{R}$. D'où $F \neq \emptyset$.
  - Soit $\vec{u}, \vec{v} \in F$. Montrons que $\vec{u} + \vec{v} \in F$.

$\vec{u}, \vec{v} \in F$ donc $\vec{u} = (a + b; a; a - b); a, b \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} = (a' + b'; a'; a' - b'); a', b' \in \mathbb{R}$.

On a : $\vec{u} + \vec{v} = (a + b; a; a - b) + (a' + b'; a'; a' - b')$

$= (a + b + a' + b'; a + a'; a - b + a' - b')$

$= (a + a' + (b + b'); \ a + a'; \ a + a' - (b + b'))$ avec $a + a' \in \mathbb{R}$ et $b + b' \in \mathbb{R}$.

D'où $\vec{u} + \vec{v} \in F$.

- Soit $\vec{u} \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha.\vec{u} \in F$.

$\vec{u} \in F \Leftrightarrow \vec{u} = (a + b; a; a - b); a, b \in \mathbb{R}$.

Or $\alpha.\vec{u} = \big(\alpha \times (a + b); \ \alpha \times a; \ \alpha \times (a - b)\big) = (\alpha a + \alpha b; \ \alpha a; \ \alpha a - \alpha b)$ avec $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$. D'où $\alpha.\vec{u} \in F$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

Soit $\vec{u} \in E, \ \vec{u} \in F \Leftrightarrow \vec{u} = (a + b; a; a - b); a, b \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \vec{u} = (a; a; a) + (b; 0; -b) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ où $\vec{e}_1 = (1; 1; 1)$ et $\vec{e}_2 = (1; 0; -1)$.

D'où la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ engendre F. Supposons que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est liée, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \vec{e}_1 = \alpha\vec{e}_2$.

$\vec{e}_1 = \alpha\vec{e}_2 \Leftrightarrow (1; 1; 1) = \alpha \ (1; 0; -1)$. Ce qui implique $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$ et $1 = 0$, absurde.

D'où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une famille libre, et par conséquent, est une base de F. On déduit que $dim(F) = 2$.

❖ **Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E et précisons sa dimension**

Soit $\vec{u} \in E, \ \vec{u} \in G \Leftrightarrow \vec{u} = (2a - 2b; 3a; a + 2b); a, b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{u} = a(2;3;1) + b(-2;0;2) = a\vec{e}_3 + b\vec{e}_4$ où $\vec{e}_3 = (2;3;1)$ et $\vec{e}_4 = (-2;0;2)$.

G est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_3 = (2;3;1)$ et $\vec{e}_4 = (-2;0;2)$ de E.

Donc G est un sous-espace vectoriel de E et on a : $dim(G) = 2$.

2. Donnons une équation cartésienne de F.

Soit $\vec{u} = (x;y;z) \in E$, $\vec{u} \in F \Leftrightarrow \vec{u} = (a+b;a;a-b); a,b \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x;y;z) = (a+b;a;a-b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = a \\ z = a-b \end{cases}, \text{ soit } x + z - 2y = 0.$$

Donc F a pour équation cartésienne $x - 2y + z = 0$.

❖ Donnons une équation cartésienne de G.

Soit $\vec{u} = (x;y;z) \in E$, $\vec{u} \in G \Leftrightarrow \vec{u} = (2a-2b;3a;a+2b); a,b \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x;y;z) = (2a-2b;3a;a+2b); a,b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a-2b \\ y = 3a \\ z = a+2b \end{cases}, \text{ soit } x + z - y = 0.$$

Donc G a pour équation cartésienne $x - y + z = 0$.

3. Déterminons $F \cap G$ et $dim(F \cap G)$.

Soit $\vec{u} = (x;y;z) \in E$, $\vec{u} \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -\lambda \\ x - y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{donc } F \cap G = \{(-\lambda;0;\lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$\forall \vec{u} \in F \cap G, \vec{u} = \lambda(-1;0;1), \lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\vec{e}_5 = (-1;0;1)$ engendre $F \cap G$. En plus, $\vec{e}_5 \neq \vec{0}_E$ d'où $\vec{e}_5$ est une base de $F \cap G$. Ainsi, $dim(F \cap G) = 1$.

4. Déterminons $F + G$

$F + G$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Or $\vec{e}_4 = -2\vec{e}_2$, d'où $F + G$ est engendré par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0}$.

On a : $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(1;1;1) + \beta(1;0;-1) + \gamma(2;3;1) = (0;0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}. \text{ Ce qui implique : } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

D'où la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre et par conséquent, est une base de $F + G$. Comme $dim(F + G) = 3$ et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$, alors $\boldsymbol{F + G = E}$.

b) Somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définitions : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

✓ On dit que le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est une **somme directe** lorsque $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

La somme $F + G$ se note alors $F \oplus G$.

✓ On dit que F et G sont **supplémentaires dans E** lorsque La somme $F+G$ est directe et qu'elle est égale à E. Autrement dit, F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow \begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = \{\vec{0}_E\} \end{cases}$.

Propriétés :

❖ F et G sont **supplémentaires dans E** lorsque tout vecteur de E se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

❖ Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E en possède un sous-espace vectoriel supplémentaire, mais ce supplémentaire n'est pas unique en général.

❖ Si E est de dimension finie n, et si l'on a une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ de F et une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q)$ de G, alors $F \oplus G = E \Longrightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q)$ est une base de E. On dit que la réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Exercice résolu

$\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{P}$ est le plan vectoriel de $\mathcal{E}$ d'équation $x+y+z=0$ et $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle de $\mathcal{E}$ engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

Solution

- **Démontrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{\vec{0}_E\}$**

  Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathcal{E}$.

  $\vec{u} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{u} = \alpha \vec{e}_1$

  $\Leftrightarrow (x; y; z) = \alpha(1; 1; 1)$

  $\Leftrightarrow x = y = z = \alpha$

  $\vec{u} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ce qui implique $3\alpha = 0$, soit encore $\alpha = 0$.

  Donc $\vec{u} = \vec{0}_E$ et par suite $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{\vec{0}_E\}$.

- **Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{D}$**

  Par définition, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{P} + \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$.

  On sait que $dim(\mathcal{P} + \mathcal{D}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D} - \dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{D})$

  $= 2 + 1 - 0$

  $= 3$

  $\mathcal{P} + \mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et $dim(\mathcal{P} + \mathcal{D}) = 3 = \dim \mathcal{E}$. D'où $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{D}$.

Ainsi, $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

Leçon 2 : APPLICATIONS LINEAIRES

1. DEFINITION

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.

f est dite linéaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

$i)\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ $\qquad ii)\ \forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha.\vec{u}) = \alpha.f(\vec{u})$

On dit aussi que f est un **homomorphisme** d'espaces vectoriels.

Vocabulaire : Soit f une application linéaire de E dans F.

- ✓ Si de plus $\boldsymbol{f}$ **est bijective**, on dit que f est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.
- ✓ Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme** de l'espace vectoriel E.
- ✓ Si $E = F$ et f est bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Remarque : Soit f une application de E dans F.

f est une **application linéaire** si et seulement si $\forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \forall \alpha;\ \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v})$

Exemple 1: Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (x^2, y+z)$.

f n'est pas linéaire car pour $\vec{u}(-3,0,1)$ et $\vec{v}(3,0,-1)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, on a : $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{0}_{\mathbb{R}^3}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$ alors que $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = (9,1) + (9,-1) = (18,0) \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$. D'où $\boldsymbol{f(\vec{u}+\vec{v}) \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})}$ et par conséquent, $\boldsymbol{f}$ **n'est pas une application linéaire.**

Exemple 2 : Soit g: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. g est une application linéaire car pour tous éléments $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(x,y)$

$(a,b) \longmapsto a+b$

de $\mathbb{R}^2$ et pour tous réels α et β, on a :

$g(\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}) = g[(\alpha a + \beta x;\ \alpha b + \beta y)] = \alpha a + \beta x + \alpha b + \beta y = \alpha(a+b) + \beta(x+y) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v})$

Exemple 3 : Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $\vec{a}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs de E.

A tout vecteur $\vec{u}$ de E, on définie l'application f de E vers E par : $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

Montrer que f est un endomorphisme.

Solution

f étant une application de E vers E, il suffit de montrer que f est **linéaire**.

- Soit $\vec{u},\vec{v} \in E$, on a : $f(\vec{u}+\vec{v}) = [\vec{a} \wedge (\vec{u}+\vec{v})] \wedge \vec{n}$

$$= [(\vec{a} \wedge \vec{u}) + (\vec{a} \wedge \vec{v})] \wedge \vec{n}$$
$$= (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n} + (\vec{a} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{n}$$
$$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

- Soit $\vec{u} \in E$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a : $f(\alpha.\vec{u}) = [\vec{a} \wedge (\alpha.\vec{u})] \wedge \vec{n}$

$$= [\alpha.(\vec{a} \wedge \vec{u})] \wedge \vec{n}$$
$$= \alpha.[(\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}]$$
$$= \alpha.f(\vec{u})$$

Donc f est une application linéaire de E vers E, c'est-à-dire f est un endomorphisme de E.

Propriété fondamentale : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire de E vers F est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Exercice résolu

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. On pose : $\vec{e}_1 = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$; $\vec{e}_2 = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

a) Déterminer l'application linéaire f telle que : $f(\vec{u}) = \vec{e}_1$, $f(\vec{v}) = \vec{e}_2$ et $f(\vec{k}) = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

b) Pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, exprimer en fonction de x,y et z , les coordonnées x',y' et z' du vecteur $f(\vec{u})$.

Solution

a) Déterminons l'application linéaire f

- $f(\vec{u}) = \vec{e}_1 \Leftrightarrow f(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}) = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

  $\Leftrightarrow 2f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) - f(\vec{k}) = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ (1) car f est linéaire.

- $f(\vec{v}) = \vec{e}_2 \Leftrightarrow f(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

  $\Leftrightarrow f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) + f(\vec{k}) = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ (2) car f est linéaire.

On obtient le système : $\begin{cases} 2f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) - f(\vec{k}) = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) + f(\vec{k}) = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{\jmath} + \vec{k} \end{cases}$. La résolution de ce système donne :

$f(\vec{\imath}) = \frac{8}{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}$; $f(\vec{\jmath}) = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$ et $f(\vec{k}) = \vec{\jmath} + \vec{k}$. Par suite, il existe un unique endomorphisme f de E vérifiant cette relation.

b) exprimons en fonction de x, y et z , les coordonnées x', y' et z' du vecteur $f(\vec{u})$.

On a : $f(\vec{u}) = f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$

$= xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) + zf(\vec{k})$ car f est linéaire.

$= x\left(\frac{8}{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) + y\left(\frac{1}{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\right) + z(\vec{\jmath} + \vec{k})$

$= \left(\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}y\right)\vec{\imath} + (-x + y + z)\vec{\jmath} + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + z\right)\vec{k}$

Alors $\begin{cases} x' = \frac{8}{3}x + \frac{1}{3}y \\ y' = -x + y + z \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + z \end{cases}$

2. IMAGE ET NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Définition : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.

On appelle image de f, et on note $Im\, f$, l'image $f(E)$ de E par f.

On appelle noyau de f, et on note $Ker\, f$, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que : $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$.

$Im\, f = \{\vec{v} \in F / \ \exists \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

$Ker\, f = \{\vec{u} \in E / \ f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$

Théorème : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.

- ✓ L'ensemble $Im\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.
- ✓ L'ensemble $Ker\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.

NB : Lorsque E est de dimension finie n et muni d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, alors $Im\, f$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$; $f(\vec{e}_2)$ … ; $f(\vec{e}_n)$.

On note : $Im\, f = < f(\vec{e}_1) ; f(\vec{e}_2) \ \ldots ; f(\vec{e}_n) >$.

Exemple : Soit E un plan vectoriel réel rapporté à une base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \end{cases}$. Déterminons $Ker\ f$ et $Im\ f$.

❖ Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ un vecteur de E. $\vec{u} \in Ker\ f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E$

$\Leftrightarrow f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = \vec{0}_E$

$\Leftrightarrow xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) = \vec{0}_E$ car f est linéaire.

$\Leftrightarrow x(-2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}) + y(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) = \vec{0}_E$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x - y = 0.$

Donc $Ker\ f$ est la droite vectorielle d'équation $2x - y = 0$, soit de vecteur de base $\vec{e}_1(1;2)$.

❖ Soit $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ un vecteur de $Im\ f$, alors il existe un vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.

$f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 6x - 3y \end{cases}$ d'où $y' = -3x'$. Ainsi, $Im\ f$ est la droite vectorielle d'équation $y = -3x$.

Une base de $Im\ f$ est le vecteur $\vec{e}_2(1;-3)$.

Autre méthode : On sait que $Im\ f$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f(\vec{\imath}); f(\vec{\jmath}))$

Or, $f(\vec{\imath}) = -2f(\vec{\jmath})$. Alors, $Im\ f$ est la droite vectorielle de vecteur de base $f(\vec{\jmath})$.

Théorème : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.

- ✓ f est surjective si et seulement si : $Im\ f = F$.
- ✓ f est injective si et seulement si : $Ker\ f = \{\vec{0}_E\}$.

Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ➢ $\boldsymbol{Ker\ f = \{\vec{0}_E\}}$
- ➢ $\boldsymbol{Im\ f = E}$
- ➢ **f est bijective**

Remarque : Pour **un endomorphisme f** d'un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension finie E, on a :

$\boldsymbol{dim(Ker\ f) + dim(Im\ f) = \dim E.}$

Exercice résolu

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} - \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = \vec{\imath} + \vec{k}$.

A tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, on associe le vecteur $f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$.

1. Déterminer $Ker\ f$ et en préciser une base. f est-il un automorphisme de E ?

2. Déterminer $Im\ f$ et en préciser une base.

Solution

1. Déterminons $Ker\ f$ et précisons-en une base.

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in E$. On a : $f(\vec{u}) = x(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + y(\vec{\jmath} - \vec{k}) + z(\vec{\imath} + \vec{k})$ car f est linéaire

$= (x + z)\vec{\imath} + (x + y)\vec{\jmath} + (-y + z)\vec{k}$

$\vec{u}(x, y, z) \in Ker\ f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$ D'où $z=y=-x$, par suite $\vec{u}=x\vec{\imath}-x\vec{\jmath}-x\vec{k}=x\vec{e}_1$ où $\vec{e}_1=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}$.

Ainsi, $Ker\ f$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}$. Une base de $Ker\ f$ est $\vec{e}_1$.

2. Déterminons $Im\ f$ et précisons-en une base.

Soit $\vec{u}=\ x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, alors $f(\vec{u})=\overrightarrow{u'}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$

$$=(x+z)\vec{\imath}+(x+y)\vec{\jmath}+(-y+z)\vec{k}$$

D'où $\begin{cases} x+z=x' \\ x+y=y' \\ -y+z=z' \end{cases}$ ce qui donne : $(x',y',z')=(y'+z',y',z')=y'(1,1,0)+\ z'(1,0,1)$

Ainsi, $\overrightarrow{u'}=y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3$ où $\vec{e}_2=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{e}_3=\vec{\imath}+\vec{k}$. On conclut que $Im\ f$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_2=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{e}_3=\vec{\imath}+\vec{k}$. Une base de $Im\ f$ est la famille $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Remarque :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies.

Toute application linéaire f de E vers F transformant une base $\mathcal{B}$ de E en une base $\mathcal{B}'$ de F est **bijective**.

Exemple :

Soit E un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{\imath})=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$; $f(\vec{\jmath})=\vec{\jmath}-\vec{k}$ et $f(\vec{k})=\vec{\imath}+\vec{k}$. Montrons que f n'est pas un automorphisme.

Soient α,β et γ trois réels. On a : $\alpha f(\vec{\imath})+\beta f(\vec{\jmath})+\gamma f(\vec{k})=\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ -\beta+\gamma=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha \\ \beta=\gamma \end{cases}.$$

Il suffit de prendre $\alpha=1,\ \beta=-1$ et $\gamma=-1$; par suite la famille $\left(f(\vec{\imath}),f(\vec{\jmath}),f(\vec{k})\right)$ n'est pas une base de E car cette famille est liée. Donc, f n'est pas un automorphisme de E, car elle ne transforme pas une base de E en une base de E.

3. MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

3.1 Matrice carrée d'ordre 2

✓ **Présentation et définition**

Soit E_2 un plan vectoriel de base $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et f un endomorphisme de E_2 défini par : $\begin{cases} f(\vec{\imath})=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath})=c\vec{\imath}+d\vec{\jmath} \end{cases}$

On appelle matrice de f dans la base B, le tableau noté $M_f=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où a,b,c et d sont des réels.

Soit $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\ \in E_2$, $\overrightarrow{u'}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ son image par f.

On a : $\overrightarrow{u'}=f(\vec{u}) \Leftrightarrow x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}=f(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})$

$$x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}=xf(\vec{\imath})+yf(\vec{\jmath})$$
$$=x(a\vec{\imath}+b\vec{\jmath})+y(c\vec{\imath}+d\vec{\jmath})$$
$$=(ax+cy)\vec{\imath}+(bx+dy)\vec{\jmath}$$

D'où $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$. On écrit : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. L'écriture $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$ est appelée expression analytique de f. La **matrice unité** $\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ est celle de **l'identité.**

Une matrice est dite carrée lorsque le nombre de ses colonnes est égal au nombre de ses lignes.

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ défini par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} \end{cases}$

La matrice de f dans la base B est : $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et l'expression analytique de f est :

$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$.

✓ **Déterminant et inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Le déterminant de M est le réel noté $\det M = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ et défini par $\det M = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

On dit que M est inversible lorsque $\det M \neq 0$. Dans ce cas, la matrice inverse de M notée M^{-1} est définie par : $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Propriété : Soit f un endomorphisme de matrice M_f relativement à une base B.

Si $\det M \neq 0$, alors f est bijectif.

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ défini par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} \end{cases}$

La matrice de f dans la base B est : $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de la matrice de f est : $\det M_f = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$. Donc , f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On a :

$M_f{}^{-1} = \frac{1}{\det M_f}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Remarque : A partir du système $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$, on déduit l'expression analytique de f^{-1} suivante :

$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' + y') \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 2y') \end{cases}$ On a: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_f{}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec $M_f{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3.2 Matrice carrée d'ordre 3

Soit E un espace vectoriel dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit f un endomorphisme de E tel que

$f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$, $f(\vec{\jmath}) = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}$ et $f(\vec{\imath}) = a''\vec{\imath} + b''\vec{\jmath} + c''\vec{k}$.

On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, le tableau noté $M_f = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit f une application linéaire définie dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}=f(\vec{u})=(2x-y+3z)\vec{\imath}+(y-z)\vec{\jmath}+(-x+3y)\vec{k}$.

Ecrivons la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On a : $\vec{\imath}=1\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0\vec{k}$, $\vec{\jmath}=0\vec{\imath}+1\vec{\jmath}+0\vec{k}$ et $\vec{k}=0\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+1\vec{k}$.

D'où $f(\vec{\imath})=2\vec{\imath}-\vec{k}$, $f(\vec{\jmath})=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+3\vec{k}$ et $f(\vec{k})=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

Ainsi, la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $M_f=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-1\\-1&3&0\end{pmatrix}$.

La **matrice unité** $\boldsymbol{I_3}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ est celle de **l'identité.**

Remarques :

- ✓ Toute application linéaire est entièrement définie par les images des vecteurs de base disposées en colonnes.
- ✓ Il existe des matrices non carrées dont le nombre de lignes est différent du nombre de colonnes.

3.3 Opérations sur les matrices

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base de E.

Soit $M_f=\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}$ et $M_g=\begin{pmatrix}\alpha&\alpha'&\alpha''\\\beta&\beta'&\beta''\\\gamma&\gamma'&\gamma''\end{pmatrix}$ les matrices respectives de f et g dans la base $\mathcal{B}$.

- ❖ $f+g$ est un endomorphisme de E de matrice $M_{f+g}=\begin{pmatrix}a+\alpha&a'+\alpha'&a''+\alpha''\\b+\beta&b'+\beta'&b''+\beta''\\c+\gamma&c'+\gamma'&c''+\gamma''\end{pmatrix}$.
- ❖ $f\circ g$ est un endomorphisme de matrice $M_{f\circ g}=M_f\times M_g$

$$=\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha&\alpha'&\alpha''\\\beta&\beta'&\beta''\\\gamma&\gamma'&\gamma''\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\alpha+a'\beta+a''\gamma&a\alpha'+a'\beta'+a''\gamma'&a\alpha''+a'\beta''+a''\gamma''\\b\alpha+b'\beta+b''\gamma&b\alpha'+b'\beta'+b''\gamma'&b\alpha''+b'\beta''+b''\gamma''\\c\alpha+c'\beta+c''\gamma&c\alpha'+c'\beta'+c''\gamma'&c\alpha''+c'\beta''+c''\gamma''\end{pmatrix}$$

- ❖ Soit λ un réel, alors λf est un endomorphisme de matrice

$$M_{\lambda f}=\lambda\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda a'&\lambda a''\\\lambda b&\lambda b'&\lambda b''\\\lambda c&\lambda c'&\lambda c''\end{pmatrix}.$$

Exemples : On donne : $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&-2&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

Calculons $A+B$, $2A$, $A\times B$, $B\times A$ et $C\times D$.

$A+B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\1&6\end{pmatrix}$; $2A=\begin{pmatrix}6&2\\-2&4\end{pmatrix}$; $A\times B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&13\\3&5\end{pmatrix}$;

$B\times A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7\\2&10\end{pmatrix}\neq A\times B$; $C\times D=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&-2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&1\\2&-2&2\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0\\4&4&1\\-5&1&-3\end{pmatrix}$.

Remarques :

- ✓ Le produit des matrices en général n'est pas commutatif.
- ✓ Une matrice A est dite inversible s'il existe une matrice A' telle que $A \times A' = A' \times A = I$ où I est la matrice unité.
- ✓ Le produit de deux matrices n'est pas toujours possible.
- ✓ Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombres de lignes de B.

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

A est une matrice carrée d'ordre 2 (2 lignes et 2 colonnes) ; B est une matrice non carrée (3 lignes et 2 colonnes). On a : $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 11 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$ alors que le produit $A \times B$ n'est pas possible, car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.

Exercice résolu :

On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$ où $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité.
3. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Solution :

1. **Calculons M^2 et M^3.**

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+4 & 1-1+2 & 1+1+1 \\ 1-1+4 & 1+1+2 & 1-1+1 \\ 4+2+4 & 4-2+2 & 4+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Donc } M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+2+12 & 6-2+6 & 6+2+3 \\ 4+4+4 & 4-4+2 & 4+4+1 \\ 10+4+28 & 10-4+14 & 10+4+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}. \text{ Donc } M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. **Vérifions que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$**

$$\text{On a : } M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3 \text{ . Donc } M^3 = M^2 + 8M + 6I.$$

3. **Déduisons-en que M est inversible et calculons M^{-1}.**

Nous venons d'établir que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$

D'où $M^3 - M^2 - 8M = 6I$

Soit $\frac{1}{6}M \times (M^2 - M - 8I) = I$

Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$. Donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4. ETUDE DE QUELQUES TYPES D'APPLICATIONS LINEAIRES

a) Les symétries vectorielles

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

✓ L'application $\boldsymbol{S}$ de E vers E qui à tout vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in G$, associe le vecteur $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ s'appelle la **symétrie vectorielle par rapport à F, de direction G.**

✓ $\boldsymbol{S}$ est un **automorphisme** de E.

Théorème : Soit E un espace vectoriel et f une application de E vers E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

❖ **f est une symétrie vectorielle**

❖ **f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = Id_E$** c'est-à-dire $M_f \times M_f = I$

b) Les projections vectorielles

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

✓ L'application $\boldsymbol{P}$ de E vers E qui à tout vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in G$, associe le vecteur $\vec{u}_1$ s'appelle la **projection vectorielle par rapport à F, de direction G.**

✓ $\boldsymbol{P}$ est un **endomorphisme** de E de **noyau G** et **d'image F**.

Théorème : Soit E un espace vectoriel et f une application de E vers E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

❖ **f est une projection vectorielle**

❖ **f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.**

Remarque : Une projection vectorielle n'est pas une application bijective.

c) Homothéties vectorielles

Soit E un espace vectoriel réel et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie vectorielle de rapport k, l'application h_k de E vers E qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de E associe le vecteur $k.\vec{u}$

Propriété : h_k est un automorphisme de E et pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, l'automorphisme réciproque de h_k est ${h_k}^{-1} = h_{\frac{1}{k}}$.

Exercice résolu

E désigne un espace vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}\ ;\ f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$

1. Déterminer $Kerf$.
2. Déterminer une base de Imf.
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Kerf$ et d'un vecteur de Imf.
4. **(a)** Démontrer que $f \circ f = f$.
   (b) Démontrer que $\vec{u} \in Imf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$.
   (c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Solution

1. **Déterminons $Kerf$.**

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in E$.

$$\vec{u} \in Kerf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ;\ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ainsi, $(x; y; z) = \lambda(0; -1; 1);\ \lambda \in \mathbb{R}$. Donc $Kerf =< \vec{e}_1 = -\vec{\jmath} + \vec{k} >$

2. **Déterminons une base de Imf.**

$Imf = \{\vec{v} \in E / \ \exists \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\}$. Soit $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k} \in E$; $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in E$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.

$$f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Ainsi, $(x'; y'; z') = \left(x; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) = (x; 0; 0) + \left(0; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$

Donc Imf est le plan vectoriel dont une base est $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_2 = \vec{\imath}$ et $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$

3. **Démontrons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Kerf$ et d'un vecteur de Imf.**

Posons $\begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{\jmath} + \vec{k} \\ \vec{e}_2 = \vec{\imath} \\ \vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k}) \end{cases}$; alors $\begin{cases} \vec{\imath} = \vec{e}_2 \\ \vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \end{cases}$

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in E$. Alors $\vec{u} = x(\vec{e}_2) + y\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right) + z\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right)$

$$= \frac{1}{2}(-y+z)\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + (y+z)\vec{e}_3$$

$$= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ où } \vec{u}_1 = \frac{1}{2}(-y+z)\vec{e}_1 \in Kerf \text{ et } \vec{u}_2 = x\vec{e}_2 + (y+z)\vec{e}_3 \in Imf$$

Cette écriture est unique car $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E. D'où le résultat.

4. (a) Démontrons que $f \circ f = f$.

On a : $f \circ f(\vec{\imath}) = f\big(f(\vec{\imath})\big) = f(\vec{\imath})$ car $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$;

$$f \circ f(\vec{\jmath}) = f\big(f(\vec{\jmath})\big) = f\left(\frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})\right) = \frac{1}{2}f(\vec{\jmath}) + \frac{1}{2}f(\vec{k}) = f(\vec{\jmath}) \text{ car } f(\vec{k}) = f(\vec{\jmath})$$

$$f \circ f(\vec{k}) = f\left(f(\vec{k})\right) = f\left(\frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})\right) = \frac{1}{2}f(\vec{\jmath}) + \frac{1}{2}f(\vec{k}) = f(\vec{k}) \text{ car } f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k})$$

Ainsi, $f \circ f(\vec{\imath}) = f(\vec{\imath})$, $f \circ f(\vec{\jmath}) = f(j)$ et $f \circ f(\vec{k}) = f(\vec{k})$ d'où $f \circ f = f$.

Autre méthode : Il suffit de montrer que $M_f \times M_f = M_f$ où M_f est la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

(b) Démontrons que $\vec{u} \in Imf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$.

Soit $\vec{u} \in Imf$, alors il existe $\vec{v} \in E$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$.

$f(\vec{v}) = \vec{u} \Longrightarrow f\big(f(\vec{v})\big) = f(\vec{u})$.

$\Longrightarrow f(\vec{v}) = f(\vec{u})$ car $f \circ f = f$

$\Longrightarrow \vec{u} = f(\vec{u})$. Donc $\vec{u} \in Imf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$

(c) Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de f.

f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$, de plus $\forall \vec{u} \in Imf,\ f(\vec{u}) = \vec{u}$.

Donc, f est une projection vectorielle sur Imf et de direction $Kerf$.

TRAVAUX DIRIGES

Classe: **Tc**		
Chapitre 8	**Transformations complexes**	Nombre de périodes : 3 **Prof : OUAFEU PAULIN**

Objectifs pédagogiques :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

-Définir et reconnaitre une similitude directe

-Déterminer les éléments caractéristiques des transformations complexes

- Déterminer l'écriture complexe et l'expression analytique d'une transformation complexe

I. Isométries du plan complexe

Activité d'apprentissage :

Le plan étant muni d'un repère (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) , On définit les affixes de M et M' par $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Soit A un point d'affixe a . Répondre aux questions ci-dessous en illustrant graphiquement.

1) Si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, exprimer z' en fonction de z et $z_{\vec{u}}$
2) Si A est le milieu de [MM'], exprimer z' en fonction de z et a.
3) Si M et M' sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{\imath}$), exprimer z' en fonction de z.
4) Si M et M' sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{\jmath}$), exprimer z' en fonction de z.
5) Supposons que AM= AM' et mes $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}) = \theta$ en radian
   a/ Exprimer arg $(\frac{z'-a}{z-a})$ en fonction de θ puis calculer $|\frac{z'-a}{z-a}|$
   b/En déduire la forme exponentielle de $\frac{z'-a}{z-a}$
   c/ En déduire l'expression de z' en fonction de z tel que M' soit l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ.

1) Translation :

a/Définition :

On appelle translation du plan complexe de vecteur $\vec{u}$, toute application du pan vers le plan qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b/Ecriture complexe :

L'écriture complexe d'une transformation du plan complexe dont l'image d'un point M d'affixe z est un point M' d'affixe z' est l'expression de z' en fonction de z. Celle de la translation du plan complexe de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est $z' = z + b$.

Exemple : Soit un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2+3i$, déterminer l'affixe du point A d'affixe $2+5i$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2) Symétries :

a/ Symétrie centrale :

Une symétrie de centre Ω est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe un point M' d'affixe z' tel que Ω soit le milieu du segment [MM'].Son écriture complexe est $z' = -z + 2a$

b/ Symétries orthogonales par rapport aux axes du repère :

L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{i}$) est z' = $\overline{z}$

L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{j}$) est z' = - $\overline{z}$

3) Rotation :

Une rotation de centre Ω d'affixe α , d'angle θ est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe un point M' d'affixe z' tel $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta$. Son écriture complexe est z' = $e^{i\theta}$(z-α) +α

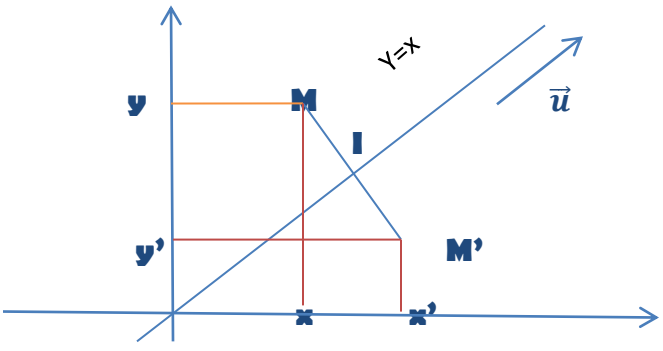
Exercice d'application :

1) Soit un point A d'affixe $2+3i$, déterminer les affixes de B = $S_{(O,\vec{i})}$(A) , C = $S_{(O,\vec{j})}$(A) , $D = S_{(O,\vec{i})}$ o $S_{(O,\vec{j})}$(A) et E =r (A, $\frac{\pi}{3}$) (B)

2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$, déterminer l'écriture complexe et l'expression analytique de $S_{(D)}$

Solution :

2)



Soit M et M' tels que $S_{(D)}$(M)=M', soit I le milieu de [MM'], $\vec{u}\binom{1}{1}$ un vecteur directeur de (D)

On a $\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = x_I \\ \frac{y+y'}{2} = y_I \end{cases}$ et $\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$

D'où $x + x' = y + y'$ et $(x' - x) + (y' - y) = 0$ car I ϵ (D)

D'où le système suivant $\begin{cases} x + x' - y - y' = 0 \\ x' - x + y' - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' - 2y = 0 \\ 2x - 2y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

On a alors $z' = x' + iy' = y + ix = i(x - iy) = i\,\overline{z}$

Donc on a z' = $i\,\overline{z}$

II. Similitudes directes :

Activité d'apprentissage :

Soit Ω un point du plan d'affixe α , k un nombre réel non nul, θ la mesure en radian d'un angle orienté. Le plan étant muni d'un repère (O,$\vec{i},\vec{j}$) , On définit les affixes de M et M' par $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) Si $\overrightarrow{\Omega M'}$ = k $\overrightarrow{\Omega M}$, exprimer z' en fonction de z.
2) Soit M_1 un point d'affixe z_1, Supposons que k> 0; M_1 = r(Ω ;θ) (M) et M' = h(; Ω k) (M_1)
   a/ Exprimer z_1 en fonction de z , puis z' en fonction de z_1.
   b / En déduire l'expression de z' en fonction de z.
   c / En déduire l'expression analytique de h o r.

1) Homothétie :

Une homothétie de centre Ω d'affixe α et de rapport k est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe un point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\Omega M'}$ = k $\overrightarrow{\Omega M}$.

Son écriture complexe $z' = k(z - \alpha) + \alpha$

Exemple :

Soit B un point d'affixe $-8 + 9i$, A un point d'affixe $2i$; déterminer l'affixe du point B' image de B par l'homothétie de centre A, de rapport 7 .

2) Similitude directe

Une similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exemple : hot ; hor ; $h\ o\ S_{(D)}$

Remarque: Lorsque cette isométrie est un déplacement, on parle de similitude directe. C'est une transformation du plan qui conserve la mesure des angles orientés et multiplie les distances par un réel positif.

NB : Dans ce cours nous étudierons la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre. En général, $hor = roh$

L'écriture complexe d'une similitude directe de centre Ω d'affixe α , d'angle θ et de rapport $k > 0$ est $z' = k\, e^{i\theta}(z - \alpha) + \alpha$. On note S(Ω, θ, k).

Exemple:

Soit B un point d'affixe $-8 + 9i$, A un point d'affixe $2i$; déterminer l'affixe du point B' image de B par la similitude directe de centre A, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Propriétés :

P_1 : Toute similitude directe est une bijection et la bijection reciproque de la similitude directe de centre , de rapport k et d'angle θ est la similitude directe de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$, d'angle $-\theta$

P_2 : La composée de deux similitudes directes $S_1\ et\ S_1$ est une similitude directe, de rapport $k_1 k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

P_3 : Si une similitude directe transforme un point A en A' et un point B en B', alors son rapport est k= $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle est θ = mes $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$

P_4 : Toute similitude multiplie les aires par k^2

3) Caractérisation d'une similitude directe

Activité d'apprentissage :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe S de centre Ω d'affixe α , d'angle θ et de rapport $k > 0$ est $z' = k\, e^{i\theta}(z - \alpha) + \alpha$

1) Déterminer deux complexes a et b tels que $z' = a\, z + b$
2) En déduire $|a|$ et un argument de a.
3) On Suppose que $z' = z$, déterminer l'affixe du point invariant par S

Propriétés :

Soit f une transformation complexe d'écriture complexe $z' = a\, z + b$; $a \in \mathbb{C}^*\ et\ b \in \mathbb{C}$

P_1 : L'écriture complexe d'une similitude directe est sous la forme $z' = a\, z + b$.

P_2 : Si $a = 1$ alors f est une translation dont l'affixe du vecteur est b.

P_3 : Si $a = -1$ alors f est une symétrie de centre Ω d 'affixe $\frac{b}{2}$.

P_4 : Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1 ; -1\}$ alors f est une homothétie de rapport $k = a$ et de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

P_5 : Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1 ; -1\}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation d'angle θ de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

P_6 : Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1 ; -1\}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe d' angle $\theta = arg\,(a)$, de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $k=|a|$

P_7 : L'expression analytique d'une similitude directe est sous la forme $\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + by + c' \end{cases}$

Exemple : Soit les transformations complexes f , g , h et t d'écritures complexes respectives

$$z' = -iz + 4 - 2i \;\; ; \;\; z' = (2 + 2i)\, z + 3i \; ; \; z' = 5z - 4 + \frac{1}{2}i \;\; ; \;\; z' = z + 8 - 2i$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f, g, h \; et \; t$.

Exercice d'application 1:

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que

$$Z' = (1 + i\sqrt{3})Z - 5i\sqrt{3}$$

1- Déterminer l'affixe de l'unique point invariant Ω par f.

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

3- Déterminer l'expression analytique de f.

4- Déterminer et construire l'image par f de la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

5- Soit le point A d'affixe $-1 + 3i$ et B le point d'affixe -3. Déterminer $f(A) \; et \; f(B)$, puis la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)})$ et la distance $f(A)f(B)$.

Exercice d'application 2 :

On donne les points M, N , P et Q d'affixes respectifs $2 + 3i \; ; \; -5 + i \; ; \; 2i \; et$ **4** ,soit h la transformation du plan dans le plan qui transforme M en P et N en Q.

1. Déterminer l'écriture complexe de h
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h .

Exercice d'application 3 :

Le plan complexe est munit d'un repère orthonormé (o,$\vec{u},\vec{v}$)

1) a .Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre D d'affixe $5-3i$ et de rapport 2.

b . Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

c . Montrer que l'écriture complexe de $h\,o\,r$ est $z' = (1-\sqrt{3}i)\,z + 5\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}$.

d. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h\,o\,r$.

2) Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$.

On donne A$\binom{-4}{5}$ et B tel que $z_B = -7i$

a. Déterminer l'écriture complexe de f.

b. Quelle est la nature de f ?

c. Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

Exercice d'application 4 :

A et C sont deux points distincts du plan. Soit (C) le cercle de diamètre [AC] et O le centre de (C) ; B un point du cercle (C) distinct des points A et C ; D le point tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; G le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

1/ a. Faire une figure

b. Montrer que les points O , D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

c. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S de centre C transformant B en M.

2/ Dans cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$) choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1. Soit E le point tel que le triangle ACE soit équilatéral direct.

a. Calculer l'affixe du point E et construire le point E.

b. Soit σ la similitude directe d'écriture complexe z'= $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Montrer que σ est la transformation réciproque de S.

c. Soit E' = σ (E) . Montrer que l'affixe de E' est - $\frac{1}{2}$ + i $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d. Montrer que E' ∈ (C).

CHAPITRE : LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. OBJECTIFS

A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de :

- Appliquer les propriétés analytiques et algébriques de la fonction logarithme népérien ;
- Résoudre les équations et inéquations comportant ln ;
- Etudier une fonction ln.

2. ACTIVITE PREPARATOIRE

Activité : Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

Avec nos connaissances actuelles sur le calcul des primitives, trouvez une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$

Solution :

$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{(1-1)x^{1-1}}+c\ (avec\ c\in\mathbb{R})$

$=-\frac{1}{0}+c\ (impossible)$

On ne peut pas trouver une primitive de f sur $]0;+\infty[$ avec nos connaissances actuelles. La fonction f étant continue sur$]0;+\infty[$, il existe une fonction dont la dérivée est $\frac{1}{x}$. Cette fonction est appelée **fonction logarithme népérien.**

3. DEFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique fonction f, définie et dérivable sur]0 ; +∞ [et vérifiant $f(1)=0$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}$. ln est la primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur]0, +∞ [qui s'annule en 1.

$$\forall x>0,\ lnx=\int_1^x\frac{1}{t}dt$$

4. PROPRIETES ALGEBRIQUES ET ANALYTIQUES

4.1. Propriétés algébriques

$\forall\, a > 0\ et\ b > 0, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$

$\forall\, a > 0, \ln\frac{1}{a} = -\ln(a).$

$\forall\, a > 0\ et\ b > 0, \ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b).$

$\forall\, a > 0\ et\ n \in \mathbb{Q}, \ln(a^n) = n\ln(a).$

$\forall\, a > 0, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$

NB : Pour tout réel x, $\boldsymbol{\ln(e^x) = x}$. Pour tout réel x strictement positif, $\boldsymbol{e^{\ln x} = x}$

EXERCICE D'APPLICATION

Simplifier les expressions suivantes : $A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$; $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$; $C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$; $D = \ln e^3 - 2(3\ln\sqrt{e} + \ln e^{3/4})$

4.2. Propriétés analytiques

• La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur]0 ; +∞ [et

$\forall\, x > 0, (\ln x)' = \frac{1}{x}$

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞ [

• Limites aux bornes du domaine :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

• Théorème de croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Nombre dérivé en 1 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

5. RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

$\forall\, a \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln(x) = a$ a une solution et une seule.

$\forall\, a > 0$ et $\forall\, b > 0$ $(\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b)$. $\forall\, x > 0$ et $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

$\forall\, a > 0$ et $\forall\, b > 0$, $(\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b)$. $\forall\, x > 0$ et $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a$.

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$a)$ $\ln(3x+1) = \ln(x-4)$

$b)$ $\ln(x^2-5) = \ln x + 2\ln 2$

$c)$ $\ln(x+2) - \ln 5 = 2\ln 3 - \ln(x-2)$

$g)$ $\ln(2x-1) \leq \ln(-x+2)$

$d)$ $2(\ln x)^3 - 4\ln x^2 = -4 + (\ln x)^2$

$e)$ $\ln(x^2-4) > \ln(4x-1)$

$f)$ $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 \leq 0$

6. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME

- Domaine de définition de la fonction logarithme népérien $D_f =]0; +\infty[$
- Quelques limites avec « ln »

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\ln x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

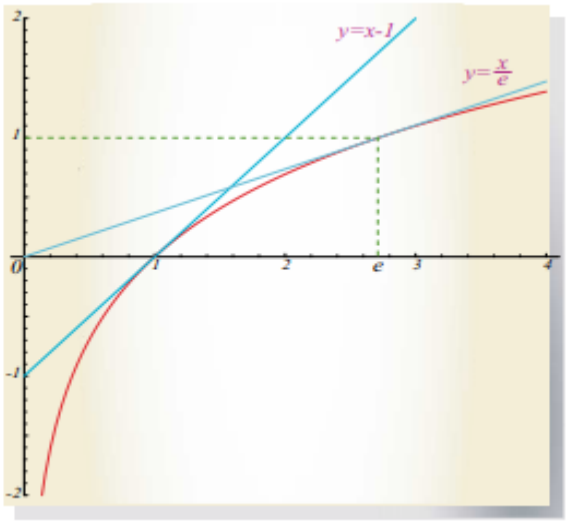
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. $\forall\, x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
  Donc la fonction $x \mapsto \ln x$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.
- Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Conséquence : *il existe un nombre et un seul noté* ***e*** *tel que* $\ln e = 1$. *Une valeur approchée de* ***e*** *est* $e \sim 2{,}71828$

- Représentation graphique



Remarque :

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ est la droite d'équation $y = x - 1$

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x = e$ est la droite d'équation $y = \frac{x}{e}$ (cette droite passe par le point O)

7. LOGARITHME ET FONCTIONS COMPOSEES

7.1. Dérivée logarithmique

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que U garde un signe constant sur I et $\forall\, x \in I, U(x) \neq 0$

On suppose que U est positive sur I alors, la fonction $\ln U$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I$,

$(\ln U)'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Si U est négative sur I alors $-U$ est positive sur I et $\forall\, x \in I$, $(\ln(-U))'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Ainsi, $\forall\, x \in I, (\ln|U|)'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

7.2. Primitives de $f: x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$

Les primitives de $f: x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$ sont les fonctions $\boldsymbol{F: x \to \ln|U(x)| + k\ (k \in \mathbb{R})}$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

1) Déterminer une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ $\qquad I =]-\infty; +\infty[$

b) $f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}}{x^2-5x+6}$ $\qquad I =]-\infty; 2[$

2) Déterminer la primitive de f sur $I =]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en $x_0 = 2$

$$f(x) = 3 - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = -x + 1 + \ln(-2x)$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f*
2) *Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition*
3) *Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations*
4) *Ecrire une équation de la tangente à $(C)_f$ au point d'abscisse $x_0 = -\frac{1}{2}$*
5) *Justifier que (D) : $x = 0$ est asymptote verticale à $(C)_f$*
6) *Tracer $(C)_f$*

Exercice 3 :

On considère la fonction : $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine
b) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à $[0; +\infty[$
c) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations
d) construire $(C)_f$

7.3. Autres fonctions logarithmiques

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\boldsymbol{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}}$ est appelé **logarithme de base a** $(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$

La fonction log est strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Remarque : Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée $\mathbf{log_{10}(x)}$ est définie par : $\mathbf{log_{10}(x)} = \frac{\mathbf{\ln x}}{\mathbf{\ln 10}}$

- **En chimie :** Le pH d'une solution aqueuse est égal à : $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en $mol.L^{-1}$).
  Exemple : La concentration en ions H_3O^+d'une solution dont le pH est égal à 7 a pour logarithme décimal −7 elle vaut donc 10^{-7}. Si le pH augmente de 1, il devient égal à 8, le logarithme de la concentration diminue de 1, il devient −8, la concentration est égale à 10^{-8}. Ainsi, si le pH augmente de 1, la concentration est divisée par 10 et, si le pH diminue de 1, la concentration est multipliée par 10.
- **Intensité de certains phénomènes naturels** : L'intensité d'un séisme, la luminosité d'une étoile, l'intensité d'un son sont des grandeurs pour lesquelles les unités de mesures utilisent les logarithmes décimaux. En effet, on a observé que nos sens perçoivent un signal proportionnellement au logarithme de son intensité. L'exemple le plus quotidien est le décibel qui sert à mesurer l'intensité du son de nos baladeurs…

NB : Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimale sont analogues à celles de la fonction logarithme népérien.

T.A.F A LA MAISON

Activité 1

Partie A : *Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$*

1) *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$*
2) *Calculer $g'(x)$. Dresser, alors, le tableau de variations de g.*
3) *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β. $(\alpha < \beta)$*
4) *Que vaut β ? Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.*
5) *Donner le signe de $g(x)$ en fonction de x.*

Partie B : *Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2(\ln(x) - 1) + x$*

1) *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$*
2) *Montrer que : $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}près.*
3) *Montrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = x.g(x)$*
4) *Dresser le tableau de variation de f*

Activité 2 :

Soient f la fonction définie sur $I =]4;+\infty[$ par : $f(x) = -x + 3 + \frac{1}{2}\ln(\frac{x-4}{x-2})$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Étudier les limites de f aux bornes de I.

Montrer que : $f'(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-4)(x-2)}$

Dresser le tableau de variation de f.

Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 3$. Etudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D). Représenter sur un même graphique la courbe (C) et de la droite (D).

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n \ln x$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ On note(C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) *Montrer que f_n est continue en 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$*
2) *Dresser le tableau de variation de f_n.*
3) *Sur un même graphique, tracer $(C_1), (C_2)$ et (C_3)*
4) *Démontrer que toutes les courbes (C_n), passent par 2 points fixes O et A.*
5) *Démontrer que toutes les courbes admettent en A la même tangente.*

Activité 4

On considère la fonction f définie sur $]-2; 1[$ par $f(x) = \ln(\frac{x+2}{1-x})$

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

d) Tracer sa courbe représentative.

Activité 5

Partie I : *On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$*

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$) sur $]0; +\infty[$

Partie II : *On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique : 2 cm)*

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera

3) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que

$0{,}31 < \alpha < 0{,}35$

6) Représenter succinctement la courbe (C) et les droites (T) et (Δ)

Activité 6

Partie I : *La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$*

1) Etudier le sens de variations de f. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $l \in]n; n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II : *La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$*

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout > 0 , $g'(x) = xf(\frac{1}{x})$

3) Montrer que $(l) = \frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Activité 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2(\ln x - \frac{3}{2})$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. f est-elle dérivable en 0 ?

2) Etudier le sens de variations de f et étudier la limite de f en $+\infty$

3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$

4) Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de T .

5) Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6) Soit $\in]0; e]$. On pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0; e]$

b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives ($x = 0$) et ($x = e$)

Activité 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\ln(|x|)$

1) Donner le domaine de définition D de la fonction f ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier leslimites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout x de D la dérivée de f (si elle existe !)
2) On étudie, pour cette question, le cas > 0 . Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda) = 0$; montrer que l'on a ; $0{,}3 \leq \lambda \leq 0{,}4$ (on pourra utiliser le fait que le réel e tel que $\ln e = 1$ vérifie $2{,}5 \leq e \leq 3$

3) En déduire le tableau de variations de f (sur D)

4) Déterminer une primitive de g définie par $g(x) = \ln(x)$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille

Classe: T_C		
Chapitre 10	Applications affines et isométries	Nombre de périodes : 5 **Prof : OUAFEU PAULIN**

Objectifs pédagogiques :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

-Reconnaitre les diverses isométries et savoir décomposer simplement certaines isométries

-Etudier la composition des isométries

-Savoir caractériser une isométrie connaissant ses points invariants

-Etudier les isométries selon la manière dont elles transforment les angles orientés.

- Définir une application affine et utiliser son application vectorielle associée.

-Déterminer les éléments caractéristiques d'une affinité du plan

I- Composition d' isométries :

1) Definition:

Une isométrie f est une transformation du plan qui conserve les distances.

C'est-à dire, $\forall A, B \in P$, f(A)f(B)= AB

Exemple : Symétrie Orthogonale, Rotation, Translation, Symétrie Centrale.

Contre-exemple : Une homothétie de rapport k$\neq \pm 1$ n'est pas une isométrie car elle multiplie les distances par $|k|$

2) Composition de symétries orthogonales ou réflexion

a) D'axes parallèles

Activité d'apprentissage 1 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites parallèles, A un point de (D_1) et B son projeté orthogonal sur (D_2) , (D_1) et (D_2) divisent le plan en trois domaines. Soient M et N deux points du voisinage de (D_2) appartenant au domaine du plan délimité par (D_2) et n'étant pas compris entre (D_1) et (D_2).

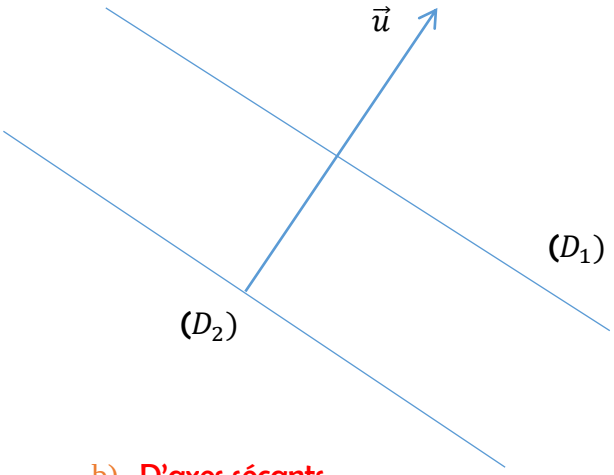
1) Construire M ' = $S_{(D_1)} oS_{(D_2)}$(M) et N ' = $S_{(D_1)} oS_{(D_2)}$(N) ;
2) Comparer $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ puis donner leur expression en fonction de $\overrightarrow{BA}$;
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(D_1)} oS_{(D_2)}$.

Propriété 1 :

Soient (D) et (D') deux droites parallèles. O un point de (D) et O' son projeté orthogonal sur (D'). La composée $S_{(D)}$ o $S_{(D')}$ des symétries $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O'O}$.

$$S_{(D)} \text{ o } S_{(D')} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$$

Conséquence : Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul peut être décomposée comme composée de deux symétries orthogonales(réflexions) d'axes (D_1) et (D_2) telles que d$((D_1), (D_2))=\frac{||\vec{u}||}{2}$; (D_1) //(D_2) , le sens de (D_2) vers (D_1) coincide avec celui de $\vec{u}$ et $\vec{u}\perp (D_1)$. On a alors $t_{\vec{u}} = S_{(D_1)}\, oS_{(D_2)}$



b) **D'axes sécants**

Activité d'apprentissage 2 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point Ω. On pose $\alpha = mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})$, soient M et N deux points du voisinage de (D_2) dans le domaine qui n'est pas compris entre (D_1) et (D_2) .

1) Construire M ' = $S_{(D_1)}\, oS_{(D_2)}$(M) et N ' = $S_{(D_1)}\, oS_{(D_2)}$(N)
2) Comparer $mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega N};\overrightarrow{\Omega N'}})$ puis donner leur expression en fonction de α .
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(D_1)}\, oS_{(D_2)}$.

Propriété 2 :

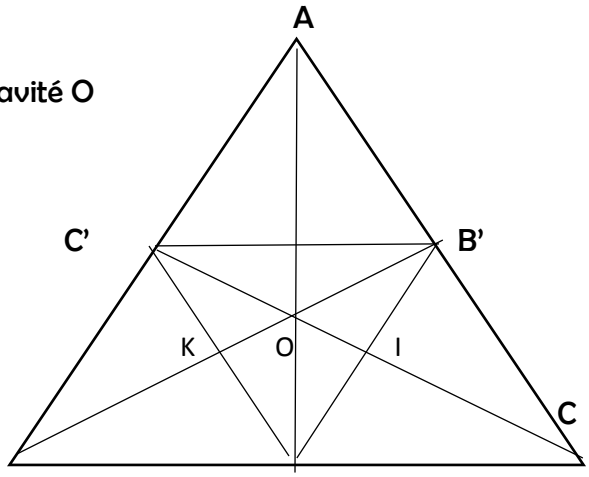
Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. La composée $S_{(D)}$ o $S_{(D')}$ des symétries orthogonales $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{u'},\vec{u}})$.

$$S_{(D)} \text{ o } S_{(D')} = r\,(O;\, 2(\widehat{\overrightarrow{u'},\vec{u}}))$$

Conséquence: Toute rotation de centre Ω et d'angle α peut-être décomposée comme composée de deux symetries orthogonales d'axes (D_1) et (D_2) telles que $(D_1) \cap (D_2) = \{\Omega\}$, mes ($(\widehat{D_2};\ D_1)$) = $\frac{\alpha}{2}$. On a alors r(Ω ;α) = $S_{(D_1)}\, oS_{(D_2)}$

Exemple 1:

ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O



$S_{(AB)} \circ S_{(A'B')} = t_{2\overrightarrow{IC'}} = t_{\overrightarrow{CC'}}$

$S_{(A'C')} \circ S_{(AC)} = t_{2\overrightarrow{BK}} = t_{\overrightarrow{BB'}}$

$S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r(A; 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})) = r(A; \frac{2\pi}{3})$

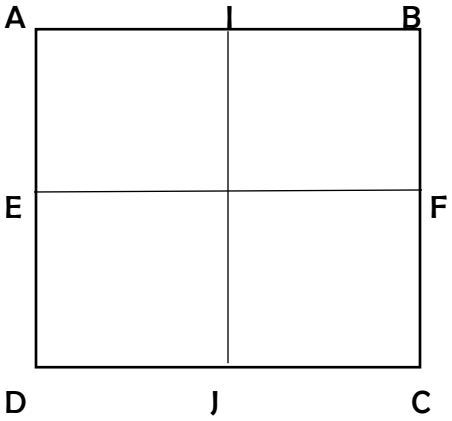
$S_{(AB)} \circ S_{(A'C')} = r(C'; 2(\widehat{\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}})) = r(C'; -\frac{2\pi}{3})$

$S_{(BB')} \circ S_{(AC)} = r(B'; 2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BB'}})) = r(B'; 2x(-\frac{\pi}{2})) = r(B'; -\pi) = r(B; \pi) = S_B$

$S_{(A'C')} \circ S_{(OA)} = r(A'; 2(\widehat{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}})) = r(A'; 2x(\frac{\pi}{6})) = r(A'; \frac{\pi}{3})$

Exercice : Déterminer la droite (D) telle que : $S_{(AA')} \circ S_{(D)} = t_{\overrightarrow{BC}}$

Exemple 2: Soit ABCD est un carré



$t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(IJ)} \circ S_{(AD)}$

$= S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$

$t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(EF)} \circ S_{(AB)}$

$= S_{(DC)} \circ S_{(EF)}$

$r(B, \frac{-\pi}{2}) = S_{(BD)} \circ S_{(BC)} = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$.

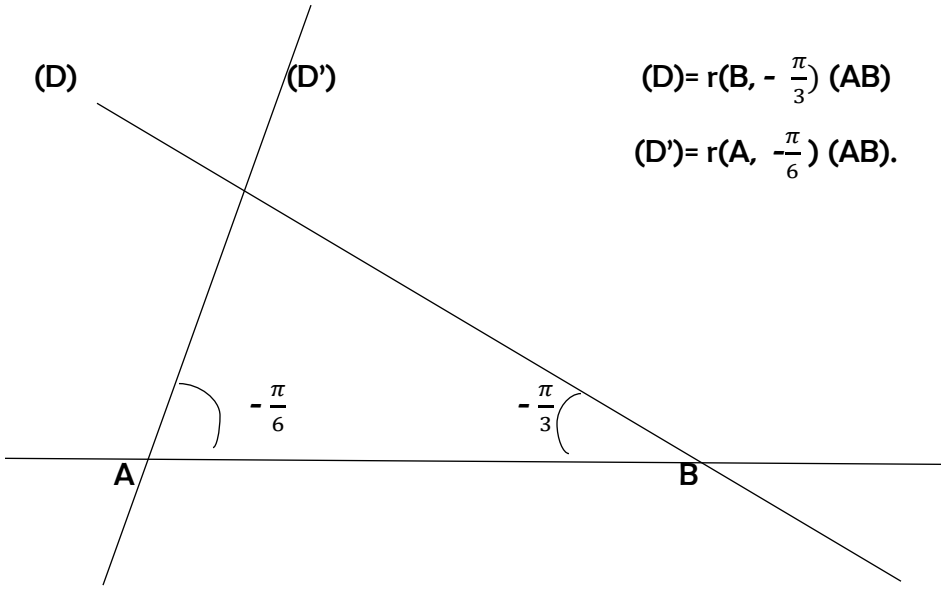
Exercice d'application :

A et B sont deux points distincts.

1- Déterminer et construire la droite (D) tels que r(B, - $\frac{2\pi}{3}$) = $S_{(D)}$ o$S_{(AB)}$

2- Déterminer et construire le point (D') tels que r'(A, - $\frac{\pi}{3}$) = $S_{(AB)}$ o $S_{(D')}$

Solution :



(D)= r(B, - $\frac{\pi}{3}$) (AB)

(D')= r(A, - $\frac{\pi}{6}$) (AB).

3- Composition d'une symétrie orthogonale et d'une translation

a) Cas où le vecteur de translation est normal à la droite

Activité d'apprentissage 1 :

Soit (D) une droite, $\vec{u}$ un vecteur normal à (D)

1) Déterminer une droite (D') telle que $t_{\vec{u}} = S_{(D)}\, oS_{(D')}$
2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(D)} o t_{\vec{u}}$

Propriété :

Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul . Si $\vec{u}$ est normale à (D), alors $t_{\vec{u}}$ o $S_{(D)}$ est une symétrie orthogonale,

b) Cas où le vecteur de translation n' est pas normal à la droite : Symétrie glissée

Définition :

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On appelle symétrie glissée d'axe (D), la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a : $t_{\vec{u}}$ o$S_{(D)}$ = $S_{(D)}$ o $t_{\vec{u}}$

Remarque : Une symétrie glissée n'admet pas de point invariant.

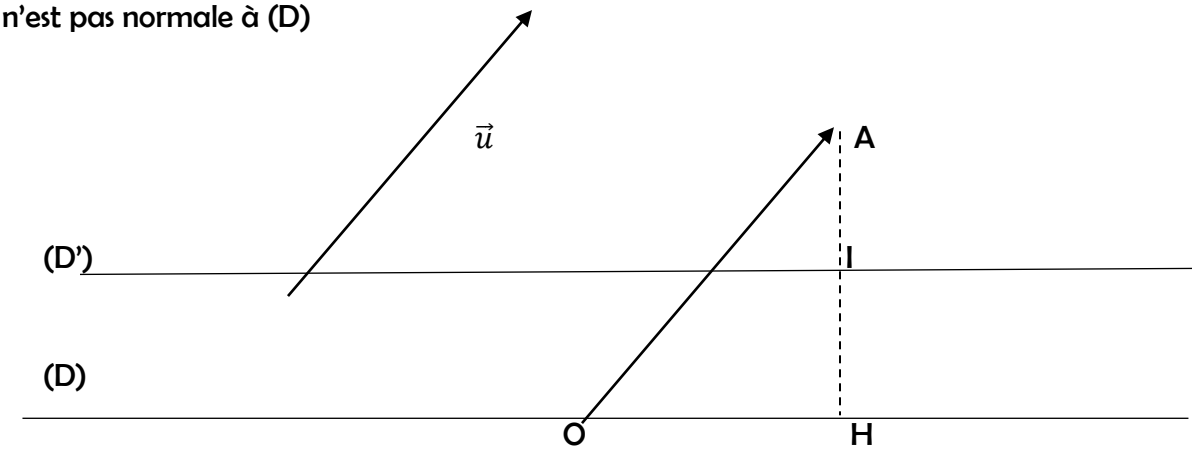
Activité d'apprentissage 2 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et (D) une droite. Soit O un point de (D), A un point du plan tel que $\vec{u}$ = $\overrightarrow{OA}$; Soit H le projeté orthogonal de A sur (D) ; soit (D') la médiatrice de [AH].

1) Justifier que $S_{(D')} \, o S_{(D)} = t_{\overrightarrow{HA}}$
2) Justifier que $t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{OH}} o t_{\overrightarrow{HA}}$
3) En déduire que $t_{\vec{u}} o \, S_{(D)} = t_{\overrightarrow{OH}} \, o S_{(D')}$
4) Quelle est la nature de $t_{\vec{u}} o \, S_{(D)}$.

Solution :

$\vec{u}$ n'est pas normale à (D)



O∈ (D) ; A ∈ $(\mathcal{P})$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. H est le projeté orthogonal de A sur (D) et I milieu de [AH]

1) $S_{(D')} \, o \, S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{HI}} = t_{\overrightarrow{HA}}$;

2) $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \vec{u}$ d'où $t_{\overrightarrow{OH}} o t_{\overrightarrow{HA}} = t_{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}} = t_{\vec{u}}$

3) $t_{\vec{u}} \, o \, S_{(D)} = t_{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}} \, o \, S_{(D)} = t_{\overrightarrow{OH}} o t_{\overrightarrow{HA}} \, o \, S_{(D)} = t_{\overrightarrow{OH}} \, o \, S_{(D')} \, o \, S_{(D)} \, o \, S_{(D)} = t_{\overrightarrow{OH}} \, o \, S_{(D')}$

4) Donc $t_{\vec{u}} o \, S_{(D)}$ est la symétrie glissée d'axe (D') et de vecteur $\overrightarrow{OH}$

Propriété :

Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul . Si $\vec{u}$ n'est pas normale à (D), alors $t_{\vec{u}} o \, S_{(D)}$ est une symétrie glissée.

4- Composition de rotations et de translations

a) Composée de rotations

Propriétés :

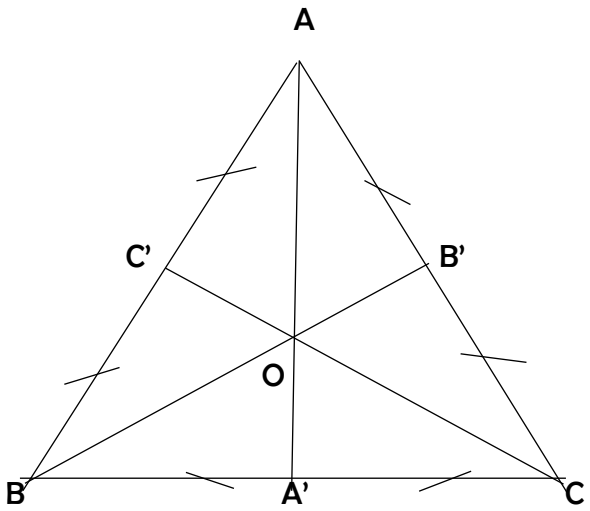
P_1 :Soient r et r' deux rotations de même centre Ω et d'angles respectifs α et α'.

- Si α+α' ≠ 2kπ ; $k \epsilon \mathbb{Z}$, alors r ₒ r' est une rotation de centre Ω d'angle α+α'
- Si α+α = 2kπ; $k \epsilon \mathbb{Z}$, alors r ₒ r' est l'application identité

P_2 :Soient r et r' deux rotations de centres distincts Ω et Ω', d'angles respectifs α et α'.

- Si α+α' ≠ 2kπ ; $k \epsilon \mathbb{Z}$, alors r ₒ r' est une rotation de centre à déterminer et d'angle α+α'
- Si α+α = 2kπ; $k \epsilon \mathbb{Z}$, alors r ₒ r' est une translation dont le vecteur est à déterminer.

Exemple : ABC est un triangle équilatéral



- $r(C, \frac{\pi}{3}) \circ r(A, -\frac{\pi}{3})$ est une translation t. ; t(A) =$r(C, \frac{\pi}{3})$ (A) =B ⇒ t =$t_{\overrightarrow{AB}}$

- $r(B, \frac{2}{3}\pi) \circ r(C, \frac{2}{3}\pi) = S_{(BA)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(CA)} = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

D'où $r(B, \frac{2}{3}\pi) \circ r(C, \frac{2}{3}\pi)$ est une rotation de centre A et d'angle α =$\frac{4}{3}\pi$

- $r(A, \frac{2}{3}\pi) \circ r(B, \frac{\pi}{3})$ est une rotation d' angle π ou une symétrie centrale.

$r(A, \frac{2}{3}\pi) \circ r(B, \frac{\pi}{3}) = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BB')} = S_{(AC)} \circ S_{(BB')}$

$S_{(AC)} \circ S_{(BB')}$ est une rotation de centre B' et d'angle π ou une symétrie de centre B'.

Remarque :

Pour déterminer la composée de $r(B, \beta) \circ r(A,\alpha)$ de deux rotations de centres distincts A et B, on peut utiliser les droites (D) et (D') telles que $r(B, \beta) = S_{(D')} \circ S_{(AB)}$ et $r(A,\alpha) = S_{(AB)} \circ S_{(D)}$

On aura $r(B, \beta) \circ r(A, \alpha) = S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

b) Composée d'une rotation et d'une translation

Propriété :

Soit r une rotation d'angle non nul α et t une translation, $t \circ r$ est une rotation d'angle α. $r \circ t$ est aussi une rotation d'angle α. En générale $t \circ r \neq r \circ t$.

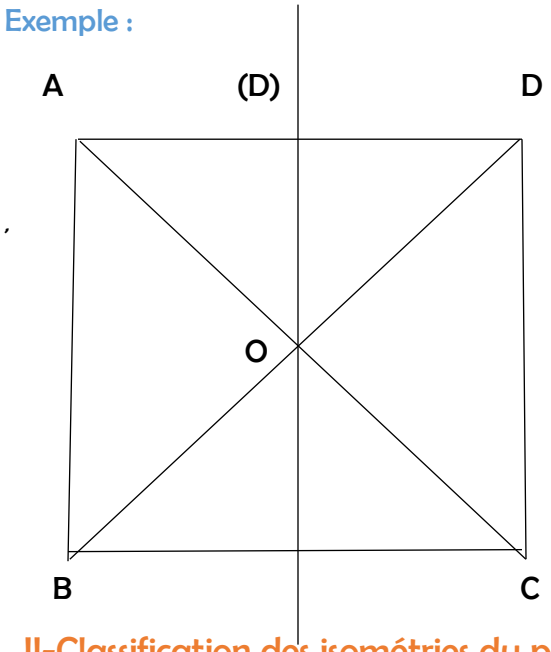
NB : Pour déterminer la composée $t_{\vec{u}} \circ r$ (O, α) d'une rotation et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul, on peut utiliser les droites (D), (D'') et (D') telles que :

- (D) est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$
- $t_{\vec{u}} = S_{(D)} \circ S_{(D')}$ et r (O, α) = $S_{(D')} \circ S_{(D'')}$

On a : $t \circ r = S_{(D)} \circ S_{(D'')}$.

Respectivement : r (O, α) ∘ $t_{\vec{u}}$ r= $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ et $t_{\vec{u}} = S_{(D')} \circ S_{(D'')}$

Exemple :



$r(A,\frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CB}}$ est un quart de tour direct

$= S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(D)}$

$= S_{(AC)} \circ S_{(D)}$ or $(AC) \cap (D) = \{O\}$

D'où $r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CB}} = r(O;\frac{\pi}{2})$

II-Classification des isométries du plan

1) Classification à l'aide des points invariants

a-Décomposition d'une isométrie

Théorème : Soit f une isométrie du plan et A un point. Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telles que g(A) = A et f = t ∘ g.

b-Isométrie laissant invariant trois points non alignés

Propriété :

Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identité.

Preuve :

Soit f une isométrie laissant invariant trois points A, B et C non alignés. Soient M et M'tels que M'=f(M). On a : MA=M'A, MB =M'B et MC=M'C. A,B et C appartient à la médiatrice [MM'] ⇒ A, B et C sont alignés (impossible). D'où M=M' ⟺ f(M)= M.

c-Isométrie laissant invariant deux points distincts

Propriété :

Une isométrie qui laissant invariant deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identité est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Preuve :

Soit f une isométrie laissant invariant deux points distincts A et B. Soit C et C' tels que C'= f(C), C ∉ (AB). On a : AC=AC' et BC=BC' d'où (AB) est la médiatrice de [CC']. Considérons l'isométrie $S_{(AB)} \circ f$ telle que $S_{(AB)} \circ f$ (A) =A

$S_{(AB)} \circ f$ (B)= B ; $S_{(AB)} \circ f$ (C)= $S_{(AB)}$ (C')= C

D' où $S_{(AB)} \circ f = idE \Leftrightarrow f = S_{(AB)}$

d-Isométrie laissant invariant un point du plan

Propriété :

Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A du plan est une rotation de centre A.

e-Conséquence

Théorème :

Toute isométrie du plan est une translation, une rotation ou symétrie orthogonale, une symétrie glissée.

2) Déplacement et antidéplacement

a- Définition

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé. On a le tableau suivant :

Isométries	Avec points invariants	Sans points invariants
Déplacement	Rotation	Translation
Antidéplacement	Symétrie orthogonale	Symétrie glissée

Remarque : Toute isométrie est soit un déplacement soit un antidéplacement

b-Composition de déplacement et antidéplacement

La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

NB : La composée de deux isométries est une isométrie.

Propriétés :

La transformation réciproque d'un déplacement est déplacement.

La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

c-Détermination d'une isométrie

Propriété 1: Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB≠ A'B' et A ≠B, il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'

Remarque :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$

Propriété 2 : Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB=A'B' et A≠ B, il existe un antidéplacement et un seul transformant A en A' et B en B'

Exercice : 2a, 2b,2c,2d et 2e

III-Applications affines

Activité d'apprentissage :

Soit f une application définie du plan P dans P. Soient A , B , C trois points quelconques du plan

1) On suppose que ,f conserve le coefficient de colinéarité , c'est-à-dire s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \alpha\ \overrightarrow{f(A)f(B)}$; soit G = bar {(A ;a) ; (B ;b) } , a + b$\neq 0$
   a) Monter que $\overrightarrow{f(A)f(G)} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{f(A)f(B)}$
   b) En déduire l'écriture de f(G) comme barycentre de f(A) et f(B), on dit que f conserve le barycentre

2) On suppose que f conserve le barycentre de deux points pondérés. Soit β un réel tel que $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB}$
   a) Montrer que f(C) = bar {(f(A) ;$1-\beta$) ; (f(B);β)}
   b) En déduire que f conserve le coefficient de colinéarité

1) Définition :

Une application affine du plan ($\mathcal{P}$) est une application de ($\mathcal{P}$) $dans$ ($\mathcal{P}$) qui conserve le coefficient de colinéarité c'est-à-dire si A,B,C et D qui ont pour images respectives A',B',C' et D' par f :

$\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{f(C)f(D)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'D'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$

Remarque: Une application affine conserve le barycentre de deux points pondérés.

- Exemples de transformations affines : Les isométries du plan, les homothéties
- Exemples d'applications affines : les projetions.

Exercice d'application

ABCD est un losange de centre O, f est l'application affine définie tel que f(A) = A ; f(B) =D et f(D) =C. Construire C' = f(C) et O' = f(O)

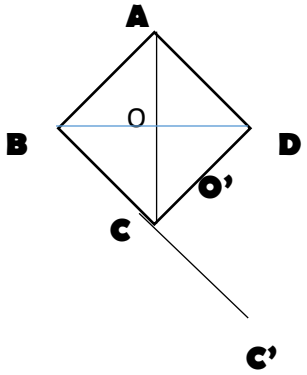
Solution :

ABCD étant un losange, alors

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{f(C)f(D)} = \overrightarrow{f(B)f(A)} \Rightarrow \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{DA}$

O étant le centre de ABCD, O est l'isobarycentre des points B et D

D'où f(O) est l'isobarycentre de f(B) et f(D) car f conserve le barycentre, c'est-à-dire O' est l'isobarycentre de D et C. On a la figure suivante :



2) Application vectorielle associée à une application affine

a- Définition :

Soit f une application affine de $(\mathcal{P})$ et φ une application vectorielle de $\mathcal{V}$ $dans$ $\mathcal{V}$ telle que pour tous points A et B du plan $(\mathcal{P})$ on a : $\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}$.$\varphi$ est appelé application vectorielle associée à f.

b-Propriétés:

$P_{1:}$ Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et pour tout $\alpha\epsilon\mathbb{R}$. $\varphi(\alpha\vec{u})=\alpha\varphi(\vec{u})$ et $\varphi(\vec{u}+\vec{v})=\varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$. On dit que φ est une application linéaire associée à f. on a $\varphi(\vec{0})=\vec{0}$

P_2 : Soit f une application du plan, f est une application affine si et seulement si f conserve le barycentre de deux points.

P_3 : La composé de deux applications affines du plan est une application affine du plan.

P_4 : La réciproque d'une transformation affine est une transformation affine.

P_5: une application affine du plan est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

P_6 : Si deux applications affines du plan coïncident en trois points non alignés alors elles sont égales.

P_7 : Une application affine du plan est bijective si et seulement si l'image d'un repère est un repère.

P_8 : Soient f une application affine et (AB) une droite

- Si f(A)= f(B) alors l'image de (AB) est {f(A)}
- Si f(A)≠ f(B) alors l'image de (AB) est la droite (f(A)f(B)) = (A'B')

P_9 : Soit f une application affine du plan $(\mathcal{P})$

- Si f est bijective alors f$(\mathcal{P})$= $(\mathcal{P})$
- Si f n'est pas bijective alors f$(\mathcal{P})$ est un singleton ou une droite

P_{10} : Soit f une transformation du plan munie d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). f est une application affine si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$ a, b, c, a', b', et c' $\in \mathbb{R}$.

P_{11} : L'image par une transformation affine du plan de deux droites strictement parallèles sont deux droites strictement parallèles.

P_{12} : Les images par une transformation affine du plan de deux droites sécantes sont deux droites sécantes.

Preuves :

$P_{1:}$ Soient A,B,C et D quatre points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}=\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\varphi(\alpha\,\vec{u})=\varphi(\alpha\overrightarrow{AB})=\varphi(\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{f(C)f(D)}$

= $\alpha\overrightarrow{f(A)f(B)}$ conservation du coefficient de colinéarité

= α φ($\overrightarrow{AB}$) =αφ($\vec{u}$)

- Posons $\vec{u}$= $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$= $\overrightarrow{BC}$; f(A)= A' ; f(B)= B' et f(C)= C'.

$\overrightarrow{A'C'}$=$\overrightarrow{A'B'}$ + $\overrightarrow{B'C'}$= $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ + $\overrightarrow{f(B)f(C)}$

= φ($\overrightarrow{AB}$) + φ($\overrightarrow{BC}$)

= φ($\vec{u}$) + φ($\vec{v}$)

$\overrightarrow{A'C'}$= $\overrightarrow{f(A)f(C)}$= φ($\overrightarrow{AC}$)= φ($\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{BC}$)

= φ($\vec{u}$+$\vec{v}$).

P_2 : En effet,

G=bar

A_1	A_2	.....	A_n
α_1	α_2	.....	α_n

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}= \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ φ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i}$) = φ($\vec{0}$)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ φ($\overrightarrow{GA_i}$)= $\vec{o}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)}= \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ f(G)= bar

f(A_1)	f(A_2)	.....	f(A_n)
α_1	α_2	.....	α_n

P_{10} : Expression analytique d'une transformation affine

O'= f(O) ; O'$\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$; φ($\vec{\imath}$)$\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$; φ($\vec{\jmath}$)$\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$; M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que M'= f(M).

On a : $\overrightarrow{O'M'}$= $\overrightarrow{f(o)f(M)}$= φ($\overrightarrow{OM}$)= φ(x $\vec{\imath}$ + y$\vec{\jmath}$)

= xφ($\vec{\imath}$)+ yφ($\vec{\jmath}$)= x(a $\vec{\imath}$ + a'$\vec{\jmath}$) +y(b $\vec{\imath}$+b'$\vec{\jmath}$)

$\Leftrightarrow$ (x' – c') $\vec{\imath}$ + (y' – c')$\vec{\jmath}$ = ax $\vec{\imath}$+ a'x$\vec{\jmath}$ +by $\vec{\imath}$ +b'y$\vec{\jmath}$

= (ax + by) $\vec{\imath}$ + (a'x +b'y)$\vec{\jmath}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - c = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une translation de vecteur -2 $\vec{\imath}$ + $\vec{\jmath}$

$\begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y - 4 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une homothétie de rapport k=-3 et de centre Ω(2 ; -1)

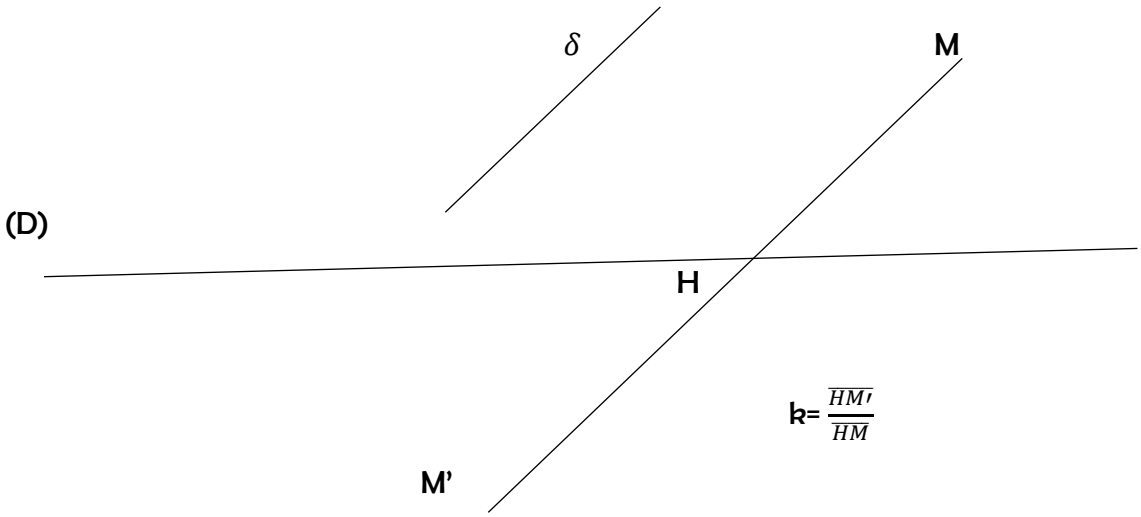
$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 5 \\ y' = 3x - 7y + 11 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une application affine.

3) Affinité du plan

a-Affinité d'axe (D), de direction δ et de rapport k

Définition :

Soient (D) une droite et δ une direction de droite distincte de celle de la droite (D) et k $\in \mathbb{R}$. On appelle affinité d'axe (D) de direction δ et de rapport k l'application f qui : a tout point M du plan associe le point M' tels que $\overrightarrow{HM'}$= k$\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur (D) suivant la direction δ.



Lorsque la direction δ est orthogonale à (D) , f est l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k.

Remarque :

- Si k= 0 alors f est la projection sur (D) suivant la direction δ
- Si k= 1 alors f est l'application identité du plan
- Si k= -1 et que la direction de (D) est orthogonale à δ alors f est la symétrie orthogonale d'axe (D).

L'ensemble des points invariants d'une affinité est son axe.

b-Expression analytique d'une affinité

Propriété :

Le plan est munie d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), l'expression analytique d'une affinité d'axe (D) d'équation y=b et de direction celle de $\vec{\jmath}$ et de rapport k est :$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$

Preuve : Soient M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et H$\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-x) \\ k(y-b) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - b = ky - kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$$

Remarque :

- Toute affinité est une application affine
- Soit f une affinité d'axe (D) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de direction celle du vecteur $\vec{v}$ et de rapport k. L'application linéaire associée à f est φ telle que φ($\vec{u}$)= $\vec{u}$; φ($\vec{v}$)= k$\vec{v}$ f est bijective si et seulement si k≠ 0.

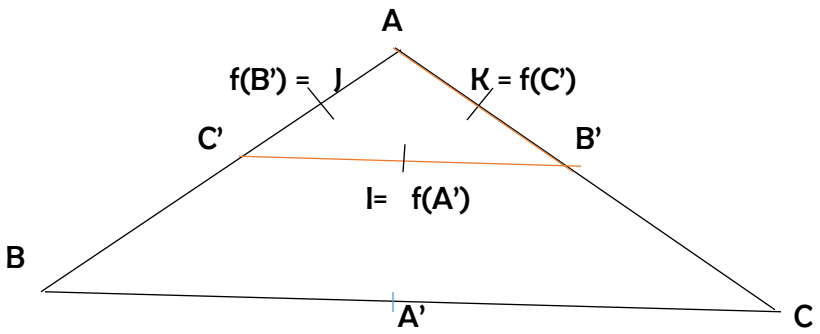
Travail à faire : exercice 3a, 3b, 3c et 3d P98.

Exercice 3a :

Soit ABC un triangle ; A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. F l'application affine définie par : f(A)= A, f(B)= B' et f(C)= C'

1- Déterminer les images par f des points A', B' et C'
2- Déterminer les images par f des droites (AA'), (BB') et (CC')
3- Déterminer l'expression analytique de f dans le repère (ABC)

Solution:



1- Images des points A', B' et C'

A' milieu de [BC] donc f(A') est le milieu de [f(B)f(C)] ⇔ f(A') est le milieu de [B'C']

B' milieu de [AC] donc f(B') est le milieu de [f(A)f(C)] ⇔ f(B') est le milieu de [AC']

C' milieu de [AB] donc f(C') est le milieu de [f(A)f(B)] ⇔ f(C') est le milieu de [AB']

Autres méthodes :

$\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A')f(B)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(C)f(B)}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{f(A')B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$ d' où $f(A') = I$

$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(C')} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)f(B)}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(C')} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$, d'où $f(C') = K$

$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)f(C)}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(B')}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$ d 'où $f(B') = J$

2- Images des droites (AA'), (BB') et (CC')

f(A)= A et f(A')= I $\Leftrightarrow$ f([AA']) = (AI)

f(B)= B' et f(B')= J $\Leftrightarrow$ f([BB']) = (B'J)

f(C)=C' et f(C')= K $\Leftrightarrow$ f([CC']) = (C'K)

3- Expressions analytiques

Soient M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère (ABC) égale à $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, M'= f(M) et φ l'application vectorielle associée à f.

$\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{f(A)f(M)}$= φ($\overrightarrow{AM}$)= φ(x$\overrightarrow{AB}$ + y$\overrightarrow{AC}$)

= xφ($\overrightarrow{AB}$) + yφ($\overrightarrow{AC}$)

= x$\overrightarrow{f(A)f(B)}$ + y$\overrightarrow{f(A)f(C)}$

= x$\overrightarrow{AB'}$ + y$\overrightarrow{AC'}$

= x$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ + y$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$= $\frac{y}{2}\overrightarrow{AB}$ + $\frac{x}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où $\begin{cases} x' = \frac{y}{2} \\ y' = \frac{x}{2} \end{cases}$ car $\overrightarrow{AM'}$= x'$\overrightarrow{AB}$ + y'$\overrightarrow{AC}$

Exercice 3b : P98

($\mathcal{D}$) et (Δ) sont deux droites sécantes en un point O. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M on associe le point M' tels que :

- si M$\in$ (Δ), alors M'= M

- si M$\notin$ (Δ), alors le milieu [MM'] appartient à (Δ) et [MM'] // ($\mathcal{D}$)

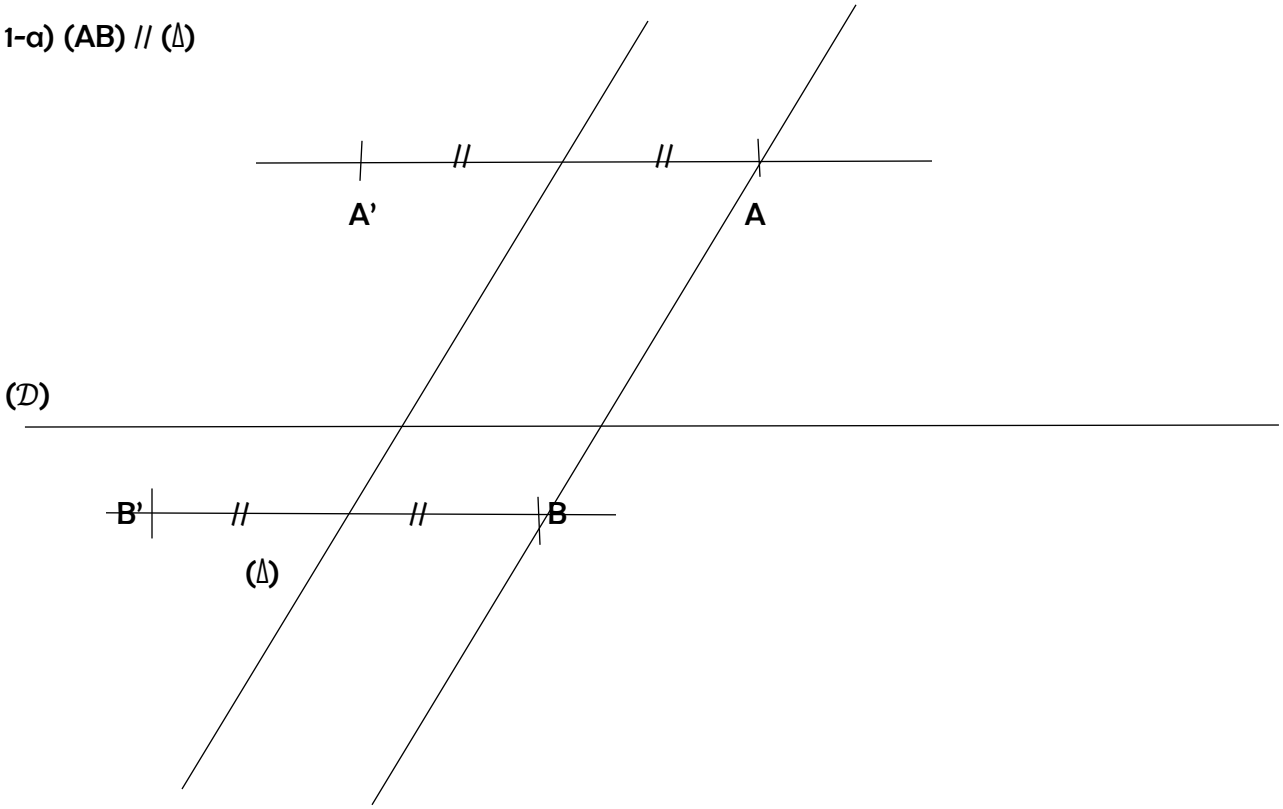
1-) Construire les images par f de deux points distincts A et B dans les cas suivants :

a) Les droites (AB) et (Δ) sont parallèles
b) Les droites (AB) et Δ) sont sécantes

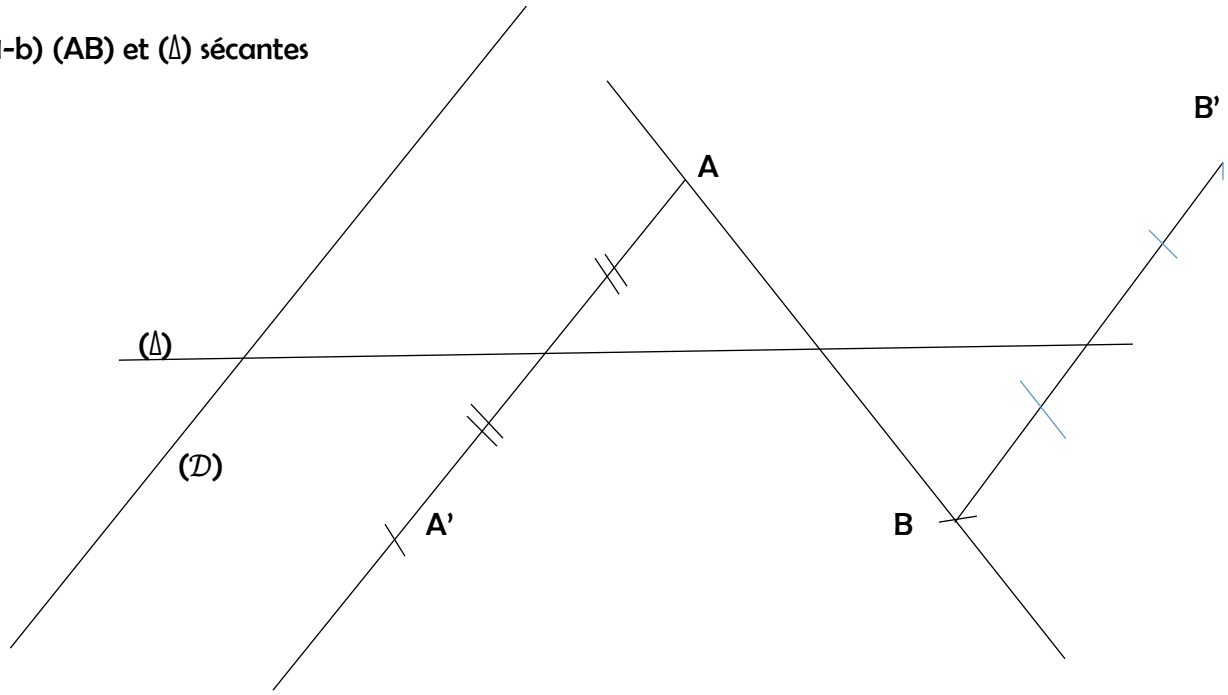
2-) démontrer que f est une application affine du plan

Solution:

1-a) (AB) // (Δ)



1-b) (AB) et (Δ) sécantes



Donc f est l'affinité d'axe (Δ) de direction ($\mathcal{D}$) et de rapport k= -1

Exercice 3c :

Le plan est munie d'un repère (O,$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$), on considère f une application affine telle que f(O)= I , f(I)= J et f(J)= O

1- Démontrer que f est bijective
2- Déterminer l'ensemble des points invariants par f

Solution :

1- L'image du repère (O ,$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$) par f est (I , $\overrightarrow{IJ}$,$\overrightarrow{IO}$) qui est aussi un repère du même plan car I, J et O sont non alignés.

f est donc bijective.

2- Soit Mϵ ($\mathcal{P}$) tels que f(M)= M

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, O$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, I$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, J$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) où $\vec{\imath}$=$\overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath}$ =$\overrightarrow{OJ}$. φ est l'application linéaire associée

$\overrightarrow{IM}$= $\overrightarrow{f(o)f(M)}$= φ($\overrightarrow{OM}$)

= φ(x$\overrightarrow{OI}$ + y$\overrightarrow{OJ}$)= xφ($\overrightarrow{OI}$) + yφ($\overrightarrow{OJ}$)

= x$\overrightarrow{f(O)f(I)}$ + y$\overrightarrow{f(O)f(J)}$

$\overrightarrow{IM}$= x$\overrightarrow{IJ}$ + y $\overrightarrow{IO}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$= $x\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ + y$\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = -x-y \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -x-x \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

D'où M$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

f admet un unique point invariant M$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Contenu

MODULE III : ANALYSE 2
CHAPITRE XI: FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIEN ET FONCTION PUISSANCE 2
Leçon 1: Fonction exponentielle nepérien 2
I. Rappels : étude de la fonction "ln" 2
II. Présentation de la fonction exponentielle et ses propriétés 2
1) Définition 2
a) Notation : 2
b) Conséquences immédiates 3
2) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle 3
III. Limites usuelles 4
IV. Etude et représentation graphique des fonctions exponentielles 4
1) étude graphique de la fonction exponentielle 4
2) Etude graphique de fonctions dont les expressions possèdent la fonction exponentielle
$on\ rappellle\ f\ realise\ une\ bijection\ de\ K\ vers\ fKet\ si\ pour\ tout\ x\ \in K,$ 5
Leçon 2: fonction exponentielle de base quelconque 8
I. Notation : 8
II. Propriétés algébriques : 8
III. Variation et représentation graphique : 8
Leçon 3: fonction puissance 9
I. Définition : 9
II. Propriétés algébriques : 9
III. Dérivée 9
IV. Primitive 9
V. Variation et représentation graphique 9
VI. Croissances comparées 10
1) Comparaison de la croissance de la fonction ln et les fonctions puissances au voisinage de $+\infty$ 10
2) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et des fonctions puissances au voisinage de $+\infty$ 10
3) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et la fonction logarithme au voisinage de $+\infty$ 10
4) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et des fonctions puissances au voisinage de $-\infty$ 10

MODULE III : ANALYSE

CHAPITRE XI: FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIEN ET FONCTION PUISSANCE

Leçon 1: Fonction exponentielle nepérien

Les compétences exigées:

- ✓ présenter la fonction exponentielle ainsi que ses propriétés(en particulier l'image d'une somme et le produit des images)
- ✓ expliquer les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre les équations et inéquations comportant la fonction exponentielle
- ✓ manipuler les fonctions dont les expressions comportent la fonction exponentielle: dérivabilité, sens de variation, connaitre les limites et les limites classiques pour la levée des indéterminations

Les pré-requis :
Connaissance de la fonction ln, notion de bijection

Utilisation
La croissance de la population, l'augmentation du capital, l'inflation sont des exemples d'utilisation des fonctions exponentielles.

I. Rappels : étude de la fonction "ln"

f est une *bijection* de E $dans$ F si f est une application telle que tout élément de F a un unique antécédent par f.
On note f^{-1} l'application de F dans E qui à un élément de f associe son antécédent par f.
On nomme f^{-1} la bijection réciproque de f (ou application réciproque).
La fonction ***ln*** *est strictement croissante sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.*
Son tableau de variation est donc le suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

II. Présentation de la fonction exponentielle et ses propriétés

1) Définition

La fonction exponentielle notée exp ***est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien*** **ln** $(exp = ln^{-1})$

$$]0\ ;+\infty[\underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$$

exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$
$x \to y = exp\ x$

a) Notation :

On note $exp(x) = e^x$ **et se lit « exponentielle de x » ou « e puissance de x ».**
En effet $ln(exp\ x) = x$
$\Leftrightarrow ln(exp\ x) = lne^x$ **Car** $ln\ e = 1$

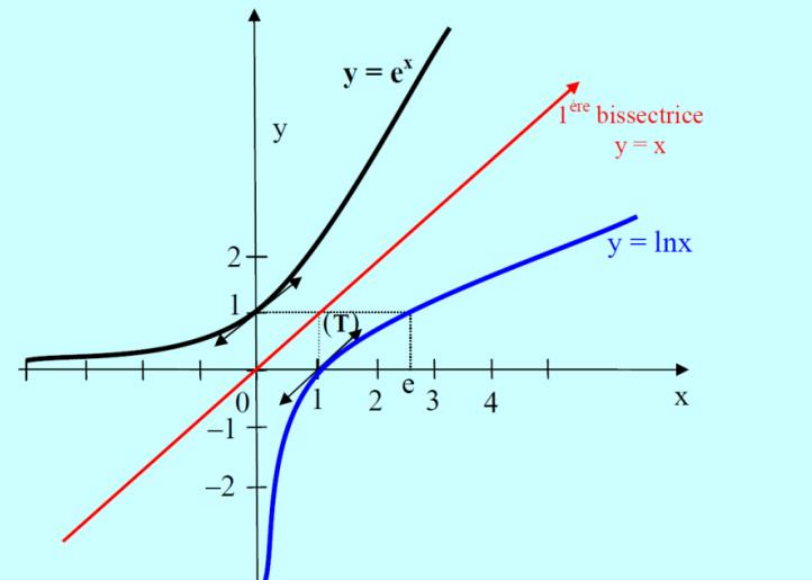
$$donc\ exp\ x = e^x$$

b) Conséquences immédiates

De cette définition, il résulte que :

- $\forall x \epsilon \mathbb{R}\ et\ \forall y\ \epsilon \mathbb{R}^*_+\ y = e^x \Leftrightarrow x = lny$
- $\forall x\ \epsilon\ \mathbb{R}, e^x\ \in \mathbb{R}^*_+\ et\ x = \ln(e^x)$
- $\forall\ x \in\ \mathbb{R}^*_+, e^{(lnx)}\ = x$
- $1 = lne \Leftrightarrow e^1 = e$
- $0 = \ln 1 \Leftrightarrow e^0 = 1$

Dans un repère orthonormé la courbe représentant la fonction exponentielle est le symétrique orthogonal de la courbe de la fonction logarithme par rapport à la *première bissectrice d'équation x=y.*



2) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

- $pour\ tou\ reel\ v\ strictement\ positif\ \ e^{\ln v} = v$
- Quels que soit les réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- Quels que soit les réels a et b, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

La fonction exponentielle étant l'application réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$. Elle-même est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Il en résulte que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

- $a > 0 \leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \leftrightarrow\ \ 0 < e^a < 1$
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$

En effet, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a = \ln(e^a)\ et\ b = \ln(e^b)\ \ donc\ a + b = \ln(e^a) + \ln(e^b)$

Soit $a + b = \ln(e^a \times e^b)$

D'où $e^{a+b} = e^a \times e^b$ (1)

En général, $\forall (a_1, a_2, \ldots . a_n) \in \mathbb{R}^n, \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp a_k$

La fonction *exp* est une bijection de $\mathbb{R}\ sur\ \mathbb{R}^*_+\ et\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$ donc *la fonction exp est un isomorphisme* de ($\mathbb{R}$,+) vers ($\mathbb{R}^*_+$,×)

- ❖ Conséquences

C1: $\forall b \in\ \mathbb{R}, e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ (2)

En effet, pour $b=-a, (1) devient\ e^0 = e^b \times e^{-b}$ d'où $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

C2: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}(3)$

Exercice d'application : résolution des équations et inéquations comportant la fonction exponentielle

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

b. Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} = 0.$

c. Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R}$ $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} > 0$

Résolutions

a. solution S={ln 3}

b. $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} \geq 0 \leftrightarrow e^0 \geq e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \leq 0 \leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ S=$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

c. $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} = 0 \leftrightarrow e^0 = e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ S=$\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

III. Limites usuelles

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

- *recherche de quelques limites*

i. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = (e^x)'(0) = 1$ $d'où\ on\ a\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

ii. $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = -\infty \times 0$ $F.ind$

Posons $x = \ln t,\ t > 0; si\ x\ tend\ vers -\infty\ alors\ t\ tend\ vers\ 0^+ : x = \ln t \Leftrightarrow e^x = t$

$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{t\to 0^+} t\ ln\ t = 0^-$ $d'où\ \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0^-$ $et\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\, e^x = 0$

iii. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ =forme indeterminée

Posons $x = \ln t,\ t > 0; si\ x\ tend\ vers +\infty\ alors\ t\ tend\ vers +\infty : x = \ln t \Leftrightarrow e^x = t$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{ln\,t}{t}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ d'où on en deduit que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

IV. Etude et représentation graphique des fonctions exponentielles

1) étude graphique de la fonction exponentielle

a. Ensemble de définition

$D = \mathbb{R}$

b. Limites aux bornes de D

On sait que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} e^x = 0^+$ de $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

c. dérivée de (exp 0 u) : (u est une fonction)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

$$[e^u]' = u' \times e^u\ \ en\ particulier : f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

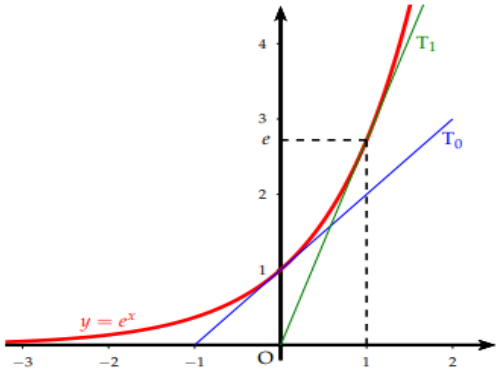
d. sens de variation

Soit $y = e^x\ on\ a : y' = e^x > 0\ donc\ la\ fonction\ e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'après les renseignements obtenus, on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$		0 ↗ 1 ↗	e ↗	$+\infty$

On obtient la courbe suivante :



2) Etude graphique de fonctions dont les expressions possèdent la fonction exponentielle

on rappellle f realise une bijection de K vers $f(K)$et si pour tout $x \in K$,

$$f'(x) \neq 0, alors\ f^{-1} est\ derivable\ sur\ f(K) et\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}.$$

La fonction $x \mapsto e^x$ *est derivable sur* $\mathbb{R}$ *et a pour fonction derivée* : $x \mapsto e^x$ *définie sur* $\mathbb{R}$

soit u une fonction derivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si u est une fonction numérique d'une variable réelle x alors exp $u(x)$ existe ssi u(x) existe; exp $u(x)$ est toujours strictement positive

la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ *est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction* : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ *admet pour primitive les fonction*

Exercice d'application

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

Questions :

1) Justifier que les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ *et* $y = -3$ sont asymptotes à C_f
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
3) Tracer d, Δ *et* C_f
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

Corrigé

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

$f(x) = \frac{e^x(2 - \frac{3}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$

Par quotient, on a donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

La courbe Cf admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

b) $En\ -\infty,$ on a :

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad donc \quad \lim_{x\to-\infty} 2e^x - 3 = -3$
$\lim_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$
} Par conséquent , on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$

La courbe $Cf\ admet\ donc\ une\ asymtote\ horizontale\ \Delta\ en\ -\infty$ d'équation $y = -3$

2) On calcule la dérivée :

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(2e^x+2-2e^x+3)}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2}$$

La fonction exponentielle etant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $f'est\ strictement\ positive\ sur\ \mathbb{R}$

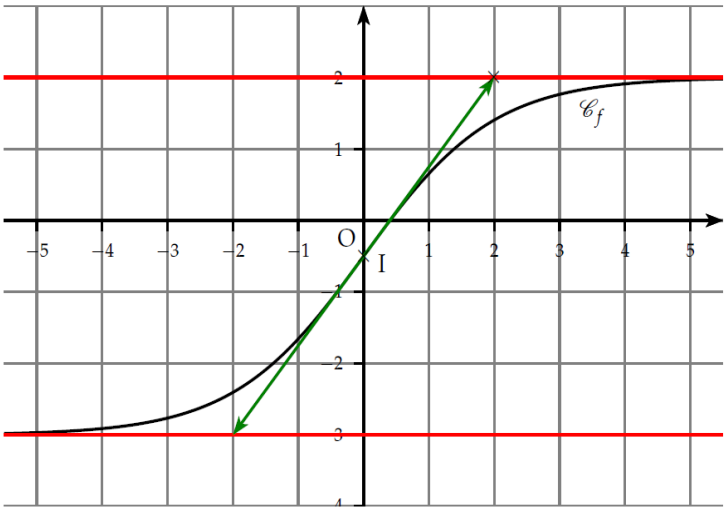
x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-3 ↗ 2

3) On a le tableau de variation de f suivant :

4) Pour tracer la courbe Cf, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscice nul . on a :

$f(0) = -\frac{1}{2} \quad f'(0) = \frac{5}{4}$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. un point M(x,y) a pour coordonnées dans le nouveau repère M(X,Y) .on a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \frac{1}{2} = \frac{2e^X-3}{e^X+1} - \frac{1}{2} = \frac{4e^X-6+e^X+1}{2(e^X+1)} = \frac{5(e^X-1)}{2(e^X+1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \frac{5(e^X-1)}{2(e^X+1)}$ $est\ impaire$.

On a $g(-X) = \frac{5(e^{-X}-1)}{2(e^{-X}+1)} = \frac{5(1-e^X)}{2(1+e^X)} = -g(X)$

La fonction g est impaire, donc la courbe $Cf\ est\ symetrique\ par\ rapport$ à I.

Leçon 2: fonction exponentielle de base quelconque

Les compétences exigées

- Utiliser le lien entre « exponentielle de base e (Exp) et exponentielle de base a pour résoudre des équations et des inéquations contenant exp, manipuler les expressions contenant Exp,
- Déterminer les dérivés et des primitives des fonctions comportant « exp».

I. Notation :

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel , on pose $a^x = e^{x\,lna}$.

1) Définition :

Soit a un réel positif différent de 0 et de 1.

La fonction qui , à x , associe a^x est appellée fonction exponentielle de base a .

Remarques :

- il faut que $a \neq 0$ pour ln a existe.
- il faut a≠ 1 pour que cette fonction ne soit pas constante ($1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$)

II. Propriétés algébriques :

Pour tout réels a et b positifs , différents de 0 et de 1 et pour tout réels x et y on a :

- $a^x > 0$ (car $e^x > 0$ pour tout réel x)
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ ($a^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = e^{x\ln a - y\ln a} = \frac{e^{x\ln a}}{e^{y\ln a}} = \frac{a^x}{a^y}$)
- $(ab)^x = a^x b^x$ ($(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x\ln a}\, e^{x\ln b} = a^x b^x$)
- $a^{x+y} = a^x a^y$ ($a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}\, e^{x\ln b} = a^x a^y$)
- $(a^x)^y = a^{xy}$ ($(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}$)
- $\ln(a^x) = x\ln a$ ($\ln(a^x) = \ln(e^{x\ln a}) = x\ln a$)

III. Variation et représentation graphique :

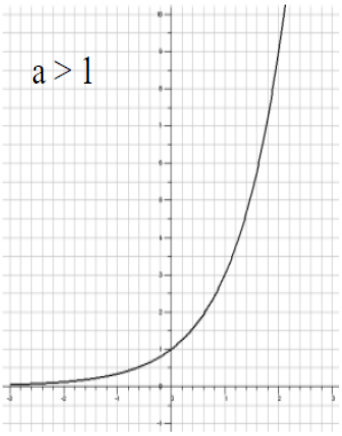
Posons $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$

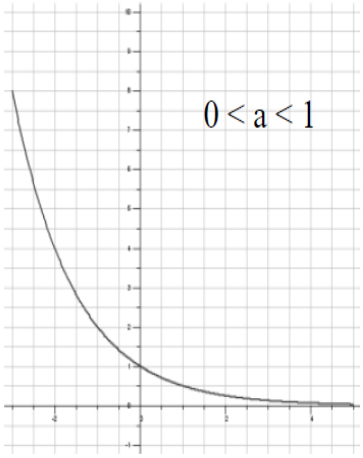
$f'(x) = \ln a\, e^{x\ln a} = (\ln a) \times a^x$ Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\ln a$

Si $a > 1$ $\ln a > 0$ $donc$ $f'(x) > 0$ et f $est\ strictement\ croissante\ sur\ \mathbb{R}$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Si $0 < a < 1$ $\ln a < 0$ $donc$ $f'(x) < 0$ et f $est\ strictement\ décroissante\ sur\ \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$





Leçon 3: fonction puissance

Les compétences exigées;

- **Utiliser le lien entre la fonction puissance et la fonction exp**
- **Déterminer la dérivée et des primitives des fonctions $x \longmapsto x^a$**
- **Calculer les limites des fonctions comportant la fonction puissance a**
- **Résoudre des équations et inéquations comportant des fonctions puissances.**

I. Définition :

Soit a un réel quelconque.

La fonction f qui à x associe $x^{\,a}$ est appellée fonction puissance a. Elle est définie sur] 0 ; +∞ [

$f(x) = x^{\,a}$

Remarque :

Pour tout x > 0, $x^{\,a} = e^{\,a \ln x}$ donc $x^{\,a} > 0$ pour tout x de] 0 ; +∞ [.

II. Propriétés algébriques :

Pour tout réels a et b positifs et pour tout réel x positif on a :

$x^{\,a+b} = x^{\,a} \times x^{\,b}$; $x^{\,a-b} = \frac{x^{\,a}}{x^{\,b}}$; $(x^{\,a})^{b} = x^{\,ab}$

Utile en économie : si a ∈ ℝ *, si x et y sont des réels positifs, $x^{\,a} = y \Leftrightarrow x = y^{1/a}$

III. Dérivée

Soit a ∈ ℝ. la fonction f définie sur]0; +∞[par $f(x) = x^{\,a}$ est dérivable et $f'(x) = ax^{\,a-1}$

IV. Primitive

Pour$a \neq -1$, la fonction $f(x) = x^{\,a}$ admet pour primitive sur] 0 ; +∞ [

Les fonctions F de la forme $F(x) = \frac{1}{a+1} x^{\,a+1}$+k, k a ∈ ℝ

V. Variation et représentation graphique

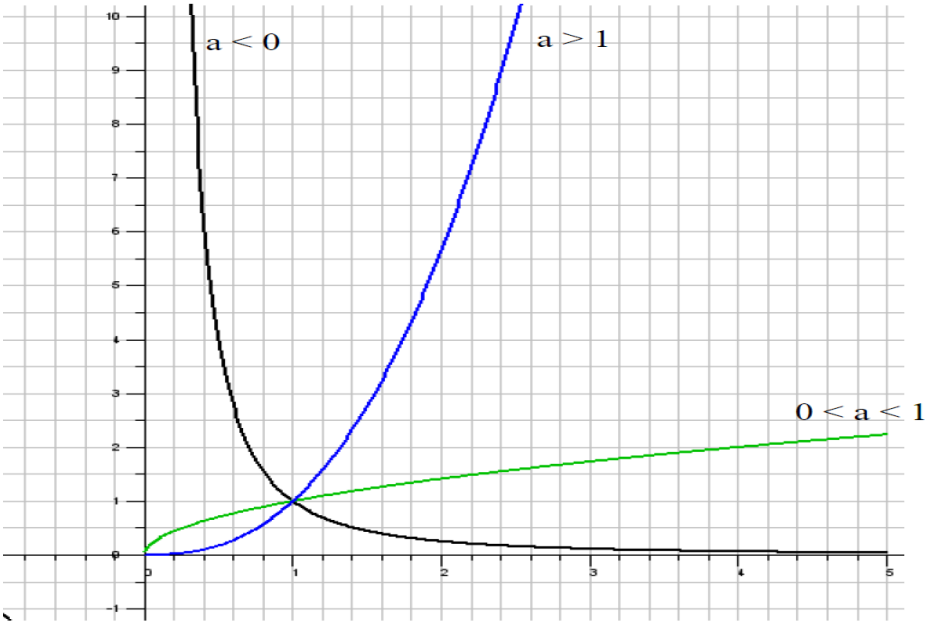
Posons $f(x) = x^{\,a} = e^{\,a \ln x}$ $f'(x) = ax^{a-1}$ le signe de $f'(x)$ dépend du signe de a.

Si$a < 0$ $f'(x) < 0$ *et* f *est strictement décroissante sur*] 0 ; +∞ [

$\lim\limits_{x \to 0} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$

Si $a > 0$ $f'(x) > 0$ *et* f *est strictement croissante sur*] 0 ; +∞ [

$0^a = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$



VI. Croissances comparées

1) Comparaison de la croissance de la fonction ln et les fonctions puissances au voisinage de +∞

Si $n > 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. On dira qu'en+∞, la puissance l'emporte sur le logarithme.

Posons $X = x^n$. Alors $\ln X = \ln x^n = n\ln x$. Donc $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\frac{\ln X}{n}}{X} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln X}{X}$

Si x tend vers+∞, X tend aussi vers +∞. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ *donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

2) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et des fonctions puissances au **voisinage de** +∞

Si $n > 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$=+∞. On dira qu'en+∞ , l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n\ln x}} = e^{x-n\ln x}$ $\lim_{x\to+\infty} x - n\ln x = \lim_{x\to+\infty} x(1 - n\frac{\ln x}{x}) = +\infty$ Donc $\lim_{x\to+\infty} e^{x-n\ln x}$ =+∞

3) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et la fonction logarithme au voisinage de +∞

Si $n > 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$=+∞. On dira qu'en+∞ , l'exponentielle l'emporte sur le logarithme.

$\frac{e^x}{\ln x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ =+∞

4) Comparaison de la croissance de la fonction exponentielle et des fonctions puissances au voisinage de −∞

Si $n > 0$ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x$=0. On dira qu'en -∞ , l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

Posons $X = -x$ donc $e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}$ donc $x^n e^x = (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$

Quand x tend vers $-\infty$, X *tend vers* $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x$=0

♣ Table des matières ♣

1 SUITES NUMÉRIQUES **2**

1.1 LEÇON 1 : GÉNÉRALITÉS 2

1.1.1 Introduction 2

1.1.2 Définition et premières propriétés 3

1.1.3 Suite majorée , minorée et bornée 5

1.1.4 Limites et convergence d'une suite 6

1.1.5 Activité 6

1.1.6 Convergence d'une suite 6

1.1.7 Propriétés de convergence des suites 6

1.1.8 Image d'une suite par une fonction 7

1.1.9 Convergence d'une suite monotone 7

1.2 LEÇON 2 : Suites arithmétiques , géométriques et particulières 8

1.2.1 Introduction (Suites arithmétiques et suites géométriques) 9

1.2.2 Sommes de termes consécutifs 9

1.2.3 Convergence et variation de suites arithmétiques et géométriques 9

1.2.4 Quelques suite particulières : suites périodiques et suites adjacentes 10

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

SUITES NUMÉRIQUES

1.1 LEÇON 1 : GÉNÉRALITÉS

Objectifs ; À la fin de ce chapitre l'élève doit être capable :

- ♣ D'étudier le comportement (sens de variation , limite ... etc) d'une suite numérique
- ♣ D'étudier les suites $n \longmapsto n^\alpha$ et $n \longmapsto a^n$ (calcul de limite avec la croissance comparée).
- ♣ Être capable d'approximer un réel par une suite .

1.1.1 Introduction

Définition 1.1.1. *Soit u une suite à valeurs dans un ensemble muni d'une loi additive ; on défini $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ par la relation de récurrence suivante :* $\begin{cases} S_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \end{cases}$

Définition 1.1.2. *Soit u une suite à valeur dans un ensemble muni d'une loi multiplicative , on définit $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ par la relation de récurrence suivante :* $\begin{cases} P_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n \times u_{n+1} \end{cases}$

Définition 1.1.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est :*

- ☞ *un majorant de A ssi $\forall x \in A, x \leq a$.*
- ☞ *un minorant de A ssi $\forall x \in A, a \leq x$.*

théorème et définition 1.1.1. ***(Principe de récurrence).*** *Soit P_n une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Supposons que :

✏ *P_{n_0} vraie* ***«initialisation»*** *;*

✏ *Pour $n \geq n_0$ fixé , $P_n \Longrightarrow P_{n_0}$* ***« hérédité»*** *.*

Alors P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Preuve . *Raisonnons par l'absurde . Supposons qu'il existe des entiers $n > n_0$ pour les quels P_n est fausse . Soit n_1 le plus petit d'entre eux . Par définition de n_1 , P_{n_1-1} est vraie . Par hérédité , $P_{n_1-1+1} = P_{n_1}$ est donc vraie , ce qui est absurde .*

théorème et définition 1.1.2. ***(Principe de récurrence forte).*** *Soit P_n une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Supposons que :

✏ *P_{n_0} vraie* ***«initialisation»*** *;*

✏ *Pour $n \geq n_0$ fixé , $(p_{n_0}, ..., P_n) \Longrightarrow P_{n_0}$* ***« hérédité forte »*** *.*

Alors P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Preuve . *On peut faire une récurrence simple sur la proposition $P'_n = (P_{n_0}, ..., P_n)$.*

Exemple 1.1.1. ***(Application de la récurrence forte)*** *Montrons que pour tout entier $n \geq 2$, se décompose comme un produit de nombres premiers (avec répétitions possible , bien sûr)*

Exemple 1.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Conjecturer puis prouver l'expression de son terme général u_n en fonction de n .*
2. *Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.*
3. $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$ *et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $cos^{(n)}(x) = cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $sin^{(n)}(x) = sin(x + n\frac{\pi}{2})$.*
4. *Considérons la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :* $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$.

   Démontrer que $u_n = 2^n$

1.1.2 Définition et premières propriétés

Activité 1

Soit U une suite de nombres réels définie par :

$U_0 = 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 3$;

2. Montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante ;
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{3 - U_n}{3}$;
4. Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 3 - U_{n+1} \leq (\dfrac{1}{3})^n$.

Définition et mode de génération d'une suite

Définition

Définition 1.1.4. *Une suite numérique est une fonction dont la variable est entière , c'est à dire :*

$$\begin{aligned} u : \quad I \subseteq \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto \quad & u(n) = u_n. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. *On a les remarques suivantes :*

- ☞ *Comme la variable est entière , les images $u(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont des réels isolés auxquels on donne un numéro appelé « indice» ou «rang» du terme $u(n)$ de la suite . Le (n+1)ième terme de la suite est noté u_{n+1} .*
- ☞ *une suite peut être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou tout simplement (u_n) ou u .*
- ☞ *Une suite peut être notée comme un ensemble $A = \{u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, ...\}$.*

Génération d'une suite

Il existe plusieurs modes de génération d'une suite numérique , on a entre autre :

- **De façon récurrente :** une suite u_n peut être définie par la donnée de son terme initial et d'une relation de récurrence entre deux termes consécutifs (de préférence entre u_{n+1} et u_n) ; dans ce cas on parle de **récurrence de pas 1** , ou bien par la donnée de deux termes initiaux et d'une relation de récurrence entre trois termes consécutifs de préférence u_n , u_{n+1} et u_{n+2} , dans ce cas on parle de **récurrence de pas 2** .

  Exemple 1.1.3. *Soit U une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_0 = 1$, $U_1 = -2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{5}U_n + \dfrac{1}{9}U_{n-1}$. Calculer U_2 , U_3 et U_4 .*
- **Par sa formule explicite :** qui permet d'exprimer u_n en fonction de n .

  Exemple 1.1.4. *soit la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = n^2 + 1$.*

  Calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

- **De façon graphique :** elle prend en considération le mode **de récurrence de pas 1 énoncé ci-dessus** , c'est à dire , on a la donnée du terme initial et une expression $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction . Pour ce faire on représente la courbe représentative de la fonction f et l'équation de la première bissectrice ; puis on suit la démarche (voir exemple ci-dessus) .

  Exemple 1.1.5. *u est une suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Déterminer en utilisant la méthode graphique u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .*

Étude monotonie d'une suite

☞ Une suite (u_n) est dite strictement croissante (respectivement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq u_n$) .

☞ Une suite (u_n) est dite strictement décroissante (respectivement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$) .

☞ Une suite (u_n) est dite constante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Stationnaire à partir d'un rang n_0 si $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque 1.1.2. *Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) , on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes , selon les cas :*

1. *On calcule $u_{n+1} - u_n$, et on étudie son signe suivant les valeurs de n .*
2. *Si la suite (u_n) est définie par une fonction f c'est à dire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur intervalle $[0; +\infty[$. La suite u varie alors dans le même sens que f .*
3. *On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite (u_n) est décroissante , si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite (u_n) est croissante .*

Exemple 1.1.6. *Soit u la suite $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$,*
montrer que la suite u est croissante .

1.1.3 Suite majorée , minorée et bornée

Définition 1.1.5. *Soient m , $M \in \mathbb{R}$ et u une suite numérique .*

1. *La suite (u_n) est dite majorée , s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*
2. *La suite (u_n) est dite minorée , s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*
3. *La suite (u_n) est dite bornée , s'il existe des réels m et M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.*

Remarque 1.1.3. *Soit u une suite numérique :*

☞ *La suite (u_n) peut être majorée , minorée ou bornée à partir d'un certains rang n_0 .*

☞ *Une suite majorée et minorée est aussi bornée .*

Exemple 1.1.7. *On considère les suites $u_n = \frac{cosn}{n}$ et $v_n = ln(2n+1) - ln(n+1)$.*

1. *Montrer que les suites u_n et v_n sont bornées .*
2. *On considère la suite (w_n) définie par :* $\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3} \end{cases}$
   (a) *Montrer par récurrence que w est croissante .*
   (b) *Montrer que w est bornée $(-1 \leq w_n \leq 3)$.*
3. *Étudier les variations des suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $v_n = \frac{n^n}{n!}$ et $w_n = \frac{e^n}{n!}$.*

1.1.4 Limites et convergence d'une suite

1.1.5 Activité

Déterminer la limite éventuel de la suite (u_n) dans chacun des cas suivant :

a) $u_n = \frac{2 - 3n + n^3}{n^2 + n + 1}$, b) $u_n = \sqrt{4n^2 + 1} - 2n$, c) $u_n = \frac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1}$.

1.1.6 Convergence d'une suite

Définition 1.1.6. *Soit (u_n) une suite numérique ;*

1. *On dit que la suite (u_n) converge vers un réel L si sa limite est ce réel L quand n tend vers $+\infty$.*
2. *Si la suite u ne converge pas alors , elle est divergente , c'est à dire que soit elle n'a pas de limite (par exemple $u_n = (-1)^n$) , soit elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ (par exemple $u_n = n^2$)*
3. *On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si sa limite est $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .*

1.1.7 Propriétés de convergence des suites

1. Les théorèmes généraux sur les opérations sur les limites de fonctions numériques s'appliquent aux opérations sur les limites de suites .

2. «**Théorème des gendarmes**»

   Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques

   ☞ Si lim $\mid u_n - l \mid = 0$, alors lim $u_n = l$;

   ☞ Si à partir d'un certains n_0 , $v_n \leq u_n \leq w_n$, et (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers $L \in \mathbb{R}$, alors (u_n) aussi converge vers L .

   ☞ Si à partir d'un certains rang n_0 , $u_n \geq v_n$, et $limv_n = +\infty$, alors $limu_n = +\infty$.

   ☞ Si à partir d'un certains rang n_0 , $u_n \leq v_n$, et $limv_n = -\infty$, alors $limu_n = -\infty$.

Exemple 1.1.8. *1. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) + \dfrac{1}{x}$*

(a) Étudier les variations de f et déterminer $f(]0;+\infty[)$. Représenter f

(b) On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi) = \varphi$.

(c) On se propose de construire une suite x_n de rationnels qui converge vers φ .On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

i. Calculer et représenter les réels x_1 , x_2 , x_3 et x_4 .

ii. Montrer que pour tout entier naturel n , x_n est un rationnel positif .

iii. Montrer que $\mid x_{n+1} - \varphi \mid \leq \dfrac{4}{9} \mid x_n - \varphi \mid$.

iv. Déduire que $\mid x_n - \varphi \mid \leq (\dfrac{2}{3})^{2n} \mid \varphi - 2 \mid$ et conclure.

2.

1.1.8 Image d'une suite par une fonction

théorème et définition 1.1.3. *Soit (u_n) une suite numérique convergeant vers $L \in \mathbb{R}$,pour toute fonction f définie sur un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$) contenant L , et continue sur I , alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$converge vers $f(L)$.*

Remarque 1.1.4. *Si une suite (u_n) converge vers l , et si elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction continue et définie sur un intervalle contenant l , alors l vérifie l'égalité $l = g(l)$.*

1.1.9 Convergence d'une suite monotone

théorème et définition 1.1.4. *Soient $M, m \in \mathbb{R}$;*

☞ *Toute suite croissante et majorée par M converge vers un réel $L \leq M$;*

☞ *Toute suite décroissante et minorée par m , converge vers un réel $l \geq m$.*

☞ *Toute suite croissante et non majorée diverge vers* $+\infty$ *et toute suite décroissante et non minorée diverge vers* $-\infty$.

Propriété 1.1.1. ***Suites géométriques ou exponentielles . Soit*** $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $n \in \mathbb{N}^*$

☞ $a \leq -1$ *alors* a^n *n'a pas de limite ;*

☞ *Si* $-1 < a < 1$ *alors* $lim\ \ a^n = 0$ *;*

☞ *Si* $a = 1$ *, alors* $lim\ \ a^n = 1$ *;*

☞ *Si* $a > 1$ *, alors* $lim\ \ a^n = +\infty$

Propriété 1.1.2. ***Suites puissances . Soient*** $\alpha \in \mathbb{R}$ ***et*** $n \in \mathbb{N}^*$ *;*

☞ *Si* $\alpha < 0$ *, alors* $lim\ \ n^\alpha = 0$ *;*

☞ *Si* $\alpha = 0$ *, alors* $lim\ \ n^\alpha = 1$ *;*

☞ $\alpha > 0$ *, alors* $lim\ \ n^\alpha = +\infty$.

Proposition 1.1.1. ***Croissance comparée***

✈ *Si* $\alpha > 0$ *, alors* $lim\ \ \dfrac{lnn}{n^\alpha} = 0$.

✈ *Si* $a > 1$ *et* $\alpha > 0$ *, alors* $lim\ \ \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ *; si* $a > 1$ *et* $\alpha > 0$ *, alors* $lim\ \ \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

✈ *Si* $-1 < a < 1$ *et* $\alpha < 0$ *, alors* $lim\ \ \dfrac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

1.2 LEÇON 2 : Suites arithmétiques , géométriques et particulières

Objectifs ; À la fin de ce chapitre l'élève doit être capable :

- ♣ De reconnaitre une suite arithmétique et géométrique .
- ♣ D'étudier le comportement (sens de variation , limite ... etc) d'une suite arithmétique ou géométrique
- ♣ Étude de propriétés des suites particulières (adjacentes , stationnaires)

1.2.1 Introduction (Suites arithmétiques et suites géométriques)

Caractéristiques	Suite arithmétique (u_n)	Suite géométrique(v_n)
Premier terme	u_0 ou u_p $(p \in \mathbb{N}^*)$	v_0 ou v_p $(p \in \mathbb{N}^*)$
Raison	r	q
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = q \times v_n$
Terme générale : F.E	$u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_p \times q^{n-p}$
$\sum$ de termes	$u_0 + ... + u_{n-1} = \dfrac{n(u_0+u_n)}{2}$	$v_0 + ... + v_{n-1} = v_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

1.2.2 Sommes de termes consécutifs

☞ **Suite arithmétique :** $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \dfrac{(n-p+1)}{u_p + u_n}$.

☞ **Suite géométrique :** $S_n = v_p + ... + v_n = v_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-p}$.

Exemple 1.2.1. *On considère les deux suites u et v définies , pour tout entier naturel n , par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. *Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .*
2. *Soit la suite w , définie par $w_n = v_n - u_n$.*
   (a) *Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.*
   (b) *Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite w_n .*
3. *On considère à présent la suite (t_n) définie , pour tout entier naturel n , par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.*
   (a) *Démontrer que la suite (t_n) est constante .*
   (b) *En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .*

1.2.3 Convergence et variation de suites arithmétiques et géométriques

✍ **Soit (u_n) , une suite arithmétique de raison r et de premier terme (u_0) :**

1. Si $r = 0$, u converge vers u_0 ;
2. si $r > 0$, u diverge et est croissante ;
3. si $r < 0$, u diverge et est décroissante .

✍ **Soit v_n , une suite géométrique de raison q :**

1. Si $q \in]-1;1[$, (v_n) converge et $lim \ \ q^n = 0$;
2. si $q = 1$, (v_n) est constante et converge vers v_0 ;
3. Si $q \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ (v_n) diverge .

1.2.4 Quelques suite particulières : suites périodiques et suites adjacentes

Suites périodiques

Définition 1.2.1. *Une suite (u_n) est dite périodique , s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+p} = u_n$. Le plus petit entier naturel p vérifiant cette égalité est appelé période de la suite (u_n) .*

Exemple 1.2.2. *Soient u et v , deux suites numériques ;*

- *La suite $u_n = (-1)^n$, est périodique de période 2 .*
- *La suite $v_n = cos\dfrac{2\pi}{5}$, est périodique de période 5π .*

Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si ;

- u croissante et v décroissante ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$;
- $lim(u_n - v_n) = 0$.

Propriété 1.2.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes , alors les suites u et v , convergent vers la même limite .*

Exemple 1.2.3. *On considère les suites (u_n) et (v_n) , définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations : $u_n = \dfrac{7}{v_n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.*

1. *Calculer v_0 , u_1 , v_1 , u_2 v_2 , u_3 et v_3 , donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice .*
2. *Justifier par récurrence que pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$;*
   (a) *Démontrer que : $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.*
   (b) *En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.*
   (c) *Conclure que $u_n - v_n \geq 0$.*
4. *En s'aidant de la question $3 - c$, montrer que la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) est croissante .*
5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$;*
   (a) *Démontrer que $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.*

(b) *utiliser le résultat précédent pour démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$

(c) *En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$,$u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$

6. *Déterminer la limite de* $u_n - v_n$ *, lorsque n tend vers* $+\infty$.

7. *Conclure que les suites* u *et* v *sont adjacentes et déterminer leur limite commune .*

8. *Justifier que* u_3 *est une approximation de* $\sqrt{7}$ *à* 10^{-7} *près .*

9. *Proposer une méthode générale pour trouver une valeur approchée de* $\sqrt{a}$ *, où* a *est un réel quelconque positif .*

Exemple 1.2.4. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. *On note* (C) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*On prendra* $2cm$ *comme unité .*

1. ***Construction de*** $(\boldsymbol{C})$;

   (a) *Montrer que la courbe* (C) *admet deux asymptote horizontale .*

   (b) *Déterminer* f' *et dresser le tableau de variation de* f .

   (c) *Montrer que* f *admet une bijection réciproque* f^{-1}

   (d) *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* $\alpha \in [-1; 0]$.

   (e) *Montrer que pour tout réel* $x \mid f(x) + x \mid \leq \frac{1}{2} \mid x \mid$.

   (f) *Tracer la courbe* (C) *de* f *et la courbe* (C^{-1}) *de* (f^{-1}) . *(* (C^{-1}) *en pointillés)*

2. ***Recherche de la valeur approchée de la limite d'une suite*** *On considère la suite* (U_n) *définie par* $U_0 = 0$ *et pour tout n ,* $U_{n+1} = f(U_n)$.

   (a) *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [-1; 0]$. *On note I l'intervalle* $[-1; 0]$.

   (b) *Montrer que* (U_n) *décroissante et déduire que la suite de terme général* U_n *converge .*

   (c) i. *Montrer que pour tout réel* $x \in I$, $\mid f'(x) \mid \leq \frac{1}{2}$.

   ii. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid U_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{1}{2} \mid U_n - \alpha \mid$, *puis en déduire que* $\mid U_n - \alpha \mid \leq \frac{1}{2^n}$.

   iii. *Déterminer le plus petit entier naturel* n_0 *tel que , pour tout* $n \geq n_0$, U_n *soit une valeur approchée de* α *à* 10^{-2} *près .*

3. *Déterminer une primitive* F *de de* f *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $F(0) = 1$.

CHAPITRE : CALCUL D'INTEGRALES

1. OBJECTIFS

A la fin de ce chapitre, l'apprenant doit être capable de :

- Appliquer les techniques du calcul des intégrales et présenter ses applications (calcul d'aire, encadrement) ;
- Exploiter sur les exemples simples, les propriétés de l'intégrale pour l'étude des fonctions.

2. NOTION D'INTEGRALE

a) Activité préparatoire

1) Trouver d'une part, la primitive G de la fonction carré f qui prend la valeur 1 pour $x = 2$ et d'autre part, la primitive H de la fonction carré qui prend la valeur 0 pour $x = 5$

2) Calculer $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$ puis conclure

Solution

1) Déterminons la primitive G de la fonction carré f telle que $G(2) = 1$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + k$ or $G(2) = 1 \Rightarrow k = -\frac{5}{3}$ d'où $\boldsymbol{G(x) = \frac{x^3-5}{3}}$

Déterminons la primitive H de la fonction carré f telle que $H(5) = 0$

$H(x) = \frac{x^3}{3} + k$ or $H(5) = 0 \Rightarrow k = -\frac{125}{3}$ d'où $\boldsymbol{H(x) = \frac{x^3-125}{3}}$

2) $\boldsymbol{G(1) - G(2) = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}}$

$\boldsymbol{H(1) - H(2) = -\frac{124}{3} + \frac{117}{3} = -\frac{7}{3}}$

On conclut que la différence $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$ est bien la même quel que soit la primitive **choisie**

b) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux éléments de I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit F l'une de ces primitives. On **appelle « intégrale de (la fonction) f de a à b »** le réel $F(b) - F(a)$. On le note : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque :

- le réel $\int_a^b f(t)dt$ **ne dépend pas** de la primitive choisie pour le calcul.
- a et b sont des bornes d'intégration ;
- La variable t est appelée **variable d'intégration**. C'est une variable ***muette*** car elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre de l'alphabet puisqu'elle n'intervient pas dans le processus d'intégration.
- $\int_a^b f(t)dt$ se lit : « *intégrale de* a *à* b, $f(t)$ *dérivée de* t » ou bien « *somme de* a *à* b, $f(t)$ *dérivée de* t »

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\pi/2} cos^2 x dx$ *et* $B = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

Solution

Calculons les intégrales suivantes

- $A = \int_0^{\pi/2} cos^2 x dx$ or $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ alors $\int_0^{\pi/2} cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4}\sin 2 \times 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Donc $\boldsymbol{A = \frac{\pi}{4}}$

- $B = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

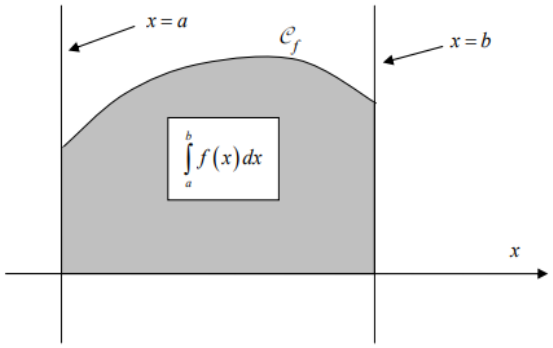
$$= \left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4$$

$$\boldsymbol{B = 2}$$

c) Interprétation géométrique

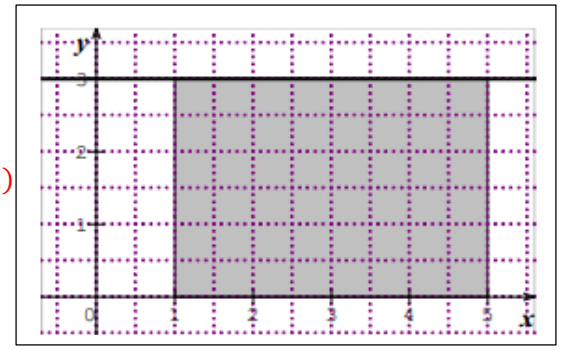
Dans le cas où :

• $a < b$; La fonction f prend des valeurs positives sur l'intervalle $[a\,;b\,]$. L'intégrale de f de a à b est égale à l'aire, en unité d'aire, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative C_f de la fonction f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (voir zone grisée sur la figure ci-dessous).



EXERCICE D'APPLICATION

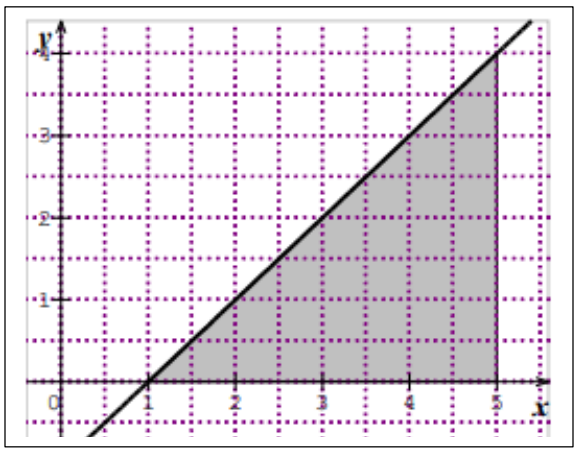
1) ***On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3$ et représentée ci-contre. On cherche à déterminer l'aire du domaine grisé sur le dessin ci-contre.***



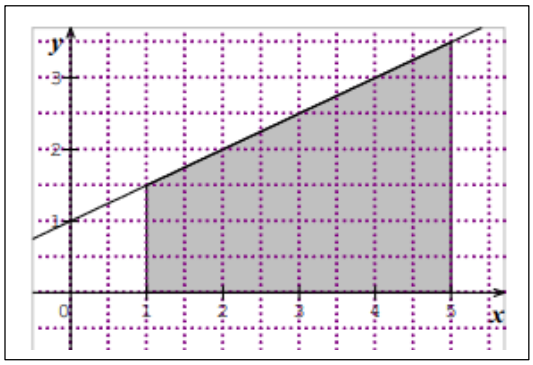
a. Calculer cette aire en cm^2

b. Trouver une primitive K de la fonction k et calculer $K(5) - K(1)$

2) Mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x) = x - 1$ et représenté ci-contre



3) Recommencer les mêmes questions pour la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ***et représenté ci-contre***



4) Que remarque-t-on dans les trois cas ?

d) Propriétés des intégrales

Activité préparatoire

1) *Soient les intégrales suivantes :* $I = \int_1^2 -t^2 dt$ *et* $J = \int_1^2 3dt$

a) *Calculer* I *et* J

b) *Calculer* $K = \int_1^2 (3 - t^2)dt$

c) *Calculer* $I + J$ *puis comparer le résultat à la valeur de de* K

2) On considère les intégrales suivantes

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3costdt\ ;\ B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sintdt \ \ et\ C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t\, dt + 2\sin t)dt$$

a) *Calculer* $A\ ;\ B\ ;\ A + B\ ;\ C$ *puis comparer les valeurs* $A + B$ *et* C

3) Soient $U = \int_{-2}^1 x^2 dx$ *et* $V = \int_1^{-2} x^2 dx$

a) *Calculer* U *et* V

b) *Quelle conjecture faites-vous ?*

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I soient a , b et c trois éléments de I. On suppose que f et g admettent des primitives sur I. Soit k un réel quelconque.

P1 Linéarité

- $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (kf)(x)dx = \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Remarque :

On aurait pu traduire la linéarité de l'intégrale en considérant deux réels k et k' quelconques et en écrivant :

$$\int_a^b (kf \pm k'g)(x)dx = \int_a^b \big(kf(x) \pm k'g(x)\big)dx = k\int_a^b f(x)dx \pm k'\int_a^b g(x)dx$$

P₂ Relation de CHASLES

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)dx$$

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer $B = \int_{-1}^{1} |t(t-1)|dt$

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
t	$-t$	t	t	
$t-1$	$-t+1$	$-t+1$	$t-1$	
$t(t-1)$	t^2-t	$-t^2+t$	t^2-t	

$$\int_{-1}^{1} |t(t-1)|dt = \int_{-1}^{0} (t^2-t)dt + \int_{0}^{1} (-t^2+t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 1$$

Donc $\underline{B = 1}$

P₃ Positivité

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ alors: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$ alors: $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

P4 Conservation de l'ordre d'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration : Si, pour tout x de $[a;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leq 0$, d'où $\int_a^b (f-g)(x)dx \leq 0$ donc : $\left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right) \leq 0$ soit $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

P5 Permutation des bornes

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

P6 Stabilité des bornes

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Ne jamais écrire que : $\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx$

8. INTEGRATION PAR PARTIES

a)Utilité

C'est une technique très utilisée dans le calcul des intégrales et qu'on applique lorsqu'on a à intégrer un produit de deux fonctions de natures différentes.

b) Théorème

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

Alors : $\int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)dx} = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)dx}$

ou bien

$$\int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)dx} = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)dx}$$

Ces deux dernières relations sont connues sous le nom de ***formules d'intégration par parties.***

Démonstration : On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, ainsi $uv' = (uv)' - u'v$ et en intégrant ces deux fonctions sur $[a; b]$, on obtient $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b \big(u(x)v(x)\big)'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

EXERCICE D'APPLICATION

A l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale suivante : $\int_0^\pi x \sin x\, dx$

Posons : $u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = sinx \Rightarrow v = -cosx$

Ainsi: $\int_0^\pi x \sin x\, dx = [x(-cosx]_0^\pi - \int_0^\pi (-cosx)dx$

$= [x(-cosx]_0^\pi + \int_0^\pi cosxdx$

$= [x(-cosx]_0^\pi + [sinx]_0^\pi$

$= \big(\pi cos\pi - (0cos0)\big) + (sin\pi - sin0)$

$= \pi$

D'où $\int_0^\pi x \sin x\, dx = \pi$

N.B : Dans le produit des fonctions à intégrer, choisir la fonction à dériver avec précaution. Dans certains cas, ce choix s'impose (voir conseils pratiques ci-dessous).

CONSEILS PRATIQUES : Comment effectuer une bonne intégration par parties (I.P.P)

1er cas : Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***polynôme*** × ***fonction trigo*** ou ***bien polynôme*** × ***fonction racine carrée,*** **il faudrait toujours dériver la fonction polynôme**

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^\pi (2x-1)sin(2x)dx$; b) $\int_0^3 2x\sqrt{x+1}\,dx$; c) $\int_{-8}^3 \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

2e cas : Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***A(x)* × *fonction logarithme*** avec ***A(x)* = fonction polynôme ou fonction rationnelle ou fonction trigo ou fonction racine carrée ou fonction exponentielle, il faudrait toujours dériver la fonction logarithme**

3e cas : Dans une I.P.P où la fonction à intégrer est du type ***B(x)* × *fonction exponentielle*** avec ***B(x)* = fonction polynôme ou fonction rationnelle ou fonction trigo ou fonction racine carrée ou fonction exponentielle, il faudrait toujours dériver la fonction *B(x)***

APPLICATIONS IMMEDIATES

Activité 1 :

A l'aide de deux I.P.P, calculer les intégrales suivantes : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$

Activité 2 :

On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx$

1) Calculer $I + J$ *et* $I - J$

2) En déduire les valeurs exactes de I *et* J

Activité 3 :

On considère les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \cos^2 x \, dx$ *et* $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin^2 x \, dx$

1) Justifier l'existence de A et B

2) Calculer A+B puis A-B

3) Déduire les valeurs de A et B

Activité 4 :

Soit la suite d'intégrale I_n *définie par* $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx \; \forall \, n \in \mathbb{N}$

1) calculer I_0

2) Calculer I_1 *à l'aide d'une I.P.P. Etablir une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n-1}

Activité 5 :

Soit la suite d'intégrale I_n *définie par* $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \; \forall \, n \in \mathbb{N}$

1) calculer I_0

2) En intégrant par parties, établir une relation de récurrence entre I_n *et* I_{n-1} $\forall\, n > 1$

3) En déduire les valeurs exactes de I_1 , I_2 *et* I_3

4) Soit J_n *l'intégrale définie par* $J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n x dx$. *En intégrant par parties, montrer que :*

$$J_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) J_{n-2}$$

N.B : TECHNIQUES DE CALCULS D'INTEGRALES

• Changement de variable

Soit f une fonction continue sur I. α et $\beta \in \mathbb{R}/\forall\, t \in I, (\alpha t + \beta) \in I$. Soient a et $b \in I$ pour calculer $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$

On peut procéder de la manière suivante. On pose $u = \alpha t + \beta$ $du = \alpha dt \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha} du$

$$\int_a^b \boldsymbol{f(\alpha t + \beta)} = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{f(u) du}$$

Exercice d'application

Calculer $I = \int_2^4 e^{(-\frac{1}{2}t+1)} \mathrm{dt}$

Posons : $\boldsymbol{u = -\frac{1}{2}t + 1 \Rightarrow du = -\frac{1}{2} dt}$ **donc** $\boldsymbol{dt = -2du}$

$$\int_2^4 \boldsymbol{e^{(-\frac{1}{2}t+1)}\, dt} = \int_0^{-1} \boldsymbol{-2e^u du}$$

$$\boldsymbol{I = -2 \int_0^{-1} e^u\, du}$$

$$\boldsymbol{= -2[e^u]_0^{-1}}$$

$$\underline{\boldsymbol{I = -2(e^{-1} - 1)}}$$

• Intégration d'une fonction paire, impaire, périodique

Propriétés :

P$_1$) Soit f une fonction **continue et paire** sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt}$

P$_2$) Soit f une fonction **continue et impaire** sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt = 0}$

P$_3$) Soit f une fonction **continue sur $\mathbb{R}$ et périodique p** alors :

- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\int_a^{a+p} \boldsymbol{f(t)dt = \int_0^p f(t)dt}$
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $\int_{a+p}^{b+p} \boldsymbol{f(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$

4. INEGALITES ET INTEGRALES

a)Théorème de la moyenne

Ce théorème est utile pour établir les inégalités en utilisant les intégrales. C'est la forme intégrale de l'inégalité des accroissements finis (I.A.F). Il se présente sous deux formes :

Forme 1 : soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ donc intégrable ; m et M deux réels.

Si $m \leq f(x) \leq M$ alors on a : $\boldsymbol{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$

ou

$$\boldsymbol{m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M}$$

Démonstration : Si, pour tout x de $[a;\ b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$ Or $\int_a^b mdx = m\int_a^b dx = m(b-a)$ et $\int_a^b Mdx = M\int_a^b dx = M(b-a)$ donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Forme 2 : soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et M un réel.

Si $|f(x)| \leq M$ (avec $M > 0$) alors on a : $\boldsymbol{\int_a^b |f(x)dx| \leq M|b-a|}$

Démonstration : Si, pour tout x de $[a;\ b]$, $|f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M$ alors

$\int_a^b -Mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b |M|dx$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq [Mx]_a^b \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$

or $a \leq b$ alors $b-a > 0 \Rightarrow |b-a| > 0$ d'où $\int_a^b |f(x)dx| \leq M|b-a|$

b) Notion de la valeur moyenne

On suppose $a \leq b$. On appelle « **valeur moyenne de f** sur l'intervalle $[a;\ b]$ » le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

APPLICATIONS IMMEDIATES

Activité 1 :

1) Calculer la valeur moyenne de la fonction $\sin x$ *sur* $[\pi/3\ ;\ \pi]$

2) Soit f *une fonction définie sur* $[3;4]$ *par* $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. *Donner un encadrement de* $\int_3^4 f(x)dx$

3) On considère la fonction f *définie sur* $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ *par* $f(x)=3x^2-2x+1$

a) Montrer que f *est bornée sur* $\left[0;\frac{2}{3}\right]$

b) En déduire un encadrement de $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx$

Activité 2 :

Soit f *une fonction définie sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *par* $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$. *Montrer que* $\frac{\cos x}{1+(\pi/2)^2}\leq f(x)\leq \cos x$. *En déduire un encadrement de* $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

Activité 3 :

Sans calculer les intégrales, établir les encadrements suivants :

a) $1\leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\leq \sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3}\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x+x^2}}dx\leq \frac{3\sqrt{2}}{5}$

c) $\frac{2\pi}{13}\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{10-3\sin x}dx\leq \frac{2\pi}{7}$

5. INTEGRALES ET AIRES (CALCULS D'AIRES)

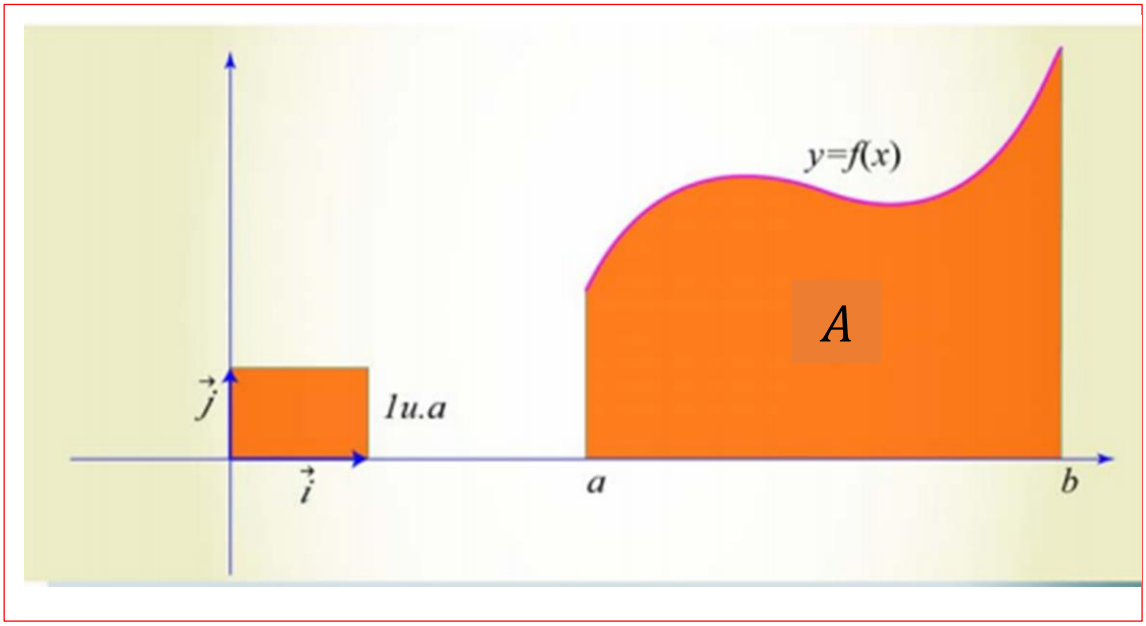
a) Expression d'une primitive au moyen d'une intégrale

Soit f une continue sur I et $A\in I$. L'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 en A est la primitive F définie par la relation $F(x)=\int_a^b f(t)dt$

b) Interprétation géométrique de l'intervalle

- Si f une **fonction continue et positive** sur $[a;b]$ alors, **l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe C_f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$** exprimée en **unités d'aire (U.A)** est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{A=\int_a^b f(x)dx\ (U.A)}$$

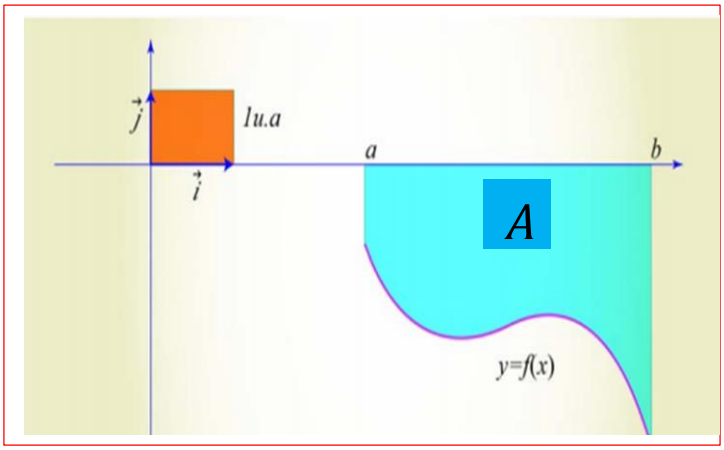


N.B : L'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi = $\boldsymbol{unité\ sur\ l'axe des\ abscisses \times unité\ sur\ l'axe des\ ordonnées}$

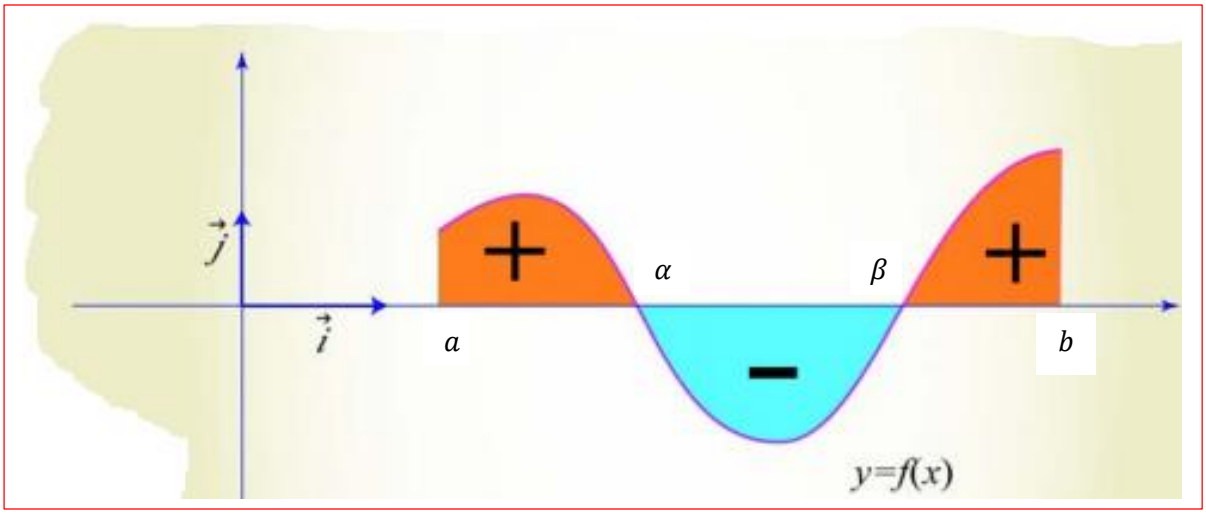
Exemple : Si l'unité sur **l'axe des abscisses est 2 cm** et l'unité sur **l'axe des ordonnées est 3cm** alors $\boldsymbol{U.A = 3 \times 2 = 6\ cm^2}$

- Si f une **fonction continue et négative** sur $[a; b]$ alors, **l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe C_f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$** exprimée en **unités d'aire (U.A)** est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{A = -\int_a^b f(x)dx\ (U.A)}$$



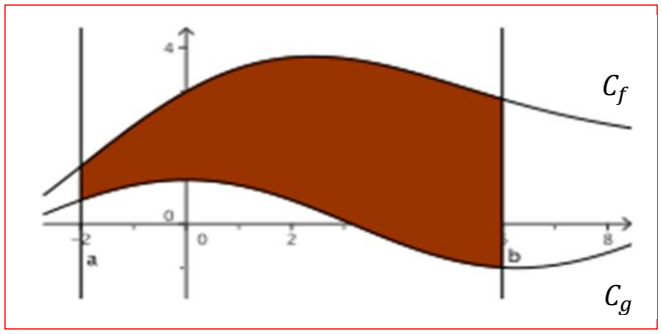
- Si f est une fonction continue et ne **garde pas un signe constant** sur $[a; b]$ alors, **l'aire du domaine mesurée en unités d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses, diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses**



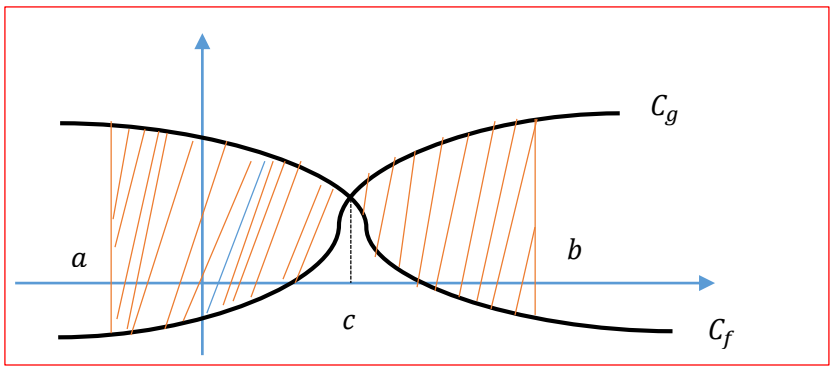
$$A = \int_{a}^{\alpha} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx \ (U.A)$$

- **Aire comprise entre deux courbes**

Soient f et g deux fonctions de courbe C_f et C_g

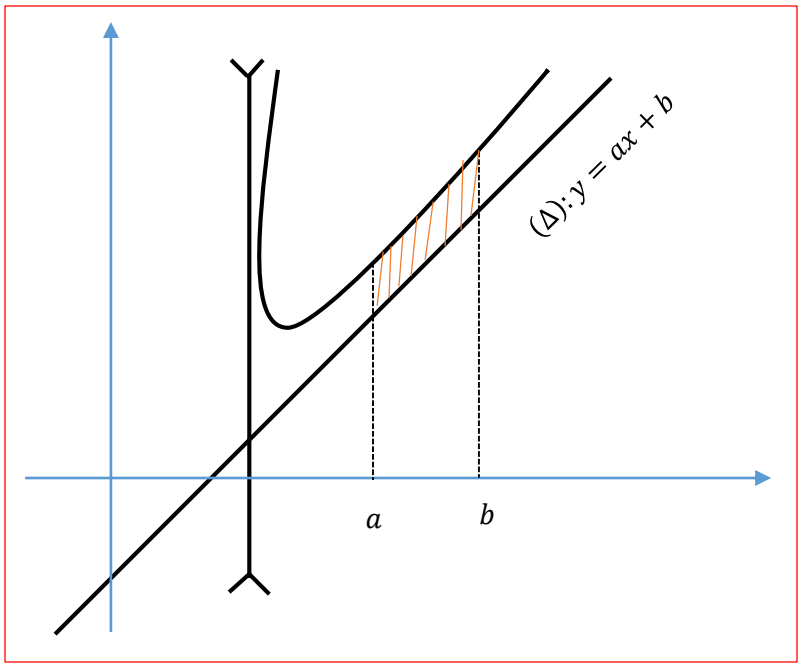


$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx \ (U.A)$$

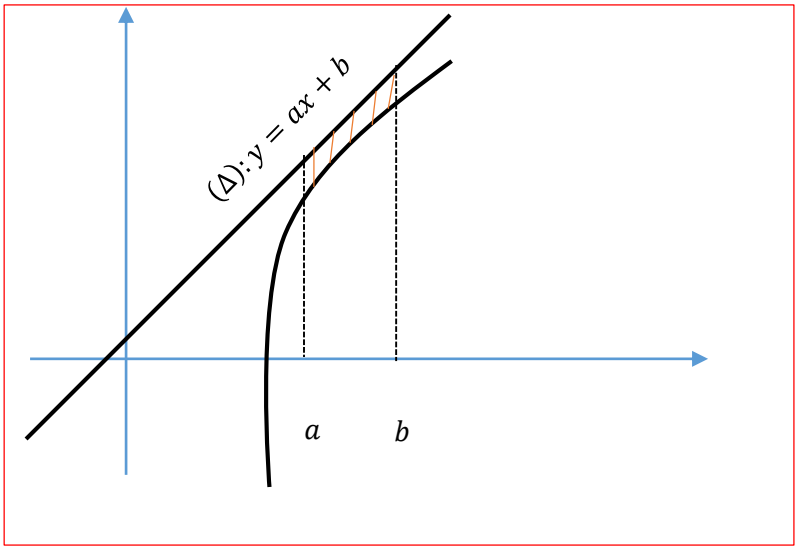


$$A = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))(U.A)$$

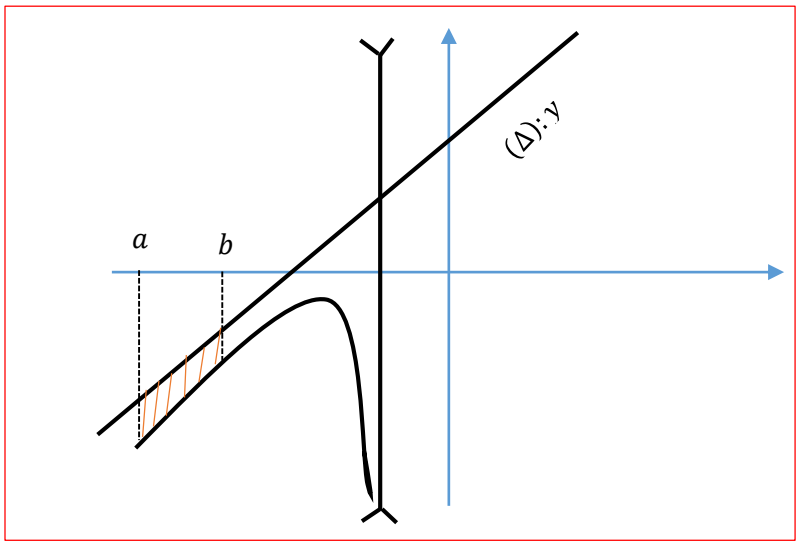
- **Cas particulier des courbes et asymptotes obliques (ce sont des cas récurrents)**



$$A = \int_a^b (f(x) - y)dx$$



$$A = \int_a^b (y - f(x))dx$$



$$A = \int_a^b (y - f(x))dx$$

APPLICATIONS IMMEDIATES

Activité 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ de courbe représentative C_f d'unité graphique 0,5 cm

1) Représenter C_f

2) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = -1$, l'axe des abscisses et la courbe C_f

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ de courbe représentative C_f d'unité graphique 2 cm

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

2) Montrer que C_f admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne en étudiant les branches infinies en $+\infty$

3) Etudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote oblique

4) Représenter C_f et son asymptote oblique

5) Hachurer le domaine D_1 défini par : $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ *puis calculer l'aire de D_1 en cm^2*

6) soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$. Hachurer le domaine de D_α limité par les droites d'équation $x = \alpha$, $x = 1$, la courbe C_f et l'asymptote oblique.

a) Calculer en cm^2 l'aire A_α et D_α

b) Que peut-on dire de la limite de A_α quand $\alpha \to +\infty$

6. CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE

Figure 1

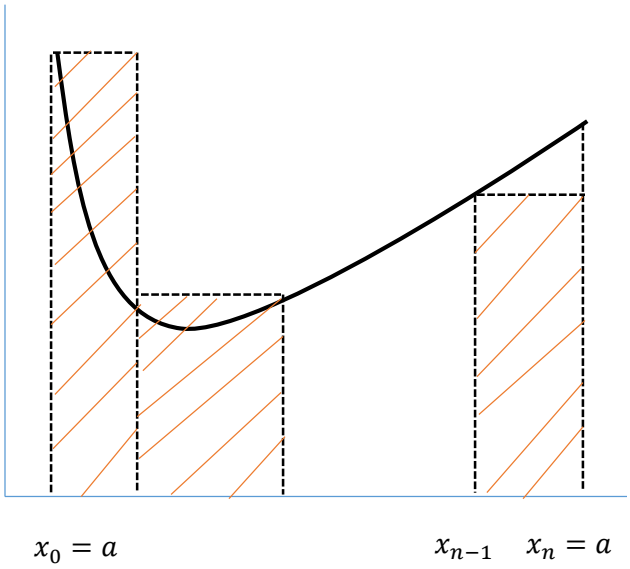
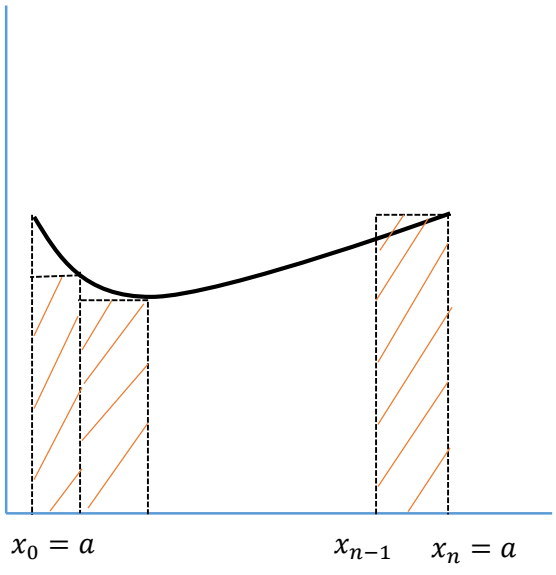


Figure 2



Méthode des rectangles

Elle consiste à diviser l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles réguliers d'extrémités $x_0 = a$....., $x_n = b$

On assimile alors l'aire A à la somme des aires ou des intégrales définis par les figures $A = \int_a^b f(x)dx$

Figure 1 :

$$S_n = \frac{b-a}{n}f(x_0) + \frac{b-a}{n}f(x_1) + \cdots \frac{b-a}{n}f(x_{n-1})$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Figure 2 :

$$S'_n = \frac{b-a}{n}f(x_1) + \frac{b-a}{n}f(x_2) + \cdots \frac{b-a}{n}f(x_n)$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

La précision des calculs est d'autant plus grande que n est élevé.

Propriétés :

Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\forall\, x \in [a;b]\ |f'(x)| < M$

Alors si

$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$; $S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $A = \int_a^b f(x)dx$ on a :

$$|S_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \text{ et } |S'_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

$$0 \leq |S_n - A| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to+\infty} |S_n - A| \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |S_n - A| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

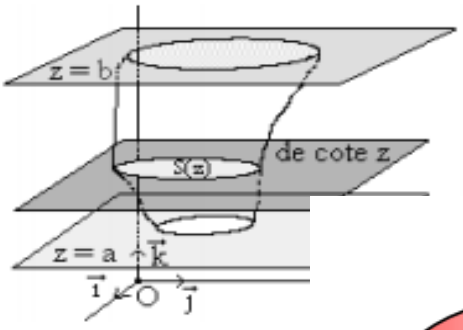
$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)dx$$

7. CALCUL DE VOLUME

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ On appelle unité de volume noté $u.v$. Le nombre $||\vec{\imath}|| \times ||\vec{\jmath}|| \times ||\vec{k}||$. On considère un solide limité par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.

Pour tout z tel que b , on note Pz le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z , $S(z)$ l'aire de la section du solide par le plan Pz . Si S est une fonction continue sur $[a;\ b]$, alors le volume du solide est :

$$V = \int_a^b S(z)dz\ u.v$$



- **Calcul du volume d'une sphè**

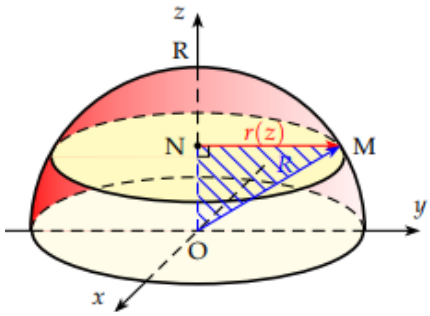
Compte tenu de la symétrie de la sphèr

d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2. On découpe

ainsi la demi-sphère avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz).

Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.

La surface de ces cercles $S(z)$ vaut : $\boldsymbol{S(z) = \pi r^2(z)}$



Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en $N(0,0,z)$: $r^2(z) = R^2 - z^2$

On obtient alors le demi-volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(z)\,dz = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi R^3$$

On en déduit alors le volume de la sphère que tout le monde a appris : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

- **Volume d'un cône**

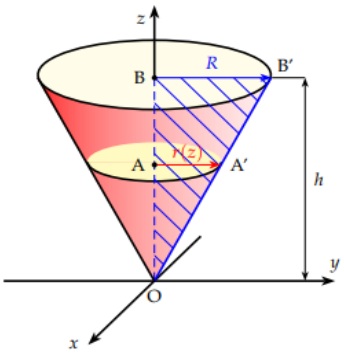
On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires

à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de

rayon $r(z)$. Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction

de z à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles : OBB' et OAA',

on a avec $A(0,0,z)$:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} \Leftrightarrow \frac{z}{h} = \frac{r(z)}{R} \Leftrightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

$V = \int_0^h \pi r^2(z)dz = \int_0^h \pi \frac{R^2 z^2}{h^2} dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2\, dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

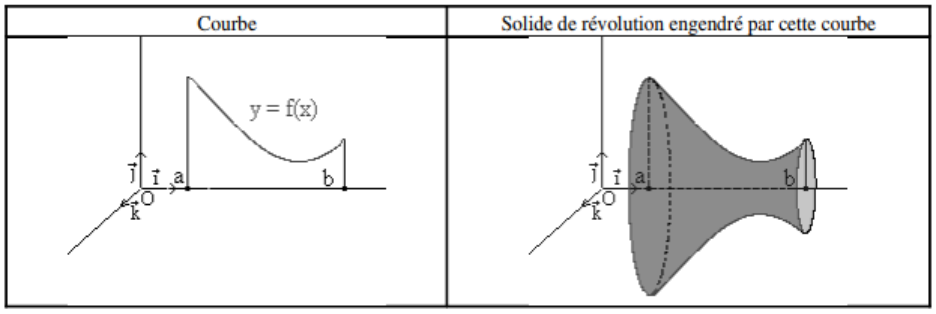
On retrouve ainsi le volume du cône que tout le monde connaît : $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$

- **Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe**

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la partie du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a, x = b$ et l'axe $(O, \vec{\imath})$. En tournant autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$, cette partie de plan engendre un solide de résolution limité par les plans parallèles à $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'abscisse respectives a et b. La section S du solide par le plan parallèle à $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'abscisse x est un disque de rayon $f(x)$, donc d'aire $\pi f^2(x)$.

Le volume de ce solide est en unité de volume :

$$\int_a^b \boldsymbol{S(x)dx} = \boldsymbol{\pi} \int_a^b \boldsymbol{f^2(x)dx}$$



Exercice d'application

On considère le paraboloïde construit en faisant tourner la parabole d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$ autour de l'axe (Oy). Le paraboloïde est un solide compris entre les plans d'équations $y = 0$ et $y = 1$, et la section du solide par le plan perpendiculaire à $(O; \vec{\jmath})$ est un disque de rayon x, donc d'aire $\pi x^2 = \pi y$.

Alors le volume de ce paraboloïde $(Vol) = \int_0^1 \pi y dy = \left[\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\, u.v.$

8. FONCTIONS DEFINIES PAR UNE INTEGRALE

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit $g : I \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$

g est dérivable sur I et on a : $\boldsymbol{g'(x) = f(x)}$. En fait g étant une primitive de f qui s'annule en a.

Propriétés:

- $g(a) = 0$
- $g(b) = \int_a^b f(t)dt = constante$
- Si f est positive (resp. négative) dans un intervalle $[p; q]$ qui contient a,
  Si $x > a$ alors f et g ont même signe
  Si $x < a$ alors f et g ont les signes opposés
- Si f est continue alors g est continue et dérivable ; si f est dérivable alors ' est continue et dérivable.

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer la dérivée de la fonction g définie de :

$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+tan^4t}$$

Solution :

Ici $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $a = 0 \in I$. $f : x \mapsto \frac{1}{1+tan^4t}$

La fonction f *est continue sur* I *donc la fonction* g *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et on a :*

$$g'(x) = \frac{1}{1+tan^4x}$$

T.A.F A LA MAISON

Activité 1 :

Soit f *la fonction définie et dérivable sur* $[0;+\infty[$ *telle que* $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. *On admet que la fonction* f *est positive sur* $[0;+\infty[$. *On note* (C) *la courbe représentative de sur* f *dans un repère orthogonal du plan représentée ci-dessous.*

Soit la suite sur (I_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $I_n = \int_0^n f(x)dx$ *(on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de* I_n *en fonction* n.

1) Montrer que la suite (I_n) *est croissante*

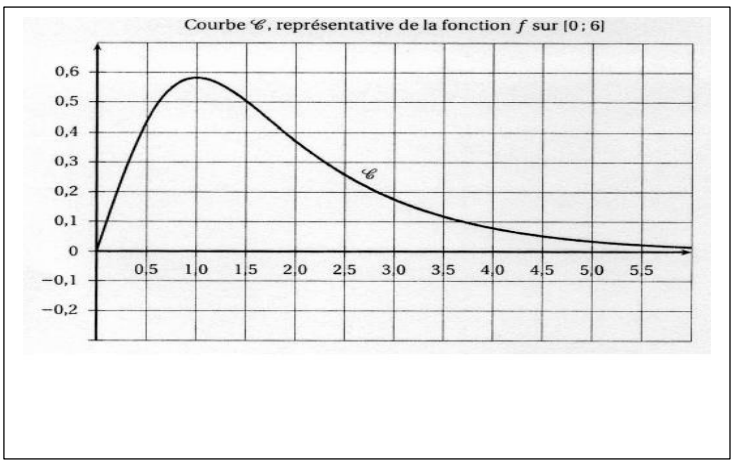
2) On admet que pour tout réel x *de l'intervalle* $[0;+\infty[$ $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$

b) Soit H *la fonction définie et dérivable sur* $[0;+\infty[$ *telle que* $H(x) = (-x-1)e^{-x}$ *Déterminer la fonction dérivée* H' *de la fonction H.*

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leq 2$

3) Montrer que la suite (I_n) *est convergente (on ne demande pas la valeur de sa limite)*



Activité 2 :

t désigne un réel positif. On suppose qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{ln5}{10}t}$

1a) Etudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$

b) Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$

2) Soit θ un réel tel que $\theta \geq 10$

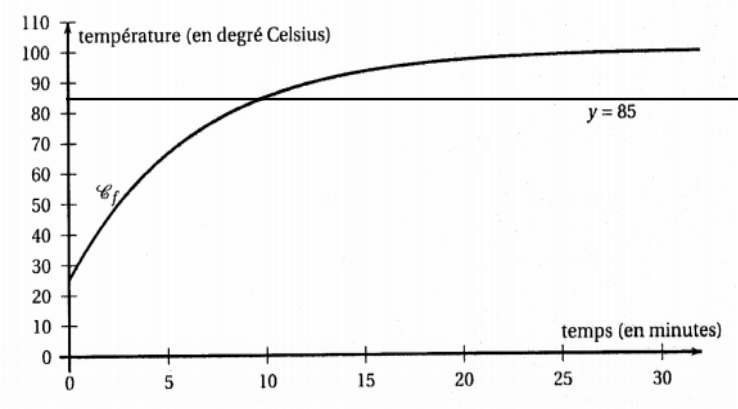
On note $A(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équations $t = 10, t = \theta, y = 85$ et la courbe représentative (C_f) de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $A(\theta)$est supérieure à 80.

a) *Justifier à l'aide du graphique donné ci-dessous que $A(25) > 80$*

b) *Justifier que pour $\theta \geq 10$ on a $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{ln5}{10}t}dt$*

c) *La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?*



Activité 3 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

1a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$

c) *Montrer que $u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$ et en déduire u_0*

2a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

3) Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer

Les Grands profs de Maths

Mathématiques
Terminales scientifiques C & E
Support de Cours sur les Coniques.

22 février 2005

Rolin WEMBA

Table des matières

1 Les coniques **1**

1.1 Généralité sur les coniques . . . 1

1.1.1 **Définition et Propriétés** . . . 3

1.1.2 **Régionnement du plan par une conique.** . . . 3

1.2 Equation réduite d'une conique . . . 3

1.2.1 **Equation réduite d'une Parabole** . . . 3

1.2.2 **Equation réduite d'une conique à centre** $(e \neq 1)$**.** . . . 5

1.2.3 **Courbes d'équations** $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ . . . 6

1.3 Etude analytique de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole . . . 8

1.3.1 **Etude analytique de la parabole.** . . . 8

1.3.2 **Etude analytique de l'ellipse.** . . . 9

1.3.3 **Etude analytique de l'hyperbole.** . . . 11

1.3.4 **Exercices** . . . 13

1.3.5 **Exercices d'applications** . . . 13

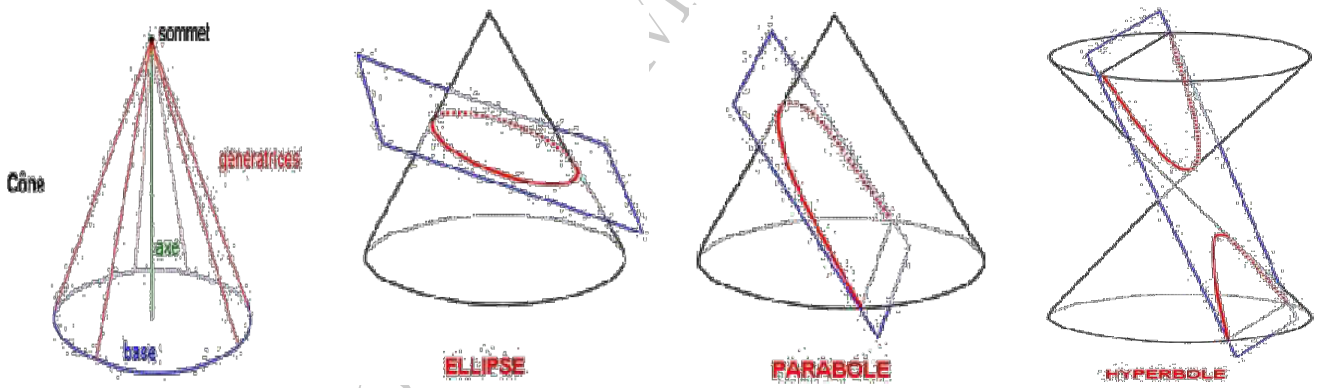
Rolin WAMBA

Les coniques

INTRODUCTION

Lorsqu'on sectionne un cône de révolution par un plan parallèle à la base de ce cône, on obtient un cercle. Dans le cas contraire on obtient soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole. les cercles, les ellipses, les paraboles et les hyperboles sont donc appelés coniques.

Illustration



Dans ce chapitre, nous allons nous focaliser sur l'étude des paraboles, des ellipses et des hyperboles.

Objectifs pédagogiques opérationnels :
A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :
↪ Retrouver l'équation cartésienne réduite d'une conique ;
↪ A partir de l'équation $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, retrouver la nature et les éléments caractéristiques de la conique(centre éventuel, foyer, directrices, excentricité, sommets,axes, asymptotes éventuelles) ;
↪ Tracer une conique.

1.1 Généralité sur les coniques

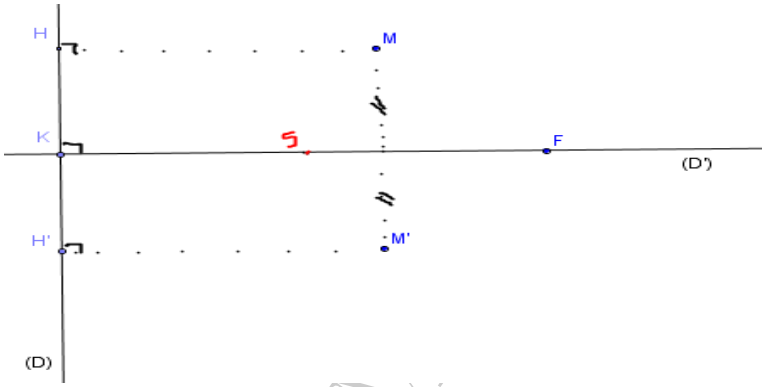
Activité

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan, F un point qui n'appartient pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif. Soit M un point du plan, on désigne par H son projeté orthogonal sur la droite $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$, K est le projeté orthogonal de F sur la droite $(\mathcal{D})$. Soit (Γ_e) l'ensemble des points M du plan tels que

$$\frac{MF}{MH} = e.$$

1. Soit $M \in (\Gamma_e)$, $M' = S_{(\mathcal{D}')}(M)$ et H' le projeté orthogonal de M' sur la droite $(\mathcal{D})$.
   a Comparer $\dfrac{M'F}{M'H'}$ et $\dfrac{MF}{MH}$ puis déduit que $M' \in (\Gamma_e)$,
   b Que représente la droite $(\mathcal{D}')$ pour (Γ_e)
2. Si $e = 1$, soit $S = mil[FK]$, montrer que S est l'unique point d'intersection de (Γ_1) et $(\mathcal{D}')$.
3. Si $e \neq 1$, soient $A = bar(F;1);(K;e)$ et $A' = bar(F;1);(K;-e)$
   Montrer que A et A' sont les seuls points d'intersection de (Γ_e) et $(\mathcal{D})$.

Solution



1. Soit $M \in (\Gamma_e)$, $M' = S_{(\mathcal{D}')}(M)$ et H' le projeté orthogonal de M' sur la droite $(\mathcal{D})$.
   a Comparons $\dfrac{M'F}{M'H'}$ et $\dfrac{MF}{MH}$ puis déduit que $M' \in (\Gamma_e)$,
   On a : $MH = M'H'$ puisque $HMM'H'$ est un rectangle. De même $MF = M'F$ puisque $HM'F$ est un triangle isocèle en F, d'où $\dfrac{M'F}{M'H'} = \dfrac{MF}{MH}$.
   déduisons que $M' \in (\Gamma_e)$.
   d'après ce précède, on a $\dfrac{M'F}{M'H'} = \dfrac{MF}{MH} = e$ ce qui implique $M' \in (\Gamma_e)$.
   b Que représente la droite $(\mathcal{D}')$ pour (Γ_e) ? La droite $(\mathcal{D}')$ représente **un axe de symétrie** pour (Γ_e)
2. Si $e = 1$, soit $S = mil[FK]$, montrons que S est l'unique point d'intersection de (Γ_1) et $(\mathcal{D}')$.
   $(\Gamma_1) = \left\{ M \in \mathcal{P} / \dfrac{MF}{MH} = 1 \right\}$
   Soit $M \in (\Gamma_1) \bigcap (\mathcal{D}')$, $\dfrac{MF}{MH} = 1$ et $H = K$ impliquent $MF = MK$. Ainsi, le seul point de $(\mathcal{D}')$ équidistant de F et K est $S = mil[FH]$. D'où $M = S$.
   Donc $\{S\} = (\Gamma_1) \bigcap (\mathcal{D}')$.
3. Si $e \neq 1$, soient $A = bar(F;1);(K;e)$ et $A' = bar(F;1);(K;-e)$
   Montrons que A et A' sont les seuls points d'intersection de (Γ_e) et $(\mathcal{D})$.
   Soit $M \in (\Gamma_e) \bigcap (\mathcal{D}')$, on a $\dfrac{MF}{MH} = e$ et $H = K$. D'où $\dfrac{MF}{MK} = e$.

$$\begin{aligned}
\frac{MF}{MK} = e \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{MF^2}{MK^2} = e^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad MF^2 - e^2 MK^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}\right)\left(\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = 0 \quad ou \quad \overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad M = bar\{(F;1),(K;-e)\} \quad ou \quad M = bar\{(F;1),(K;e)\}
\end{aligned}$$

On pose $A = bar(F;1);(K;e)$ et $A' = bar(F;1);(K;-e)$.

Rolin WAMBA

1.1.1 Définition et Propriétés

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan, F un point qui n'appartient pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif. On appelle Conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ *où* H est le projeté orthogonal de M sur la droite $(\mathcal{D})$.

La conique (Γ) est appelée :
√ Ellipse si $0 < e < 1$,
√ Parabole si $e = 1$,
√ hyperbole si $e > 1$.

Propriété :

Soit (Γ) une conique de foyer F de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e.

(P_1) La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de (Γ). La droite (Δ) est appelée axe focal de la conique (Γ).

(P_2) – Si $e = 1$ (Γ) coupe (Δ) en un seul point S milieu de $[FK]$. Le point S est appelé sommet de la parabole.
– Si $e \neq 1$ alors Γ coupe (Δ) en deux points distinct A et A' qui sont les sommets de la conique. A et A' sont situés sur l'axe focal.

Remarque

Si $e \neq 1$ alors $A = bar\{(F;1),(K;e)\}$ et $A' = bar\{(F;1),(K;-e)\}$

1.1.2 Régionnement du plan par une conique.

Soit (Γ) une conique de foyer F de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e.

♦ On appelle Intérieur de (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MF < eMH$, H étant le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$;

♦ On appelle extérieur de (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MF > eMH$;

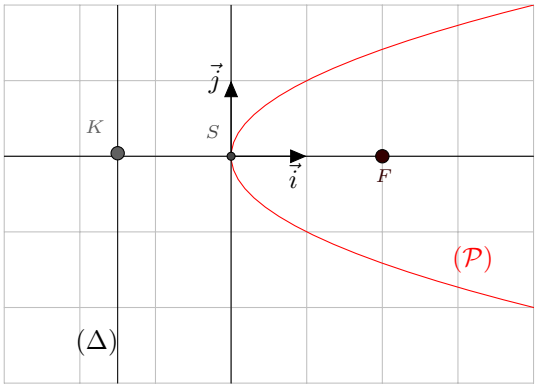
Remarque

1. Le foyer F d'une conique est intérieur à cette conique ;
2. Tout point de la directrice $(\mathcal{D})$ d'une conique est extérieur à cette conique.

1.2 Equation réduite d'une conique

1.2.1 Equation réduite d'une Parabole

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.
On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$. le milieu du segment $[FK]$ est le sommet S de la parabole $(\mathcal{P})$.
On munit le plan d'un repère orthonormé $(S;\vec{i},\vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$.



Posons $KF = p$, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ et $(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}$
Soit $M(x,y)$ un point du plan, $H\left(-\frac{p}{2};y\right)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$
On a :

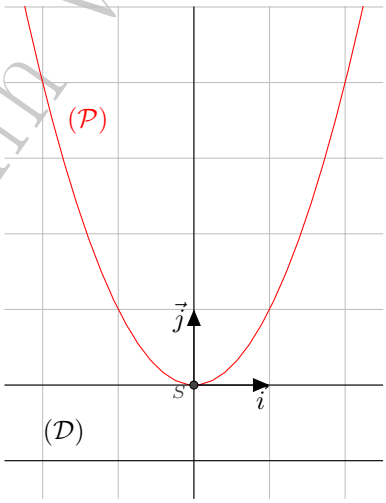
$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow MF = MH \\ &\Leftrightarrow MF^2 = MH^2 \\ &\Leftrightarrow (x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = (x+\frac{p}{2})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ &\Leftrightarrow y^2 = 2px \end{aligned}$$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété :
Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et de sommet S.
Dans un repère orthonormé $(S;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, $(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y^2 = 2px$, *où* p est la distance de F à la droite $(\mathcal{D})$.
cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole.
le nombre réel strictement positif p est appelé paramètre de la parabole.

Remarque

(1) Un échange des axes de repère $(S;\vec{i})$ et $(S;\vec{j})$ conduit à une équation réduite de la forme $x^2 = 2py$.
Dans ce cas, l'axe focal de la parabole est alors la droite de repère $(S;\vec{j})$, le foyer est $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ et la directrice $(\mathcal{D}) : y = -\frac{p}{2}$



(2) Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe d'équation $y^2 = 2ax$ est une parabole de sommet O, d'axe focal la droite de repère $(O;\vec{i})$, de paramètre $|a|$, de foyer $F\left(\frac{a}{2};0\right)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$.

Exemple

Donner la nature et les éléments caractéristiques des ensembles suivants :

$$(\Gamma) : y^2 + 4x = 0$$
$$(\Gamma') : x^2 - 8y = 0$$

Solution

• $(\Gamma) : y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -4x = 2 \times (-2)x$.
Donc (Γ) est une parabole de sommet $O(0;0)$, de foyer $F(-1;0)$, de paramètre $a = |-2| = 2$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = 1$.

Rolin WAMBA

• $(\Gamma)' : x^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8y = 2 \times 4y$.

Donc (Γ') est une parabole de sommet $O(0;0)$, de foyer $F(O;2)$, de paramètre $a = |4| = 4$ et de directrice $(\mathcal{D}) : y = -2$.

Exercice

Déterminer les éléments caractéristiques (sommet ; axe focal ; foyer ; paramètre et directrice) des paraboles suivants $(\mathcal{P}_1) : y^2 + 16x = 0$; $(\mathcal{P}_\in) : y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

(3) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe d'équation $x^2 = 2ay$ est une parabole de sommet O, d'axe focal la droite de repère $(O; \vec{j})$ de paramètre $|a|$ de foyer $F\left(0; \frac{a}{2}\right)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : y = -\frac{a}{2}$.

Exemple

La courbe d'équation $x^2 + 9y = 0$ est une parole de sommet O d'axe focal la droite de repère $(O; \vec{j})$, de paramètre $\frac{9}{2}$, de foyer $F\left(0; -\frac{9}{4}\right)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = \frac{9}{4}$.

Exercice

Déterminer les éléments caractéristiques (sommet ; axe focal ; foyer ; paramètre et directrice) des paraboles suivants $(\mathcal{P}_1) : x^2 + 8y = 0$; $(\mathcal{P}_2) : x^2 - 8y + 4x + 6 = 0$.

1.2.2 Equation réduite d'une conique à centre ($e \neq 1$).

Propriété :

Soit (Γ) une conique de foyer F de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e $(e \neq 1)$. On désigne par A *et* A' les sommets de (Γ) situés sur son axe focal.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[AA']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$, (Γ) est la courbe d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

où $a = OA$ et $c = OF$.

Remarque

(1) Un change des axes de repère $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$ conduit l'équation $\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- L'axe focal est la droite de repère $(O; \vec{j})$.
- Le foyer est $F(0; c)$.
- La directrice est $(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c}$.
- Les sommets situés sur l'axe focal sont les points $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$.

(2) F' et $(\mathcal{D}')$ image de F et $(\mathcal{D})$ par la symétrie de centre O sont également un foyer et une directrice de (Γ).

La distance $FF' = 2c$ est appelée distance focale de (Γ).

(3) – Si $0 < e < 1$, alors (Γ) est une ellipse $\Rightarrow \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow c < a$

posons $b^2 = a^2 - c^2$ l'équation de (Γ) devient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

– Si $e > 1$ alors (Γ) est une hyperbole $\frac{c}{a} > 1 \Leftrightarrow c > a$ posons $b^2 = c^2 - c^2$ l'équation (Γ) devient $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Conséquences

Soit (Γ) une conique d'excentricité e $(e \neq 1)$.

La médiatrice de $[AA']$ est un axe de symétrie de (Γ).

Le milieu O de $[AA']$ est centre de symétrie de (Γ).

En Résumé on a le tableau récapitulatif suivant

Equation	Nature	c	e	Foyer	Directrice	axe focal	sommets principaux
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>0$	Ellipse	$\sqrt{a^2-b^2}$	$\frac{c}{a}$	F$\binom{c}{0}$ F'$\binom{-c}{0}$	$(\mathcal{D}):x=\frac{a^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):x=-\frac{a^2}{c}$	Droite de repère $(O;\vec{i})$	A$\binom{a}{0}$ A'$\binom{-a}{0}$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $b>a>0$	Ellipse	$\sqrt{b^2-a^2}$	$\frac{c}{b}$	F$\binom{0}{c}$ F'$\binom{0}{-c}$	$(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):y=-\frac{b^2}{c}$	Droite de repère $(O;\vec{j})$	B$\binom{0}{b}$ B'$\binom{0}{-b}$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Hyperbole	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{c}{a}$	F$\binom{c}{0}$ F'$\binom{-c}{0}$	$(\mathcal{D}):x=\frac{a^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):x=-\frac{a^2}{c}$	Droite de repère $(O;\vec{i})$	A$\binom{a}{0}$ A'$\binom{-a}{0}$
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Hyperbole	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{c}{b}$	F$\binom{c}{0}$ F'$\binom{0}{-c}$	$(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}$ $(\mathcal{D}'):y=-\frac{b^2}{c}$	Droite de repère $(O;\vec{j})$	B$\binom{0}{b}$ B'$\binom{0}{-b}$

NB

Lorsque l'axe focal est la droite de repère $(O;\vec{i})$ alors le milieu O de $[AA']$ est appel centre de la conique
Lorsque l'axe focal est la droite de repère $(O;\vec{j})$ alors le milieu O de $[BB']$ est appel centre de la conique.

Exemple

♣ En considérant la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Longleftrightarrow\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1,$$

On identifie $a=5$ et $b=3$, donc $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est l'ellipse de centre $O(0;0)$, de foyers $F(4;0)$ et $F'(-4;0)$, de sommets $A(5;0)$ et $A'(-5;0)$, de directrices $(\mathcal{D}):x=\frac{25}{4}$ et $(\mathcal{D}'):x=\frac{-25}{4}$ et d'excentricité $\frac{4}{5}$.

♣ En considérant maintenant $\mathcal{H}$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1\Longleftrightarrow\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=1,$$

On identifie $a=2$ et $b=1$, donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est l'hyperbole de centre $O(0;0)$, de foyers $F(\sqrt{5};0)$ et $F'(-\sqrt{5};0)$, de sommets $A(2;0)$ et $A'(-2;0)$, de directrices $(\mathcal{D}):x=\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $(\mathcal{D}'):x=\frac{-4}{\sqrt{5}}$ et d'excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

1.2.3 Courbes d'équations $Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$

On suppose que les réels A et B sont non tous nuls, c'est-à-dire $|A|+|B|\neq 0$.
Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On se propose de déterminer, sur quelques exemples, la nature de l'ensemble (Γ) des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0.$$

Propriétés :
soit la conique Γ d'équation $Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$ où A, B, C, D, E sont les réels avec A et B non tous nuls. On a :

1. Si $AB=0$ alors Γ est une Parabole.
2. Si $AB<0$ alors Γ est une hyperbole.
3. Si $AB>O$ alors Γ est une ellipse.

Exercices résolus

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des ensembles suivants :

Rolin WAMBA

$(\mathcal{P}) : x^2 + 4x + 4y = 0\,;$
$(\mathcal{E}) : x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0\,;$
$(\mathcal{H}) : 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0.$

Résolution

$(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4y = 0 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = 4(1-y) \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = -4(y-1) \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{S}\binom{-2}{1}$; Soit $\mathrm{M}\binom{x}{y}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\mathrm{M}\binom{X}{Y}$ dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + X \\ y = 1 + Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = X \\ y - 1 = Y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (x+2)^2 = -4(y-1) \\ &\Leftrightarrow X^2 = -4Y^2 \end{aligned}$$

$(\mathcal{P})$ est la parabole de sommet S, d'axe focal la droite de repère $(S; \vec{j})$, de directrice $(\mathcal{D}) : y = 1$, de foyer $\mathrm{F}\binom{0}{-1}$ de paramètre 2.

$(\mathcal{E})$

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{O'}\binom{1}{0}$ et soit $\mathrm{M}\binom{X}{Y}$ dans $(O'; \vec{i}, \vec{j})$ donc $M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1$
$(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre $\mathrm{O'}\binom{1}{0}$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'axe focal la droite de repère $(O'; \vec{i})$ de foyer focal $\mathrm{F}\binom{\sqrt{2}}{0}$ et $\mathrm{F'}\binom{-\sqrt{2}}{0}$; les sommets sont : $\mathrm{A}\binom{2}{0}$ et $\mathrm{A'}\binom{-2}{0}$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = 2\sqrt{2}$ et $(\mathcal{D}') : x = -2\sqrt{2}$.

$(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathcal{H}) &\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - (y+2)^2 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{O'}\binom{0}{-2}$ et soit $\mathrm{M}\binom{X}{Y}$ dans $(O'; \vec{i}, \vec{j})$ donc $M \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2\sqrt{2}} = 1$
$(\mathcal{H})$ est l'hyperbole de centre $\mathrm{O'}\binom{0}{-2}$, d'excentricité $e = \sqrt{3}$, d'axe focal la droite de repère $(O'; \vec{i})$ de foyer focal $\mathrm{F}\binom{2\sqrt{3}}{0}$ et $\mathrm{F'}\binom{-2\sqrt{3}}{0}$; les sommets sont : $\mathrm{A}\binom{2}{0}$ et $\mathrm{A'}\binom{-2}{0}$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $(\mathcal{D}') : x = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rolin WAMBA

1.3 Etude analytique de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole

1.3.1 Etude analytique de la parabole.

Activité

On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2px \quad (p > 0)$:

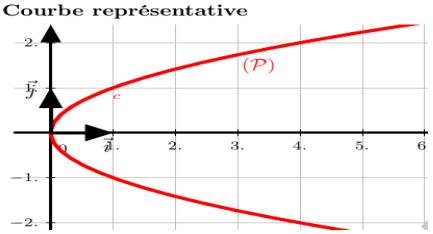
1. Démonter que $(\mathcal{P})$ est la réunion des courbes représentatives de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ des fonctions respectives $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$ et $f_2 : x \mapsto -\sqrt{2px}$.
2. Etudier les variations de la fonction $f_1 x \mapsto \sqrt{2px}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$
3. Construire alors $(\mathcal{P}_1)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. puis complète $(\mathcal{P}_2)$ par la symétrie d'axe (Ox).

Résolution

1. Démontrons que $(\mathcal{P})$ est la réunion de deux courbes.
   $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2ps}$ ou $y = -\sqrt{2px}$. cdfd
2. Etudions les variations de f_1 :$D_{f_1} = [0; +\infty[$
   f_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :$f_1'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}} > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

3. **Courbe représentative**



a) Equation de la tangente en un point de la parabole

Propriété :
Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax \quad (a \neq 0)$. La tangente en un point $\mathrm{M}\binom{x_0}{y_0}$ de $(\mathcal{P})$ a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$.
Lorsque $(\mathcal{P})$ a pour équation $x^2 = 2ay \quad (a \neq 0)$, la tangente en $\mathrm{M}\binom{x_0}{y_0}$ a pour équation $xx_0 = a(y + y_0)$.

Exemple

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$. L'équation de la tangente au point $\mathrm{A}\binom{-1}{-2}$ est : $-2y = 2(x-1)$ ie $x + y - 1 = 0$.
La parabole d'équation $x^2 - 8y = 0$ a pour tangente au point $\mathrm{M}\binom{4}{2} \in (\mathcal{P})$: $x - y - 2 = 0$.

b) Régionnement du plan par la parabole

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax (a \neq 0)$, $\mathrm{M}\binom{x}{y}$ un point du plan, $H\left(-\frac{a}{2}, y\right)$ Le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$, $\mathrm{F}(\frac{a}{2}, 0)$.

$$
\begin{aligned}
M \ est \ interieur \quad (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow MF^2 < MH^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 < \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} < x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \\
&\Leftrightarrow y^2 < 2ax
\end{aligned}
$$

$$
M \ est \ exterieur \quad (\mathcal{P}) \Leftrightarrow y^2 > 2ax
$$

1.3.2 Etude analytique de l'ellipse.

Activité

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0 ;b>0 et a>b)

1. Montrer que $(\mathcal{E})$ est la r union des courbes représentatives $(\mathcal{E}_1)$ et$(\mathcal{E}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$
2. Vérifier que $(\mathcal{E}_1)$ et$(\mathcal{E}_2)$ sont symétriques par rapport l'axe des abscisses.
3. Etudier la parité de de la fonction f_1 et d dure le domaine d'étude.
4. Etudier les variations de la fonction f_1 sur [0,a].
5. construis alors $(\mathcal{E})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Résolution

1. Montrons que $(\mathcal{H})$ est la réunion de deux courbes.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\binom{x}{y} \in (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \\ &\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad cqfm. \end{aligned}$$

2. Vérification : on a : $\forall x \in [a,-a]$, $f_2(x)=-f_1(x)$ d'où le résultat.
3. Etudions la parité de la fonction f_1.
   Pour tout $x \in [a,-a]$, $-x \in [a,-a]$ on a :

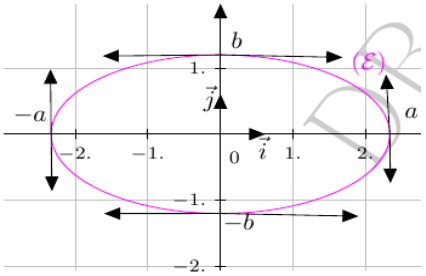
$$\begin{aligned} f_1(-x) &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(-x)^2} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

   D'où f_1 est une fonction paire et par conséquent on peut étudier f_1 sur $[0;a]$.
4. Etudions les variations de f_1.
   f_1 est dérivable sur $[0,a[$ et pour tout $x \in [0,a[$, $f_1'(x)=-\frac{a}{b}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}<0$ donc f_1 est strictement d croissante sur $[0,a]$. De plus : $\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}=\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a-x}}{x-a}\sqrt{a+x}$; donc $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}=-\infty$
   donc $(\mathcal{E}_1)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $x_0=a$.

Tableau de variation

x	0		a
$f_1'(x)$		$-$	‖
$f_1(x)$	b	↘	0

5. Construction de la courbe



Remarque

- $[AA']$ est le grand axe.
- $[BB']$ est le petit axe.
- $\mathcal{C}(O;a)$ le cercle de centre O et de rayon a est le cercle principal.
- $\mathcal{C}(O;b)$ le cercle de centre O et de rayon b est le cercle secondaire.

Rolin WAMBA DR

a) Equation de la tangente en un point de l'ellipse

Propriété :
Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La tangente en un point $\mathrm{A}\binom{x_0}{y_0}$ de $(\mathcal{E})$ a pour équation :

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

b) Représentation paramétrique d'une ellipse

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\binom{x}{y}\in(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta\in\mathbb{R},\ \frac{x}{a}=\cos\theta \text{ et } \frac{y}{b}=\sin\theta\\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta\in\mathbb{R},\ x=a\cos\theta \text{ et } y=b\sin\theta.\end{aligned}$$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété :
L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\in\mathbb{R})$

c) Image du cercle principal par une affinité

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\in\mathbb{R})$ Soit $(\mathcal{C})$ le cercle principal c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon a.
$\mathrm{M}\binom{x}{y}\in(\mathcal{C})\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\in\mathbb{R})$ Soit $\mathrm{M}\binom{x}{y}$ un point du plan et f l'affinité orthogonale d'axe (AA') o $\mathrm{A}\binom{a}{0}$ et $\mathrm{A'}\binom{-a}{0}$ et de rapport $\frac{b}{a}$ $\mathrm{M'}\binom{x'}{y'}$ est l'image de M par f. On a $\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{b}{a}y\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}x'=a\cos\theta\\ y'=b\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\in\mathbb{R})$

Propriété :
Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad(a>b>0)$, de sommets A et A' situés sur l'axe focal.$(\mathcal{E})$ est l'image du cercle de diamètre $[AA']$ par l'affinité orthogonal d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

d) Définition bifocal de l'ellipse

Propriété :
Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad(a>b>0)$, F et F' les foyers. L'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$ est $(\mathcal{E})$.

Exercices d'application

1. Déterminer l'équation de l'ellipse de représentation paramétrique suivante ainsi que ses éléments caractéristique : $\begin{cases}x=2\cos\theta-3\\ y=3\sin\theta+1\end{cases}\quad(\theta\in\mathbb{R})$

Rolin WAMBA

2. Donner la définition bifocale de l'ellipse suivante : $(\mathcal{E}_1) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
3. Donner la d finition bifocale de l'ellipse suivante : $(\mathcal{E}_2) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Résolution

1. Déterminons l'équation de l'ellipse et ses éléments caractéristiques :
$\begin{cases} x = 2\cos\theta - 3 \\ y = 3\sin\theta + 1 \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 2\cos\theta \\ y-1 = 3\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 4\cos^2\theta \\ (y-1)^2 = 9\sin^2\theta \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{4}(x+3)^2 = \cos^2\theta \\ \frac{1}{9}(y-1)^2 = \sin^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow$
$\frac{(x+3)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$

Soit O'$\binom{-3}{1}$ et soit M$\binom{X}{Y}$ dans $(O'; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donc $M \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$
$(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre O'$\binom{-3}{1}$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, d'axe focal la droite de repère $(O'; \overrightarrow{j})$ de foyer focal F$\binom{0}{\sqrt{5}}$ et F'$\binom{0}{-\sqrt{5}}$; les sommets sont : B$\binom{0}{3}$ et B'$\binom{0}{-3}$ et de directrice $(\mathcal{D}) : y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ et $(\mathcal{D}') : y = -9\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Donnons la définition bifocale de l'ellipse suivante : $(\mathcal{E}_1) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que O soit milieu de $[FF']$ et $\overrightarrow{j} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ On a $MF + MF' = 2b$ et $FF' = 2c$ de plus F$\binom{0}{4}$ et F'$\binom{0}{-4}$, $a = 3$ et $b = 5$ donc $c = 4$
Conclusion : $(\mathcal{E}_1)$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 10$

3. Donnons la d finition de l'ellipse suivante $(\mathcal{E}_2) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
De même que précédemment ($\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 4$

Remarque

R_1 **cas où** $a > b > 0$
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; F$\binom{c}{0}$ et F'$\binom{-c}{0}$. Dans ce cas, $(\mathcal{E}) : \{M \in P : MF + MF' = 2a\}$

R_2 **cas où** $b > a > 0$
$c = \sqrt{b^2 - a^2}$; F$\binom{0}{c}$ et F'$\binom{0}{-c}$. Dans ce cas, $(\mathcal{E}) : \{M \in P : MF + MF' = 2b\}$

1.3.3 Etude analytique de l'hyperbole.

Activité

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$(a>0 ;b>0 et a>b)

1. Montrer que $(\mathcal{H})$ est la réunion des courbes représentatives $(\mathcal{H}_1)$ et$(\mathcal{H}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$
2. Vérifier que $(\mathcal{H}_1)$ et$(\mathcal{H}_2)$ sont symétriques par rapport l'axe des abscisses.
3. Etudier la parité de de la fonction f_1 et d dure le domaine d'étude.
4. Etudier les variations de la fonction f_1 sur $[0, +\infty[$.
5. construis alors $(\mathcal{H})$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Résolution

1. Montrons que $(\mathcal{H})$ est la réunion de deux courbes.

$$\begin{aligned} \text{M}\binom{x}{y} \in (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad cqfm. \end{aligned}$$

Rolin WAMBA

2. Vérification : on a : $\forall x \in]-\infty;a] \cup [a;+\infty[, \quad f_2(x) = -f_1(x)$ d'où le résultat.
3. Etudions la parité de la fonction f_1.
   Pour tout $x \in]-\infty;a] \cup [a;+\infty[, \quad -x \in]-\infty;a] \cup [a;+\infty[$ on a :

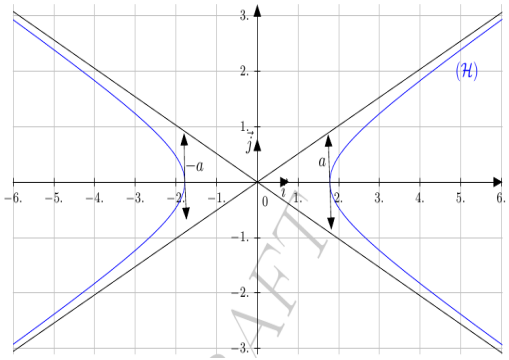
$$\begin{aligned} f_1(-x) &= \frac{b}{a}\sqrt{(-x)^2 - a^2} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

   D'où f_1 est une fonction paire et par conséquent on peut étudier f_1 sur $[a;+\infty[$.
4. Etudions les variations de f_1.
   f_1 est dérivable sur $]a;+\infty[$ et pour tout $x \in]a;+\infty[, \quad f_1'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $[a;+\infty[$. De plus : $\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a-x}}{x-a}\sqrt{a+x}$; donc $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} = +\infty$
   donc $(\mathcal{H}_1)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse $x_0 = a$.
5. On démontre que la droite (Δ) d'équation : $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote $(\mathcal{H}_1)$ en $+\infty$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	
$f_1(x)$	0	↗	$+\infty$

6. Construction de la courbe



Remarque

- L'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice
- La réunion des asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.
- Si $a = b$, les asymptotes sont orthogonales et $e = \sqrt{2}$; On dit que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole **équilatère**.

a) Equation de la tangente en un point de l'hyperbole

Propriété

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. La tangente en un point $A\binom{x_0}{y_0}$ de $(\mathcal{H})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

b) Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a}{-b}$ des vecteurs directeurs des asymptotes de $(\mathcal{H})$.
Soit $M\binom{x}{y}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $M\binom{X}{Y}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} \\ x\vec{i} + y\vec{j} &= X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(a\vec{i} - b\vec{j}) \\ &= a(X+Y)\vec{i} + b(X-Y)\vec{j} \end{aligned}$$

$$Donc \quad : \quad \begin{cases} x = a(X+Y) \\ y = b(X-Y) \end{cases}$$

Ainsi l'équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est l'expression d'une fonction homographique d'équation : $Y=\frac{1}{4X}$

Exercice d'application

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $a=2$ et $b=\sqrt{3}$. Donnons une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})$.

On a les formules de changement de repère suivant : $\begin{cases}x=X+Y\\y=\sqrt{3}(X-Y)\end{cases}$

Ainsi, dans le repère $(O;\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})$, $(\mathcal{H})$ a pour équation : $3(X+Y)^2-3(X-Y)^2=12$ en développant on trouve $Y=\frac{1}{Y}$.

d) Définition bifocal de l'hyperbole

Propriété :
Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>b>0)$, F et F' les foyers. L'ensemble des points M du plan tels que $|MF+MF'|=2a$ est $(\mathcal{H})$.

1.3.4 Exercices

E_1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'hyperbole dans le repère $(O;\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})$ telle que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
- $x^2-y^2+4=0$
- $x^2-y^2-6x+2y+24=0$

E_2 Donner la d finition bifocale de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ dans chacun des cas suivants.
- $(\mathcal{H}_1):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$
- $(\mathcal{H}_2):-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

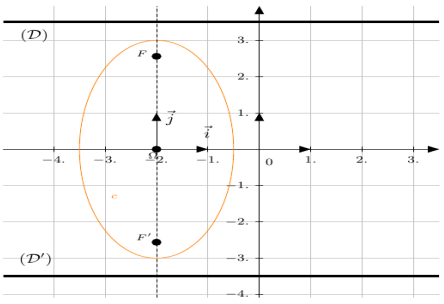
1.3.5 Exercices d'applications

Exercice 1

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) d'équation $4x^2+y^2+16x+7=0$

Solution

a=4,b=1 $ab>0$, on pourrait avoir affaire une ellipse.
On a $4x^2+y^2+16x+7=0\Leftrightarrow 4(x+2)^2+y^2=9\Leftrightarrow\frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$. On vérifie que dans le repère $(\Omega(-2,0);\vec{i},\vec{j})$ l'équation $(\Gamma):\frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$ est l'ellipse de centre $\Omega(-2,0)$, des sommets B$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et B'$\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$, d'axe focal $(\Omega,\vec{j})$.



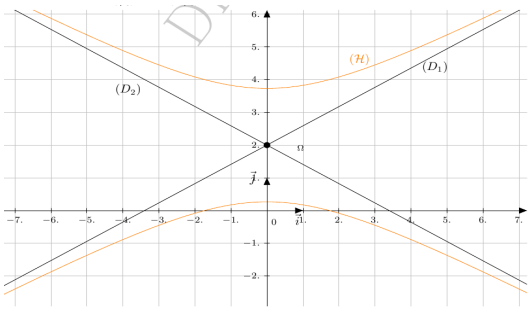
Exercice 2

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) d'équation $x^2-3y^2+12y-3=0$

Solution

Rolin WAMBA

a=1, b=-3 $ab<0$, on pourrait avoir affaire une hyperbole.
On a $x^2-3y^2+12y-3=0 \Leftrightarrow -x^2+3(y-2)^2=9 \Leftrightarrow$
$-\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$. On vérifie que dans le repère $(\Omega(0,2);\vec{i},\vec{j})$ l'équation
(Γ) : $-\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$ est l'hyperbole de centre $\Omega(0,2)$, des sommets B$\binom{0}{\sqrt{3}}$ et B'$\binom{0}{-\sqrt{3}}$, d'axe focal $(\Omega,\vec{j})$.



Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

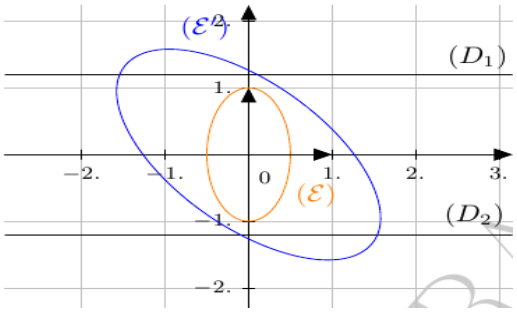
1. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de plan complexe dont l'affixe z vérifie $10z\bar{z}+3(z^2+\bar{z}^2=4)$. Indiquer ses foyers F et F' ainsi que que ses directrices.
2. Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. D terminer une équation de $(E')=f(E)$.
3. Montrer que (E') est une ellipse de foyer $f(F)$ et $f(F')$. Comparer les excentricités de (E) et (E').
4. Construire (E) et (E') dans le même repère.

Solution

1. On vérifie ais ment que : $10z\bar{z}+3(z^2+\bar{z}^2=4) \Leftrightarrow 4x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}+y^2=1$.
   (E) est l'ellipse de centre O, de grand axe $(O,\vec{j})$ et de petit axe $(O,\vec{i})$. $b=1$ $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, F$\binom{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et F'$\binom{0}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Les directrices ont pour équations : $(\mathcal{D}):y=\frac{b^2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $(\mathcal{D}):y=-\frac{b^2}{c}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2. $f=hor \Leftrightarrow z'=2e^{i\frac{\pi}{4}}z \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z'$. Ensuite $\bar{z}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}'$ On remplace ensuite dans l'expression de départ et on a :

$$\begin{aligned}(E'):10\Big(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z'\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{z}'\Big)+3\Big(\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}}z'^2+\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\bar{z}'^2\Big) &= 4\\ \text{c'est- -dire}\quad (E'):\frac{5}{2}z'\bar{z}'+\frac{3}{4}i\big(\bar{z}'^2-z'^2\big) &= 4\\ \text{finalement on a :}(E'):5x^2+6xy+5y^2 &= 8\end{aligned}$$

3. C'est une conséquence des transformations du plan, elles conserves les configurations. Si e' est l'excentricité de (E'), alors $e'=e$. En effet on a $a'=2a$ et $c'=2c$ donc $e'=\frac{c'}{a'}=\frac{2c}{2a}=e$;
4. **Construction de (E) et (E')**



Rolin WAMBA

CHAPITRE 15 : LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I-OBJECTIFS

- Résoudre à la main les équations différentielles linéaires du premier ordre ;
- Résoudre à la main les équations différentielles linéaires du second ordre.

II- ACTIVITES PREPARATOIRES

Activité 1 : *On donne* $f(x) = 2e^{-3x}$ $g(x) = -5e^{2x} + 3e^{-2x}$. *Etablir une relation entre* f' *et* f; g'' *et* g.

Solution

- $f(x) = 2e^{-3x} \Longrightarrow f'(x) = -6e^{-3x} = -3(2e^{-3x}) = -3f(x)$. Alors on a la relation suivante : $f' = -3f \Rightarrow f' + 3f = 0$
- $g(x) = -5e^{2x} + 3e^{-2x} \Longrightarrow g'(x) = -10e^{2x} - 6e^{-2x}$ $ainsi, g''(x) = -20e^{2x} + 12e^{-2x}$
$= 4(-5e^{2x} + 3e^{-2x})$
$= 4g(x)$

  Alors on a la relation suivante: $g''(x) = 4g(x) \Longrightarrow g''(x) - 4g(x) = 0$

Activité 2*: on considère l'égalité suivante (E) : y'(x) = y(x). On pourra écrire cette équation sous la forme : y' = y. (l'inconnue ici est la fonction y)*

1) Déterminer une fonction constante y qui vérifie l'équation (E).

2) Déterminer parmi les fonctions connues, une fonction non constante solution de (E).

3) Calculer la dérivée de la fonction g : $x \mapsto y\, e^{-x}$

4) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à : $y'\, e^{-x} - y\, e^{-x} = 0$, *ou encore à* $(y\, e^{-x})' = 0$. *En déduire que si y est solution de (E), alors la fonction g est constante. Donner alors toutes les solutions de (E).*

Solution

1) En posant $y = k$ et en remplaçant dans l'équation il vient $k = 0$, la fonction nulle est donc solution de (E).

2) La fonction usuelle : $x \mapsto e^x$ est solution de (E).

3) On trouve $g'(x) = y'\, e^{-x} - y\, e^{-x}$.

4) En utilisant les résultats précédents, on a : $y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0 \Leftrightarrow y'\, e^{-x} - y\, e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (y\, e^{-x})' = 0$. La fonction g a donc une dérivée nulle, elle est donc constante. On aboutit donc à $y\, e^{-x} = C$ donc à $y = Ce^x$, où C est une constante réelle.

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des fonctions de la forme : $x \mapsto Ce^x$, où C est une constante réelle.

Activité 3 *: on considère la fonction f définie pour tout x réel par :* $f(x) = 3\, e^{2x} - x^2 + 1$.

1) trouver deux nombres réels a et b tels que la fonction f soit une solution particulière de l'égalité (E): $ay' + by = -2x^2 + 2x + 2$.

2) en remplaçant a et b par les valeurs trouvées dans la question précédente, trouver une fonction polynôme du second degré solution de (E).

Solution

1) on a $f'(x) = 6e^{2x} - 2x$, en remplaçant dans l'égalité, il vient : $(6a + 3b)e^{2x} - bx^2 - 2ax + b = -2x^2 + 2x + 2$, par indentification on aboutit au système :

$$\begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ -b = -2 \\ -2a = 2 \end{cases}$$ Ce système a pour solution : $a = -1$ et $b = 2$.

L'expression cherchée est donc (E) : $-y' + 2y = -2x^2 + 2x + 2$

2) on cherche alors une fonction g telle que $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ solution particulière de (E). On a $g'(x) = 2\alpha x + \beta$, en remplaçant dans (E) il vient : $2\alpha x^2 + (2\beta - 2\alpha)x + (-\beta + 2\gamma) = -2x^2 + 2x + 2$ ce qui conduit au système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ 2\beta - 2\alpha = 2 \\ -\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$ Ce système admet le triplet (-1, 0, 1) pour solution.

La fonction cherchée g, solution particulière de (E), est définie par $g(x) = -x^2 + 1$.

Activité 4 *: On considère l'égalité suivante* $(E_1) : y''(x) - y(x) = 0$ *(l'inconnue est ici la fonction y)*

1) Déterminer, parmi les fonctions connues, une fonction f non constante solution de (E_1).

2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = e^{-x}$ *est une autre solution de* (E_1).

3) Vérifier que toute fonction de la forme $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ *est solution de (E) (*C_1 *et* C_2 *désignent des constantes réelles).*

Solution

1) $f(x) = e^x$.

2) $g(x) = e^{-x}$, $g'(x) = g(x) = e^{-x}$,, $g''(x) = g(x) = e^{-x}$,. On a alors $g''(x) - g(x) = 0$.

3) $(C_1 f''(x) + C_2 g''(x)) - (C_1 f(x) + C_2 g(x)) = (e^x - g(x) = e^{-x},) - (e^x - g(x) = e^{-x},) = 0$.

Activité 5 *: On considère l'équation* $(E_2) : y'' - 5y' + 6y = 0$

Afin de chercher des solutions de (E_2)*, on pose* $y = e^{rx}$*, où r désigne un nombre réel.*

1) Établir que si $y = e^{rx}$ *est solution de* (E_2)*, alors on a :* $r^2 - 5r + 6 = 0$.

2) Résoudre l'équation d'inconnue r précédente, on appellera r_1 *et* r_2 *ses solutions.*

3) Vérifier que les fonctions $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ *sont des solutions de* (E_2)*,* C_1 *et* C_2 *désignant des constantes réelles.*

Solution

1) Si $y = e^{rx}$, on a alors, $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$.

Donc $y'' - 5y' + 6y = (r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} + 6 e^{rx}) = e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0$, or $e^{rx} \neq 0$, ce qui conduit à : $r^2 - 5r + 6 = 0$.

2) L'équation : $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

3) On pose $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, en remplaçant dans l'équation (E_2) il vient :

$(4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x}) - 5(2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}) + 6(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}) = (4 - 10 + 6) C_1 e^{2x} + (9 - 15 + 6) C_2 e^{3x} = 0.$

III-GENERALITES

- Une **<u>équation différentielle</u>** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. En d'autres termes c'est une relation entre une fonction et ses dérivées successives.
- L'**<u>ordre</u>** d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation. **Exemples:**

$y' = 2y$	$y^{(4)} + 3y'' - y' = y + 2x$	$y'' + 4y = 0$
$y'' = x^2$	$y = 4y''$	$y' = y + 2$

- **<u>Résoudre</u>** une équation différentielle, c'est déterminer <u>toutes les fonctions</u> qui vérifient cette équation.
- **<u>La solution générale</u>** de l'équation différentielle est la formule générale qui représente ces solutions.

Exemple :

$y' = x$ a pour solution générale $y = \frac{x^2}{2} + c$

Remarque :

- Quand on connaît les primitives d'une fonction $f(x)$, on sait résoudre l'équation différentielle suivante: ***<u>y' = f(x)</u>***
- De même *<u>y'' = f(x)</u>* *(ou* *<u>$y^{(n)} = f(x)$</u>*) peut être résolue si on sait remonter à la primitive seconde (ou $n^{ième}$) de $f(x)$.

IV-EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

1. Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre à coefficients constants toute équation (E) de la forme :

ay' + by = f(x) où a et b sont des nombres réels ($a \neq 0$), y et f sont des fonctions numériques de variable réelle x. L'équation : ***ay' + by = 0*** est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

Remarque:

- L'inconnue de cette équation est la fonction ***y***.
- Une solution particulière de l'équation est une fonction g qui vérifie l'équation.
- La solution générale de (E) est formée par l'ensemble de toutes les fonctions solutions de (E).

2. Équation $y' = ay$ (a réel quelconque)

La solution générale de l'équation $y' = ay$ est la fonction ***<u>$y = k e^{ax}$</u>*** où k est une constante quelconque.

Remarque : on peut prouver que c'est l'unique forme possible de la solution générale, mais on l'admettra seulement ici.

<u>Applications immédiates</u>

Trouver la solution générale de l'équation différentielle dans les cas suivants :

a) $y' = 3y$

b) y' + 2y = 0
c) 2y' – y = 0
d) 3y' = 2y

NB :

Dans la pratique, on est confronté à des équations différentielles en physique (mécanique, électricité…), mais on veut trouver une solution unique, celle qui correspond à un problème précis.

C'est possible si on connaît l**es "conditions initiales"**, c'est à dire la valeur de y pour un x particulier (en général pour $x = 0$).

Théorème :

L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemples :

Trouver la solution particulière dans les cas suivants : a) y' = 5y avec y(0) = 7 ; b) y' + 2 y =0 avec y(1) = e ; c) u(t) + 2. 10^{-3} u'(t) = 0 avec u(0) = 10 ; d) 3 y' = 2 y avec y(0) = 9

3. Résolution de l'équation sans second membre : (E_0) : *ay'* + *by* = 0

Théorème : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : ***ay'* + *by* = 0, est** l'ensemble des fonctions de la forme $y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$ **où *C* est une constante**

4. Résolution de l'équation complète (E) : *ay'* + *by* = *f*(*x*)

Théorème : La solution générale de l'équation différentielle (E) : *ay'* + *by* = *f*(*x*) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre *ay'* + *by* = 0 une solution particulière de (E).

Remarque : la recherche de la solution particulière s'effectue à la main dans les cas simples, en s'aidant le plus souvent des conseils donnés dans l'énoncé.

V- EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

1. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

a. Définition

On appelle équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants toute équation (E) de la forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$, où a, b et c sont des nombres réels ($a \neq 0$), y et f sont des fonctions numériques de variable réelle x. L'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

b. Résolution de l'équation sans second membre : (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$

On dit que deux fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si aucune n'est le produit de l'autre par une constante.

Justifier que les fonctions $y_1 = sin(x)$ et $y_2 = cos(x)$ sont linéairement indépendantes.

On peut, par exemple, calculer le rapport $\frac{y_1}{y_2} = \tan x$ qui n'est pas constant.

Les fonctions $y_1 = x^2$ et $y_2 = -2x^2$ ne sont pas linéairement indépendantes car on a pour tout x réel, $y_2 = -2y_1$.

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème : Si on connait deux fonctions y_1 et y_2 linéairement indépendantes, solutions de l'équation différentielle **(E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$,** alors l'ensemble des solutions de **(E_0)** est formé par les fonctions de la forme $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, où C_1 et C_2 désignent des constantes réelles.

On peut commencer par vérifier que si y_1 et y_2 sont toutes deux solutions de (E_0), alors toute combinaison linéaire de y_1 et y_2 est aussi solution de (E_0) et admettre seulement la réciproque.

On se propose de chercher les fonctions y_1 et y_2 sous la forme $y = e^{rx}$, où r est un nombre constant.

Question : Démontrer que $y = e^{rx}$ est solution de l'équation (E_0) si et seulement si r est solution de **l'équation caractéristique:** $ar^2 + br + c = 0$.

Il suffit de calculer y' et y'' et de remplacer dans (E_0).

Définition : On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle **(E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$**, l'équation du second degré d'inconnue r : **$ar^2 + br + c = 0$**.

Résolution de l'équation caractéristique

1er cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.

Question 2 : En déduire deux solutions particulières y_1 et y_2 de l'équation (E_0).

Question 3 : Justifier que les solutions trouvées y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Question 4 : Donner la solution générale de l'équation (E_0).

Réponses :

Question 1 : L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Question 2 : Les fonctions $y_1 = e^{r1x}$ et $y_2 = e^{r2x}$ sont deux solutions de (E_0).

Question 3 : On calcule le quotient des solutions qui donne $e^{(r_1-r_2)x}$ qui n'est pas constant car $r1$ et $r2$ sont distinctes.

Question 4 : La solution générale de (E_0) peut s'écrire : $y = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

2e cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Question 1 : Etablir que dans ce cas, les fonctions $y_1 = e^{-\frac{b}{a}x}$ *et* $y_2 = xe^{-\frac{b}{a}x}$ *sont deux solutions de l'équation (E₀) et qu'elles sont linéairement indépendantes.*

Question 2 : Donner la solution générale de l'équation (E₀).

La solution générale de l'équation différentielle (E₀) est $y = (C_1x + C_2)\, e^{r1x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques

3e cas : on suppose Δ = b^2 - 4*ac* < 0

Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.

On trouve deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \beta\, i$, $r_2 = \alpha - \beta\, i$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Question 2: On pose $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$ *et* $y_2 = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$

Vérifier que les fonctions y_1 *et* y_2 *sont solutions de l'équation (E₀).*

Question 3 : Justifier que les solutions y_1 *et* y_2 *sont linéairement indépendantes. On peut par exemple, calculer le quotient* $\frac{y_2}{y_1} = \tan(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x)$ *qui n'est pas constant car* $b^2 - 4ac < 0$ *est donc non nul.*

Question 4 : Donner la solution générale de l'équation (E₀).

La solution générale de l'équation différentielle (E₀) est $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$, C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

	Solutions de l'équation caractéristique	Solution générale de l'équation différentielle (E₀)
Δ>0	2 solutions réelles distinctes r_1 *et* r_2 : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y = C_1 e^{r1x} + C_2 e^{r2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques
Δ=0	1 solution réelle double $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$	$y = (C_1x + C_2)\, e^{r1x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques
Δ<0	2 solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \beta\, i$, $r_2 = \alpha - \beta\, i$ *avec :* $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques

Résumé : Pour trouver la solution générale de l'équation différentielle **(E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$**, on écrit l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ et on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Résolution de l'équation complète (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$

Soit y_0 une solution particulière de l'équation (E), on a alors : $ay_0'' + by_0' + cy_0 = f(x)$.

Une fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si $ay'' + by' + cy = f(x)$ ou encore si et seulement si on a : $ay'' + by' + cy = ay_0'' + by_0' + cy_0$ soit $a(y'' - y_0'') + b(y' - y_0') + c(y - y_0) = 0$.

Cette équation différentielle est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution générale est donnée dans le résumé ci-dessus.

On trouve donc la solution générale de l'équation (E) en ajoutant à la solution générale de (E_0) une solution particulière y_0 de (E)**,** comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème : La solution générale de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$ s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ une solution particulière de (E).

Exercice d'application :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$.

1) Donner, à la main en détaillant les calculs, la solution générale de l'équation : $y'' + y' - 2y = 0$.

2) Déterminer à la main, une solution particulière de (E) sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

3) Déduire de ce qui précède la solution générale de (E).

Solution :

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$. La solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 0$ est donc $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.
2) On pose $y = ax^2 + bx + c$, on a $y' = 2ax + b$ et $y'' = 2a$.

En remplaçant dans l'équation (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on obtient : $-2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4$.

Par identification des coefficients, on aboutit au système d'équations $\begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -2 \\ 2a + b - 2c = 4 \end{cases}$ qui a pour solutions :

$a = -1$, $b = 0$, $c = -3$.

La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto -x^2 - 3$

3) La solution générale de (E) est donnée par $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x^2 - 3$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

3. Existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales particulières données

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) $y'' + 4y' + 4y = 3e^x$.
1) Donner à la main la solution générale de l'équation sans second membre associée.
2) Chercher à la main une solution particulière f de (E) en posant $f(x) = ke^x$ (k est un nombre réel).
3) En déduire la solution générale de (E).

4) On cherche dans cette question à trouver toutes les fonctions g solutions de (E) dont la courbe représentative admet pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -\frac{17}{3}x + \frac{10}{3}$. *Déduire de cette information la valeur des réels g(0) et g'(0).*
5) En déduire qu'il existe une et une seule fonction g vérifiant les deux conditions précédentes.

Solution :

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 4 = 0$ qui admet une solution réelle double $r_1 = r_2 = -2$.
La solution générale de l'équation $y'' + 4y' + 4y = 0$ est donc $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

2) On pose $f(x) = ke^x$, on a $f'(x) = ke^x$ et $f''(x) = ke^x$. En remplaçant dans l'équation (E), on obtient $9ke^x = 3e^x$.
La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto \frac{1}{3}e^x$

3) La solution générale de (E) est donnée par $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

4) La tangente et la courbe ont en commun le point d'abscisse 0 qui a pour ordonnée , $y = -\frac{17}{3}(0) + \frac{10}{3}$ soit $y = \frac{10}{3}$. On en tire donc la 1ère information $g(0) = \frac{10}{3}$.

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $-\frac{17}{3}$. On en déduit la seconde information :
$g'(0) = -\frac{17}{3}$.

5) On utilise les deux informations précédentes en remplaçant dans la solution générale de l'équation (E).
On a $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ qui permet d'écrire $g(0) = C_2 + \frac{1}{3}$ d'où l'on tire l'équation (1) d'inconnue C_2 :

(1) : $C_2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

On calcule maintenant y'. On a $y' = C_1\,e^{-2x} + (C_1x + C_2)(-2e^{-2x}) + \frac{1}{3}e^x$. Sachant que $g'(0) = -\frac{17}{3}$, on en tire l'équation (2) : $C_1 - 2C_2 + \frac{1}{3} = -\frac{17}{3}$.

Il reste à résoudre le système d'équations formé par les équations (1) et (2) qui conduit à $C_1 = 0$ et $C_2 = 3$. On en déduit qu'il existe une unique solution g vérifiant les deux conditions $g(0) = \frac{10}{3}$ et $g'(0) = -\frac{17}{3}$, la fonction g définie pour tout x réel par : $g(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$.

Une vérification est possible à l'aide de la calculatrice comme le montrent les écrans ci-dessous.

4. Cas général

Les deux conditions initiales vérifiées par une solution particulière f d'une équation différentielle sont en général de la forme : $f(x_0) = d$ et $f'(x_0) = d'$, ou bien $f(x_0) = d$ et $f(x_1) = d'$, où x_0, x_1, d et d' sont des nombres connus.
Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème : Pour toute équation différentielle du second ordre, il existe une et une seule solution qui vérifie deux conditions initiales données.

APPLICATIONS IMMEDIATES

Activité 1 :

Résoudre sur R les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ $(E1)$
2. $y' + y = 2sinx$ $(E2)$
3. $y' - y = (x+1)e^x$ $(E3)$
4. $y' + y = xe^x + cosx$ $(E4)$

Activité 2 :

1. Déterminer toutes les fonctions f : $[0;1] \to R$, *dérivables, telles que* $\forall\, x \in [0;1]$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$

2. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ *sur R. Trouver la solution vérifiant* $y(0) = 3$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y'sinx - ycosx + 1 = 0$ *sur* $]0;\pi[$. *Trouver la solution vérifiant* $y(\pi/4) = 1$.

Activité 3:

Soit λ *un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle :* $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$ *avec* $f(x)$ *une fonction particulière. Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :*

1. $f(x) = a$ *avec* $a \in R^*$
2. $f(x) = \alpha e^{wx}$ *avec* $\alpha \in R*$ *et* $\omega \in R^*$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \in R^*, b \in R$ *et* $c \in R$ *(Indication : chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$*)*

Activité 4 :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$

3. $y'' - 2y' + y = 0$

4. $y'' + y = 2cos^2 x$

Activité 5 :

1. On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$*. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque* $d(x) = e^{-2x}$*, puis* $d(x) = e^{2x}$*.*

2. Résoudre sur $]0;\pi[$ *l'équation différentielle* $y'' + y = cotanx$*, où* $cotanx = \frac{cosx}{sinx}$*.*

3. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

$a.\ x^2y'' + xy' + y = 0$*, sur* $]0;+\infty[$*, en posant* $x = e^t$ *;*

$b.\ (1+x^2)2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$*, sur R, en posant* $x = tant$ *(en fonction de m∈R).*

Activité 6 :

On considère y la fonction définie sur IR, de la variable x, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) : $9y''(x) - y(x) = 4$*.*

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0)*:* $9y''(x) - y(x) = 0$
2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$*.*

Activité 7 :

On considère y *la fonction définie sur IR, de la variable* t*, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :* $y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^t$
1. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) = 0$ *(E')*
2. Déterminer le réel A tel que $f(t) = Ate^t$ *soit une solution particulière de (E)*
3. En déduire les solutions générales de (E).

Activité 8 :

On considère x *la fonction définie sur IR, de la variable* t*, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :* $x''(t) + 4x(t) = -6\,sin(t)$*.*

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : x''(t) + 4x(t) = 0$

2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme :
$g(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant $x(0) = -1$ *et* $x'(0) = 0$

Activité 9 :
Une voiture de masse m roulant rectilignement à la vitesse v_0 *coupe son moteur et n'est plus soumise qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse :* $F = -\alpha v$ *.Ecrire la loi de la variation de la vitesse v en fonction du temps et en déduire l'équation du mouvement.*

Activité 10 :
On suppose qu'à sa mort, un organisme contient une quantité q_0 *d'atomes de carbone 14. Les atomes de carbone 14 vont subir des désintégrations radioactives. Le nombre de d´désintégrations N par unité de temps est proportionnel à la quantité q d'atomes de carbone 14 présents :* $N = \alpha q$
1. Déterminer une équation régissant l'évolution de q, et la résoudre.
2. Déterminer α, sachant que la période de demi-vie (temps pendant lequel la moitié du carbone 14 présent se d´désintègre) est de 5730 ans.
3. On trouve un bois fossile qui subit 610 d´désintégrations par jour. Le même type de bois subit un taux initial de 19520 d´désintégrations par jour. Déterminer l'âge du fossile.
4. Sachant que le carbone 14 est absorbé par les organismes vivants par la respiration du CO_2 *présent dans l'atmosphère, et que le taux de* CO_2 *actuel est le plus ´élevé depuis 800000 ans, pouvez-vous expliquer l'erreur commise dans le calcul de la question 3 ?*

Chapitre 16 : APPLICATIONS DE L'ESPACE 2

1 LEÇON 1 : EXTENSION DANS L'ESPACE DE CERTAINES NOTIONS DU PLAN 2

1.1 Notations : 2

1.2 Vocabulaire 2

1.3 Application linéaire ou vectorielle associée à une application affine de $\mathcal{E}$ 2

2 LEÇON 2 : TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES DE L'ESPACE 4

2.1 Translations de l'espace 4

2.2 Homothéties de l'espace 6

3 LEÇON 3 : PROJECTIONS 10

3.1 Définitions et propriétés 10

3.2 Expression analytique d'une projection 13

4 LEÇON 4 : SYMETRIES ORTHOGONALES 18

4.1 Plan médiateur d'un segment 18

4.2 Réflexions 19

4.3 Demi-tours 24

Chapitre 16 : APPLICATIONS DE L'ESPACE

Motivations :

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié des applications dans le plan.

- Que deviennent ces applications dans l'espace ?
- Que deviennent les images de certains solides par une application dans l'espace ?
- Ce chapitre nous donnera des outils pour déterminer les plans et axes de symétries de certaines infrastructures dans le monde entier.

Prérequis :

- Projections dans le plan.
- Applications affines dans le plan.
- Isométries du plan.

1 LEÇON 1 : EXTENSION DANS L'ESPACE DE CERTAINES NOTIONS DU PLAN

Objectifs :

- Déterminer l'application linéaire associée à une application affine
- Caractériser les applications affines

1.1 Notations :

l'espace sera muni d'un repère $(0;\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$. $\mathcal{E}$ désignera l'ensemble des points de l'espace ; tandis que $\mathcal{W}$ désignera l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1.2 Vocabulaire

- Une transformation de $\mathcal{E}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
- Une isométrie est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances.
- Une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve le coefficient de colinéarité (si $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = k.\overrightarrow{f(C)\,f(D)}$).
- On dit qu'une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conserve le barycentre de deux points lorsque : si $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$ alors $f(G) = \text{bar}\{(f(A);a);(f(B);b)\}$

1.3 Application linéaire ou vectorielle associée à une application affine de $\mathcal{E}$

Soit f une application **affine** de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. La correspondance $\varphi: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ telle que $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ est une **application linéaire** appelée application linéaire ***(ou vectorielle)*** associée à f.

En effet : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = 1.\overrightarrow{C'D'}$ car f conserve le coefficient de colinéarité. Ainsi,

$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{f(C)f(D)} = \varphi(\overrightarrow{CD})$. Donc φ est une application bien définie.

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$; $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{E}$. $\exists ! M, N, P \in \mathcal{E}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AM}, \vec{v} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AP} = a\vec{u} = a\overrightarrow{AM}$.

- $\varphi(a\vec{u}) = \varphi\left(\overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{A'P'} = a\overrightarrow{A'M'} = a\varphi(\vec{u})$. (car f conserve le coefficient de colinéarité).
- $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{A'N'} = \overrightarrow{A'M'} + \overrightarrow{M'N'} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

1.3.1 Propriété

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

f est affine $\Leftrightarrow$ f conserve le barycentre.

$\Leftrightarrow$Son expression analytique dans un repère est de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$

$a; a'; a''; b; b'; b''; c; c'; c''; d; d'; d'' \in \mathbb{R}$

preuve

a) Supposons que f est affine et montrons que f conserve le barycentre. Soit φ l'application linéaire associée à f.

Soient $G = bar\{(A_1; a_1); (A_2; a_2) \ldots (A_n; a_n)\}$; $f(G) = G'$ et $f(A_i) = A_i'$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{0} = \varphi(\vec{0}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{G'A_i'}\right).$$

Ainsi, $G' = bar\{(A_1'; a_1); (A_2'; a_2) \ldots (A_n'; a_n)\}$ et par suite, f conserve le barycentre.

Réciproquement, supposons que f conserve le barycentre et montrons que f est affine.

Soient $a \in \mathbb{R}$; $A, B, C, D \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD}$. Montrons que $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'}$ avec $A' = f(A)$; $B' = f(B)$;

$C' = f(C); D' = f(D)$

$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} - a\overrightarrow{AD} = \vec{0} \Longrightarrow A = bar\{(B; 1); (C; a); (D; -a)\}$

$\Longrightarrow A' = bar\{(B'; 1); (C'; a); (D'; -a)\}$ car f conserve le barycentre.

Donc $\overrightarrow{A'B'} + a\overrightarrow{A'C'} - a\overrightarrow{A'D'} = \vec{0}$. Ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'}$.

D'où f conserve le coefficient de colinéarité et ainsi, f est affine.

b) Supposons que f est affine et montrons que son expression analytique dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est

de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$ $a; a'; a''; b; b'; b''; c; c'; c''; d; d'; d'' \in \mathbb{R}$

Soient φ l'application linéaire associée à f;

$M'(x'; y'; z'); M(x; y; z); \varphi(\vec{\imath})(a; a'; a''); \varphi(\vec{\jmath})(b; b'; b''); \varphi(\vec{k})(c; c'; c''); 0'(d; d'; d'')$.

$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) = x\varphi(\vec{\imath}) + y\varphi(\vec{\jmath}) + z\varphi(\vec{k})$.

Donc : $\begin{pmatrix} x'-d \\ y'-d' \\ z'-d'' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix}$ et ainsi, $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$

Réciproquement, supposons que l'expression analytique de f dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est de la forme

$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$ $a; a'; a''; b; b'; b''; c; c'; c''; d; d'; d'' \in \mathbb{R}$ puis, montrons que f est affine.

Soient $G = bar\{(A_1; a_1); (A_2; a_2) \ldots (A_n; a_n)\}$, montrons que $G' = bar\{(A'_1; a_1); (A'_2; a_2) \ldots (A'_n; a_n)\}$.

Il suffit de montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{G'A_i'}\right) = \overrightarrow{0}$.

Posons $A_i(x_i; y_i; z_i)$; $A'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$; $G(x_G; y_G; z_G)$ et $G'(x_{G'}; y_{G'}; z_{G'})$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,(x'_i - x_{G'}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,[(ax_i + by_i + cz_i + d) - (ax_G + by_G + cz_G + d)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\,[a(x_i - x_G) + b(y_i - y_G) + c(z_i - z_G)]$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_i - x_G) + b\sum_{i=1}^{n} a_i\,(y_i - y_G) + c\sum_{i=1}^{n} a_i\,(z_i - z_G) = a(0) + b(0) + c(0) = 0$$

Car $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0}$.

De même, $\sum_{i=1}^{n} a_i\,(y'_i - y_{G'}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(z'_i - z_{G'}) = 0$ et ainsi, $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{G'A_i'}\right) = \overrightarrow{0}$.

Donc f conserve le barycentre et par conséquent, f est affine.

2 LEÇON 2 : TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES DE L'ESPACE

Objectifs :

- Caractériser les translations et les homothéties dans l'espace.
- Déterminer l'expression analytique d'une translation et d'une homothétie dans l'espace.
- Composer les translations, les homothéties, les translations et les homothéties dans l'espace.
- Utiliser les propriétés de conservation et les images des figures simples par une translation ou une homothétie pour résoudre des problèmes.

2.1 Translations de l'espace

2.1.1 Définition

Soit $\vec{u} \in \mathcal{W}$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe le point $M' \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Cette application est notée $t_{\vec{u}}$ et on a $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

2.1.2 Propriété caractéristique d'une translation

Soit f une application de l'espace. f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Preuve Supposons que f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et montrons que pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Soient $M; N \in \mathcal{E}|\ f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$.

Ainsi, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$

Réciproquement, supposons que pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ et montrons que f est une translation.

Cherchons $\vec{u} \in \mathcal{W}: \forall\ M \in \mathcal{E} \mid M' = f(M),\ \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Soit A un point quelconque de l'espace et $A' = f(A)$. D'après l'hypothèse, on a $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. Ainsi, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'}$. Donc f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ avec A un point quelconque de l'espace et $A' = f(A)$.

2.1.3 Remarques

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$. Ainsi, $M' = M$ et par suite, $t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$.
- Toute translation de l'espace est une isométrie de l'espace. ($\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ donc $M'N' = MN$)
- L'application linéaire associée à une translation $t_{\vec{u}}$ de l'espace est $id_{\mathcal{W}}$. En effet si φ est cette application, alors en fixant un point quelconque $M \in \mathcal{E}$, on a $\forall \vec{v} \in \mathcal{W}$, $\exists!\ N \in \mathcal{E}$: $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ et on a $\varphi(\vec{v}) = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{t_{\vec{u}}(M)\ t_{\vec{u}}(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} = \vec{v}$

2.1.4 Expression analytique d'une translation de l'espace

Soient $\vec{u}(a; b; c) \in \mathcal{W}; M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z') \in \mathcal{E}$.

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + a \end{cases}$$

Exemples

- Dans l'espace, l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(1; -2; 3)$ est $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 3 \end{cases}$
- L'expression analytique $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y \\ z' = z - 4 \end{cases}$ est celle d'une translation de l'espace de vecteur $\vec{u}(5; 0; -4)$

2.1.5 Composée de deux translations de l'espace

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$. On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$

Preuve

Soient $M \in \mathcal{E}$, $M' = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M)$ et $M_1 = t_{\vec{v}}(M)$. On a : $\overrightarrow{MM_1} = \vec{v}$ et $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$. Donc $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$.

Ainsi, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{v} + \vec{u}$. D'où $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une application telle que pout tout point $M \in \mathcal{E}$ d'image M' par $t_{\vec{u}} \circ t_v$, on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} + \vec{u}$. Donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

2.1.6 Remarques :

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$

- $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$. Donc $t_{\vec{u}}$ est bijective (transformation de l'espace) et $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$
- $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$. Ainsi, $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$: la composée des translations est aussi commutative dans l'espace.
- Si on note par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de l'espace, alors $(\mathcal{T}; \circ)$ est un groupe commutatif.

2.2 Homothéties de l'espace

2.2.1 Définition

Soient $A \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle homothétie de centre A et de rapport k l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM}$

Cette application est souvent notée $h_{(A;k)}$ et on a : $M' = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM}$

Remarques

- Si $k = 1$, alors on aura $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$. Ainsi, $M' = M$ et par suite, $h_{(A;1)} = id_{\mathcal{E}}$.
- Si $k \neq 1$, alors A est le seul point invariant de $h_{(A;k)}$. En effet :

  $\overrightarrow{AA'} = k.\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ainsi, $A = A'$. Donc A est invariant. Si M est un point invariant, alors on aura $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM}$. Donc $(1-k).\overrightarrow{AM} = \vec{0}$. D'où $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ (car $1 - k \neq 0$) et par suite, $M = A$.

2.2.2 Propriété caractéristique

Soit $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on a $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$.

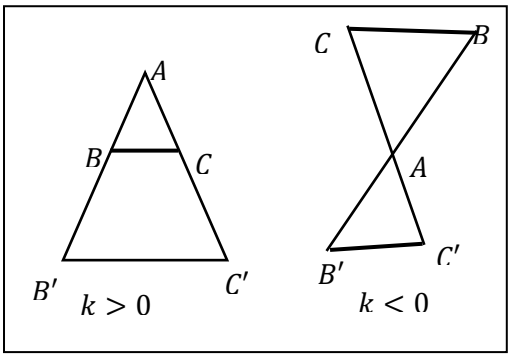
Preuve Supposons que f est une homothétie de centre A et de rapport k puis montrons que pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Soient $M; N \in \mathcal{E}|\ f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. On a $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN'} = k\overrightarrow{AN}$.

Ainsi, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AN'} = -k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{AN} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) = k\overrightarrow{MN}$.

Réciproquement, supposons que pour tous points M et N d'images respectives M' et N'par f, on ait $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ et montrons que f est une homothétie de rapport k. Soit $B; C \in \mathcal{E}$ avec $B \neq C$; $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. D'après l'hypothèse, on a $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$. Ainsi, $(BC)\ //\ (B'C')$. De plus, $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. Donc

(BB') et (CC') sont sécantes en un point A. Posons $A' = f(A)$. D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{k}$. Donc $AB' = kAB$. D'où $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ car les points A, B et B' sont alignés.



D'après l'hypothèse, on a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$. Ainsi, $A' = A$.

Donc pour tout point N d'image N' par f, $\overrightarrow{AN'} = \overrightarrow{A'N'} = k\overrightarrow{AN}$ et par conséquent, f est une homothétie de rapport k.

2.2.3 Expression analytique d'une homothétie de l'espace

Soient $A(a;b;c); M(x;y;z)$; $M'(x';y';z') \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}$

$$M' = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \\ z'-c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ x-b \\ x-c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \\ z' = kz + a(1-k) \end{cases}$$

Exemple : l'expression analytique de l'homothétie de centre $A(1;2;3)$ et de rapport -5 est

$\begin{cases} x' = -5x + 1(1+5) \\ y' = -5y + 2(1+5) \\ z' = -5z + 3(1+5) \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = -5x + 5 \\ y' = -5y + 12 \\ z' = -5z + 18 \end{cases}$

2.2.4 Remarque :

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = kx + a' \\ y' = ky + b' \\ z' = kz + a' \end{cases}$

- Si $k = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}(a' ; b' ; c')$
- Si $k \neq 1$, alors f admet un unique point invariant $A(a;b;c)$ tel que $\begin{cases} a = ka + a' \\ b = ka + b' \\ c = ka + a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{a'}{1-k} \\ b = \frac{b'}{1-k} \\ c = \frac{c'}{1-k} \end{cases}$.

  f est donc une homothétie de centre $A(a;b;c)$ et de rapport k.

  Exemple : l'expression analytique $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y + 2 \\ z' = 3z - 2 \end{cases}$ est de la forme $\begin{cases} x' = kx + a' \\ y' = ky + b' \\ z' = kz + a' \end{cases}$ avec $k \neq 1$. f est donc une homothétie de centre $A(a;b;c)$ et de rapport $k = 3$ tel que $\begin{cases} a = 3a - 4 \\ b = 3a + 2 \\ c = 3a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$.

  Donc $A(2;-1;1)$

2.2.5 Composée de deux homothéties de l'espace

Propriétés : Soient A et A' deux points distincts de l'espace ; $k, k' \in \mathbb{R}^*$

- $h_{(A;k)} \circ h_{(A;k')} = h_{(A;\, k' \times k)}$
- $h_{(A;k)} \circ h_{(A';k')} = \begin{cases} h_{(G;\, k \times k')} \; si \; k \times k' \neq 1 \\ t_{\vec{u}} \; si \; k \times k' = 1 \end{cases}$ G et $\vec{u}$ à déterminer

Preuve :

- Soient $M, M_1, M' \in \mathcal{E}$: $h_{(A;k)} \circ h_{(A;k')}(M) = M'$. Posons $h_{(A;k')}(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = k'.\overrightarrow{AM}$

On a alors $h_{(A;k)}(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM_1} = kk'.\overrightarrow{AM}$

$h_{(A;k)} \circ h_{(A;k')}$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M'tel que $\overrightarrow{AM'} = kk'.\overrightarrow{AM}$.
Donc $h_{(A;k)} \circ h_{(A;k')} = h_{(A;\, k'\times k)}$.

- Soient M et N deux points distincts de l'espace, d'images respectives M' et N' par $h_{(A;k)} \circ h_{(A';k')}$. Posons $h_{(A';k')}(M) = M_1$ et $h_{(A';k')}(N) = N_1$. On a alors $h_{(A;k)}(M_1) = M'$et $h_{(A;k)}(N_1) = N'$.

Ainsi, $\overrightarrow{M_1N_1} = k'\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{M_1N_1} = kk'\overrightarrow{MN}$. Donc $\overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}$.

Par suite, $h_{(A;k)} \circ h_{(A';k')} = \begin{cases} h_{(G;\, k\times k')} \; si \; k \times k' \neq 1 \\ t_{\vec{u}} \; si \; k \times k' = 1 \end{cases}$

Exercice :

Montrer que $\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{A'A}$ et que $G = bar\{(A; 1-k); (\ A'; k(1-k')\ )\}$

Remarques : Soient $A \in \mathcal{E}$ et $k, k' \in \mathbb{R}^*$

- $h_{(A;k)} \circ h_{(A;\frac{1}{k})} = h_{(A;1)} = id_{\mathcal{E}}$. Donc $h_{(A;k)}$ est bijective et $[h_{(A;k)}]^{-1} = h_{(A;\frac{1}{k})}$
- $k'k = kk'$. Ainsi, $h_{(A;k)} \circ h_{(A;k')} = h_{(A;k'k)} = h_{(A;kk')} = h_{(A;k')} \circ h_{(A;k)}$: la composée des homothéties de même centre est aussi commutative dans l'espace.
- Si on note par $\mathcal{H}_A$ l'ensemble des homothéties **de même centre A** de l'espace, alors $(\mathcal{H}_A; \circ)$ est un groupe commutatif.

2.2.6 Composée d'une homothétie et d'une translation de l'espace

2.2.6.1 Activité d'apprentissage

Soient $\vec{u} \in \mathcal{W}$; $A \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$.

1) On pose $M' = h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}(M)$; $N' = h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}(N)$; $M_1 = t_{\vec{u}}(M)$ et $N_1 = t_{\vec{u}}(N)$
   a) Justifier que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
   b) Déduire la nature et un élément caractéristique de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$
2) Déterminer la nature et un élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$

2.2.6.2 Propriété

Si $\vec{u} \in \mathcal{W}$; $A \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, alors $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ sont des homothéties de rapport k (pas forcément de même centre)

2.2.6.3 Exercice d'application

Dans un repère de l'espace, $A(2; 1; -3)$ et $\vec{u}(-1; 3; 1)$. On suppose que $k = -2$

1) Quelle est la nature et un élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$, puis de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$?

2) Déterminer l'expression analytique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ et de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$.

3) Déduire le 2e élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ et de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$. Que constatez-vous ?

Solution

1) $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)}$ et de $h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}$ sont des homothéties de rapport -2

2) Déterminer l'expression analytique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)}$ et de $h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}$.

Soient $M(x;y;z)$; $M_1(x_1;y_1;z_1)$ et $M'(x';y';z')$

a) Posons $M' = t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)}(M)$ et $M_1 = h_{(A;-2)}(M)$. On a alors $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$

$$M_1 = h_{(A;-2)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x + 2(1+2) \\ y_1 = -2y + 1(1+2) \\ z_1 = -2z - 3(1+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x + 6 \\ y_1 = -2y + 3 \\ z_1 = -2z - 9 \end{cases}$$

$$M' = t_{\vec{u}}(M_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 - 1 \\ y' = y_1 + 3 \\ z' = z_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x + 6 - 1 \\ y' = -2y + 3 + 3. \text{ Ainsi, } t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)} : \\ z' = -2z - 9 + 1 \end{cases} \begin{cases} x' = -2x + 5 \\ y' = -2y + 6 \\ z' = -2z - 8 \end{cases}$$

b) Posons $M' = h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}(M)$ et $M_1 = t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$. On a alors $M' = h_{(A;-2)}(M_1)$

$$M_1 = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y + 3. \ M' = h_{(A;-2)}(M_1) \\ z_1 = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x_1 + 2(1+2) \\ y' = -2y_1 + 1(1+2) \\ z' = -2z_1 - 3(1+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = -2(x-1) + 6 = -2x + 8 \\ y' = -2(y+3) + 3 = -2y - 3. \text{ Ainsi, } h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}} : \\ z' = -2(z+1) - 9 - 2z - 11 \end{cases} \begin{cases} x' = -2x + 8 \\ y' = -2y - 3 \\ z' = -2z - 11 \end{cases}$$

(on remarque que $h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)}$ sont des homothéties de rapport -2)

3) Déduisons le 2e élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ et de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)} : \begin{cases} x' = -2x + 5 \\ y' = -2y + 6. \\ z' = -2z - 8 \end{cases}$ Soit $B(x;y;z)$ son centre. Puisque B est invariant, alors on doit avoir

$$\begin{cases} x = -2x + 5 \\ y = -2y + 6 \\ z = -2z - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$. Donc le centre de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;-2)}$ est $B(\frac{5}{3}; 2; -\frac{8}{3})$.

Soit $C(x;y;z)$ le centre de $h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}$. Puisque C est invariant, alors on doit avoir

$$\begin{cases} x = -2x + 8 \\ y = -2y - 3 \\ z = -2z - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -1 \\ z = -\frac{11}{3} \end{cases}$$. Donc le centre de $h_{(A;-2)} \circ t_{\vec{u}}$ est $C(\frac{8}{3}; -1; -\frac{11}{3})$

On constate que la composée d'une homothétie et d'une translation n'est pas commutative car les centres sont distincts.

Remarque : Si on note par $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties et par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de l'espace, alors $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}; \circ)$ est un groupe non commutatif. [$h_{(A;1)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ h_{(A;1)} = t_{\vec{u}} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$]

3 LEÇON 3 : PROJECTIONS

Objectifs :

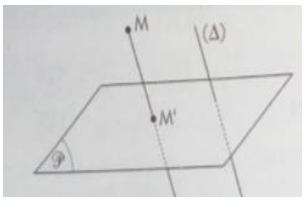
- Définir une projection sur une droite et sur un plan dans l'espace.
- Déterminer l'expression analytique d'une projection sur une droite et sur un plan dans l'espace.
- Utiliser les propriétés de conservation et les images des figures simples par une projection sur une droite et sur un plan pour résoudre des problèmes.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Définition

Soient $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$ et (Δ) une droite non parallèle à $(\mathcal{P})$.

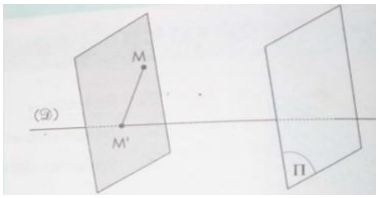
- On appelle projection sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ) l'application p de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ qui à chaque point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' tel que :
  - Si $M \in (\mathcal{P})$, alors $M' = M$.
  - Si $M \notin (\mathcal{P})$, alors $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{P}) \\ (MM') \parallel (\Delta) \end{cases}$



M' est le projeté de M sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ). $(\mathcal{P})$ est la base et (Δ) la direction de la projection p.

Si $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$, alors p est appelée la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$ et M' est appelée le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$.

- On appelle projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (π) l'application q de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ qui à chaque point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' tel que :
  - Si $M \in (\mathcal{D})$, alors $M' = M$.
  - Si $M \notin (\mathcal{D})$, alors $q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{D}) \\ (MM') \parallel (\pi). \end{cases}$



M' est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (π). $(\mathcal{D})$ est la base et (π) la direction de la projection q.

Si $(\mathcal{D}) \perp (\pi)$, alors q est appelée la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$ et M' est appelé le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

3.1.2 Propriétés

Les deux propriétés suivantes découlent des définitions précédentes.

- Soit $p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ).
  - L'image de $\mathcal{E}$ par p est $(\mathcal{P})$.
  - L'ensemble des antécédents par p d'un point $M' \in (\mathcal{P})$ est la droite parallèle à (Δ) et passant par M'.
  - L'ensemble des points invariants par p est $(\mathcal{P})$.
- Soit $q: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ la projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan $(\mathcal{P})$.
  - L'image de $\mathcal{E}$ par q est (Δ).

- L'ensemble des antécédents par q d'un point $M' \in (\Delta)$ est le plan parallèle à $(\mathcal{P})$ et passant par M'.
- L'ensemble des points invariants par q est (Δ).

3.1.3 Autres propriétés

3.1.3.1 Conservation du coefficient de colinéarité

Propriété 1

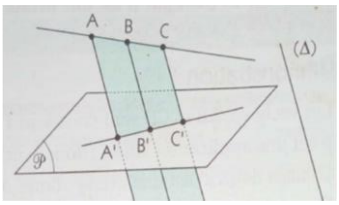
Soient p la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ) et q la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (π) . Si $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON}$, alors $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'N'}$ où $O'; M'$ et N' sont les images respectives de trois points quelconque $O;\ M; N \in \mathcal{E}$ par p ou par q.

Preuve

- *Soit p* la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ).

  Montrons que si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$ où $A'; B'$ et C' sont les images respectives de trois points quelconque $A;\ B; C \in \mathcal{E}$ par p.

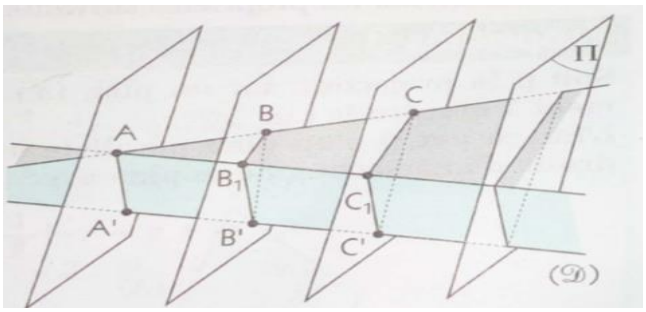
  - Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (Δ), alors $A' = B' = C'$ et ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{0} = k\overrightarrow{A'C'}$.
  - Si $\overrightarrow{AB}$ n'est pas un vecteur directeur de (Δ), alors les points A; $B; C;\ A';\ B';\ C'$ sont coplanaires et puisque les droites $(AA'); (BB')$ et (CC') sont parallèles, on a d'après la propriété de Thalès dans le cas général : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Ainsi, $|k| = \frac{A'B'}{A'C'}$ et puisque les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires, alors on a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$; que ces vecteurs soient de même sens ou pas.



- *Soient q* la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (π) .

  Montrons que si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, où $A'; B'$ et C' sont les images respectives de trois points quelconque $A; B; C \in \mathcal{E}$ par q.

  - Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (π), alors $A' = B' = C'$ et ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{0} = k\overrightarrow{A'C'}$.
  - Si $\overrightarrow{AB}$ n'est pas un vecteur directeur de (π), alors la droite (H) parallèle à $(\mathcal{D})$ en A coupe les plans parallèles à (π) passant respectivement par les points B et C en des points B_1 et C_1 tels que $(BB_1) \parallel (CC_1)$; et (AA')$\parallel (B_1B') \parallel (C_1C')$. Dans le plan contenant les points $A; B; C;\ B_1$ et C_1, on a comme précédemment : $\overrightarrow{AB_1} = k\overrightarrow{AC_1}$ et dans le plan contenant $A; B_1; C_1; A'; B'$ et C', on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC_1}$. D'où $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$.



Remarques Soient $A; B; C; D; I \in \mathcal{E}$ et $A'; B'; C'; D'; I'$ leurs images respectives par une projection.

- Si I est le milieu du segment $[AB]$ et si $A' \neq B'$ alors I' sera le milieu du segment $[A'B']$. En effet : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et par suite, $\overrightarrow{I'A'} = -\overrightarrow{I'B'}$. Donc I est aussi le milieu du segment $[A'B']$.
- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $A'B'C'D'$ est un parallélogramme ***(dégénéré)***. En effet : si I est le milieu du segment $[AC]$, alors il l'est aussi pour le segment $[CD]$. Ainsi, l'image I' de I est le milieu des diagonales de $[A'C']$ et de $[B'D']$. Donc $A'B'C'D'$ est aussi un parallélogramme.

Propriété 2

Les projections conservent le coefficient de colinéarité et sont par conséquent des applications affines.

Preuve : Soient $A; B; C; D \in \mathcal{E}$ et $A'; B'; C'; D'$ leurs images respectives par une projection.

Supposons que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ et montrons que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$.

Soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ et E' l'image de E par ladite projection. On a alors $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AE}$ et ainsi,

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'E'}$. Puisque $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, alors le quadrilatère $AEDC$ est un parallélogramme. Donc le quadrilatère $A'E'D'C'$ l'est aussi. Ainsi, $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'E'}$. D'où $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

Remarques Toute application affine admet une application linéaire qui lui est associée.

- Si φ est l'application linéaire associée à une projection sur un plan ayant $(\vec{u};\ \vec{v})$ comme couple de vecteurs directeurs et parallèlement à une droite dont $\vec{w}$ est un vecteur directeur, alors on a

$\varphi(\vec{u}) = \vec{u};\ \varphi(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\varphi(\vec{w}) = \vec{0}$

- Si ψ est l'application linéaire associée à une projection sur une droite dont $\vec{w}$ est un vecteur directeur et parallèlement à un plan ayant $(\vec{u};\ \vec{v})$ comme couple de vecteurs directeurs, alors on a $\psi(\vec{w}) = \vec{w}$ et $\psi(\vec{u}) = \psi(\vec{v}) = \vec{0}$.

3.1.4 Image d'une droite, d'un plan par une projection

Propriété 1 : Soient f une projection, (AB) une droite de l'espace, $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

- Si $A' \neq B'$, alors l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- Si $A' = B'$, alors l'image de la droite (AB) est le singleton $\{A'\}$

Preuve : Soit (Γ) l'image de la droite (AB) par f.

$M' \in (\Gamma) \Leftrightarrow \exists M \in (AB): f(M) = M'$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists a; b \in \mathbb{R}: M = bar\{(A; a); (B; b)\}$

$\Rightarrow M' = bar\{(A'; a); (B'; b)\}$ car f est affine.

- Si $A' \neq B'$, alors $M' \in (A'B')$. Donc $(\Gamma) \subseteq (A'B')$ Exploration : montrer que $(A'B') \subseteq (\Gamma)$
- Si $A' = B'$, alors $M' = A'$ et ainsi, $(\Gamma) \subseteq$ {A'}. Puisque $A \in (AB)$ et $A' = f(A)$, alors $A' \in (\Gamma)$. Ainsi, $\{A'\} \subseteq (\Gamma)$. Donc $(\Gamma) =$ {A'}

Remarques

- L'image d'un segment $[AB]$ par une projection est le segment $[A'B']$ ou le singleton $\{A'\}$.
- L'image d'une demi-droite $[AB)$ par une projection est la demi-droite $[A'B')$ ou le singleton $\{A'\}$

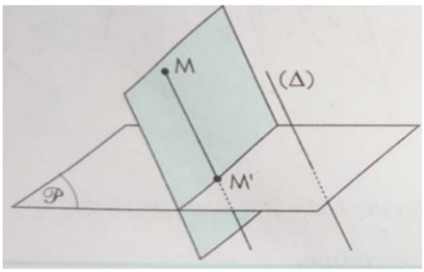
Propriété 2

Soient f une projection, $(AB) \parallel (CD)$. Si $f\big((AB)\big) = (A'B')$, alors $f\big((CD)\big) = (C'D')$ avec $(A'B') \parallel (C'D')$

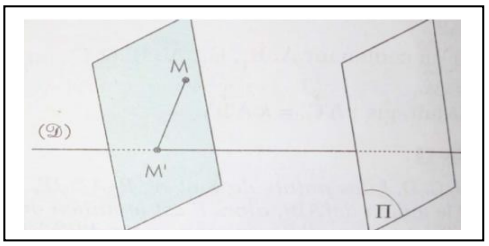
Preuve : (AB) ∥ (CD) $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD}$. Ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'}$ car f est affine.

Or $\overrightarrow{A'B'} \neq \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{C'D'} \neq \vec{0}$ et par suite, l'image de (CD) par f est la droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

Propriété 3



- Par la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ),
  - l'image d'un plan parallèle à (Δ) est la droite d'intersection de ce plan avec $(\mathcal{P})$.
  - l'image d'un plan non parallèle à (Δ) est le plan $(\mathcal{P})$.
- Par la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (π),
  - l'image d'un plan parallèle à (π) est le point d'intersection de ce plan avec la droite $(\mathcal{D})$.
  - l'image d'un plan non parallèle à (π) est la droite $(\mathcal{D})$.



3.2 Expression analytique d'une projection

Exercice d'application 1

Dans un repère orthonormé, $(\mathcal{P}): x + 2y - z + 3 = 0$ et (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(3; -1; 2)$.

1) Vérifier que (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.
2) Déterminer l'expression analytique de la projection f sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ).

solution

1) **Vérifions que (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.**

$\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. $\vec{n}.\vec{u} = 3 - 2 - 2 = -1$ $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux et ainsi, (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.

2) **Déterminons l'expression analytique de la projection f sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ).**

Soient $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ deux points de l'espace.

$$M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\Delta) \\ (MM') \parallel (\mathcal{P}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM'} = k.\vec{u}; \quad k \in \mathbb{R} \quad (1) \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 3k \\ y' - y = -k \\ z' - z = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 3k \\ y' = y - k \\ z' = z + 2k \end{cases} \quad (3)$$

$(1) \Leftrightarrow (x+3k)+2(y-k)-(z+2k)+3=0 \quad \Leftrightarrow k=x+2y-z+3.$

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+3(x+2y-z+3) \\ y'=y-(x+2y-z+3) \\ z'=z+2(x+2y-z+3) \end{cases}$. Donc f: $\begin{cases} x'=4x+6y-3z+9 \\ y'=-x-y+z-3 \\ z'=2x+4y-z+6 \end{cases}$

Exercice d'application 2 : Dans un repère orthonormé, $(\mathcal{P}): x+2y-z+3=0$ et (Δ) la droite passant par $A(1;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-1;2)$.

1) Vérifier que (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.
2) Déterminer l'expression analytique de la projection g sur (Δ) parallèlement à $(\mathcal{P})$.

solution

1) Vérifions que (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.

$\vec{n}(1;2;-1)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ et $\vec{n}.\vec{u}=3-2-2=-1.\neq D$onc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux et ainsi, (Δ) n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$.

2) Déterminons l'expression analytique de la projection g sur (Δ) parallèlement à $(\mathcal{P})$.

Soient $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$ deux points de l'espace.

$M'=g(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\Delta) \\ (MM') \parallel (\mathcal{P}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM'}=k.\vec{u}; \quad k\in\mathbb{R} \quad (1) \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{n}=0 \quad (2) \end{cases}$ $\quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=3k \\ y'+1=-k \\ z'-2=2k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1+3k \\ y'=-1-k \\ z'=2+2k \end{cases} \quad (3)$

$(2) \Leftrightarrow (x'-x)+2(y'-y)-(z'-z)=0 \quad \Leftrightarrow (1+3k-x)+2(-1-k-y)-(2+2k-z)=0$

$\Leftrightarrow k=-x-2y+z-3.$ $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1+3(-x-2y+z-3) \\ y'=-1-(-x-2y+z-3) \\ z'=2+2(-x-2y+z-3) \end{cases} \Leftrightarrow g$: $\begin{cases} x'=-3x-6y+3z-8 \\ y'=x+2y-z+2 \\ z'=-2x-4y+2z-4 \end{cases}$

Exercice d'application 3 : Dans un repère orthonormé, l'expression analytique d'une application h de l'espace est $\begin{cases} 3x'=2x+y-z-3 \\ 3y'=x+2y+z+3 \\ 3z'=-x+y+2z-3 \end{cases}$

1) Justifier que h est une application affine
2) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par h.
3) Justifier que pour tout point M de l'espace d'image M' par h, $M' \in (P)$; puis que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).
4) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

Solution

1) Justifions que h est une application affine

$$\begin{cases} 3x' = 2x + y - z - 3 \\ 3y' = x + 2y + z + 3 \\ 3z' = -x + y + 2z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

L'expression analytique de h est de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$

$a; a'; a''; b; b'; b''; c; c'; c''; d; d'; d'' \in \mathbb{R}$. Donc h est une application affine.

2) Déterminons l'ensemble (P) des points invariants par h

Soient $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ deux points de l'espace tels que $M' = h(M)$

M est invariant par $h \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + y - z - 3 \\ 3y = x + 2y + z + 3 \\ 3z = -x + y + 2z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x - y + z + 3 = 0$. Ainsi, l'ensemble des points invariants par h est le plan (P): $x - y + z + 3 = 0$

3) **Justifions que pour tout point M de l'espace d'image M' par h, $M' \in (P)$**

$M'(x'; y'; z')$ et (P): $x - y + z + 3 = 0$.

$$x' - y' + z' + 3 = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) - \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) + \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) + 3 = 0.$$

$M'(x'; y'; z')$ et $x' - y' + z' + 3 = 0$. Donc $M' \in (P)$: $x - y + z + 3 = 0$.

Justifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ et $x' - x = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) - x = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3)$.

$$y' - y = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) - y = \frac{1}{3}(x - y + z + 3)$$

$$z' - z = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) - z = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3)$$

Posons $a = -\frac{1}{3}(x - y + z + 3) \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}(1\ ; -1\ ; 1)$ On a $\overrightarrow{MM'} = a\vec{u}; a \in \mathbb{R}$ Donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle de $\vec{u}(1\ ; -1\ ; 1)$. En outre, $\vec{n}(1\ ; -1\ ; 1)$ qui est un vecteur normal de (P) est colinéaire à $\vec{u}$. D'où $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est orthogonale à celle de (P).

4) Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de h.

Pour tout point M de l'espace d'image M' par h, $M' \in (P)$ et $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est orthogonale à celle de (P). Donc h est la projection orthogonale sur (P): $x - y + z + 3 = 0$.

- **Nature :** projection
- **Éléments caractéristiques :**

Base : le plan $(P) : x - y + z + 3 = 0$.

Direction : orthogonale à $(P) : x - y + z + 3 = 0$ ***[ou encore celle du vecteur $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$]***

Exercice d'application 4 : Dans un repère orthonormé, l'expression analytique d'une application j de l'espace est $\begin{cases} 11x' = x + y - 3z + 33 \\ 11y' = x + y - 3z \\ 11z' = -3x - 3y + 9z + 11 \end{cases}$

1) Justifier que j est une application affine
2) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par j.
3) Justifier que pour tout point M de l'espace d'image M' par j, $M' \in (D)$ et que si $M \notin (P)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à une direction fixe qu'on précisera.
4) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de j.

Solution

1) Justifions que *j* est une application affine

$$\begin{cases} 11x' = x + y - 3z + 33 \\ 11y' = x + y - 3z \\ 11z' = -3x - 3y + 9z + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{11}(x + y - 3z + 33) \\ y' = \frac{1}{11}(x + y - 3z) \\ z' = \frac{1}{11}(-3x - 3y + 9z + 11) \end{cases}$$

L'expression analytique de j est de la forme $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$ donc j est une application affine.

2) Déterminons l'ensemble (D) des points invariants par *j*

Soient $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ deux points de l'espace tels que $M' = j(M)$

M est invariant par $j \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = x + y - 3z + 33 \\ 11y = x + y - 3z \\ 11z = -3x - 3y + 9z + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y + 3z - 33 = 0 \\ x - 10y - 3z = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - 10y - 3z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 10y - 3z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 3y \\ x = 10y + 3(1 - 3y) = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y = y \\ z = 1 - 3y \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R})$

Ainsi, l'ensemble des points invariants par j est la droite (D) passant par $A(3 ; 0 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1 ; -3)$

3) Justifions que pour tout point *M* de l'espace d'image *M'* par *j*, *M'* ∈ (*D*)

$M'(x'; y'; z')$ et (D): $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = y \\ z = 1 - 3y \end{cases} (y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = \frac{1}{11}(x + y - 3z + 33) \\ y' = \frac{1}{11}(x + y - 3z) \\ z' = \frac{1}{11}(-3x - 3y + 9z + 11) \end{cases}$

Ainsi, $x' - y' = \frac{1}{11}(x + y - 3z + 33) - \frac{1}{11}(x + y - 3z) = 3$ et

$3y' + z' = \frac{3}{11}(x + y - 3z) + \frac{1}{11}(-3x - 3y + 9z + 11) = 1$. Donc $M' \in (D)$

$M'(x'; y'; z')$ et $x' - y' + z' + 3 = 0$. Donc $M' \in (P)$: $x - y + z + 3 = 0$.

Ainsi, pour tout point M de l'espace d'image M' par j, $M' \in (P)$

Justifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à une direction fixe qu'on précisera.

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$. $x' - x = \frac{1}{11}(x + y - 3z + 33) - x = \frac{1}{11}(-10x + y - 3z + 33)$.

$$y' - y = \frac{1}{11}(x + y - 3z) - y = \frac{1}{11}(x - 10y - 3z)$$

$$z' - z = \frac{1}{11}(-3x - 3y + 9z + 11) - z = \frac{1}{11}(-3x - 3y - 2z + 11)$$

Cherchons $a; b; c \in \mathbb{R}$ pour que si $\vec{n}(a; b; c)$, alors $\forall x; y; z \in \mathbb{R}$, $\vec{n}.\overrightarrow{MM'} = 0$.

$\vec{n}.\overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow 11\vec{n}.\overrightarrow{MM'} = 0$

$\Leftrightarrow x(-10a + b - 3c) + y(a - 10b - 3c) + z(-3a - 3b - 2c) + (33a + 11c) = 0, \forall x; y; z \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 33a+11c=0 \\ -10a+b-3c=0 \\ a-10b-3c=0 \\ -3a-3b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-3a \\ -10a+b+9a=0 \\ a-10b+9a=0 \\ -3a-3b+6a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-3a \\ a=b \\ a=b \\ 3a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = a \\ c = -3a \end{cases}.$$

$(a; b; c) = (a; a; -3a) = a(1; 1; -3)$.

Donc pour tout point M de l'espace d'image M' par j, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à la direction de $\vec{n}(1; 1; -3)$ qui est aussi celle de (D) et est fixe.

4) Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de *j*.

Pour tout point M de l'espace d'image M' par j, $M' \in (P)$ et $\overrightarrow{MM'}$ a une direction qui est orthogonale à celle de (D). Donc j est la projection orthogonale sur la droite (D) passant par $A(3\ ;0\ ;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;1\ ;-3)$.

- **Nature :** projection
- **Éléments caractéristiques :**

  Base : la droite (D) passant par $A(3\ ;0\ ;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;1\ ;-3)$

  Direction : orthogonale à (D)

Méthode : Pour montrer qu'une application f de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est une projection orthogonale, on peut :

- Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f
- Montrer que pour tout point $M \notin (E)$, si $M' = f(M)$, alors $M' \in (E)$ et $(MM') \perp (E)$.

Exercice 1

Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale f sur $(\mathcal{P}): 3x - 2y + 2z + 1 = 0$

Exercice 2 Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale g sur la droite (D)passant par $A(2;3;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2;1)$

Exercice 3 L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$

1) Justifier que f est une application affine.
2) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f
3) Justifier que pour tout point M de l'espace, si $f(M) = M'$, alors $M' \in$ (P) et que si $M \notin (P)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).
4) Déduire la nature de f
5) Vérifier que $f \circ f = f$

Exercice 4 L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 4y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x - 2y + z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-3x - 6y + 3z - 6) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (D).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

4 LEÇON 4 : SYMETRIES ORTHOGONALES

Objectifs :

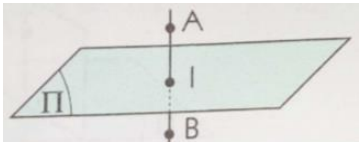
- Définir une réflexion et un demi-tour dans l'espace.
- Déterminer l'expression analytique d'une réflexion et un demi-tour dans l'espace.
- Composer les réflexions, les demi-tours, les réflexions et les demi-tours dans l'espace.
- Utiliser les propriétés de conservation et les images des figures simples par une réflexion ou un demi-tour pour résoudre des problèmes.

4.1 Plan médiateur d'un segment

4.1.1 Activité d'apprentissage

Soient A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$

Solution $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$



$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\left(2\overrightarrow{MI}\right) = 0$ où I est le milieu du segment $[AB]$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{IH} = 0$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\Leftrightarrow \overline{IH} = 0 \Leftrightarrow H = I.$

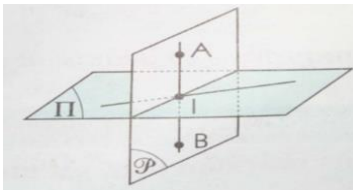
L'ensemble cherché est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

4.1.2 Propriété et définition

Soient A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B est le plan (π) passant par le milieu I du segment $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Ce plan est appelé plan médiateur du segment $[AB]$.

Remarques

- Toute droite de (π) passant par I est appelée **une** médiatrice du segment $[AB]$.
- Si un plan $(\mathcal{P})$ contient (AB), alors :
  - $(\mathcal{P})$ et (π) sont perpendiculaires.
  - La droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (π) est **la** médiatrice du segment $[AB]$ **sur le plan** $(\mathcal{P})$.



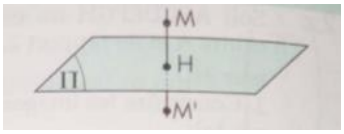
Exemple : $ABCD$ est un tétraèdre régulier et I le milieu du segment $[DA]$. Le plan médiateur du segment $[DA]$ c'est le plan (IBC).

4.2 Réflexions

4.2.1 Définition

Soit (π) un plan de $\mathcal{E}$. On appelle réflexion d'**axe** (π) ou encore **symétrie orthogonale** par rapport au plan (π) l'application notée $S_{(\pi)}$ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ qui à chaque point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' tel que :

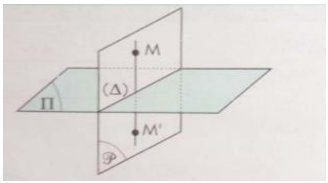
- Si $M \in (\pi)$, alors $M' = M$.
- Si $M \notin (\pi)$, alors (π) est le plan médiateur du segment $[MM']$.



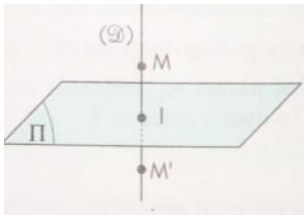
4.2.2 Remarques

- L'ensemble des points invariants par $S_{(\pi)}$ est le plan (π).
- Si H est le projeté orthogonal de M sur (π) et si $S_{(\pi)}(M) = M'$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$
- Si $S_{(\pi)}(M) = M'$, alors $S_{(\pi)}(M') = M$: on dit que M et M' sont symétriques par rapport à (π).
- $S_{(\pi)} \circ S_{(\pi)}(M) = S_{(\pi)}(M') = M$. Donc $S_{(\pi)} \circ S_{(\pi)} = id_{\mathcal{E}}$. D'où $S_{(\pi)}$ est bijective et $[S_{(\pi)}]^{-1} = S_{(\pi)}$

4.2.3 Propriétés



- Si $(\mathcal{P})$ est un plan perpendiculaire à un plan (π) et (Δ) leur droite d'intersection, alors :
  - $(\mathcal{P})$ est globalement invariant par $S_{(\pi)}$.
  - La restriction de $S_{(\pi)}$ à $(\mathcal{P})$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
- Si $(\mathcal{D})$ est une droite orthogonale à (π) en un point I, alors :
  - $(\mathcal{D})$ est globalement invariant par $S_{(\pi)}$
  - La restriction de $S_{(\pi)}$ à $(\mathcal{D})$ est la symétrie centrale de centre I.



4.2.4 Corollaire :

- Toute réflexion de l'espace est une isométrie.
- Toute réflexion de l'espace est une application affine.

Preuve

Soient $A; B$ et G trois points de l'espace ; $A'; B'$ et G' leurs images respectives par une réflexion d'axe (P) et $G = bar\{(A; a); (B; b)\}$.

Si $(AB) \perp (P)$, alors $A; B; G; A'; B'$ et G' sont sur la même droite (AB), orthogonale à (P) : on est ramené sur la droite (AB) à une symétrie centrale de centre I avec $\{I\} = (P) \cap (AB)$, qui est une isométrie, (donc $A'B' = AB$) et une application affine (donc $G' = bar\{(A'; a); (B'; b)\}$).

Si (AB) n'est pas orthogonale à (P), alors $A; B; G; A'$ et B' sont sur un même plan $(ABB'A')$, orthogonal à (P) : on est ramené sur le plan $(ABB'A')$ à une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) = (P) \cap (ABB'C')$ qui est une isométrie, (donc $A'B' = AB$) et une application affine (donc $G' = bar\{(A'; a); (B'; b)\}$).

4.2.5 Remarque

Soient $\vec{w}$ un vecteur normal d'un plan (π) de l'espace, $(\vec{u}; \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs de (π).

$S_{(\pi)}$ étant une application affine, elle admet une application linéaire associée σ telle que :

$\sigma(\vec{u}) = \vec{u}$; $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\sigma(\vec{w}) = -\vec{w}$

4.2.6 Réflexions et configurations

Propriétés

- Toute réflexion de l'espace transforme les droites en droites, les plans en plans ; conserve le parallélisme, l'orthogonalité.
- L'image d'une figure **plane** est une figure **plane** de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un **solide de l'espace** est un solide de même nature et de mêmes dimensions.

Indication pour la preuve : *(se ramener sur le plan et conclure comme précédemment)*

4.2.7 Expression analytique d'une réflexion

Exercice d'application 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J;K)$. Soit $(P): 3x-2y+z-4=0$.

Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe (P).

Solution

Soient $M(x;y;z); M'(x';y';z'); I(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$ le milieu du segment $[MM']$ et $\vec{n}(3;-2;1)$ un vecteur normal du plan (P).

$$M' = S_{(P)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ (MM') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(\frac{x+x'}{2}) - 2(\frac{y+y'}{2}) + \frac{z+z'}{2} - 4 = 0 & (1) \\ \overrightarrow{MM'} = k.\vec{n} \quad ; \quad k \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 3k \\ y'-y = -2k \\ z'-z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+3k \\ y' = y-2k. \\ z' = z+k \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3(x+x') - 2(y+y') + z + z' - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2x+3k) - 2(2y-2k) + 2z + k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{14}(-6x+4y-2z+8)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \frac{3}{14}(-6x+4y-2z+8) \\ y' = y - \frac{2}{14}(-6x+4y-2z+8). \\ z' = z + \frac{1}{14}(-6x+4y-2z+8) \end{cases} \text{ Ainsi, } S_{(P)}: \begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-2x+6y-3z+12) \\ y' = \frac{1}{7}(6x+3y+2z-8) \\ z' = \frac{1}{7}(-3x+2y+6z+4) \end{cases}$$

De la forme $\begin{cases} x' = ax+by+cz+d \\ y' = a'x+b'y+c'z+d' \\ z' = a''x+b''y+c''z+d'' \end{cases}$ avec $a;a';a'';b;b';b'';c;c';c'';d;d';d'' \in \mathbb{R}$

Donc $S_{(P)}$ est affine.

Exercice d'application 2

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+2y-2z-6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+y+2z+6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y+z-6) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (P)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

Solution

1) Déterminons l'ensemble (P) des points invariants par f.

Soient $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$ deux points de l'espace tels que $S_{(P)}(M)=M'$

M invariant par $S_{(P)} \Leftrightarrow M'=M \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}(x+2y-2z-6) \\ y=\frac{1}{3}(2x+y+2z+6) \\ z=\frac{1}{3}(-2x+2y+z-6) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x=(x+2y-2z-6) \\ 3y=(2x+y+2z+6) \\ 3z=(-2x+2y+z-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-2z-6=0 \\ 2x-2y+2z+6 \\ -2x+2y-2z-6) \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z+3=0$

Donc l'ensemble des points invariants par f est le plan (P): $x-y+z+3=0$.

2) Soient $M \notin (P)$; $M'=f(M)$ et I le milieu du segment $[MM']$

a) Montrons que I appartient à (P).

$I(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$.

$\frac{x+x'}{2}-(\frac{y+y'}{2})+\frac{z+z'}{2}+3=\frac{x+\frac{1}{3}(x+2y-2z-6)}{2}-\left(\frac{y+\frac{1}{3}(2x+y+2z+6)}{2}\right)+\frac{z+\frac{1}{3}(-2x+2y+z-6)}{2}+3=$

$\frac{4x+2y-2z-6}{6}-\left(\frac{2x+4y+2z+6}{6}\right)+\frac{-2x+2y+4z-6}{6}+3=0$. Donc I appartient à (P).

b) Justifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).

$$x'-x=\frac{1}{3}(x+2y-2z-6)-x=\frac{1}{3}(-2x+2y-2z-6)=-\frac{2}{3}(x-y+z+3)$$

$$y'-y=\frac{1}{3}(2x+y+2z+6)-y=\frac{1}{3}(2x-2y+2z+6)=\frac{2}{3}(x-y+z+3)$$

$$z'-z=\frac{1}{3}(-2x+2y+z-6)-z=\frac{1}{3}(-2x+2y-2z-6)=-\frac{2}{3}(x-y+z+3)$$

Posons $k=\frac{2}{3}(x-y+z+3)$ et $\vec{u}(-1;1;-1)$. On a $\overrightarrow{MM'}=k\vec{u}$. Donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle de $\vec{u}$.

En outre $\vec{n}(1;-1;1)$ est un vecteur normal de (P) et $\vec{u}=-\vec{n}$. Donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est orthogonale à (P).

4) Déduisons la nature et l'élément caractéristique de f.

Pour tout point $M \notin (P)$ d'image M' par f, le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P) et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P). Donc f est la réflexion d'axe (P).

Exercice 1

Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(P): 2x+3y-5z+3=0$

Exercice 2

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-2x - 3y + 6z - 3) \\ y' = \frac{1}{7}(-3x + 6y + 2z - 1) \\ z' = \frac{1}{7}(6x + 2y + 3z + 2) \end{cases}$

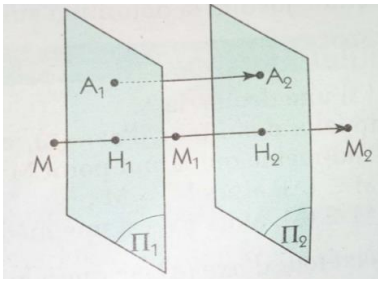
1) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (P)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

4.2.8 Composée de deux réflexions d'axes parallèles

Activité

Soient (π_1) et (π_2) deux plans parallèles, $A_1 \in (\pi_1)$ et A_2 son projeté orthogonal sur (π_2) .

Soient M et M_2 deux points de l'espace tels que $M_2 = S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)}(M)$



1) Déterminer une relation entre $\overrightarrow{MM_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.
2) Déduire la nature et l'élément caractéristique de $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)}$

Solution

1) Déterminons une relation entre $\overrightarrow{MM_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Posons $M_1 = S_{(\pi_1)}(M)$. on a alors $M_2 = S_{(\pi_1)}(M_1)$.

Soient H_1 et H_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur (π_1) et (π_2). On a :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} = 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2}) = 2\,\overrightarrow{H_1H_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

2) Déduisons la nature et l'élément caractéristique de $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)}$

$S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)}$ est une application de vers qui à tout point associe le point tel que $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

Donc $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$

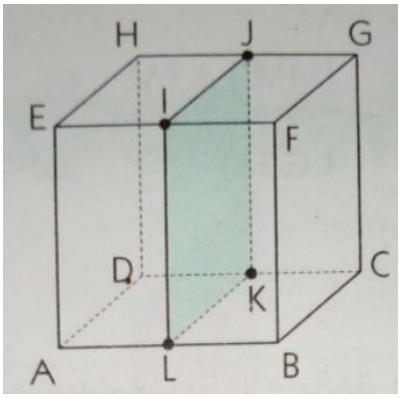
Propriétés

- Si (π_1) et (π_2) sont deux plans parallèles, $A_1 \in (\pi_1)$ et A_2 son projeté orthogonal sur (π_2), alors $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$.
- Étant donné un plan (π_1) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe un unique plan (π_2) tel que
  $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)} = t_{\vec{u}}$. $\quad [\ (\pi_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\pi_1)\ ]$
- Étant donné un plan (π_1) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe un unique plan (π_2) tel que
  $S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_2)} = t_{\vec{u}}$. $\quad [\ (\pi_2) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\pi_1)\ ]$

Remarque $S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_1}} = t_{\vec{0}} = id$. Donc $S_{(\pi_1)}$ est bijective et $[S_{(\pi_1)}]^{-1} = S_{(\pi_1)}$

Exemple: $ABCDEFGH$ est un pavé droit ; $I; J; K$ et L les milieux respectifs des segments $[EF]; [GH]$; $[CD]$ et $[AB]$.

- $S_{(BCGF)} \circ S_{(IJKL)} = t_{2\overrightarrow{IF}} = t_{\overrightarrow{EF}}$.
- $t_{\overrightarrow{AE}} = S_{(EFGH)} \circ S_{(MNOP)}$ où $M; N; O$ et P sont les images respectives des points $E; F; G$ et H par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (les milieux respectifs des côtés $[AE]; [BF]$; $[CG]$ et $[DH]$)
- $t_{\overrightarrow{AE}} = S_{(QRS)} \circ S_{(EFGH)}$ où $Q; R$ et S sont les images respectives des points $E; F$ et G par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

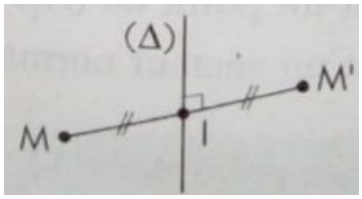


4.3 Demi-tours

4.3.1 Définition

Soit (Δ) une droite de l'espace. On appelle demi-tour d'**axe** (Δ) ou encore **symétrie orthogonale** par rapport à la droite (Δ) l'application notée $S_{(\Delta)}$ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ qui à chaque point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' tel que :

- Si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$.
- Si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est **une** médiatrice du segment $[MM']$.



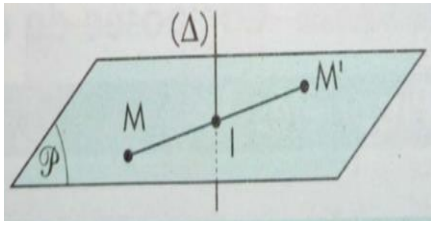
4.3.2 Remarques

- L'ensemble des points invariants par $S_{(\Delta)}$ est la droite (Δ).
- Si I est le projeté orthogonal de M sur (Δ) et si $S_{(\Delta)}(M) = M'$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$
- Si $S_{(\Delta)}(M) = M'$, alors $S_{(\Delta)}(M') = M$ on dit que M et M' sont symétriques par rapport à la droite (Δ).
- $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}(M) = S_{(\Delta)}(M') = M$. Donc $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = id_{\mathcal{E}}$. D'où $S_{(\Delta)}$ est bijective et $[S_{(\Delta)}]^{-1} = S_{(\Delta)}$

4.3.3 Propriété 1

Soient (Δ) une droite de l'espace, $S_{(\Delta)}$ le demi-tour d'axe (Δ) et $(\mathcal{P})$ le plan perpendiculaire à (Δ) en I.

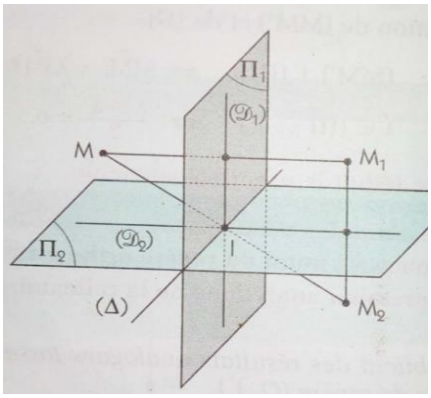
- $(\mathcal{P})$ est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$.
- La restriction de $S_{(\Delta)}$ à $(\mathcal{P})$ est la symétrie centrale de centre I.



Preuve : Si $M \in (\mathcal{P})$ et $S_{(\Delta)}(M) = M'$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$. Ainsi, $M; M'$ et I sont alignés. Donc $M' \in (\mathcal{P})$.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$. Donc $S_I(M) = M'$

4.3.4 Propriété 2



- La composée de deux réflexions d'axes (π_1) et (π_2) **perpendiculaires** suivant une droite (Δ) est la réflexion d'axe (Δ).
- Étant donnée une droite (Δ) incluse dans un plan (π_1), il existe un unique plan (π_2) tel que $S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)} = S_{(\Delta)} = S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_2)}$. $[(\pi_2)\ est\ le\ plan\ contenant\ (\Delta)\ perpendiculaire$ à $(\pi_1)\ ]$

4.3.5 Propriété 3

- Tout demi-tour de l'espace est une isométrie.
- Tout demi-tour de l'espace est une application affine.

4.3.6 Remarque

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite plan (D) de l'espace, $(\vec{v};\vec{w})$ un couple de vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$.

$S_{(D)}$ étant une application affine, elle admet une application linéaire associée σ qui est telle que :

$\sigma(\vec{u}) = \vec{u};\ \sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$ et $\sigma(\vec{w}) = -\vec{w}$

4.3.7 Demi-tour et configurations

Propriétés

- Tout demi-tour de l'espace transforme les droites en droites, les plans en plans ; conserve le parallélisme, l'orthogonalité.
- L'image d'une figure **plane** par un demi-tour est une figure **plane** de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un **solide de l'espace** par un demi-tour est un solide de même nature et de mêmes dimensions.

Indication pour la preuve : *(se ramener sur le plan et conclure comme précédemment)*

4.3.8 Expression analytique d'un demi-tour

Exercice d'application 1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J;K)$. Soit (D) passant par $A(1;1;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$. Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D).

Solution Soient $M(x;y;z); M'(x';y';z'); I(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$ le milieu du segment $[MM']$.

$$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (D) \\ \overrightarrow{AI}\ colinéaire\ à\ \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \quad (1) \\ \overrightarrow{AI} = k.\vec{u};\ k \in \mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 2(x'-x) - (y'-y) + 3(z'-z) = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2} - 1 = 2k \\ \frac{y+y'}{2} - 1 = -k \\ \frac{z+z'}{2} + 2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4k + 2 - x \\ y' = -2k + 2 - y. \\ z' = 6k - 4 - z \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(-2x + 2 + 4k) - (-2y + 2 - 2k) + 3(-2z - 4 + 6k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{14}(2x - y + 3z + 5)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2}{7}(2x - y + 3z + 5) - x + 2 \\ y' = \frac{-1}{7}(2x - y + 3z + 5) - y + 2. \\ z' = \frac{3}{7}(2x - y + 3z + 5) - z - 4 \end{cases} \text{ Ainsi, } S_{(D)}: \begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-3x - 2y + 6z + 24) \\ y' = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z + 9) \\ z' = \frac{1}{7}(6x - 3y + 2z - 13) \end{cases}$$

De la forme $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$ avec $a; a'; a''; b; b'; b''; c; c'; c''; d; d'; d'' \in \mathbb{R}$

Donc $S_{(D)}$ est affine.

Exercice d'application 2

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-3x - 2y + 6z + 24) \\ y' = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z + 9) \\ z' = \frac{1}{7}(6x - 3y + 2z - 13) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (D).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

Solution

1) Déterminons l'ensemble (D) des points invariants par f.

Soient $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ deux points de l'espace tels que $S_{(D)}(M) = M'$

$$M \text{ invariant par } S_{(D)} \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}(-3x - 2y + 6z + 24) \\ y = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z + 9) \\ z = \frac{1}{7}(6x - 3y + 2z - 13) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = (-3x - 2y + 6z + 24) \\ 7y = (-2x - 6y - 3z + 9) \\ 7z = (6x - 3y + 2z - 13) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 3z - 12 = 0 \\ 2x + 13y + 3z - 9 = 0 \\ 6x - 3y - 5z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 3z - 12 = 0 \\ 2x + 13y + 3z - 9 = 0 \\ 6x - 3y - 5z - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y-3z-12=0 \\ -3x+2z+7=0 \\ -3x+2z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ z=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) passant par $A(0;\frac{3}{2};-\frac{7}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$

2) Soient $M \notin (P)$; $M'=f(M)$ et I le milieu du segment $[MM']$

a) Montrons que I appartient à (D).

$I(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$. Et (D): $\begin{cases} 5x+y-3z-12=0 \\ -3x+2z+7=0 \end{cases}$

$$5\left(\frac{x+x'}{2}\right)+\left(\frac{y+y'}{2}\right)-3\left(\frac{z+z'}{2}\right)-12=5\left(\frac{x+\frac{1}{7}(-3x-2y+6z+24)}{2}\right)+\left(\frac{y+\frac{1}{7}(-2x-6y-3z+9)}{2}\right)-$$

$$3\left(\frac{z+\frac{1}{7}(6x-3y+2z-13)}{2}\right)-12=5\left(\frac{4x-2y+6z+24}{14}\right)+\left(\frac{-2x+y-3z+9}{14}\right)-3\left(\frac{6x-3y+9z-13}{14}\right)-12=0.$$

$$-3\left(\frac{x+x'}{2}\right)+2\left(\frac{z+z'}{2}\right)+7=-3\left(\frac{x+\frac{1}{7}(-3x-2y+6z+24)}{2}\right)+2\left(\frac{z+\frac{1}{7}(6x-3y+2z-13)}{2}\right)+7$$

$$=-3\left(\frac{4x-2y+6z+24}{14}\right)+2\left(\frac{6x-3y+9z-13}{14}\right)+7=0$$

$\begin{cases} 5x_I+y_I-3z_I-12=0 \\ -3x_I+2z_I+7=0 \end{cases}$. Donc I appartient à (P).

b) Justifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à (D).

$$x'-x=\frac{1}{7}(-3x-2y+6z+24)-x=-\frac{2}{7}(5x+y-3z-12)$$

$$y'-y=\frac{1}{7}(-2x-6y-3z+9)-y=\frac{1}{7}(-2x-13y-3z+9)$$

$$z'-z=\frac{1}{7}(6x-3y+2z-13)-z=\frac{1}{7}(6x-3y-5z-13)$$

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=2(x'-x)-(y'-y)+3(z'-z)$$

$$=-\frac{4}{7}(5x+y-3z-12)-\frac{1}{7}(-2x-13y-3z+9)+\frac{3}{7}(6x-3y-5z-13)=0$$

$\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0$. Donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à (D).

c) Déduisons la nature et l'élément caractéristique de f.

Pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f, le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D) et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à (D). Donc f est le demi-tour d'axe (D).

Méthode : Pour montrer qu'une application f de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est une symétrie orthogonale, on peut :

- Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f
- Montrer que pour tout point $M \notin (E)$, si $M' = f(M)$ et si I est le milieu du segment $[MM']$, alors $I \in (E)$ et $(MM') \perp (E)$.

Exercice 1

1) Justifier que les plans $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ et $(P'): 2x + y - 3z - 1 = 0$ sont sécants suivant une droite (D).
2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D): $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = -x - 4 \\ y' = -3y + 4z - 4 \\ z' = -2y + 3z - 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à (D).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

4.3.9 Composée de deux demi-tours

4.3.9.1 Composée de deux demi-tours d'axes parallèles

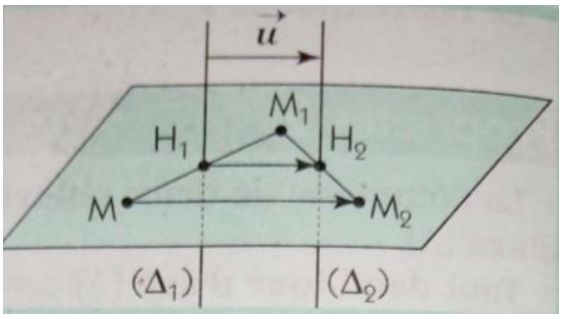
Activité Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites parallèles, $A_1 \in (\Delta_1)$ et A_2 son projeté orthogonal sur (Δ_2) .

Soient M et M_2 deux points de l'espace tels que $M_2 = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}(M)$

1) Déterminer une relation entre $\overrightarrow{MM_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$.
2) Déduire la nature et l'élément caractéristique de $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$

Solution

1) Déterminons une relation entre $\overrightarrow{MM_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.



Posons $M_1 = S_{(\Delta_1)}(M)$. on a alors $M_2 = S_{(\Delta_2)}(M_1)$.

Soient H_1 et H_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur (Δ_1) et (Δ_2). On a

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} = 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2}) = 2\,\overrightarrow{H_1H_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

2) Déduisons la nature et l'élément caractéristique de $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$

$S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est une application de ε vers ε qui à tout point M associe le point M_2 tel que $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

Donc $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$

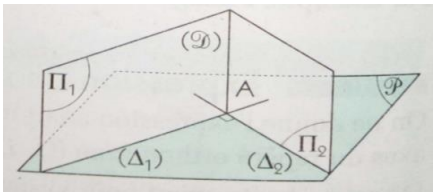
Propriété

- Si (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites parallèles, $A_1 \in (\Delta_1)$ et A_2 son projeté orthogonal sur (Δ_2), alors $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$.
- Étant donnée une droite (Δ_1) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (Δ_2) telle que
  $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = t_{\vec{u}}$. $\quad [\ (\Delta_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta_1)\ ]$
- Étant donnée une droite (Δ_1) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (Δ_2) telle que
  $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)} = t_{\vec{u}}$. $\quad [\ (\Delta_2) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta_1)\ ]$

Remarque $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_1)} = t_{2\overrightarrow{A_1A_1}} = t_{\vec{0}} = id$. Donc $S_{(\Delta_1)}$ est bijective et $[S_{(\Delta_1)}]^{-1} = S_{(\Delta_1)}$

4.3.9.2 Composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires

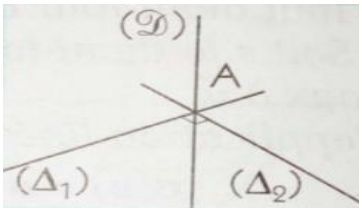
Activité Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites perpendiculaires en un point A, $(\mathcal{P})$ le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2); (π_1) et (π_2) les plans perpendiculaires à $(\mathcal{P})$ et contenant respectivement (Δ_1) et (Δ_2); $(\mathcal{D})$ la droite d'intersection de (π_1) et (π_2). Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$ et de $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$



Solution $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)} = S_{(\pi_1)} \circ S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\pi_2)} = S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_2)} = S_{(\mathcal{D})}$

$S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\pi_2)} \circ S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\pi_1)} = S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi_1)} = S_{(\mathcal{D})}$

Propriétés



- Si (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites perpendiculaires en A et $(\mathcal{D})$ la perpendiculaire commune à (Δ_1) et (Δ_2) en A, alors
  $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\mathcal{D})}$.
- Étant données deux droites (Δ_1) et $(\mathcal{D})$ perpendiculaires en un point A, il existe une unique droite (Δ_2) telle que $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\mathcal{D})}$. $[(\Delta_2) est\ la\ perpendiculaire$ à $(\Delta_1)\ en\ A]$

4.3.9.3 Composée d'un demi-tour et d'une réflexion

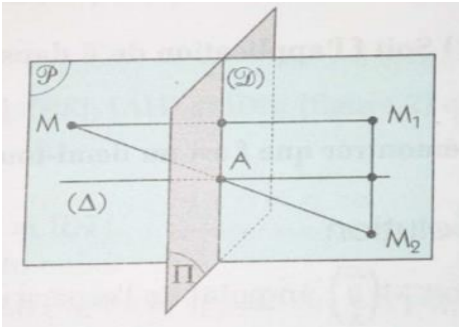
Activité : Soient (Δ) une droite perpendiculaire à un plan (π) en un point A. $M \in \varepsilon$.

On pose $M_1 = S_{(\pi)}(M)$ et $M_2 = S_{(\Delta)}(M_1)$. On a $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)}(M) = M_2$

1) On suppose que $M \in (\Delta)$. Justifier que $S_A(M) = M_2$
2) On suppose que $M \notin (\Delta)$. Soient $(\mathcal{P})$ le plan passant par M et contenant (Δ); $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P}) \cap (\pi)$
   a) Quelle est la restriction de $S_{(\pi)}$ à $(\mathcal{P})$?
   b) Déduire que $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)}(M) = S_A(M)$

3) Réduire $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)}$ et $S_{(\pi)} \circ S_{(\Delta)}$

Solution



1) Supposons que $M \in (\Delta)$ et justifions que $S_A(M) = M_2$

Si $M \in (\Delta)$, alors $M_1 \in (\Delta)$ et ainsi, $M_2 = M_1$. Donc $S_A(M) = M_2$

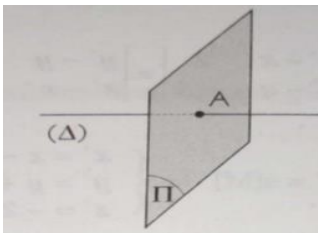
2) Supposons que $M \notin (\Delta)$.

   a) La restriction de $S_{(\pi)}$ à $(\mathcal{P})$ c'est $S_{(\mathcal{D})}$.

   b) $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)}(M) = S_{(\Delta)} \circ S_{(\mathcal{D})}(M) = S_A(M)$

3) $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)} = S_A$. On montre de manière analogue que $S_{(\pi)} \circ S_{(\Delta)} = S_A$

Propriétés



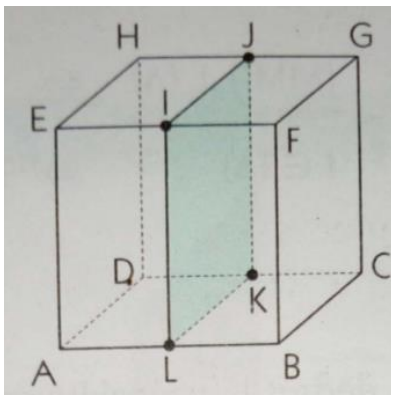
- Si (Δ) est une droite perpendiculaire à un plan (π) en un point A, alors $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)} = S_{(\pi)} \circ S_{(\Delta)} = S_A$.
- Étant donné un point A appartenant à une droite (Δ), il existe un unique plan (π) tel que $S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)} = S_{(\pi)} \circ S_{(\Delta)} = S_A$.

  $[(\pi) est\ le\ plan\ perpendiculaire$ à $(\Delta)\ en\ A]$.

- Étant donné un point A appartenant à un plan (π), il existe une unique droite (Δ) telle que

$S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)} = S_{(\pi)} \circ S_{(\Delta)} = S_A$. $[(\Delta) est\ la\ droite\ perpendiculaire$ à $(\pi)\ en\ A]$

Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube. $I; J; K$ et L les milieux respectifs des segments $[EF]; [GH]$; $[CD]$ et $[AB]$.



$S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_{(AE)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(DHE)} = S_A$; $S_E = S_{(EH)} \circ S_{(ABF)}$

$S_H = S_{(EFG)} \circ S_{(DH)}$; $S_{(ADH)} \circ S_{(IJK)} = t_{2\overrightarrow{KD}} = t_{\overrightarrow{CD}}$;

$S_{(ABC)} \circ S_{(BCG)} = S_{(BC)}$; $S_{(AB)} = S_{(FB)} \circ S_{(BC)}$

Exercice d'exploration :

1) Chercher les plans $(neuf)$ et axes *(neuf)* de symétrie d'un cube.
2) Chercher les plans (six) et axes *(trois)* de symétrie d'un tétraèdre régulier.

Les Grands profs de Maths

Mathématiques
Terminales scientifiques C, D & E
Support de Cours sur les Probabilités.

DRAFT

8 août 2018

Table des matières

1 Les probabilités. 1

1.1 Les outils de dénombrement . . . 1
1.1.1 **Notion d'ensemble fini.** . . . 1
1.1.2 **Les différents types de dénombrement.** . . . 2
1.2 Calcul des probabilités . . . 5
1.2.1 **Langage des probabilités.** . . . 5
1.2.2 **Probabilités sur un ensemble fini.** . . . 6
1.3 Variables aléatoires . . . 7
1.3.1 **Caractéristiques d'une variable aléatoire.** . . . 8
1.3.2 **Propriétes d'une varaible aléatoire.** . . . 8
1.4 Conditionnement (pas au programme en Tle C) . . . 8
1.4.1 **Arbres pondérés.** . . . 8
1.4.2 **Probabilité conditionnelle.** . . . 8
1.4.3 **Formule de Bayes (complément de cours, pas au programme)** . . . 9
1.5 Indépendance . . . 10
1.5.1 **Evénements indépendants.** . . . 10
1.5.2 **Indépendance de deux variables aléatoires.** . . . 10
1.5.3 **Probabilités totales.** . . . 11
1.6 Lois de probabilités . . . 11
1.6.1 **Loi de Bernoulli.** . . . 11
1.6.2 **Loi Binomiale.** . . . 12
1.7 Fonction de repartition . . . 12

DRAFT

Les probabilités.

Objectifs pédagogiques opérationnels :
A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :
↪ se familiariser avec les outils de dénombrement vu en classe de Première.
↪ calculer une probabilité ;
↪ reconnaitre deux événements indépendants ;
↪ savoir utiliser un schéma de Bernoulli et la loi binomiale.
↪ calculer la probabilité conditionnelle.
↪ déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle, ses caractéristiques (variance,ecart-type, espérance mathématique) et sa fonction de repartition.
↪ Faire le lien entre les probabilités, les statistiques et certaines situations de la vie courante.

DRAFT

1.1 Les outils de dénombrement

1.1.1 Notion d'ensemble fini.

Définition 1.1. *Soit E un ensemble non vide fini, A et B deux parties de E.(***NB :** faire un schéma pour faciliter la compréhension par des apprenants*) :*

- *On appelle* ***reunion de A et B****, noté $A \cup B$ l'ensemble $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.*
- *On appelle* ***intersection de*** *A* ***et*** *B l'ensemble noté $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$.*
- *On appelle* ***différence de*** *A* ***et*** *B,l'ensemble des éléments de E appartenant à A et n'appartenant pas à B. On note $A - B$ et se lit "A* **moins** *B".*

$$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_A^B$$

- *On appelle* ***complementaire*** *de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A} = \complement_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$.*
- *On appelle* ***différence symétrique*** *de A et B, l'ensemble noté $A\Delta B = A \cup B - A \cap B = (A-B) \cup (B-A)$.*
- *A et B sont* ***disjoints*** *si $A \cap B = \emptyset$.*
- *Le* ***cardinal*** *de A est le nombre d'éléments de A. On le note $card(A)$*

Propriété 1.1. *Soit E un ensemble fini, A et B deux parties de E, alors :*

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$;
- $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$

Par ***conevention*** $card(\emptyset) = 0$.
TAF *: Montrer que $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$.*

Exemple 1.1. *Dans une classe de 54 élèves, les élèves pratiquent aumoins le football ou le basketball. 40 partiquent le football et 30 le basketball.*

1. *Quel est le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois les deux sports.*
2. *Quel le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football ? uniquement le basketball ?*

Solution
*Désignons par A et B l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et le basketball respectivement(****faire le schéma pour illustrer****).*

1. $card(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B) = 40 + 20 - 54 = 16$
2. *Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le foot est* $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B) = 40 - 16 = 24$
   Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket est $card(B - A) = card(B) - card(A \cap B) = 30 - 16 = 14$

Exercice 1.1.1. *Dans un etablissement scolaire de* 1500 *élèves,* 3 *activités sportives sont proposées : le football, le handball et le tenis.*
580 *élèves pratiquent le football,* 490 *le handball et* 450 *le tenis.*
250 *pratiquent à la fois le football et le handball,* 210 *pratiquent à la fois le footbll et le tenis,* 180 *pratiquent à la fois le tenis et le handball et* 150 *pratiquent à la fois les trois sports.*

1. *Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent un seul sport.*
2. *Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent aumoins un sport.*
3. *Déterminer le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucun sport.*

Définition 1.2. *(**Partition d'un ensemble**)*
Soit E *un ensemble non vide,* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *une suite de parties de* E*. On dit que la famille* $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ *forme une partition de* E *si et seulement si :*

1. $\forall i = 1, \cdots, n$; $A_i \neq \emptyset$;
2. $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;*(**les** A_i **sont deux à deux disjoints**)*
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n = E$;

Remarque 1.1. *Dans ce cas,* $card(E) = card(A_1) + \cdots + card(A_n)$.

Exemple 1.2. *Soit* E *l'ensemble des chiffres de la numération hexadécimale. Ecrire les éléments de* E *et déterminer une partition de* E*.(**évident**)*

Définition 1.3. *(**Produit Cartésien**)*
Soit E *et* F *deux ensembles finis non vides.*
• ***Le produit cartésien*** *de* E *par* F *est l'ensemble des couples* (a, b) *tels* $a \in E$ *et* $b \in F$*. On note* $E \times F$ *et on lit "**E croix F**".*
Plus généralement, le produit cartésien de p *ensembles* $E_1, \cdots, E_p$ *est l'ensemble des éléments* $(x_1, \cdots, x_p)$ *tels que* $x_1 \in E_1$, $\cdots$, $x_p \in E_p$*. On note* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.
• *Un élément du produit cartésien de* p *ensembles* $(p \geq 2)$ *est appelé* p***-uplet ou*** p***-liste***.

Remarque 1.2. *Pour tous ensembles finis,* $E_1, \cdots, E_p$*, on a* $card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times \cdots \times card(E_p)$.

Exercice 1.1.2.
1. *Le jour du baccalauréat, un candidat doit choisir un stylo, un crayon ordinaire et une règle graduée. On met à sa dispositon* 6 *stylos,* 4 *crayons ordinaires et* 5 *règles graduées. Combien de choix distincts peut-il ainsi efffectuer ? (**Rep** :* $6 \times 5 \times 4 = 120$*)*
2. *On lance un dé blanc et un dé bleu, chacun d'eux ayant* 6 *faces numerotées de* 1 *à* 6*. Le résultat d'un lancer est le couple des nombres apparaissant sur la face superieure de chaque dé.*
   (a) *Déterminer le nombre de résultats possibles.(**Rep** :* $6 \times 6 = 36$*)*
   (b) *Déterminer le nombre de résultats pour lequel la différence de la valeur absolue des deux nombres est* ≤ 3*.(**Ind : On pourrait utiliser le tableau pour dénombrer**)*

1.1.2 Les différents types de dénombrement.

A) Les p-listes ou p-uplets

Définition 1.4. *Soit* E *un ensemble et* p *un entier* $p \geq 2$*. On appelle* p***-uplet ou*** p***-liste*** *tout élément du produit cartésien* $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p\ fois}$.

Propriété 1.2. *;*
■ *Soit* E *un ensemble fini à* n *eléménts ; soit* $p \in \mathbb{N}^\star$*. Le cardinal de l'ensemble des p-listes de* E *est* n^p*. Ainsi* $card(E^p) = [card(E)]^p = n^p$.
■ *Le nombre d'application d'un ensemble* E *à* p *élements vers un ensemble* F *à* n *éléments est* $[card(F)]^{card(E)} = n^p$.

DRAFT

Remarque 1.3. *Une p-liste correspond à un choix ordonné de p éléments disntincts ou non(un ou plusieurs éléments peuvent être répétés). On les utilise aussi dans les tirages successifs avec remise.*

Exemple 1.3.
1. *Combien existe-il de nombre entier naturel de 4 chiffres tous les chiffres étant impaires. (**Rep :** 5^4)*
2. *Déterminer le nombre de numéro de télephone de 7 chiffres que l'on peut avoir.(**Rep :** 10^7)*
3. *De combien de façon différentes peut-on ranger 20 dans une bibliothèque comportant 5 étagères. (**Rep :** 5^{20})*
4. *Déterminer le nombre de façons de composer un code de 4 symboles qui sont les lettres de l'alphabet français.(**Rep :** 26^4)*

B) Les arrangements

Définition 1.5. *Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. On appelle **arrangement sans répétition**(ou tout simplement **arrangement**) de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition ordonnée sans répétition de p de ces élémnets. On le note A_n^p.*

Exemple 1.4. $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
$(1, 3, 2)$,$(1, 4, 3)$, $(2, 1, 3)$ *sont les arrangements de 3 éléments de E.*
$(1, 1, 2)$,$(1, 4, 4)$ *et* $(3, 3, 3)$ *ne sont pas les arrangements de 3 éléments de E. Ce sont des 3-listes.*

Remarque 1.4.
- ► *Dans un arrangement, il y'a de l'ordre et on ne repète jamais les élements ;*
- ► *Il n'existe aucun arrangement de p-éléments de E lorsque $p > card(E)$.*
- ► *On les utilise aussi dans les tirages successifs sans remise.*
- ► *Un arrangement **avec répétition** est un **p-uplet**.*

Propriété 1.3. *Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$.*
- ■ $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- ■ *Le nombre d'injections d'un ensemble F à p éléments vers un ensemble E à n éléments est A_n^p.*

DRAFT

Exemple 1.5.
1. *8 chevaux prennent le départ d'une course. Combien de tiercés, de quartés et de quintés peut-on former ? (**Rep :** A_8^3 tiercés, A_8^4 quartés et A_8^5 quintés).*
2. *Une olympiade de maths est organisée avec 50 concurrents et attribue un premier prix, un deuxième prix et un troisième prix.*
   (a) *Quel est le nombre de résultats possibles sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ?*
   (b) *Quel est le nombre de résultats possibles sachant qu'il n'y a deux premiers ex-aequo ?*

C) Permutation

Définition 1.6. *Soit E un ensemble à p éléments, on appelle **permutation**(ou **permutation sans répétition**) de E toute disposition ordonnée et sans répétition des p éléments de E.*
Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $P_n = n! = A_n^n$.

Exemple 1.6. *Les permutations de $\{a, b, c\}$ sont : abc, acb, bac, bca, cab, cba. Elles sont au nombre 6.*

Propriété 1.4. *Le nombre de bijections d'un ensemble fini E à n éléments dans lui-même est n!.*

Remarque 1.5. *Soit une collection de n éléments formés de v groupes discernables d'éléments indiscernables $\underbrace{a, a, \cdots, a}_{\alpha\ fois}, \underbrace{b, b, \cdots, b}_{\beta\ fois} \cdots \underbrace{s, s, \cdots, s}_{\lambda\ fois}$ tels que $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$.*
*On appelle **permutation avec répétition** de ces n éléments, toute disposition ordonnée de l'ensemble des n éléments.On note*
$P'_n(\alpha, \beta, \cdots, \lambda)$ le nombre de telles permutations. On a

$$P'_n(\alpha, \beta, \cdots, \lambda) = \frac{n!}{\alpha!\beta! \cdots \lambda!}$$

Exemple 1.7.
1. *De combien de façon peut-on ranger 6 livres dans 6 armoires sachant qu'une armoire ne peut contenir qu'un seul livre.(**Rep :** 6!)*

2. *Déterminer le nombre d'anagramme du mot "anticonstitutionnellement", "mathématiques".*
3. *Combien de mots peut-on former en prenant toutes les lettres du mot "coordonner" ?*
   *(**sol** :$P'_{10}(3,2,2,1,1,1)$) Parmi ces mots, combien*
   (a) incluent les trois lettres "O", l'une à côté de l'autre ?
   (b) commencent et se terminent par un "n" ?

Indication solution *:*

3(a) *Les trois lettres "O" peuvent être placées l'une à côté de l'autre de 8 de façons. Pour chaque façon, il faut permuter les 7 lettres restantes aux autres positions ; soit* $8 \times \dfrac{7!}{2!2!1!1!1!} = 10080$ *mots*

3(b) *Les lettres "n" étant placées, il reste à permuter le 8 autres lettres dans les autres positions, soit* $\dfrac{8!}{3!2!1!1!1!} = 336$ *mots.*

D) Les combinaisons

Définition 1.7. *Soit E un ensemble à n éléments et $1 \leq p \leq n$.*

■ *On appelle **combinaison sans répétition**(ou tout simplement **combinaison**) de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition non ordonnée et sans répétition de p éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble.*
On note C_n^p le nombre de telles combinaisons et

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)}$$

Les p éléments de la combinaison doivent être disntincts et sont choisis parmi les n que comporte E ; donc $p \leq n$.

■ *On appelle **combinaison avec répetition** de p éléments choisis parmi les n que comporte E, toute disposition non ordonnée et avec eventuellement répétition de p de élémnets choisis parmi les n éléments de l'ensemble.*
On le note C'^p_n ou K_n^p le nombre de telles combinaisons. Du fait des répétitions éventuelles, on peut avoir $p \geq n$ et $C_n^p \leq C'^p_n$.

Le nombre de telles combinaisons

$$C_n^p = P'_{n-1+p}(n-1,p) = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!}$$

Propriété 1.5. *Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $p \in n$*

► $C_n^p = C_n^{n-p}$;

► $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ *(trinagle de pascal) ; cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche les valeurs de C_n^p(**construire le triangle le pascal pour illustrer**).*

► $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$.

Démonstration. Exercice

Remarque 1.6. • $C_n^0 = 1$,$C_n^n = 1$ *et* $C_n^1 = 1$;

• $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)} = P'_n(n, n-p)$;

• $C'^p_n = C^p_{n+p-1}$ *(**vérifier en exercice**).*

Exercice 1.1.3. *On donne $f(x) = (1+x)^n$, $n \geq 2$. Calculer les sommes suivantes*

$A = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$ $\quad$ $B = \sum_{p=0}^{n} (-1)^n C_n^p$ $\quad$ $C = \sum_{p=0}^{n} pC_n^p$; $\quad$ $D = \sum_{p=0}^{n} p(-1)^p C_n^p$

$E = \sum_{p=0}^{\alpha} C_n^{2p}$ $(\alpha = E(\frac{n}{2})$, *E fonction partie entière*$)$ $\quad$ $F = \sum_{p=0}^{\beta} C_n^{2p+1}$, $(\beta = E(\frac{n-1}{2}))$

$G = \sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p$ $\quad$ $H = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$ *et* $C = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p+1} C_n^p$

DRAFT

Exercice 1.1.4. *Une commission de 5 membres comprenant 3 economistes et 2 juristes doit être constituée à partir de 13 candidats dont 7 éonomistes et 6 juristes.*

1. *De combien de façons différentes cette commission peut- elle être constituée ?*
2. *Même question, si un économiste nommément désigné parmi les 7 économistes candidats devant absolument faire partie de la commission.*
3. *Même question, si un des 6 juristes candidats devant absolument être écarté de la commission(mais l'intéressé ne le sait pas).*
4. *Même question, si un des économistes et un des juristes, tous deux individualisés ne pouvant faire partie de la commission.*

Indication solution

1. *La commission peut-être constituée de* $C_7^3.C_6^2 = 525$ *façons.*
2. $C_6^2.C_6^2 = 225$
3. $C_7^3.C_5^2 = 350$
4. *On peut raisonner de deux façons :*
   • *Retrancher au nombre total de commissions, celles où les individus qui doivent être ecartés figurent ensemble :* $C_7^3.C_6^2 - C_6^2.C_5^1 = 450$ *;*
   • *Compter les commissions où les deux individus ne figurent pas esemble ; soit* $C_6^2.C_5^2 + C_6^3.C_5^1 + C_6^3.C_5^2 = 450$

1.2 Calcul des probabilités

1.2.1 Langage des probabilités.

DRAFT

Activité 1.1. *On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure qui s'affiche. On considère les ensembles suivants :*
A :"Le numéro obtenu est pair" et B : "Le numéro obtenu est est impair".

1. *Pouvons-nous déterminer avec certitude le numéro de la face supérieure qui doit s'affiche ?*
   Puisque nous ne pouvons pas dire avec certitude le numéro de la face supérieure qui s'affiche après le lancer du dé, on dit qu'on a realisé ***une expérience aléatoire****.*
2. *Déterminer l'ensemble* Ω *des résultats possibles que l'on peut avoir après le lancer.*
   On appelle Ω ***l'univers*** *associé à cet expérience.*
3. *Déterminer 2 sous-ensembles* Ω *à un seul élement, 4 éléments et 6 éléments ; conclure.*
4. *Déterminer l'intersection des ensembles A et B. Puis conclure.*

Ce lancer du dé, le lancer d'une pièce de monnaie ⋯ sont des ***expériences aléatoires****, car avant de l'effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard. A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé* ***univers****. Ces différents résultats sont appelés* ***éventualités*** *(****issues*** *ou* ***possibilités****). Ce sont des éléments de* Ω*.*

Définition 1.8. ♦ *Les sous-ensembles de l'univers* Ω *sont appelés* ***événements****.*
♦ *Les événements formés d'un seul élément sont appelés* ***événements élémentaires****.*
♦ *Etant donné un univers* Ω*, l'événement* Ω *est* ***l'événement certain****.*
♦ *L'ensemble vide est* ***l'événement impossible****.*
♦ *L'événement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté* $A \cap B$ *et se lit "A* **inter** *B".*
♦ *L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté* $A \cup B$ *et se lit "A* **union** *B".*
♦ *Etant donné un univers* Ω *et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé* ***événement contraire*** *de A, noté* $\overline{A}$*.*
♦ *A et B sont* ***incompatibles*** *si et seulement si* $A \cap B = \emptyset$*.*
Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé ***probabilité****.*

Exemple 1.8. *On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et noter le numéro de la face superieure puis considerer les ensembles suivants : A :"Le numéro obtenu est un multiple de 2" et B :"Le numéro obtenu est superieur à 3".*

1. *Déterminer l'univers Ω associe à cet épreuve*
2. *Déterminer tous les évenements élémenraires de Ω.*
3. *Déterminer l'évenement contraire de B. A et B sont-ils incompatibles ?*

1.2.2 Probabilités sur un ensemble fini.

Activité 1.2. 1. *On jette une pièce équilibrée, combien avons-nous de chances d'avoir "pile" ?*

2. *On lance un dé non truqué ; combien avons-nous de chances d'obtenir 2 ? d'avoir un numero pair ?*
3. *Une urne contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire une boule (sans regarder !)*
   - ▶ *Combien avons-nous de chances de tirer une boule jaune ?*
   - ▶ *Combien avons-nous de chances de tirer une boule rouge ?*

Solution

Pour la première question, on a une chance sur 2 d'avoir pile. On dit alors que la probabilité d'avoir pile est $1/2$. La probabilité d'un événement est un ***nombre*** *qui traduit la* ***chance*** *que l'evenement se realise. Ce nombre peut s'ecrire :*

- ***avec une fraction****, par exemple* $\frac{1}{2}$
- ***avec un pourcentage****, par exemple* 50%
- ***avec un nombre decimal****, par exemple* $0,5$

Définition 1.9. *Soit Ω un ensemble fini. On appelle* ***probabilité*** *sur Ω l'appliaction de $\mathcal{P}(\Omega)$(ensemble des parties de Ω) à valeurs dans $[0,1]$ qui à toute partie A de Ω, associe $p(A)$ vérifiant les conditions suivantes :*

■ *$p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$;*

■ *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Ainsi, si $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ alors :*

$$0 \leq p(\{x_i\}) \leq 1 \text{ et } p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{x_i\});$$

DRAFT

On note $p_i = p(\{x_i\})$ ou parfois plus simplement $p(x_i)$ la probabilité des événements élémentaires $\{x_i\}$. Définir une ***loi de probabilité****, c'est déterminer les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tels que, pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$; On le dispose le plus souvent dans un tableau*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	*total*
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Propriété 1.6. *Soit p une probabilité sur l'univers Ω, A et B deux événements de Ω. Alors*

- ▶ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶ $p(\emptyset) = 0$ *et* $p(\Omega) = 1$
- ▶ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- ▶ *Si A et B sont incompatibles alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- ▶ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple 1.9. *On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard. A est l'événement : "le nombre est multiple de 3 " , B est l'événement : "le nombre est multiple de 2 " , C est l'événement : "le nombre est multiple de 6 " . Calculer $p(A)$, $p(B)$,$p(C)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup C)$ et $p(A \cap C)$.*

Définition 1.10. *(****Equiprobabilité****)*

On dit qu'il y a ***équiprobabilité*** *quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans une situation d'équiprobabilité, si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ a n éléments et si E est un événement composé de m événements élémentaires alors :*

$$p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

où $card(E)$ et $card(\Omega)$ désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de Ω. On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas ***favorables*** *divisé par le nombre de* ***cas possibles.***

Dans ce cas $p_i = p(\{x_i\}) = \dfrac{1}{n}, \forall 1 \leq i \leq n$

Remarque 1.7. *Les expressions suivantes : "dé équilibré ou parfait"," boule tirée de l'urne au hasard ", boules indiscernables au toucher, cartes bien battues, pièce équilibrée ou parfaite, $\cdots$ indiquent que, pour les expériences réalisées, le* **modèle associé est l'équiprobabilité**

Exemple 1.10. *On lance deux fois de suite un dé équilibré.*

1. *Représenter dans un tableau les* 36 *issues équi-probables .*
2. *Calculer la probabilité des événements :*
   A : " on obtient un double "; B : "on obtient 2 *numéros consécutifs "; C : " on obtient au moins un* 6*"; D : " la somme des numéros dépasse* 7*".*

Exercice 1.2.1. *On lance* 4 *fois de suite une pièce équilibrée.*

1. *Dresser la liste des issues équiprobables.*
2. *Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?*
   A : " 2 piles et 2 faces "
   B : " 3 piles et 1 *face ou* 3 *faces et 1 pile ".*

1.3 Variables aléatoires

Activité 1.3. *Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique puis un dé tétraédrique tous équilibrés et on note les nombres obtenus.*

1. (a) *Décrire l'univers* Ω *de cette expérience aléatoire.*
   (***Rep :*** $\Omega = \{(i,j);\ i \in \{1,2,3,4\}$ *et* $j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$)
   (b) *Combien d'issues possède* Ω *?* (***Rep :*** $card(\Omega) = 6 \times 4 = 24$)
   On s'intéresse à la somme des deux nombres obtenus. Soit X *l'application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*, qui à chaque issue de* Ω*, associe la somme des deux nombres obtenus correspondant. En probabilité, une telle fonction se nomme* ***variable aléatoire****.*
2. (a) *A quelle valeur de* $\mathbb{R}$*,* X *associe t-il l'issue* $(4,3)$ *?*(***Rep :*** $X = 7$)
   (b) *A quelles issues de* Ω *le nombre* 6 *est-il associé ?* (***Rep :*** *(2,4), (4,2),(3,3), (1,5), (5,1)).*
   (c) *Quelles sont les différentes valeurs de* $\mathbb{R}$ *que peut prendre cette valeur aléatoire ?*
   (***Rep :*** $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$)
3. *Le tableau suivant donne les probabilités d'obtenir les différentes valeurs prises* X*. Remplir ce tableau*

Valeurs prises par X*, notées* x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilités d'obtenir les x_i*, notées* $P(X = x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Ce tableau est appelé ***loi probabilité*** *de la variable aléatoire de* X*.*

Définition 1.11. *(***Variable aléatoire** *)*
On considère une epreuve d'univers Ω*.*
■ *Une* ***variable aleatoire X*** *est une application definie sur* Ω *muni d'une probabilite p, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*
■ *L'ensemble des valeurs prises par* X*, c'est-à-dire* $X(\Omega)$ *est appelé* ***univers image****.*
■ X *prend les valeurs* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *avec les probabilités* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *définies par :* $p_i = p(X = x_i)$*.*
■ *L'affectation des* p_i *aux* x_i *permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée* P_X*, est appelée* ***loi de probabilité*** *(ou* ***distribution de probabilité*** *)de* X*.*

Remarque 1.8. *Lorsque* Ω *est fini, la variable aléatoire est dite* ***discrète****.*

DRAFT

1.3.1 Caractéristiques d'une variable aléatoire.

On considère une épreuve d'univers Ω fini muni de la probabilité p. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$. On appelle

► ***espérance mathématique*** *de X, le nombre réel défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.*

► ***varaince de X****,le nombre réel défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$*

► ***l'écart-type*** *est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V(X)}$.*

Propriété 1.7. *Soit X une variable aléatoire qui suit la la loi de probabuilité discrete uniforme (**équiprobabilité**). Dans ce cas les valeurs de X correspondent au rang $x_i = i(\forall i \in [1, n])$*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Preuve : Exercice

1.3.2 Propriétes d'une varaible aléatoire.

Soient X, Y deux varaibles aléatoires, $a, b \in \mathbb{R}$.

- $E(b) = b$ *et* $V(b) = 0$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ *et* $E(aX+b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2V(X)$ *et* $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ *avec* $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Remarque 1.9. *Si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

Exemple 1.11. *Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en FCFA) ; sinon il perd ce même nombre de FCFA*

1. *Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.*
2. *Le jeu est-il favorable au joueur ?*

DRAFT

1.4 Conditionnement (pas au programme en Tle C)

1.4.1 Arbres pondérés.

Règles de construction

- *La somme des probabilites des branches issues d'un meme noeud est 1.*
- *La probabilité de l'évenement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des differentes branches composant ce trajet.*

Exemple 1.12. *On jette une pièce.*

- *Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.*
- *Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.*

Répresenter l'arbre pondéré de cette expérience.

1.4.2 Probabilité conditionnelle.

Activité 1.4. *En fin de 1^eS, chaque élève choisit une et une seule spécialité en terminale suivant les répartitions ci -dessous :*
Par spécialité :

Mathématiques	***Sciences physiques***	***SVT***
40 %	*25%*	*35 %*

Sexe de l'élélève selon la spécialité :

Sexe / Spécialité	***Mathématiques***	***Sciences physiques***	***SVT***
Fille	*45 %*	*24 %*	*60 %*
Garçon	*55 %*	*76 %*	*40%*

On choisit un élève au hasard :

1. *Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.*
2. (a) *Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ? F : " l'élève est une fille ", M : " l'élève est en spécialité maths ".(**Rep :** $p(F) = 0,4 \times 0,45 + 0,35 \times 0,6 + 0,25 \times 0,24 = 0,45$)*
   (b) *Quelle est la probabilité que ce soit une fille ayant choisi spécialité mathématiques ?*
   (c) *Sachant que cet élève a choisi spécialité mathématiques, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (**Rep** : $p(F \cap M) = 0,45$)*
   On appelle **probabilité de F sachant M cette probabilité (conditionnelle)** *et on la note $p_M(F)$ ou $P(F/M)$*
   (d) *Quelle égalité faisant intervenir $p(F \cap M)$, $p(F)$ et $p_M(F)$ peut-on écrire ? Comparer $p(F)$ et $p_M(F)$ et en donner une interprétation.*
3. *Sachant que cet élève a choisi spécialité SVT, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?*
4. *Comparer $p_S(F)$ et $p(F)$, et en donner une interprétation.*

Définition 1.12. *p designe une probabilite sur un univers fini Ω. A et B etant deux evenements de Ω, B étant de probabilité non nulle.*

- *On appelle **probabilité conditionnelle** de l'évenement A sachant que B est realisé le réel noté*

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

- *Le réel $p(A/B)$ se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi **probabilité de A sachant B**.*

Remarque 1.10. *Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B\times)p(B) = p(B/A) \times p(A)$.*

Exercice 1.4.1. ***Efficacité d'un test***

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- *Chez les individus malades, 95 des tests sont positifs et 5 négatifs.*
- *Chez les individus non malades, 1 des tests sont positifs et 99 négatifs. On choisit un individu au hasard.*

1. *Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.*
2. *Quelle est la probabilité*
   (a) *qu'il soit malade et qu'il ait un test positif.*
   (b) *qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?*
   (c) *qu'il ait un test positif ?*
   (d) *qu'il ait un test négatif ?*
3. *Calculer la probabilité*
   (a) *qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?*
   (b) *qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?*
4. *Interpréter les résultats obtenus aux questions 3a et 3b.*

1.4.3 Formule de Bayes (complément de cours, pas au programme)

*Cette formule est aussi appelée **Théorème de la probabilité des causes**, car elle permet de renverser le conditionnement. On l'obtient en remarquant que la d'une intersection $A \cap B$ peut s'ecrire en conditionnant A par B, soit en conditionnnant B par A :*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(A) = p_A(B) \times p(B)$$

On obtient la formule suivante :

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})}$$

avec $p(B)$ non nulle.

DRAFT

Exemple 1.13. *Une maladie M se présente sous deux formes M_1 et M_2 avec les probabilités respectives $p(M_1) = 0,2$ et $p(M_2) = 0,8$ et le symptôme S apparaît dans 80% des cas de M_1 et dans 10% des cas M_2. Quelle est la probabilité pour un patient atteint de M qui présente le symptôme S, d'être atteint de M_1.*
Solution *:*

$$p_S(M_1) = \frac{p_{M_1}(S) \times p(M_1)}{p_{M_1}(S) \times p(M_1) + p_{M_2}(S) \times p(M_2)} = \frac{0,8 \times 0,2}{0,8 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8} = \frac{2}{3}$$

1.5 Indépendance

1.5.1 Evénements indépendants.

Définition 1.13. *A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.*
- *A et B sont **independants** lorsque la realisation de l'un ne change pas la realisation de l'autre.*
- *A et B sont **independants** si et seulement si $p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(A)$.*

Théorème 1.5.1. *Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :*

$$p(A/B) = p(A) \text{ ou } p(B/A) = p(B) \text{ ou } p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Remarque 1.11. *Ne pas confondre evenements **indépendants** et événements **incompatibles**.*
- ► *2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.*
- ► *2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.*
- ► ***Lois de Morgan** : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Proposition 1.1. *Soient A et B deux événements. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *A et B indépendants.*
2. *$\overline{A}$ et B indépendants.*
3. *A et $\overline{B}$ indépendants.*
4. *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

DRAFT

Démonstration. Exercice **Ind** :utiliser les lois de Morgan.

Exemple 1.14. *Dans une classe de 40 élèves, 28 apprenent l'anglais, 16 l'allemend et 8 les deux langues. On choisit au hasard un élève de cette classe et on considère les évéments A :"L'élève choisit apprnd l'anglais" et B : "L'élève choisit apprend l'allemand". Calculer les probabilités des évéments A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$*

Exercice 1.5.1. *On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2, et un bleu numéroté 1. On désigne respectivement par R, U et D les événements : "le jeton est rouge", "le numéro est 1 " et "le numéro est 2 ". Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?*

1.5.2 Indépendance de deux variables aléatoires.

Définition 1.14. *X et Y sont deux variables définies sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire ; X prend les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et Y prend les valeurs $y_1, y_2, \cdots y_q$. Définir la loi du couple (X, Y), c'est donner la probabilité $p_{i,j}$ de chaque événement*

$$[(X = x_i) \text{ et } (Y = y_j)].$$

Remarque 1.12. *Les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants si : $p[(X = x_i) et (Y = yj)] = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$*

Exercice 1.5.2. *On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble E des issues est alors l'ensemble des 32 cartes et le fait de tirer au hasard implique que les événements élémentaires sont équiprobables.*
- *On definit sur E la variable aleatoire X qui, a chaque issue, associe 1 si cette issue est un valet, 2 si c'est une dame, 3 si c'est un roi, 4 si c'est un as et 0 si ce n'est pas l'une de ces figures. Les valeurs de X sont donc $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.*
- *On définit sur E la variable aleatoire Y qui, a chaque issue, associe 1 si cette issue est un trefle ou un carreau, 2 si c'est un coeur, 3 si c'est un pique. Les valeurs de Y sont $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.*

1. *Définir la loi du couple (X,Y).(on pourra dresser un tableau à double entrée)*
2. *Donner les lois de X et de Y*
3. *X et Y sont-elles indépendantes ?*

1.5.3 Probabilités totales.

Définition 1.15. *Soient Ω un univers associé a une expérience aleatoire et n un entier $n \geq 2$. Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω si les trois conditions suivantes sont realisées :*

- *pour tout $i \in \{1,2,\cdots n\}$, $A_i \neq 0$.*
- *pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1,2,\cdots n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.*
- *$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.*

Formule des probabilites totales

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ une partition de l'univers Ω constituee d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω. Alors :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \cdots p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

Exemple 1.15. *On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables. U_1 contient 4 boules rouges et trois boules vertes, U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte . On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Calculer la probabilité pour qu'elle soit rouge.*

Exercice 1.5.3. *Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :*

1. *Trois as.*
2. *Trois cartes de même valeur.*
3. *Deux coeurs et un pique.*

DRAFT

Exercice 1.5.4. *Une urne contient : 5 boules n°10 ; 4boules n°15 ; 3 boules n°20. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.*

1. *Déterminer les probabilités suivantes :*
   A : « On tire au moins une boule n°15 »
   B : « On tire trois boules portant trois numéros différents »
   C : « On tire trois boules portant le même numéro »
   D : « Parmi les trois boules, deux portent le même numéro »
2. *Il faut payer $51F$ pour effectuer un tirage de trois boules, et chaque tirage rapporte en francs cfa la somme des points marqués. Quelle est la probabilité d'être gagnant ?.*

1.6 Lois de probabilités

1.6.1 Loi de Bernoulli.

Définition 1.16. *:*

♦ ***Une alternative ou expérience de Bernoulli*** *est une épreuve à deux issues possibles :*

- *le succes, note 1, de probabilité p ;*
- *l'echec, note 0, de probabilité $q = 1 - p$.*

*Sa loi de probabilité est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre p.*

♦ *Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à repéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de façon indépendante une épreuve de Bernouilli dont la probabilité du succès est p.*

Exemple 1.16. *Un dé cubique est mal equilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{7}$. On appelle succès l'événement à obtenir 6 et échec à obetnir un numero différent de 6. Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit **une loi de Bernoulli**.*
*Si on effectue cinq fois cette expérience. On est en presence d'un **schéma de Bernoulli**.*

Théorème 1.6.1. *Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, l'espérance est p et l'écart type est $\sqrt{pq}$.*

1.6.2 Loi Binomiale.

Définition 1.17. *Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors : $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.*

Notation 1.1. *Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^\star$ et p est notée $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$.*

Exemple 1.17. *Dans l'exemple précédent, on appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancés. On obtient les probabilités suivantes : $P_0=P(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{5}\right)^5=0,4627$. $P_1=0,3856$; $P_2=0,1285$; $P_3=0,0214$; $P_4=0,0018$; $P_5=0,0001$.*

Exercice 1.6.1. *Un tireur vise une cible. La probabilité qu'il touche la cible est de $0,7$. Il tire 3 fois de suite. On note X le nombre de fois où il atteint la cible. Déterminer la probabilité de X.*

Théorème 1.6.2. *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres n et p alors :*
▶ *l'espérance de X est $E(X)=np$;*
▶ *la variance de X est $V(X)=npq$ et l'écart type est $\sigma=\sqrt{npq}$,$q=1-p$.*

Exercice 1.6.2. *Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux sont rouges et les autres sont bleus.*

1. *On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilités p d'obtenir un jeton rouge ?*
2. *On tire successivement 6 jetons un à un, avec remise.*
   (a) *Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir exactement trois jetons rouges ?*
   (b) *Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir exactement un jeton rouge ou un jeton bleu ?*
   (c) *Quelle est la probabilité P_3 d'obtenir au moins quatre jetons rouges ?*

DRAFT

1.7 Fonction de repartition

Définition 1.18. *Soit X une variable aléatoire definie sur un univers Ω de probabilité p.*
La fonction de repartition *de X est l'application F_X de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ qui à, tout x associe $F_X(x)=p(X\leq x)=p(X\in]-\infty,x[)$*
• *Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1,\cdots,x_n\}$ avec $x_1<\cdots<x_n$ alors pour $x\in\mathbb{R}$*

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{k}p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{k}p_i \text{ avec } k \text{ tel que } x_k\leq x<x_{k+1}$$

La fonction de repartition d'une variable aléatoire discrète est constante par morceaux.
• *Lorsque X est continue de densité de probabilité f, alors :*

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \text{ (}\textbf{\textit{Pas au programmme}}\text{)}$$

Propriété 1.8. *Soit F_X la fonction de repartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :*
• $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\leq F_X(t)\leq 1$;
• *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;*
• $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$.
• *Si $a\leq b$, $p(a\leq X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$*

Exemple 1.18. *On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne $2F$ pour chaque résultat " pile " et on perd $1F$ pour chaque résultat "face". On introduit X la variable aléatoire egale au gain obtenu après le lancer.*

1. *Quel est l'ensemble E des issues possibles ?*
2. *Quelles sont les valeurs prises par X.*
3. *Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de repartition F_X.*
4. *Representer graphiquement cette distribution de probabilités et fonction de repartition F_X.*

Remarque 1.13. *Dans le cas d'une variable alétoire discrète, on utilise* ***un diagramme en bâtons*** *pour visualiser la* ***distribution des probabilités*** *et une fonction en escalier pour la* ***fonction de repartition.***

Exercice 1.7.1. *On lance deux dés. On note X la variable alétoire égale au plus grand chiffre obtenu après le lancer.*

1. *Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X.*
2. *Déterminer la loi des probabilités de cet expérience puis sa fonction de repartition et représenter.*

DRAFT