Lycée Classique d'Edéa
Département de Mathématiques — Année scolaire : 2009/2010

Classe : 1ere**C** Durée : 3h ; coef : 6
mercredi, 24 Mars 2010
Epreuve de Mathématiques. 5e séquence
Examinateur : **Ngankou S. O**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires. Le candidat devra justifier autant que possible ses affirmations. Les calculatrices électroniques sont autorisées.

Exercice 1. *Suites numériques [6pts]*

I) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n-3}{3u_n-2} \end{cases}$ et $v_n = \frac{1}{u_n-1}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son prémier terme. [0.75pt]
2. Exprimer en fonction de n,v_n puis u_n. [0.75pt]
3. Calculer la limite de u_n. [0.25pt]
4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. Calculer la limite de S_n. [0.5pt]

II) Soit (a_n) une suite géométrique décroissante telle que : $\begin{cases} a_0a_3 = 128 \\ a_0 + a_3 = 36 \end{cases}$

1. Calculer a_0 et a_3 puis déterminer la raison q de la suite (a_n). [1pt]
2. Démontrer que tous les termes de la suite (a_n) sont strictement positifs. [0.5pt]
3. On pose $T_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Calculer T_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. [0.75pt]

III) Le 1er janvier 2010,un commercant dépose dans un compte d'épargne d'une banque, une somme de $200000FCFA$. Cette banque lui accorde chaque année une prime égale à $5\circ/\circ$ des sommes restées immobilisées douze mois.

1. Quel sera le solde du compte le 1er janvier 2011, le 1er janvier 2013 ? [0.5pt]
2. Trouver une formule explicite permettant de connaître le montant w_n disponible après n années en supposant qu'aucune somme n'aura été retirée ? [0.75pt]
3. Qelle est la nature de la suite obtenue ? [0.25pt]

Exercice 2. *Dénombrement [4.5pts]*

A l'occasion de la coupe du monde 2010 de football, une usine de brasserie voudrait organiser un jeu concours. Ce jeu consiste à mettre sur le marché des bouteilles gagnantes. Pour cela il faut imprimer sur un certain nombre de capsules un nombre de Cinq chiffres choisis parmi ceux de la liste $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

1. Déterminer le nombre de capsules à imprimer. [0.75pt]
2. Déterminer le nombre de capsules à imprimer dont le nombre inscrit :
   (a) contient des chiffres tous distincts ; [0.75pt]
   (b) ses chiffres sont tous distincts et il contient deux chiffres pairs ; [0.75pt]
   (c) contient au moins un chiffres pairs. [0.75pt]
3. Toute capsule portant un nombre se terminant par 7 gagne un écran de télévision et celle dont le nombre inscrit commence par 765 gagne un billet d'avion pour l'Afrique du Sud. Combien l'usine doit-elle préviore :
   (a) d'écran de télévision ; [0.75pt]
   (b) billet d'avion pour l'Afrique du Sud. [0.75pt]

https://t.me/KamerHighSchool

Problème 1 (9.5pts).

Le problème comporte deux parties indépendantes.

PARTIE A : Etude des fonctions [5pts]

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}-\{1\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x+1|+\frac{1}{x-1}$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1. Ecrire f sans symboles de valeur absolue et calculer les limites aux bornes de son domaine définition . [1pt]
2. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet trois asymptotes et préciser leur équation. [0.75pt]
3. Montrer que f est continue en $x_0=-1$. [0.25pt]
4. Etudier la dérivabilité de f en -1 et donner une interprétation graphique du résultat.[0.75pt]
5. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. [1pt]
6. préciser les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère. [0.5pt]
7. Construire $(\mathcal{C})$. [0.75pt]

PARTIE B :Espace vectoriel et application linéaire[4.5pts]

I) On considère un espace vectoriel réel E dont une base est $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$.Soient $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ tels que : $\overrightarrow{u}_1=\overrightarrow{e}_1+2\overrightarrow{e}_2$ et $\overrightarrow{u}_2=-\overrightarrow{e}_1+\overrightarrow{e}_3$

1. Montrer que F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ est un sous-espace vectoriel de E et que $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ en est une base.Déduis-en la dimention de F. [1.25pt]

II) Le plan vectoriel V_2 est muni d'une base $B=(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.On définit l'application f de V_2 vers V_2 par :$\forall \overrightarrow{w}\in V_2, \overrightarrow{w}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$;$f(\overrightarrow{w})=(x-2y)\overrightarrow{i}+(-x+2y)\overrightarrow{j}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de V_2. [0.5pt]
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $B.f$ est- elle un automorphisme ? justifier votre réponse . [0.75pt]
3. Déterminer :
   (a) $\ker f$ et une base de $\ker f$. [0.5pt]
   (b) Imf et une base de Imf. [0.5pt]
4. On considère les vecteus $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de V_2 tels que : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$
   (a) Montrer que $B'=(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de V_2. [0.25pt]
   (b) Déterminer la matrice M' de f dans la base B'. [0.75pt]

https://t.me/KamerHighSchool