REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
Délégation Régionale De l'Ouest
Collège Polyvalent Djoumessi
Département de Mathématiques

Année Scolaire : 2019 - 2020
Evaluation :4
Classe : $T^{ale}C$
Coef : 5 ;
Durée :4 heures 00s

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. *: (03,5 points)*

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} n \equiv 13\,[19] \\ n \equiv 6\,[12]\,. \end{cases}$

1 ***(0,75pt)*** *Démontrer qu'il existe un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$ (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple)..*

2 ***(0,5pt)*** *Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12u + 6 \times 19v$ est une solution de $(\mathcal{S})$.*

3 **a** ***(0,75pt)*** *Soit n_0 une solution de $(\mathcal{S})$, vérifier que le système $(\mathcal{S})$ équivaut à* $\begin{cases} n \equiv n_0\,[19] \\ n \equiv n_0\,[12]\,. \end{cases}$

b ***(0,5pt)*** *Démontrer que le système* $\begin{cases} n \equiv n_0\,[19] \\ n \equiv n_0\,[12]\,. \end{cases}$ *équivaut à $n \equiv n_0(12 \times 19)$.*

4 **a** ***(0,5pt)*** *Trouver un couple $(u;v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.*

b ***(0,5pt)*** *Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ (on pourra utiliser la question 3. b.).*

Exercice 2. *: (02,5 points) Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$. on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$. Soit $r = r_2 \circ r_1$.*

1 **a** ***(0,5pt)*** *Soit $D = S_{(AB)}(C)$. Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.*

b ***(0,5pt)*** *Montrer que r est la symétrie centrale de centre Ω milieu de $[\overrightarrow{BD}]$.*

c ***(0,5pt)*** *Montrer que Ω milieu de $[\overrightarrow{MM'}]$.*

2 **a** ***(0,5pt)*** *Montrrer que le triangle AMN est équilatéral.On suppose que M, N et $M\prime$ sont alignés.*

b ***(0,5pt)*** *Montrer que $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$*

Exercice 3. *: (03 points) Soient $e_1 = (1;0)$ et $e_2 = (0;1)$ des vecteures de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On pose $u_1 = (1;4)$ et $u_2 = (1;3)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

1 ***(0,5pt)*** *Montrer que (u_1, u_2) est une une base de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathcal{B}'$.*

2 *On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ayant pour matrice A* $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$ *dans la base $\mathcal{B}$.*

a ***(0,75pt)*** *Déterminer $f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis calculer f^2 et conclure.*

b ***(0,75pt)*** *Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et en déduire la matrice $\mathcal{B}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.*

c ***(1pt)*** *Précicer la matrice $\mathcal{P}$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice $\mathcal{P}'$ de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Collège Polyvalent Djoumessi

Problème 1. *: (**11 points**). On désigne $n \in]0; e[$*
Partie : A *Soit $f_n(x) = (2-x)e^x - n$.*

1. **a** ***(0,5pt)*** *Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$.*
   b ***(0,75pt)*** *Etudier le sens de variation de f_n.*
   c ***(0,5pt)*** *Dresser le tableau de variation de f_n.*
2. **a** ***(1pt)*** *Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_n \in]-\infty; 1[$ et $\beta_n \in]1; +\infty[$.*
   b ***(0,5pt)*** *Montrer que $e^{\alpha_n} - n\alpha_n = (e^{\alpha_n} - n)(\alpha_n - 1)$ de même que $e^{\beta_n} - n\beta_n = (e^{\beta_n} - n)(\beta_n - 1)$.*
   c ***(0,25pt)*** *En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant x.*

.
Partie : B *Soit U définie par $U(x) = e^x - nx$.*

1. ***(0,5pt)*** *Etudier les limites de U en $-\infty$ et $+\infty$.*
2. ***(0,5pt)*** *Etudier le sens de variation de U*
3. ***(0,75pt)*** *Dresser le tableau de variation de U. En déduire le signe de $U(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Partie : C *On considère la fonction h_n définie par $h_n(x) = \frac{e^x - n}{e^x - nx}$:*

1. **a** ***(0,25pt)*** *Quel est l'ensemble de définition de h_n ?*
   b ***(0,5pt)*** *Déterminer les limites de h_n sur $\mathcal{C}_{h_n}$.*
2. ***(0,5pt)*** *Prouvez que $h'_n(x) = \frac{n.f_n(x)}{(e^x - nx)^2}$. En déduire le sens de variation de h_n sur $\mathcal{C}_{h_n}$.*
3. ***(1pt)*** *Montrer que $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n - 1}$ et $h_n(\beta_n) = \frac{1}{\beta_n - 1}$. Dresser le tableau de variation de h_n sur $\mathcal{C}_{h_n}$.*
4. ***(0,5pt)*** *On note les points M_n et N_n d'abscisses respectives α_n et β_n. Montrer que lorsque n varie les points M_n et N_n sont sur une courbe fixe Γ dont on déterminera une équation.*
5. ***(0,25pt)*** *Démontrer que la fonction H_n définie par $H_n = \ln(e^x - nx)$ est une primitive de h_n.*

.
Partie : D *Cas $n = 1$ ou $n = 2$.*

1. ***(0,5pt)*** *Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression de $h_2(x) - h_1(x)$*
2. ***(0,5pt)*** *En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_{h_1})$ et $(\mathcal{C}_{h_2})$ et montrer que se coupent en un point dont on précisera son coordonnées.*
3. ***(0,25pt)*** *Prouver que $\alpha_2 = 0$.*
4. ***(0,75pt)*** *Construire $(\mathcal{C}_{h_1})$ et $(\mathcal{C}_{h_2})$ et Γ. Prendre unité 2 cm × 5 cm ; $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = -1,8$; $\beta_2 = -1,6$;*
5. *Soit λ est un réel strictement supérieur à 1.*
   a ***(0,5pt)*** *Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan défini par $1 \leq x \leq \lambda$ et $h_1(x) \leq x \leq h_2(x)$.*
   b ***(0,25pt)*** *Calculer*

$$\lim_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda).$$

Collège Polyvalent Djouneissi

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
Délégation Régionale De l'Ouest
Collège Polyvalent Djoumessi
Département de Mathématiques

Année Scolaire : 2019 - 2020
Evaluation :4
Classe : $T^{ale}C$
Coef : 5 ;
Durée :4 heures 00s

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. :

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.
On pose $\mathcal{S} = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{n-1}$.

1 **a** *Ecrire $\mathcal{S}$ sous la forme d'un quotient.*

b *Calculer l'expression $p^n + (1-p)\mathcal{S}$ et en déduire que p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux.*

2 **a** *Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $p^n x - (1-p)y = p$.*

b *En déduire dans $\mathbb{Z}^2$,les solutions de l'équation : $10^n + 2^{n+2}y - 10.2^{n-1} = 0$*

Exercice 2. : *(04,25 points)*

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, d\,x$ et pour tout entier naturel n non nul $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, d\,x$.

1 *Montrer que $I_0 = \ln(2)$.*

2 **a** *Calculer $I_0 - I_1$.*

b *En déduire I_1.*

3 *Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.*

4 *Soit n un entier naturel non nul. On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.*

a *Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.*

b *En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.*

5 *Pour tout entier naturel n non nul, on pose*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

a *Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.*

b *Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

College Polyvalent Djoumessi

Problème 1. *:*

Partie : A

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}.$$

1 **a** *Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.*

b *Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.*

c *Dresser le tableau de variation de f.*

d *Calculer $f(0)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.*

2 *Soit $g(x) = x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1$*

a *déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.*

b *Vérifier que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.*

c *Montrer que la limite de $(\frac{x-1}{2})\ln(1+\frac{2}{x-1})$ en $+\infty$ est égale à 1.*

d *En déduire que la limite de $g(x)$ en $+\infty$ est égale à 1 et interpréter graphiquement ce résultat.*

e *Dresser le tableau de variation de g.*

f *Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $[0;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ Donner un encadrement d'ordre 1 de α.*

g *Tracer $\mathcal{C}_g$*

3 *Soit la fonction définie par : $h(x) = (x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.*

a ***(0,5pt)*** *Montrer h est dérivable sur $[0;1[$ et que pour tout $x \in [0;1[$, $h'(x) = g(x)$.*

b *Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_g$ l'axe des abscisse, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.*

Partie : B (Approximations du nombre d'or) (3 points).

1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $(\mathcal{E})$: $x^2 = x+1$ et montrer les égalités $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2+1}{2\phi-1}$.*

2 *Soient ϕ, β les racines de l'équation $(\mathcal{E})$ tels $(\varphi > \beta)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.*

a *Pour tout entier $n \geq 0$, montrer que a_n existe et $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.*

b *Pour tout entier $n \geq 0$, montrer l'inégalité $|a_{n+1} - \phi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \phi|$.*

c *En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $|a_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.*

d *Que dire du comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?*

Collège Polyvalent Djoumessi

LES GRANDS PROFS DE MATHS

TRAVAUX DIRIGES

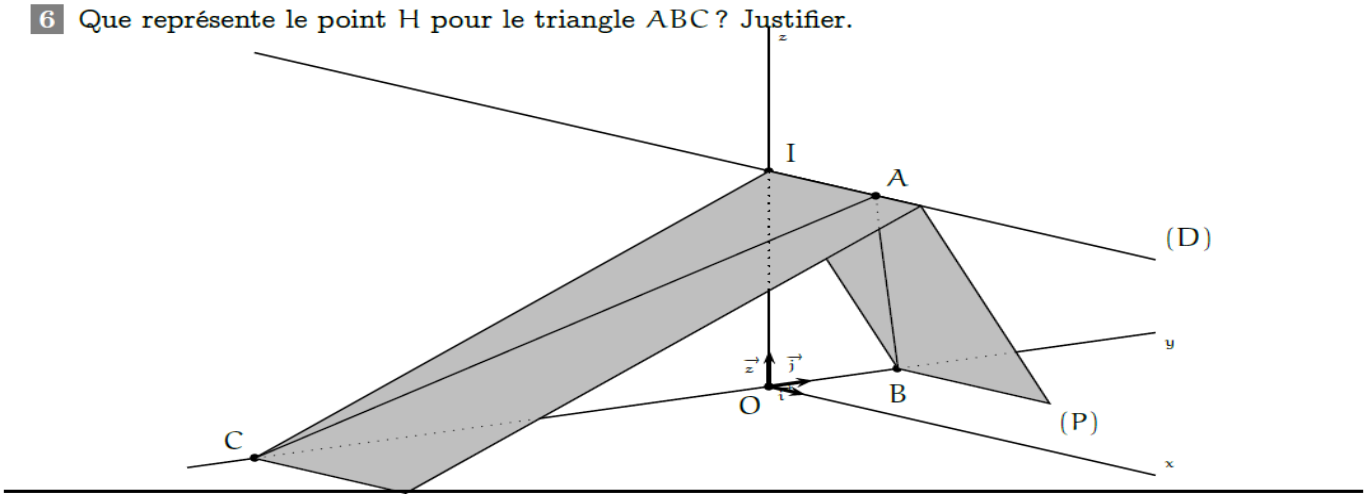
EXERCICE1 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $I(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I. On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



EXERCICE2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1 Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2 Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -8+3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$

3 Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\,;\,-4\,;\,-1)$.

a Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b Exprimer AM^2 en fonction de t.

c Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$.

- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I.

- Préciser les coordonnées du point I.

4 Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a Déterminer une équation de (Q).

b Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

EXERCICE3 :

Soient A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel E. On considère le point B de $\mathcal{E}$ définie par : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Soient k, k′ deux réels non nuls tels que l'on ait : $kk' \neq 1$. On désigne par $T_{\vec{u}}$ la translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\vec{u}$, par $H(A,k)$ (resp. $H\left(A,\frac{1}{k}\right)$), $H(B,k')$ l'homothétie de centre

A(resp. B) et de rapport k resp. $\left(\frac{1}{k},\ k'\right)$.

1 Déterminer la nature des applications f et g définies par :

$f = H(B,\frac{1}{k}) \circ T_{\vec{u}} \circ H(A,k)$; $g = H(B,k') \circ T_{\vec{u}} \circ H(A,k)$

2 Préciser les éléments qui servent à les définir.

EXERCICE4 :

Problème posé : étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{p}$ orthogonaux, existe-t-il des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}$?

1 soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ définis par : $\vec{\jmath} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{a}$; $\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{p}\|}\vec{p}$; $\vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{k}$.

Montrer que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormale directe.

2 On cherche s'il existe une solution particulière $\vec{u_0}$ de la forme $\vec{u_0} = \alpha\,\vec{i}$ (α réel), telle que $\vec{u_0} \wedge \vec{a} = \vec{p}$.

a Montrer que $\vec{u_0}$ est solution si et seulement si $\alpha = \dfrac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{a}\|}$.

b Montrer qu'alors on a l'égalité vectorielle : $\vec{u_0} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a} \wedge \vec{p})$

3 **a** Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}$ équivaut à la condition $\vec{u} - \vec{u_0}$ colinéaire à $\vec{a}$

b Déduisez-en que l'ensemble des vecteurs tels que $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{u_0} + \mu\,\vec{a}$ μ réel.

4 **Application :** $(\vec{i}, \vec{i}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{p} = \vec{i} - \vec{k}$

a Vérifier l'orthogonalité des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{p}$.

b Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p}$.

EXERCICE5 :

Soit un cube OABCDEFG. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OD}\right)$.

On désigne par a un réel strictement positif. L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1 **a** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.

b En déduire l'aire du triangle DLM.

c Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2 On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.

b Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$.

En déduire que H appartient au segment [OK].

c Déterminer les coordonnées de H.

d Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

En déduire que $HK = \dfrac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2+2}}$.

EXERCICE 6 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, $D(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

1 **a** Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c Déterminer une équation du plan (ABC).

2 Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

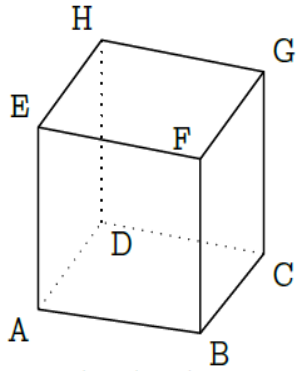
Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3 Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 7 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(D\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1 **a** Donner les coordonnées des points A, C et E.

b Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\ ;\ 2),\ (E\ ;\ 1)\}$.

c Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2 Soit $(a,\ b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

a Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\begin{cases} -a+2b &= 1 \\ 3a-b &= 0 \end{cases}$

b En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 8 :

Le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est orthonormé. Soit p l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(2x+y-z-3) \\ y' &= \frac{1}{3}(x+2y+z+3) \\ z' &= \frac{1}{3}(-x+y+2z-3) \end{cases}$$

1 **a** Déterminer l'image A' par p du point A de coordonnées $(1;-2;3)$.

b Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p.

2 Déterminer que l'ensemble des points invariants par p est un plan (π).

3 Soit M un point de $\vec{E}$ et M' son image par p.

a Démonter que $M' \in (\pi)$.

b Démonter que si M n'appartient pas à (π) , la droite (MM') est orthogonale à (π).

4 En déduire la nature de p.

EXERCICE 9 :

Le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est orthonormé. Soit p l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x+y-z-3) \\ y' = \frac{1}{3}(x+2y+z+3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x+y+2z-3) \end{cases}$$

1 a Déterminer l'image A' par p du point A de coordonnées $(1;-2;3)$.

b Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p.

2 Déterminer que l'ensemble des points invariants par p est un plan (π).

3 Soit M un point de $\vec{E}$ et M' son image par p.

a Démonter que $M' \in (\pi)$.

b Démonter que si M n'appartient pas à (π) , la droite (MM') est orthogonale à (π).

4 En déduire la nature de p.

EXERCICE 10 :

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x+y+z=0$ et $2x+3y+z-4=0$.

1 Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4-2t \\ y = 4+t \\ z = t \end{cases} \text{ où t est un nombre réel.}$$

2 Soit λ un nombre réel. On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1+\lambda\ ;\ 1+2\lambda\ ;\ 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3 a Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.

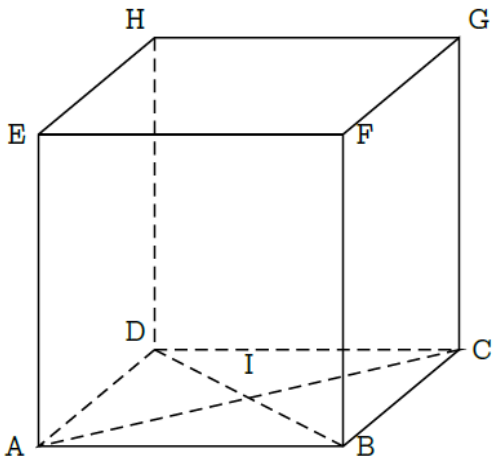
b Montrer que les droites D et D'sont confondues.

4 On considère le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

EXERCICE 11 :

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes. L'espace est muni d'un repère orthonormal direct. ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I. Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1 **a** Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b En déduire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2 On appelle P le barycentre du système $\{(A, 2)\ ;\ (C, -1)\}$.

a **Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.**

b Soit $(\mathcal{G})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
Déterminer l'ensemble $(\mathcal{G})$ et montrer que le point A appartient à l'ensemble $(\mathcal{G})$.

EXERCICE 12 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1 **a** Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

c Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

d Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2 Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1) a.** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].

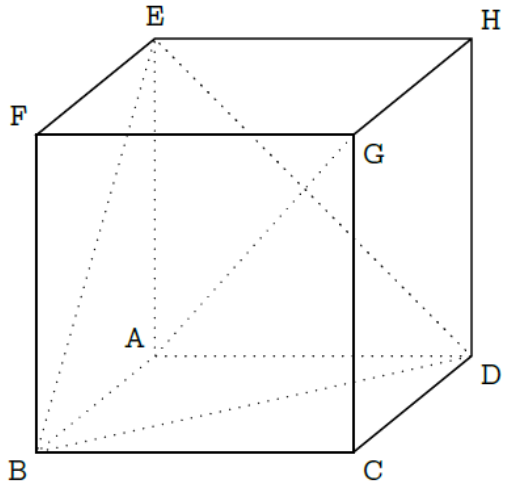
3 Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

a Écrire une équation du plan (BDE).

b Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).

d En déduire la distance du point H au plan (BDE).


E
H
F
G
A
D
B
C

GROUPE CAUCHY - SCHWARZ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EFFORT-TRAVAIL-SUCCES
Email : nzouekeupatrice@yahoo.com

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS $N°1$
NOMBRES COMPLEXES
TERMINALES SCIENTIFIQUES
CONTACT WHATSAPP : 676764402

EXAMINATEUR : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

Exercice 1. *()*
Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

1. *Déterminer de deux façons differentes les racine carrées complexes de* z *(on les écrira d'abord sous la forme trigonométrique, ensuite sous forme algébrique).*
2. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{\pi}{8}$.
3. *On considère le polynôme de variable complexe* z *défini par* $p(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$.
   (a) *Montrer que pour tout nombre complexe* z, *on a* $p(z) = (z+4)(2z^2+6z+17)$.
   (b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $p(z) = 0$.
4. *On note* z_1, z_2 *et* z_3 *les solutions de* $p(z) = 0$ *sachant que* z_1 *est réelle et* $Im(z_2) > 0$.
   On appelle A, B *et* C *les points d'affixes respectives* z_1, z_2 *et* z_3 *dans le plan complexe.*
   (a) *Calculer* $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$.
   (b) *Que peut - on en déduire pour le triangle* ABC *?*
   (c) *Déterminer les points* D *et* E *tels que le quadrilatère* $BCDE$ *soit un carré de centre* A.
   (d) *Faire une figure en plaçant les points* A, B, C, D *et* E *dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 2. *()*

1. *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, *on considère les points* A *et* B *d'affixes respectifs* $1+3i$ *et* $2i$. *Soit* S *la similitude directe plane de centre* B *qui transforme* O *en* A. *On note* z' *l'affixe de* M', *transformé du point* M *d'affixe* z.
   (a) *Exprimer* z' *en fonction de* z.
   (b) *Calculer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude* S.
2. *Soit* T, *la transformation qui à tout points* M *d'affixe* z *associe le point* M'' *d'affixe* $z'' = iz + 3$. *Donner la nature de* T *et préciser ses éléments caractéristiques. On notera* Ω *le point invariant par la transformation* T.
3. *Montrer que les points* A, Ω *et* B *sont les sommets d'un triangle isocèle dont on précisera le sommet principal.*
4. *Soit* $z = x + iy$, $Z = X + iY$ *tels que* $Z = \frac{(1-i)z+1+i}{-iz+2+i}$.
   (a) *Exprimer* X *et* Y *en fonction de* x *et* y.
   (b) *Déterminer l'ensemble* (Γ) *des points* M *d'affixe* z *tels que* Z *soit un réel strictement positif.*

Exercice 3. *()*

1. *On considère les nombres complexes :* $z_1 = 3(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ *et* $z_2 = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.
   (a) *Mettre sous forme trigonométrique les trois nombre complexes* z_1, z_2 *et* $z = \frac{z_1}{z_2}$.
   (b) *Donner la forme algébrique de* $z = \frac{z_1}{z_2}$.
   (c) *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$.

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

2. *On considère l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ d'inconnue α définie par :*
   (E) : $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\alpha+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\alpha-2\sqrt{2}=0$
   (a) *Résoudre cette équation dans $]-\pi,\pi]$.*
   (b) *Linéariser $\sin^3 x$.*
   (c) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 8x-\cos 2x=\sin 5x$.*

Exercice 4. *()*
Soient les nombres complexes $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

1. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes z_1,z_2 et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.*
2. *Mettre Z sous forme algébrique.*
3. *En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.*
4. *On considère l'équation d'inconnue réelle x.*

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2 \tag{1}$$

   (a) *Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.*
   (b) *Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.*

Exercice 5. *()*
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{U};\overrightarrow{V})$.On considère dans $\mathcal{P}$ les points A,B,C d'affixes respectives : $z_A=1+i\sqrt{3}$ $z_B=-1-i$ $z_C=-(2+\sqrt{3})+i$

1. *Placer les points A ;B et C.*
2. *Conjecturer graphiquement la nature du triangle ABC.*
3. (a) *Calculer le module et un argument du nombre complexe $W=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.*
   (b) *Interpreter graphiquement le module et l'argument de W.*
   (c) *En déduire la nature exacte du triangle ABC.*
4. (a) *Ecrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.*
   (b) *Ecrire z_A,z_B et $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme trigonométrique.*
   (c) *En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.*

Exercice 6. *()*
On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définit $\forall n\in\mathbb{N}$ par :

$$z_1=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n \tag{2}$$

$$z_1=(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n \tag{3}$$

Démontrer que z_1 est un réel et que z_2 est imaginaire pur.

Exercice 7. *()*
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Exercice 8. *()*
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z=\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est réel.

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 9. *()*
Soient a et b deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z = \frac{ab\overline{z}+z}{a-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 10. *()*
Soient x,y,et z trois nombres complexes de module 1 tels que l'on ait $x+y+z=1$ et $xyz=1$.

1. *Démontrer que l'on a : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$*
2. *Calculer x , y et z.*

Exercice 11. *()*
Déterminer les nombres complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1+z$ aient même module.

Exercice 12. *()*
Déterminer z pour que z^2 , $1-z$, $\overline{z}$ aient même module.

Exercice 13. *()*
Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$|z-i| = |iz-i| = |z-iz| \tag{4}$$

Exercice 14. *()*
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et $-2i$.

1. *Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que*

$$(2+i)z+(2-i)\overline{z}=4 \tag{5}$$

2. *Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que*

$$(z+2i)(\overline{z}-2i)=4 \tag{6}$$

Exercice 15. *()*
Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z-3| = |z-(1+i)|$
2. $|z-2+i| = \sqrt{5}$
3. $|z+3-i| \leq 2$
4. $|\frac{z-1}{z+1}| = 2$

Exercice 16. *()*
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. *Montrer que $(1+i)^6 = -8i$*
2. *On considère l'équation*

$$Z^2 = -8i \tag{7}$$

   (a) *Déduire de la question 1 une solution de l'équation (7).*
   (b) *L'équation (7) possède une autre solution.Ecrire cette solution sous forme algébrique.*

3. *Déduire également de la question 1 une solution de l'équation*

$$Z^3 = -8i \tag{8}$$

4. *On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.*

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

(a) *Déterminer l'affixe b du point B image de A par r ainsi que l'affixe c du point C image de B par r.*

(b) *Montrer que b et c sont solutions de l'équation* (8).

5. (a) *Dans le plan complexe, représenter les points A , B et C.*

(b) *Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?*

(c) *Déterminer le centre de gravité de cette figure.*

Exercice 17. *()*

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et P un plan complexe orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

1. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe* $a=-2i$.
2. *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation* $(E): z^2-3(1+i)z+5i=0$. *(On notera* z_1 *et* z_2 *les solutions de* (E). z_1 *étant celle dont la partie imaginaire est la plus grande).*
3. *On considère les points A,B et C du plan P d'affixes respectives* z_1, z_2 *et* $2+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

(a) *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.*

(b) *Soit s la similitude directe définie telle que* $s(B)=B$ *et* $s(A)=C$. *Préciser les éléments caractéristiques de s. En déduire son écriture complexe.*

(c) *Déterminer l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que :* $|z-1-2i|=3$.

Exercice 18. *Soit le plan complexe rapporté à un repère.Soit* $M'(x,y)$ *une transformation de M(x,y) tel que :* $\begin{cases} x' = & x-y\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases}$

1. *Déterminer l'affixe* z' *de* M' *en fonction de l'affixe z de M.*
2. *Déterminer les éléments géométriques de cette transformation.*
3. *Soit* $(\mathcal{C})$ *la courbe d'équation* $y=x^2+1$.*Déterminer l'équation de l'image de* $(\mathcal{C})$ *par cette transformation.*

Exercice 19. *()*

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$4z^2-12z+153=0 \tag{9}$$

2. *Dans le plan complexe, on considère les points A,B,C et P d'affixes respectives* $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3-\frac{1}{4}i$, $z_P=3+2i$ *et le vecteur* $\overrightarrow{\omega}$ *d'affixe* $z_{\overrightarrow{\omega}}=-1+\frac{5}{2}i$.

(a) *Déterminer l'affixe* z_Q *du point Q image du point B par la translation t de vecteur* $\overrightarrow{\omega}$.

(b) *Déterminer l'affixe* z_R *du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport* $\frac{-1}{3}$.

(c) *Déterminer l'affixe* z_S *du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{-\pi}{2}$.

(d) *Placer les points P , Q , R et S.*

3. (a) *Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallèlogramme.*

(b) *Calculer* $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$.*En déduire la nature précise du parallèlogramme PQRS.*

(c) *Justifier que les points PQRS appartiennent à un même cercle noté* (Γ).*On calculera l'affixe de son centre* Ω *et son rayon* ρ.

4. *La droite* (AP) *est-elle tangente au cercle* (Γ) *?*

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 20. *()*
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ $z_2 = 1 + itan\theta$ $z_3 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$ *où* θ *est un réel fixé.*

Exercice 21. *()*
Mettre sous forme trigonométrique $z = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x + i\sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)}$

Exercice 22. *()*
Calculer $z_1 = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^{30}$ *et* $z_2 = \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$

Exercice 23. *Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :*

1. $z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \alpha \in [0, \pi]$
2. $z_2 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \alpha \in]\pi, 2\pi[$
3. $z_3 = \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha) \quad \alpha \in [0, \pi]$
4. $z_4 = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Exercice 24. *()*
On pose $z = (2\sqrt{3} + 2) + i(2\sqrt{3} - 2)$

1. *Déterminer les entiers* n *tels que* z^n *soit imaginaire pur.*
2. *Quels sont les entiers naturels* n *tels que* z^n *soit réel négatif.*
3. *Exprimer* z^n *en fonction de* n*.*

Exercice 25. *()*

1. *Mettre chacun des nombrs* $1 + \cos x + i\sin x$ *et* $1 - \cos x - i\sin x$ *sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est de module* 1*.*
2. *En déduire l'expression simplifiée de* $z = \frac{1 - \cos x - i\sin x}{1 + \cos x + i\sin x}$*.*

Exercice 26. *()*
On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi \tag{10}$$

$$z' = \cos 2\varphi' + i\sin 2\varphi' \tag{11}$$

avec $0 < \varphi < \pi$ *et* $0 < \varphi' < \pi$*.Calculer le module et l'argument du nombre complexe*

$$u = \frac{1 - z}{1 - z'} \tag{12}$$

Exercice 27. *()*
Calculer le module et l'argument de :

1. $z_1 = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}$ *lorsque* $\alpha \neq 2k\pi$*.*
2. $z_2 = 1 + \sin\alpha - i\cos\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$*.*
3. $z_3 = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$, $(\beta \in \mathbb{R})$

Exercice 28. *()*
Comment choisir l'entier naturel n *pour que* $(\sqrt{3} + i)^n$ *soit :*

1. *Un réel , un réel positif , un réel négatif.*
2. *Un imaginaire pur.*

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 29. *()*
Donner une expression simple de $C = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ *et* $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x}$ *pour* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Exercice 30. *()*
Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples , c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.»
John Louis Von Neumann.

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

Délégation Régionale de L'ouest
Lycée de Bandjoun
Département de Mathématiques

Fiche de Travaux Dirigés $N°1$
Arithmétique
Troisième E_3

Examinateur : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

Enoncé des exercices

LYCÉE DE BANDJOUN

Exercice 1. *A l'aide de l'algorithme de soustraction calculer :* $PGCD(615;246)$ *,* $PGCD(107;59)$ *et* $PGCD(1000;715)$

Exercice 2. *A l'aide de l'algorithme d'Euclide calculer* $PGCD(91;104)$ *;* $PGCD(78;84)$ *;* $PGCD(492;204)$ *et en déduire* $PPCM(91;104)$ *;* $PPCM(78;84)$ *;* $PPCM(492;204)$

Exercice 3. *Rendre irréductible chacune des fractions suivantes :* $\frac{2666}{1462}$, $\frac{2405}{185}$, $\frac{48380}{35670}$

Exercice 4. *Un charpentier a deux poutres l'une de* 840 *cm et l'autre de* 630 *cm. Il veut les partager en morçeaux aussi longs que possible, tous de même longueur et dont la mesure est un nombre entier de centimètres. Quelle sera la longueur de ces morçeaux ?*

Exercice 5. *On répartit en paquets un lot de* 161 *crayons rouges et un lot de* 133 *crayons noirs de façon que tous les crayons d'un paquet soient de la même couleur et que tous les paquets contiennent le même nombre de crayons.*

1. *Combien y'a-t-il de crayons dans chaque paquet ?*
2. *Quel est le nombre de paquets de crayons de chaque couleurs ?*

Exercice 6. *Un marchand vient de recevoir de son livreur* 1240 *bonbons et* 320 *chocolats. Il souhaite faire le plus grand nombre de paquets identiques en utilisant tous les bonbons et chocolats.*

1. *Trouver le nombre de paquets qu'il pourra faire.*
2. *Déterminer le nombre de bonbons et de chocolats que contient chaque paquet.*

Exercice 7. *Un boutiquier a un lot de* 3150 *sucettes et* 1350 *bonbons. Il veut réaliser des paquets contenant tous le même nombre de bonbons et le même nombre de sucettes, en utilisant tous les bonbons et toutes les sucettes.*

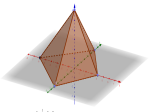
1. *Combien de tels paquets pourras-t-il réaliser au maximum ?*
2. *Chaque bonbon coûte* $25f$ *et chaque sucette* $50F$*. Quel est le prix d'un paquet ?*

Exercice 8. *Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en* 36 *minutes et la voiture B en* 30 *minutes.*

1. *Est-ce qu'il existe des moments (autres que le départ) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?*
2. *Préciser le nombre de déplacement par laps de temps.*

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples , c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.»
John Louis Von Neumann.

GROUPE CAUCHY - SCHWARZ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EFFORT-TRAVAIL-SUCCES
Email : nzouekeupatrice@yahoo.com



FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS $N°3$
SUITES,FONCTIONS,INTÉGRALES
TERMINALES SCIENTIFIQUES
CONTACT WHATSAPP : 676764402

EXAMINATEUR : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

Exercice 1. ***(5,25 points)***

1. *L'espace est muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. *On donne les points* $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$, $C(2,2,2)$, $I(0,1,-1)$.
   (a) i. *Calculer* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   Peut-on dire des points A , B , C *et* I *qu'ils sont coplanaires ?* *[0,75 point]*
   ii. *Déterminer une équation cartésienne du plan* (P) *contenant les points* A , B *et* C. *[0,25 point]*
   (b) i. *Déterminer les coordonnées du point* H , *projeté orthogonal de* I *sur le plan* (P). *[0,75 point]*
   ii. (S) *est la sphère de centre* I *et de rayon* 3. *Déterminer l'intersection du plan* (P) *et de la sphère* (S). *[1,25 points]*
2. *On se place dans le plan complexe rapporté au repère* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. *Soit* f *la transformation qui à tout nombre complexe* z *non nul associe le nombre complexe* $f(z)$ *défini par :* $f(z) = z + \frac{1}{z}$. *On note* M *le point d'affixe* z *et* M' *le point d'affixe* $z' = f(z)$.
   (a) *On appelle* A *le point d'affixe* $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   i. *Déterminer la forme exponentielle de* a. *[0,25 point]*
   ii. *Déterminer la forme algébrique de* $f(a)$. *[0,25 point]*
   (b) *Résoudre dans l'ensenble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation* $f(z) = 1$. *[0,5 point]*
   (c) *Soit* M *un point d'affixe* z *du cercle* $\mathcal{C}_1$ *de centre* O *et de rayon* 1.
   i. *Justifier que l'affixe* z *peut s'écrire sous la forme* $z = e^{i\theta}$ *avec* θ *un nombre réel.* *[0,25 point]*
   ii. *Montrer que* $f(z)$ *est un nombre réel.* *[0,5 point]*
   (d) *Décrire et représenter l'ensemble des points* M *d'affixe* z *tels que* $f(z)$ *est un nombre réel.* *[0,5 point]*

Exercice 2. ***(4 points)***

On considère un cercle $(\mathcal{C})$ *de diamètre* $[AB]$. *On appelle* C *un point du segment* $[AB]$ *distinct des points* A *et* B *et* I *le milieu de* $[BC]$. *La médiatrice de* $[BC]$ *coupe* $(\mathcal{C})$ *en* M *et* M' *tel que* AMM' *est rectangle de sens direct. Notons par* N *le projeté orthogonal du point* C *sur* (AM).

1. (a) *Faire la figure et donner la nature du quadrilatère* $CMBM'$. *[0,5 point]*
   (b) *En déduire que la droite* $(CM') \perp (AM)$ *et que les points* N , C *et* M' *sont alignés.* *[1 point]*
2. *Désignons par* s *la similitude directe de centre* N *qui transforme* M *en* C.
   (a) *Déterminer l'angle de la similitude* s. *[0,5 point]*
   (b) *Déterminer les images par* s *des droites* MI *et* NC. *[1 point]*
   (c) *En déduire l'image par* s *du point* M'. *[0,5 point]*
3. *On désigne par* I' *le milieu du segment* $[AC]$.
   (a) *Démontrer que* I' *est l'image de* I *par* s. *[0,5 point]*

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

(b) *En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle $(\mathcal{C}')$ de diamètre $[AC]$.* *[0,5 point]*

Exercice 3. ***(2,5 points)***

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1. *Calculer I_0 puis I_1* *[0,75 point]*
2. *Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n puis en déduire I_n en fonction de I_{n-4}.* *[1 point]*
3. *Déduire la valeur de I_4* *[0,25 point]*
4. *Calculer $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$* *[0,5 point]*

Exercice 4. ***(8,25 points)***

Les parties A , B , et C sont indépendantes.

Partie A : *(3,25 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

1. *Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.* *[0,5 point]*
2. *Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.* *[0,75 point]*
3. *En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.* *[0,25 point]*
4. *Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = xln(x) - ln(x)$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.* *[0,25 point]*
5. *Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.* *[0,5 point]*
6. *Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$ qu'on note α.* *[0,5 point]*
7. *Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.* *[0,5 point]*

Partie B : *(3 points)*

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = 1 + ln(x)$.

1. (a) *Soit A le point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ et de l'axe des abscisses et P le point d'intersection des courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$. Déterminer les coordonnées du point A et justifier que les coordonnées du point P sont $(1;-1)$.* *[0,5 point]*

   (b) *Construire sur l'intervalle $]0;+\infty[$ les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère.* *[1 point]*
2. *On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_g)$, $(\mathcal{C}_h)$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.*

   (a) *Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie A.* *[0,5 point]*

   (b) *Montrer que $\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{e}$* *[0,5 point]*
3. *Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1;+\infty[$. On note $\mathcal{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$. On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_t$. Montrer que $\mathcal{B}_t = tln(t) - ln(t)$, puis conclure.* *[0,5 point]*

Partie C : *(2 points)*

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y = 0$.* *[0,5 point]*
2. *Déterminer les réels a , b et c tels que le polynôme g définit par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation $(E') : y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$.* *[0,5 point]*
3. (a) *Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E).* *[0,5 point]*

   (b) *En déduire sur $\mathbb{R}$ la solution générale de (E') , puis celle qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.* *[0,5 point]*

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 5. *()*
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

et

$$v_n = u_n - ln(n) \quad n \geq 1$$

1. *(a) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6*
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

2. *(a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul*

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n} \qquad ; \quad 0 \leq v_n \leq 1$$

3. *(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. *Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherche pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?*

Exercice 6. *()*
On considère la suite de nombres reéls (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.

1. *Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique , ni géométrique.*
2. *On définie la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n ;*

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$$

   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n.

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

3. *On définie la suite* (w_n) *en posant pour tout entier naturel* n *:* $w_n = \frac{u_n}{v_n}$
   (a) *Calculer* w_0.
   (b) *En utilisant l'égalité* $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ *, exprimer* w_{n+1} *en fonction de* u_n *et de* v_n.
   (c) *En déduire que pour tout entier naturel* n *,* $w_{n+1} = w_n + 2$
   (d) *Exprimer* w_n *en fonction de* n.
4. *Montrer que pour tout entier naturel* n *:*

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

5. *Pour tout entier naturel* n *on pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 7. *()*
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. *On prendra pour unité graphique* 5 *cm. On pose*

$$\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$

On note A_n *le point du plan d'affixe* z_n.

1. *Calculer* z_1 *,* z_2 *,* z_3 *,* z_4 *et vérifier que* z_4 *est un nombre réel. Placer les points* A_0 *,* A_1 *,* A_2 *,* A_3 *,* A_4.
2. *Pour tout entier naturel* n *on pose* $u_n = |z_n|$. *Justifier que la suite* (u_n) *est une suite géométrique puis établir que pour tout entier naturel* n *:*

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3. *A partir de quel rang* n_0 *tous les points* A_n *appartiennent-ils au disque de centre* O *et de rayon* $0,1$ *?*
4. (a) *Etablir que pour tout entier naturel* n *:*

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$$

   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   (b) *Pour tout entier naturel* n *, on note* l_n *la longueur de la ligne brisée* $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6...A_{n-1}A_n$. *On a ainsi* $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$. *Exprimer* l_n *en fonction de* n *, quelle est la limite de la suite* (l_n) *?*

Exercice 8. *()*

1. *Soit* (u_n) *la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

pour tout entier naturel n

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

(a) *Calculer* u_1 , u_2 , u_3. *On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.*

(b) *Comparer les quatre premiers termes de la suite* (u_n) *aux quatre premiers termes de la suite* (w_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :*

$$w_n = \frac{n}{n+1}$$

(c) *A l'aide d'un raisonnement par récurrence démontrer que pour tout entier naturel* n *:*

$$u_n = w_n$$

2. *Soit* v *la suite de terme génêral* v_n *définie par :*

$$v_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien :

(a) *Montrer que* $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$

(b) *Soit* S_n *la somme définie pour tout entier naturel non nul* n *par :*

$$S_n = \Sigma_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$$

Exprimer S_n *en fonction de* n.
Déterminer la limite de S_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples , c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.»
John Louis Von Neumann.

GROUPE CAUCHY-SCHWARZ

GROUPE - MATHS - INFO
DÉPARTEMENT DE MATHS
T^{le} SCIENTIFIQUE

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS
NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Exercice 1. *()*
Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

1. *Déterminer de deux façons differentes les racine carrées complexes de* z *(on les écrira d'abord sous la forme trigonométrique, ensuite sous forme algébrique).*
2. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{\pi}{8}$.
3. *On considère le polynôme de variable complexe* z *défini par* $p(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$.
   (a) *Montrer que pour tout nombre complexe* z, *on a* $p(z) = (z+4)(2z^2+6z+17)$.
   (b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $p(z) = 0$.
4. *On note* z_1, z_2 *et* z_3 *les solutions de* $p(z) = 0$ *sachant que* z_1 *est réelle et* $Im(z_2) > 0$.
   On appelle A, B *et* C *les points d'affixes respectives* z_1, z_2 *et* z_3 *dans le plan complexe.*
   (a) *Calculer* $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$.
   (b) *Que peut - on en déduire pour le triangle* ABC *?*
   (c) *Déterminer les points* D *et* E *tels que le quadrilatère* $BCDE$ *soit un carré de centre* A.
   (d) *Faire une figure en plaçant les points* A, B, C, D *et* E *dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 2. *()*

1. *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, *on considère les points* A *et* B *d'affixes respectifs* $1+3i$ *et* $2i$. *Soit* S *la similitude directe plane de centre* B *qui transforme* O *en* A. *On note* z' *l'affixe de* M', *transformé du point* M *d'affixe* z.
   (a) *Exprimer* z' *en fonction de* z.
   (b) *Calculer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude* S.
2. *Soit* T, *la transformation qui à tout points* M *d'affixe* z *associe le point* M'' *d'affixe* $z'' = iz + 3$. *Donner la nature de* T *et préciser ses éléments caractéristiques. On notera* Ω *le point invariant par la transformation* T.
3. *Montrer que les points* A, Ω *et* B *sont les sommets d'un triangle isocèle dont on précisera le sommet principal.*
4. *Soit* $z = x + iy$, $Z = X + iY$ *tels que* $Z = \frac{(1-i)z+1+i}{-iz+2+i}$.
   (a) *Exprimer* X *et* Y *en fonction de* x *et* y.
   (b) *Déterminer l'ensemble* (Γ) *des points* M *d'affixe* z *tels que* Z *soit un réel strictement positif.*

Exercice 3. *()*

1. *On considère les nombres complexes :* $z_1 = 3(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ *et* $z_2 = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.
   (a) *Mettre sous forme trigonométrique les trois nombre complexes* z_1, z_2 *et* $z = \frac{z_1}{z_2}$.
   (b) *Donner la forme algébrique de* $z = \frac{z_1}{z_2}$.
   (c) *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Email: nzouekeu.patrice@yahoo.com
Nzouekeu.Patrice©Decembre 2015

2. *On considère l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ d'inconnue α définie par :*
   $(E):\ (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\alpha+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\alpha-2\sqrt{2}=0$
   (a) *Résoudre cette équation dans $]-\pi,\pi]$.*
   (b) *Linéariser $\sin^3 x$.*
   (c) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 8x-\cos 2x=\sin 5x$.*

Exercice 4. *()*
Soient les nombres complexes $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

1. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes z_1,z_2 et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.*
2. *Mettre Z sous forme algébrique.*
3. *En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.*
4. *On considère l'équation d'inconnue réelle x.*

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2 \tag{1}$$

   (a) *Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.*
   (b) *Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.*

Exercice 5. *()*
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{U};\overrightarrow{V})$.On considère dans $\mathcal{P}$ les points A,B,C d'affixes respectives : $z_A=1+i\sqrt{3}$ $z_B=-1-i$ $z_C=-(2+\sqrt{3})+i$

1. *Placer les points A ;B et C.*
2. *Conjecturer graphiquement la nature du triangle ABC.*
3. (a) *Calculer le module et un argument du nombre complexe $W=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.*
   (b) *Interpreter graphiquement le module et l'argument de W.*
   (c) *En déduire la nature exacte du triangle ABC.*
4. (a) *Ecrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.*
   (b) *Ecrire z_A,z_B et $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme trigonométrique.*
   (c) *En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.*

Exercice 6. *()*
On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définit $\forall n\in\mathbb{N}$ par :

$$z_1=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n \tag{2}$$

$$z_1=(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n \tag{3}$$

Démontrer que z_1 est un réel et que z_2 est imaginaire pur.

Exercice 7. *()*
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Exercice 8. *()*
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z=\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est réel.

Exercice 9. *()*
Soient a et b deux nombres complexes de module 1.Démontrer que le nombre complexe $Z=\frac{ab\bar{z}+z}{a-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 10. *()*
Soient x,y,et z trois nombres complexes de module 1 tels que l'on ait $x+y+z=1$ et $xyz=1$.

1. *Démontrer que l'on a : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$*
2. *Calculer x , y et z.*

Exercice 11. *()*
Déterminer les nombres complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1+z$ aient même module.

Exercice 12. *()*
Déterminer z pour que z^2 , $1-z$, $\overline{z}$ aient même module.

Exercice 13. *()*
Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$|z-i|=|iz-i|=|z-iz| \tag{4}$$

Exercice 14. *()*
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et $-2i$.

1. *Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que*

$$(2+i)z+(2-i)\overline{z}=4 \tag{5}$$

2. *Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que*

$$(z+2i)(\overline{z}-2i)=4 \tag{6}$$

Exercice 15. *()*
Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z-3|=|z-(1+i)|$
2. $|z-2+i|=\sqrt{5}$
3. $|z+3-i|\leq 2$
4. $|\frac{z-1}{z+1}|=2$

Exercice 16. *()*
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. *Montrer que $(1+i)^6=-8i$*
2. *On considère l'équation*

$$Z^2=-8i \tag{7}$$

   (a) *Déduire de la question 1 une solution de l'équation (7).*
   (b) *L'équation (7) possède une autre solution.Ecrire cette solution sous forme algébrique.*

3. *Déduire également de la question 1 une solution de l'équation*

$$Z^3=-8i \tag{8}$$

4. *On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.*
   (a) *Déterminer l'affixe b du point B image de A par r ainsi que l'affixe c du point C image de B par r.*
   (b) *Montrer que b et c sont solutions de l'équation (8).*
5. (a) *Dans le plan complexe, représenter les points A , B et C.*

(b) *Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?*

(c) *Déterminer le centre de gravité de cette figure.*

Exercice 17. *()*

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et P un plan complexe orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

1. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $a=-2i$.*
2. *Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(E): z^2-3(1+i)z+5i=0$. (On notera z_1 et z_2 les solutions de (E). z_1 étant celle dont la partie imaginaire est la plus grande).*
3. *On considère les points A,B et C du plan P d'affixes respectives z_1, z_2 et $2+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.*
   (a) *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.*
   (b) *Soit s la similitude directe définie telle que $s(B)=B$ et $s(A)=C$. Préciser les éléments caractéristiques de s. En déduire son écriture complexe.*
   (c) *Déterminer l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que : $|z-1-2i|=3$.*

Exercice 18. *Soit le plan complexe rapporté à un repère.Soit $M'(x,y)$ une transformation de M(x,y) tel que :* $\begin{cases} x' = & x-y\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases}$

1. *Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.*
2. *Déterminer les éléments géométriques de cette transformation.*
3. *Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation $y=x^2+1$.Déterminer l'équation de l'image de $(\mathcal{C})$ par cette transformation.*

Exercice 19. *()*

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*
$$4z^2-12z+153=0 \tag{9}$$
2. *Dans le plan complexe, on considère les points A,B,C et P d'affixes respectives $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3-\frac{1}{4}i$, $z_P=3+2i$ et le vecteur $\overrightarrow{\omega}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{\omega}}=-1+\frac{5}{2}i$.*
   (a) *Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\omega}$.*
   (b) *Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{-1}{3}$.*
   (c) *Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.*
   (d) *Placer les points P , Q , R et S.*
3. (a) *Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallèlogramme.*
   (b) *Calculer $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$.En déduire la nature précise du parallèlogramme $PQRS$.*
   (c) *Justifier que les points $PQRS$ appartiennent à un même cercle noté (Γ).On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.*
4. *La droite (AP) est-elle tangente au cercle (Γ) ?*

Exercice 20. *()*

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ $z_2=1+itan\theta$ $z_3=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$ *où θ est un réel fixé.*

Exercice 21. *()*

Mettre sous forme trigonométrique $z=\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$

Exercice 22. *()*
Calculer $z_1 = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^{30}$ *et* $z_2 = \frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

Exercice 23. *Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :*

1. $z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \alpha \in [0, \pi]$
2. $z_2 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \alpha \in]\pi, 2\pi[$
3. $z_3 = \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha) \quad \alpha \in [0, \pi]$
4. $z_4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Exercice 24. *()*
On pose $z = (2\sqrt{3} + 2) + i(2\sqrt{3} - 2)$

1. *Déterminer les entiers* n *tels que* z^n *soit imaginaire pur.*
2. *Quels sont les entiers naturels* n *tels que* z^n *soit réel négatif.*
3. *Exprimer* z^n *en fonction de* n*.*

Exercice 25. *()*

1. *Mettre chacun des nombrs* $1 + \cos x + i\sin x$ *et* $1 - \cos x - i\sin x$ *sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est de module* 1*.*
2. *En déduire l'expression simplifiée de* $z = \frac{1-\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$*.*

Exercice 26. *()*
On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi \tag{10}$$

$$z' = \cos 2\varphi' + i\sin 2\varphi' \tag{11}$$

avec $0 < \varphi < \pi$ *et* $0 < \varphi' < \pi$*.Calculer le module et l'argument du nombre complexe*

$$u = \frac{1-z}{1-z'} \tag{12}$$

Exercice 27. *()*
Calculer le module et l'argument de :

1. $z_1 = \frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}$ *lorsque* $\alpha \neq 2k\pi$*.*
2. $z_2 = 1 + \sin\alpha - i\cos\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$*.*
3. $z_3 = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})\ ,\ (\beta \in \mathbb{R})$

Exercice 28. *()*
Comment choisir l'entier naturel n *pour que* $(\sqrt{3} + i)^n$ *soit :*

1. *Un réel , un réel positif , un réel négatif.*
2. *Un imaginaire pur.*

Exercice 29. *()*
Donner une expression simple de $C = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ *et* $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x}$ *pour* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*.*

Exercice 30. *()*
Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$

LYCEE BILINGUE DE MBANKOMO *EVALUATION N^O 1 2019/2020*
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES *EPREUVE DE MATHEMATIQUES*
CLASSE : TLE C *DUREE 3H COEFF 5*

EXERCICE 1 *4pts*

1) *Démontrer par récurrence chacune des propositions suivantes :*
   - *1.1)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq 2^{n-1}$ *1pt*
   - *1.2)* $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ *1pt*
   - *1.3)* $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^n$ *est un multiple de 11* *1pt*
2) *Parmi les nombres suivants, retrouve celui qui est premier en justifiant votre choix.* 649 *;* 1001 *;* 1999 *;* 74187. *1pt*

EXERCICE 2 *6.5pts*

1. *Sans revenir à la base dix, poser et effectuer les opérations suivantes.*
2. $\overline{502}^6 \times \overline{34}^6$ *1pt*
3. $\overline{10011}^2 + \overline{110011}^2$ *1pt*
4. $\overline{1540}^7 - \overline{560}^7$ *1pt*
5. *Déterminer le chiffre des unités du nombre* 13^{247} *en base dix.* *1pt*
6. *Démontrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par* 3 *1pt*
7. *Un nombre s'écrit* $\overline{abc0}$ *en base* 5 *et* $\overline{abc}$ *en base* 12 *ou* $a; b$ *et* c *sont des entiers naturels*
   - *a) Démontrer que* $a + b$ *est un multiple de* 4 *0.5pt*
   - *b) Déterminer les entiers* $a; b$ *et* c *1pt*

EXERCICE 3 *4.5pts*

A. *Soit l'équation :* $(E): (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 35x - 12y = 7$

1) *Montrer que si le couple* $(x; y)$ *est solution de* (E)*, alors* y *est multiple de* 7 *0.25pt*
2) *En déduire une solution particulière de* (E) *0.5pt*
3) *Résoudre* (E) *1pt*
4) *Si le couple* $(x; y)$ *est solution de* (E)*, on pose* $d = PGCD(x; y)$
   - *a. Quelles sont les valeurs possibles de* d *?* *0.25pt*
   - *b. Déterminer les couples* $(x; y)$ *solutions de* (E) *pour lesquels le* $PGCD$ *est maximal* *1pt*

B. *Déterminer tous les couples* $(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *tels que* $\begin{cases} PGCD(a; b) = 12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$ *1.5pt*

EXERCICE 4 *5pts*

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$*. A tout nombre complexe* z *distinct de* i*, on associe le nombre complexe* Z *tel que* $Z = \frac{z+i}{z-i}$

1. *Calculer* Z *sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique pour* $z = -\sqrt{3} + i$ *1pt*
2. *En posant* $z = x + iy$ *1pt*3*

a) *Déterminer* $Re(Z)$ *et* $Im(Z)$
b) *Déterminer l'ensemble des points* $M(z)$ *tels que* Z *soit un nombre réel*
c) *Montrer que l'ensemble des points* $M(z)$ *tels* Z *soit imaginaire pur est le cercle trigonométrique*

3. *Déterminer et construire l'ensemble des points* $M(z)$ *tels que* $|Z| = 1$ *1pt*

LYCEE BILINGUE DE MBANKOMO *EVALUATION N°3 2019/2020*

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES *EPREUVE DE MATHEMATIQUES*

CLASSE : TLE C *DUREE 4H* *COEFF 5*

Exercice1 (2.5pts) Répondre par vrai ou faux sans justifier. Bonne réponse +0.25pt ; Mauvaise réponse -0.25pt et Pas de réponse 0pt

1. La fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$ a pour ensemble de définition $]-1;1[$
2. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{sinx}$ est la fonction $x \longmapsto ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|$
3. La fonction u définie par $u(x) = \frac{x}{2^x}$ a pour fonction dérivée lorsquelle est dérivable u' définie par $u'^{(x)} = \frac{(1-xln2)}{2^x}$
4. La dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{t}{ln(t+1)}dt$ est $F'(x) = \frac{x^3}{ln(x^2+1)}$
5. La fonction G définie par $G(x) = \int_x^{3x} \frac{e^t}{t-1}dt$ est dérivable sur $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$
6. L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$ où $h(x) = 2x^2 - 2x - 2lnx$
7. Pour tous réels a et b, on a : $\ln ab = \ln a + \ln b$
8. Si p est une projection vectorielle d'un espace vectoriel E alors on a : $pop = IdE$
9. Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E alors $dimkerf + dimimf = dimE$
10. L'ensemble $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 5\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Exercice2 (3,5pts)

On considere les équations différentielles (E): $y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^2}$ et (E'): $y'' + y' = 0$ et la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2lnx - \frac{3}{x} + 3$

1. Montrer que $f$est solution sur $]0;+\infty[$ de (E) 0.5pt
2. Résoudre l'équation (E') sur $]0;+\infty[$ 0.5pt
3. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E') 1pt
4. Résoudre alors (E) sur $]0;+\infty[$ et déterminer la solution Φ de (E) qui vérifie $\Phi(1) = 0$ et $\Phi'(1) = 4$

Exercice 3 (3pts)

E est un espace vectoriel de base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $\vec{a}$ et $\vec{n}$ désignent deux vecteurs tels que $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. φ est l'application de E dans lui-même qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe son image $\varphi(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. 0.5pt
2. a. Déterminer la matrice de φ dans la base B. 0.5pt
   b. Donner une expression analytique de φ 0.5pt
3. Montrer que ker φ, le noyau de φ est une droite vectorielle dont on précisera une base 0.5pt
4. En déduire la dimension de Imφ, image de φ. φ est-il bijectif ? 0.5pt
5. Montrer que φ est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques. 0.5pt

PROBLEME *Ce problème comporte 3 parties A, B et C indépendantes et obligatoires* **(11pts)**

PARTIE A **(2pts)**

1. Donner une primitive de la fonction $x \to \sin^3 x cosx - \frac{1}{4}\sin 2x$ **0.5pt**

2. Soit k la fonction définie sur]2, $+\infty$[par $k(x) = \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$, $k(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$ **0.75pt**

b. Déduire la primitive de k qui s'annule en 3. **0.75pt**

PARTIE B **(06.5pts)**

I. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ **1pt**

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est nulle et l'autre est notée α avec $1 < \alpha < 2$. **1pt**

3. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ **0.5pt**

II. Soit f la fonction définie sur [0, $+\infty$[par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ On note (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Montrer que f est dérivable en 0. **0.5pt**

2. a. Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. **0.5pt**

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(1 + t) \leq t$ et déduire la position relative entre (C_f) et la tangente (T). **0.75pt**

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ **0.5pt**

b. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ puis déduire le sens de variation de f **0.75pt**

c. Dresser le tableau de variation de f. **0.25pt**

4. Tracer la courbe (C_f). **0.75pt**

PARTIE C **(02.5pts)**

1. Soit $l(x) = cosx$ et I = $[\frac{1}{2}, 1]$. Montrer que l'équation $l(x) = x$ admet une unique solution β dans I. **0.5pt**

2. Montrer que pour tout $x \in$I, $l(x) \in$I. et que $|l'(x)| \leq 0.9$. **0.5pt**

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \cos u_n$

a. Montrer que pour tout n, $u_n \in$I et que $|u_n - \beta| \leq 0.9|u_0 - \beta|$ **0.75pt**

b. En déduire que $|u_n - \beta| \leq (0,9)^n|u_0 - \beta|$ et la limite de (u_n). **0.75pt**

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES | **CONTRÔLE CONTINU N°01**
DÉLÉGATION RÉGIONALE DU SUD | **CLASSE :** T_C **DURÉE :** $1h50$ **COEF :** 5
LYCÉE CLASSIQUE ET MODERNE DE MVOMEKA'A | **EXAMINATEUR : M.HERVÉ BATTISTON NGANMENI**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | **VENDREDI 14 SEPTEMBRE 2018**

NB : ***La clarté de la copie, la qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat***

Exercice 1 (10 pts)

1) Donner la négation de chacun des énoncé suivants. (2pts)

a) Cet enfant est fatigué et malade ; b) Cette fleur est belle et adorable

c) je serais heureux si j'avais plusieurs amis ; d) Si une fonction est paire, alors sa dérivé est impaire.

2) Donner la réciproque et la contraposée de chacune des propositions suivantes : (3pts)

a) Si j'ai faim, alors je mange ; b) Si une fonction est dérivable, alors elle est continue

c) Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge ; d) Si une fonction est impaire, alors sa dérivé est paire.

3) Soit n un entier naturel. Démontrer par récurrence que :

a) Si x est un réel différent de 1, alors $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (1pt)

b) si $n\geq 3$, alors $3^{n+4}<(n+4)!$ (1pt)

4)Trouver tous les entiers x et y tels que $x^2-y^2=21$. (1pt)

5) Soient a, b et d trois entiers relatifs.

Démontrer que Si $d\mid a$ et $d\mid b$, alors pour tous entiers relatifs u et v, $d\mid au+bv$. (1pt)

6) Soit k un entier naturel. Justifier que $a=6k+5$ et $b=8k+3$ sont des entiers naturels et prouver qu'il n'existe que deux diviseurs positifs commun à a et b. (1pt)

Exercice 2 (10 pts)

I-1)) En remarquant que : $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, calculer $\sum_{k=1}^{n+1}k$; $\sum_{k=1}^{n-1}k$; $\sum_{k=3}^{n}k$; $\sum_{k=3}^{n-2}k$ et $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$ (2,5pts)

2) On pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$.

a) Calculer S_n pour $n=1,2,3,4,5$ (1,25pt)

b) Exprimer S_{n+1} et S_{n+2} en fonction de n et de S_n. (1pt)

c) On admet que $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, puis celle de S_{n+1} et S_{n+2} en fonction de n. (1,5pt)

II) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels

1) Montrer que $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\alpha_n-\alpha_0$. (0,75pt)

2-a) Déterminer α, β, λ et η pour que : $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{\lambda}{k-1}+\dfrac{\eta}{k+1}$. (1pt)

2-b) En déduire l'expression en fonction de n de : $U_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$ et $V_n=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2-1}$. (2pts)

"Gérer son temps, c'est gérer ses priorités" **Bonne chance!!!**

COLLEGE MODERNE DE LA BENOUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Année scolaire 2018-2019
Contrôle continu n°3
Epreuve : Mathématiques
Classe : Tle C **Durée :** 4h

Exercice 1 : Primitives (4,5pts)

I) Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=x\sqrt{1-2x}$

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ par :

$F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de f. **1pt**

II) φ est la fonction définie dans $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $\varphi(x)=\frac{sinx}{cos^3x}$.

1) Montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi'(x)=\frac{3}{cos^4x}-\frac{2}{cos^2x}$ **1pt**

2) En déduire la primitive G de la fonction $g: x\longmapsto\frac{1}{cos^4x}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$. **1pt**

III) On considère la fonction $h: \longmapsto\frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\frac{x^2-2x-2}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$ **0,75pt**

2) En déduire la primitive H de h sur $]-\infty;1]$, telle que $H(-1)=-ln2$ **0,75pt**

Exercice 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires (4pts)

E est un espace vectoriel sur IR dont une base est B=$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe le vecteur $f(\vec{u})=(x+2y)\vec{i}+(-y+z)\vec{j}-(x+2z)\vec{k}$

1) Déterminer la matrice de f dans la base B. **0,5pt**

2) a) Déterminer le noyau de f. (On donner une base du noyau) **0,75pt**

b) Sans déterminer Imf, en déduire la dimension de Imf. **0,25pt**

c) Déterminer Imf et une base de Imf. **0,75pt**

3) Déterminer la matrice de fof dans la base B. **0,5pt**

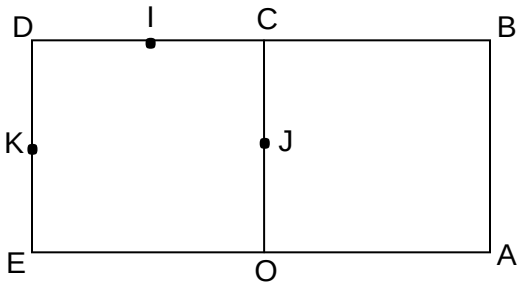
4) On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{e_2}=\vec{i}-\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3}=\vec{j}-2\vec{k}$

a) Démontrer que la famille B'=$(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ est une base de E. **0,5pt**

b) Déterminer la matrice de f dans la base B'. **0,75pt**

Exercice 3 : Similitudes directes planes (4,5pts)

Sur la figure ci-dessous, on considère les carrés OABC et OCDE tels que :
$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}}\right)=\frac{\pi}{2}$



I, J et K sont respectivement les milieux des segments [DC], [OC] et [DE]

1) Justifier l'existence d'une similitude directe S transformant A en I et D en E. **0,25pt**

2) Déterminer le rapport de S. **0,75pt**

3) Justifier que l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$. **0,75pt**

4) a) Justifier que l'image de la droite (AB) par S est la droite (BD). **0,25pt**
   b) Justifier que l'image de la droite (BD) par S est la droite (DE). **0,25pt**
   c) En déduire que S(B)=D. **0,25pt**

5) Justifier que S(C)= K. **0,5pt**

6) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est l'un des points d'intersection du cercle de diamètre $[AI]$ et du cercle de diamètre $[DE]$. **0,5pt**

7) On considère le repère orthonormal direct $(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$
   a) Déterminer l'écriture complexe de S. **0,75pt**
   b) En déduire l'affixe de Ω . **0,25pt**

Exercice 4 : Etude d'une fonction comportant ln (7pts)

Il comporte deux parties dépendantes I) et II)

I) On considère la fonction f définie sur $]-1;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **0,75pt**
   (*On justifiera clairement les résultats)*
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. **1,25pt**
3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1;+\infty[$ une unique solution $\propto$. **0,25pt**
   b) Démontrer qu' une valeur appochée de $\propto$ à 10^{-1} près est 3,9 . **0,5pt**
4) Calculer $f(0)$ et préciser , suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$. **0,75pt**

II) Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \quad si\ x > 0 \end{cases}$

1) Démontrer que g est continue en 0. **0,25pt**
2) Etudier la dérivabilité de g en 0. **0,5pt**
3) Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$. **0,5pt**
4) a) Calculer la limite de g en $+\infty$. **0,5pt**
   b) Dresser le tableau de variation de g. **0,75pt**
5) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1cm sur $(O,\vec{i})$ et 10cm sur $(O,\vec{j})$.
   Construire la courbe (Γ) représentative de g . **1pt**

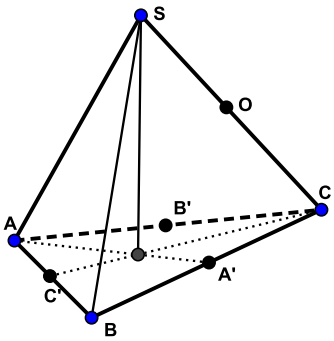
Examinateur : M. WOUNGUE

MINESEC **Année scolaire 2019/2020**
Lycée de Garoua Djamboutou **Composition de fin du trimestre 2**
Département de Mathématiques Classe: $T^{le}C$ **Durée : 4 heures** **Coef : 5**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires.

EXERCICE 1 3,5 points



$SABC$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont les triangles équilatéraux); G et H sont les points tels que: $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ et O le milieu du segment $[SC]$.Soit D le point tel que $ABCD$ est carré de sens directe et de centre B'.

1) $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et que $AS = 4$. Déterminer les coordonnées des points G, H et O, dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. **1 pt**

2) Déterminer une équation du plan (GOH), puis la distance $d(S,(GOH))$. **1,5pts**

3) Soit la similitude s de centre D qui transforme B' en C. Déterminer l'angle et le rapport de s. **1 pt**

EXERCICE 2: 4,5 points

I/Dans le plan, on considère le parallélogramme $ABCD$. tel que $AB = BD$. Soit f, l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par $f(A) = B$, $f(B) = D$, $f(D) = C$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Préciser la nature de l'application g, définie par: $g = t^{-1}of$. **0,5 pt**

2) Construire l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$. **0,75 pt**

3) Démontrer que f n'abmet pas de point invariant. **0,5 pt**

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit la droite (Π) d'équation $x + y - 2 = 0$. On note S_Π la symétrie orthogonale d'axe (Π).

1) Déterminer l'expression anaytique, puis l'écriture complexe de S_Π. **(0,75+0,5) pts**

2) Soit le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On pose $f = t_{\overrightarrow{u}} o S_\Pi$.

a) Montrer que f est une symétrie glisée, puis déterminer son expression analytique. **0,5 pt**

b) Déterminer l'axe et le vecteur de f. **1 pt**

PROBLEME: 12 points

"Le problème comporte trois parties A, B et C indépendantes"

Partie A: 3 points

On considère la fonction numérique f_n définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par $f_n = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour n un entier naturel impair. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) **a)** Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$. ***(En $+\infty$, on pourra poser $X = x + 1$)*** **0,5 pt**

b) Etudier la limite de la foncton f_n à gauche et à droite en -2. **0,5 pt**

2) **a)** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ de f, puis étudier son signe. **1 pt**

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n. **0,5 pt**

Lygradiam

3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A à préciser. **0,5 pt**

Partie B: 3,5 points

On donne la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 4 + \ln x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tels que $1 < \alpha < 2$. **0,75 pt**

2) On cherche une valeur approchée de α par la m éthode du point fixe.

On considère la fonction g définie par $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$, et $x \in K = [1;2]$.

a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$, puis que pour tout $x \in K$, $g(x) \in K$. **0,5 pt**

b) Montrer que pour tout $x \in K$, $| g'(x) | \leq \frac{1}{2}$, puis que $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$. **0,75 pt**

3) On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$, puis que $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | u_n - \alpha |$. **0,5 pt**

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| u_n - \alpha | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **0,5 pt**

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **0,25 pt**

d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $| u_n - \alpha | < 10^{-3}$. **0,25 pt**

Partie C: 5,5 points

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit l'ensemble (E) des points $M(x,y)$ tels que $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. On déterminera certaines isométries du plan qui laissent globalement invariant (E).

I/ Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $g(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$, $\forall x \in [-1;1]$. On note (C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ***L'unité graphique étant égale à 3cm.***

1) Déterminer la parité de g. En déduire une interprétation géométrique du résultat. **0,5 pt**

2) Soit h la restriction de g à $[0;1]$.

a) Vérifier que $h(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0;1]$. **0,25 pt**

b) Etudier la dérivabilité de h à droite en 0. Que peut on conclure pour la courbe (C) de g. **0,5 pt**

c) Montrer que pour tout $x \in]0;1]$, $h'(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Dresser le tableau de variation de h. **1 pt**

3) Représenter soigneusement la courbe de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0,5 pt**

4) Soit la fonction t définie sur $[-1;1]$ par $t(x) = -g(x)$.
Déduire de (C), la courbe (C') de t dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0,5 pt**

II/Soit $(\mathfrak{I})$, l'ensemble des isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

1) Montrer que pour tout point $M(x,y)$ appartient à (E), on a: $-1 \leq x \leq 1$. **0,25 pt**

2) Montrer que (E) est la reunion des courbes (C) et (C'). **0,25 pt**

3) On considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $I(1;0)$, $J(0;1)$, $K(-1;0)$ et $L(0;-1)$.

a) Déterminer l'ensemble des couples (A,B) des points de (E) tels que $d(A,B) = 2$. **0,5 pt**

b) Soit S une isométrie du plan qui laisse (E) globalement invariant.
Montrer que $S(O) = O$ et en déduire toutes les natures de l'isométrie S. **(0,5+0,75) pts**

Lygradiam

A méditer

"Celui qui néglige l'infiniment petit,
n'aura jamais l'infiniment grand."
Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.

EXERCICES DE MATHEMATIQUES
TERMINALE C
ARITHMETIQUE

Proposés par Hugues SILA

1. 1. Division Euclidienne -1

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Correction

On a $320 = q \times b + 39 \Leftrightarrow q \times b = 320 - 39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 : 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

1. 2. Division Euclidienne-2

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

1. 3. Division Euclidienne-3 (c)

1. Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.

3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.

4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Correction

1. L'ensemble des diviseurs de 6 est $D = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

2. $n - 4$ divise 6 si $n - 4$ appartient à D, soit si n appartient à $D + 4 = \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$.

3. On peut remarquer que $n + 2 = n - 4 + 6$. Puisqu'il est évident que $n - 4$ divise $n - 4$, le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si $n - 4$ divise $n + 2$, alors $n - 4$ divise $n + 2 - (n - 4)$ c'est-à-dire $n - 4$ divise 6.

Réciproquement si $n - 4$ divise 6 alors $n - 4$ divise $6 + n - 4$ c'est-à-dire $n - 4$ divise $n + 2$. On a donc démontré que $n - 4$ divise $n + 2$ si et seulement si $n - 4$ divise 6.

4. On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n - 4 = 3(n + 1) - 7,$$

et puisqu'il est immédiat que $n + 1$ divise $3(n + 1)$, on peut écrire :

- si $n + 1$ divise $3n - 4$, alors $n + 1$ divise $3n - 4 - 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise -7 ;

réciproquement : si $n + 1$ divise -7 alors $n + 1$ divise $-7 + 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise $3n - 4$.

L'ensemble des diviseurs de -7 (ou de 7) étant $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$, on en déduit que $n + 1$ divise $3n - 4$ si et seulement si $n + 1$ appartient à $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ soit n appartient à $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

1. 4. Multiples - 1

a et b sont deux entiers relatifs. Démontrez que si $a^2 + b^2$ est divisible par 7 alors a et b sont divisibles par 7.

1. 5. PGCD - 1 (c)

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

...

1. 6. PPCM et PGCD - 2

Trouvez les deux nombres a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

1. 7. PPCM et PGCD - 3

Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187.

1. 8. Théorème de Gauss-1

1. a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2. a et b sont des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrez que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

1. 9. Bases de numération-1

Trouvez toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $n=\overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

1. 10. Bases de numération-2

A est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7. Ecrivez ce nombre en bases 10, puis 2 et enfin 16 (tous les calculs doivent apparaître).

1. 11. Bases de numération-3

Le nombre N s'écrit 23 dans le système décimal. Peut-il s'écrire 27 dans une autre base ?

1. 12. Ecriture répétée

Soit n un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n=\overline{abcabc}$ avec $a\neq 0$.

1. a. Déterminer n tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

* n est divisible par 5,
* L'entier $\overline{bc}$ est le double de a.

b. Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2. Etude du cas général

a. Montrer que n est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b. Montrer que n ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel).

3. Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4. On pose $n_1 = 121121$ et $n_2 = 140140$. On appelle (E) l'équation $n_1x+n_2y=1001$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Déterminer une solution particulière de (E)

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1. 13. Congruences-1 (c)

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Correction

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15.3, on a :

$$32^{45}\equiv 4^{45}(7)\equiv\left(4^3\right)^{15}(7)\equiv(1)^{15}(7)\equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

1. 14. Congruences-2

Démontrez que le nombre $n=ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs a et b.

1. 15. Congruences-3 (c)

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Correction

1. $p = 0 : 1$, $p = 1 : 5$, $p = 2 : -1$ ou 12, $p = 3 : -5$ ou 8, $p = 4 : 1$ donc

pour $p=4k$ le reste est 1,

pour $p=4k+1$ le reste est 5,

pour $p=4k+2$ le reste est 12 ou -1,

pour $p=4k+3$ le reste est 8 ou -5.

2. $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$: $31=2\times 13+5\equiv 5(13)$ et $18=13\times 1+5\equiv 5(13)$; on a donc

$$N=31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n-1}\right](13)\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n'+3}\right](13)\equiv[5+8](13)\equiv 0(13).$$

1. 16. Divers-1

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

1. 17. Divers-2

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

1. 18. Divers-3

a et b sont deux entiers positifs premiers entre eux. Montrez que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

1. 19. Divers-4

On considère la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ avec n entier positif.

a. prouvez que tout diviseur commun d à $2n + 1$ et $n^3 + n$ est premier avec n.

b. Déduisez en que d divise $n^2 + 1$, puis que $d = 1$ ou $d = 5$.

c. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la fraction est irréductible ?

1. 20. Nombres Premiers-1

Le nombre 401 est-il premier ? Résolvez en entiers naturels l'équation $x^2 - y^2 = 401$.

1. 21. Nombres Premiers-2

p et q sont des entiers naturels.

1. Démontrez que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

2. Déduisez en que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.

3. Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier.

1. 22. Nombres Premiers-3

Soit p un entier premier. Montrer que si $p \geq 5$ alors 24 divise $p^2 - 1$.

1. 23. Démonstration de Fermat

Soit p, un entier naturel premier.

1. a. Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$, le nombre $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

1. b. En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p (on pourra faire un raisonnement par récurrence).

3. Montrer que pour tout entier n premier avec p, $n^{p-1} - 1$ est divisible par p.

1. 24. La classe…

Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe (inférieur à 40…) ?

Correction

Appelons f le nombre de filles et g le nombre de garçons :

$f \times 160 + g \times 173,5 = (f + g) \times 167 \Leftrightarrow 6,5g = 7f \Leftrightarrow 13g = 14f$ donc il y a 13 filles et 14 garçons (ou 26 filles et 28 gars, mais le total dépasse 40).

1. 25. Un

Les nombres entiers de 1 à 9999 sont écrits en français : un, deux, trois, quatre, …dix, onze, …, vingt, …, mille deux cent trente quatre, … puis rangés par ordre alphabétique.

1. Quels sont les deux premiers et les deux derniers de la liste ?

2. Quelle est la position de « un » dans la liste ?

2. Bézout

2. 26. Bezout-1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x - 28y = 414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A(−30 ; − 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de −10 à +10 en abscisses et de −14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [−40 ; +40] en abscisses et à [−50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

2. 27. Bezout-2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $13x - 23y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $-156x + 276y = 24$.

2. 28. Bezout-3

1. Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$ soit satisfaite, pour x et y entiers naturels, il faut prendre x et y de la forme : $x = 9(k+3)$ et $y = 4k$ avec k entier naturel.

2. Démontrer que le PGCD de x et y ne peut être qu'un diviseur de 108.

3. On pose m = PPCM(x ; y) et on envisage la décomposition de m en facteurs premiers. Comment faut il choisir k pour que :

a. m ne contienne pas le facteur 2 ?

b. m contienne le facteur 2 ou le facteur 2^2 ?

c. m ne contienne pas le facteur 3 ?

d. m contienne le facteur 3, ou le facteur 3^2 , ou le facteur 3^3 ?

4. Comment faut-il choisir x et y de telle façon que l'on ait PGCD(x ; y) = 18 ?

2. 29. Bezout-4

1. Décomposer 319 en facteurs premiers.

2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x + 5y$ et $x + 2y$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$ où m est le PPCM de a et b.

2. 30. Bezout-5

Au 8° siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

3. Anciens

3. 31. Somme et produit

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose S = $x + y$ et P = xy.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que S et P sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : SP = 84.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$$ avec d = PGCD(a ; b)

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux.)

3. 32. Quadratique

1. Soit x un entier impair. Quel est le reste de la division de x^2 par 8 ?

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.

3. On veut tracer sur l'écran d'une calculatrice comportant 320 points de large sur 200 points de haut les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$.

Le repère choisi a son origine en bas à gauche de l'écran, et chaque point de l'écran a pour coordonnées sa position à l'écran − 1 (par exemple, le point en haut à droite aura pour coordonnées (319 ; 199)). Combien de points pourra-t-on tracer ?

3. 33. Divisibilité

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les cas suivants : n=1, n=11, n=15.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

3. 34. Equation diophantienne

1. On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a + b = 11994$ et dont le PGCD vaut 1999.

2. On considère l'équation (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}$

a. Peut on trouver S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

b. Même question avec 5 ?

c. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S.

3. 35. Base de numération 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5242 + 13x = 6y$.

2. Soit N le nombre dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25x3}$. Pour quelles valeurs de x :

* N est-il divisible par 6 ?

* N est-il divisible par 4 ?

* N est-il divisible par 24 ? (24 est écrit en décimal...).

3. 36. Base de numération 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

En déduire que $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 8 ?

b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A_p est divisible par 8.

4. On considère les nombres a et b écrits dans le système "base 3" :

$a = \overline{1110}_{\text{trois}}$.

$b = \overline{101010100}_{\text{trois}}$.

Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ?

5. De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}_{\text{trois}}$. Démontrer que c est divisible par 16.

Remarque : pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres a, b, c.

3. 37. Somme des cubes

1. Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Démontrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p \right)^2$. Exprimer $s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ en fonction de n.

3. Soit D_n le PGCD des nombres s_n et s_{n+1} . Calculer D_n lorsque

a. $n = 2k$,

b. $n = 2k+1$.

En déduire que s_n, s_{n+1} et s_{n+2} sont premiers entre eux.

3. 38. Somme des diviseurs

1. On considère le nombre $n = 200 = 2^3 5^2$.

a. Combien n a-t-il de diviseurs ? En utilisant un arbre, calculez les tous et faites leur somme s.

b. Vérifiez que $s=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$.

2. On considère maintenant le nombre $N=a^\alpha b^\beta$ où a et b sont deux nombre premiers, α et β des entiers.

a. Quel est le nombre de diviseurs de N ?

b. Soit S la somme des diviseurs de N. Montrez que $S=(1+a+a^2+...+a^\alpha)(1+b+b^2+...+b^\beta)$.

Déduisez en une expression « simple » de S.

c. Montrez alors que pour α et β suffisamment grands on a $\frac{S}{N}\approx\frac{a}{a-1}.\frac{b}{b-1}$.

3. Application numérique : $N=5^{100}7^{200}$; trouver une valeur approchée de S.

Rappel : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. 39. Racines rationnelles (méthode de Descartes)

1. Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3.

2. On se propose de trouver les solutions rationnelles de l'équation :

$$(1):\ 3x^3-2x^2+6x-4=0.$$

On rappelle qu'un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.

a. Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.

b. Montrer qu'une solution de (1) ne peut pas être négative.

c. Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $3x^3-2x^2+6x-4=0$.

3. 40. QCM.

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.

4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.

5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

3. 41. Cryptographie

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u-13v=1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0-26v_0=4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a-26k=4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

3. 42. Repunits 1,

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1+10+100+...+10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour k entier compris entre 1 et 8.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

3. 43. Repunits 2,

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1. Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.

3. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.

b. Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.

c. En déduire que $n^2 \equiv 1(20)$.

4. a. Soit $k > 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?

b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

3. 44. Recherche,

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \ldots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n).

$u_1 = 1$ $\quad$ $u_6 = 3^2 \times 97$

$u_2 = 3$ $\quad$ $u_7 = 3^4 \times 73$

$u_3 = 3^2$ $\quad$ $u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$

$u_4 = 3 \times 11$ $\quad$ $u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$

$u_5 = 3^2 \times 17$ $\quad$ $u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.

2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?

3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

3. 45. Cryptographie,

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par f la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».

On désire coder à l'aide de f le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g. Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de g ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit i un élément de Ω.

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

c. On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$.

En utilisant la division euclidienne de 10 par i, prouver que i est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrage et le déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.

4. Exercices

4. 46. Base

5 points

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 144 + 10\times 12 + 7 = 1711$ en base 10.

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 [3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 [11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Correction

Partie A : Question de cours

Les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances sont $a \equiv a' [p]$ et $b \equiv b' [p]$ alors $a + b \equiv a' + b' [p]$, $ab \equiv a'b' [p]$ et $a^n \equiv a'^n [p]$.

Propriété de compatibilité avec la multiplication :

on pose que $a = pk + a'$, $b = ph + b'$ d'où $ab = p^2 kh + a'ph + b'pk + a'b' = a'b' + p(\ldots)$.

Partie B

1. a. $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12} = 12^2\times 11 + 12\times 1 + 10 = 1606$.

b. Il faut diviser par 12 plusieurs fois : $1131 \equiv 12\times 94 + 3$, $94 \equiv 12\times 7 + 10 = 12\times 7 + \alpha$, donc

$$N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12} = 7\times 12^2 + \alpha\times 12 + 3 = 7\times 144 + 10\times 12 + 3 = 1131.$$

2. a. $N = 12^{n-1}\times a_n + \ldots + 12\times a_1 + a_0 \equiv a_0 [12] \equiv a_0 [3]$. Si le dernier chiffre est 0 modulo 3, soit un multiple de 3 le nombre sera divisible par 3.

b. N_2 se termine par 3 en base 12, il est divisible par 3. En base 10 la somme des chiffres est 6, il est donc divisible par 3.

3. a. Chaque puissance de 12 est congrue à 1 modulo 11 donc $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 [11]$. Si la somme des chiffres est un multiple de 11, ce nombre sera divisible par 11.

b. La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22$ donc N_1 est divisible par 11. En base 10 on fait la somme des termes de rang pair moins la somme des termes de rang impair : 12−1=11 qui est divisible par 11.

4. $N = \overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3 : $y = 3k$, et par 11 : $x + 4 + y = 11k'$.

On résoud : $\begin{cases} y = 3k \\ x + 4 + 3k = 11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3k \\ x = 11k' - 3k - 4 \end{cases}$; les valeurs possibles de k sont 0, 1, 2, 3 :

k	y	x	k'	N	N (b. 10)
0	0	$11k'-4$	$k'=1$ soit $x=7$	$\overline{740}^{12}$	1056
1	3	$11k'-7$	$k'=1$ soit $x=4$	$\overline{443}^{12}$	627
2	6	$11k'-10$	$k'=1$ soit $x=1$	$\overline{146}^{12}$	198
3	9	$11k'-13$	$k'=2$ soit $x=9$	$\overline{949}^{12}$	1353

4. 47. QCM,

5 points

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

Proposition 2 : « $x^2+x+3=0\,(\text{modulo } 5)$ si et-seulement si $x\equiv 1(\text{modulo } 5)$. »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'afiixe $1-i$ a pour écriture complexe $z'=\left(\sqrt{3}+i\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O\,;\vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s\circ s_A=s_A\circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

4. 48. QCM.

5 points

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z\to\frac{3}{2}(1-i)z+4-2i$.

Proposition 1 : « $f=r\circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

Proposition 3 : « $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x-5y=14$.

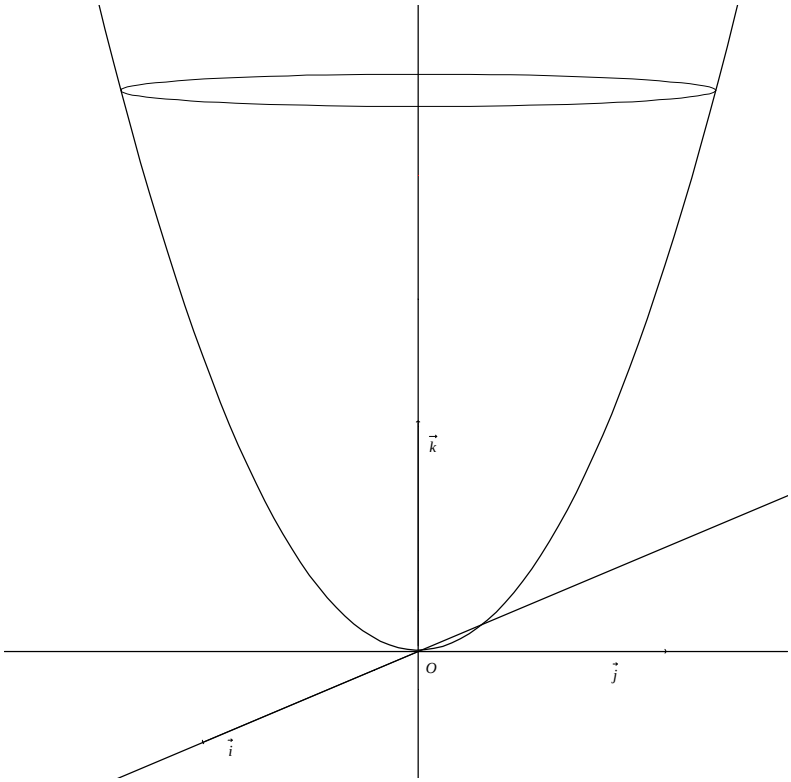
Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k+14\,;11k+28)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z=x^2+y^2$.

Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x=\lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z=9$ en deux solides de même volume ».



Rappel : *Soit V le volume du solide délimité par* Σ *et les plans d'équations z = a et z=b où* $0 \le a \le b \le 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,dk$ *où S(k) est l'aire de la section du solide par le plan d'équation z=k où* $k \in [a, b]$.

4. 49. Réseau,

5 points

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthononnal, dont les coordonnées $(x ; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A. Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x ; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 ;

2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 ;

3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3.

B. Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x ; y)$ pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C. Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

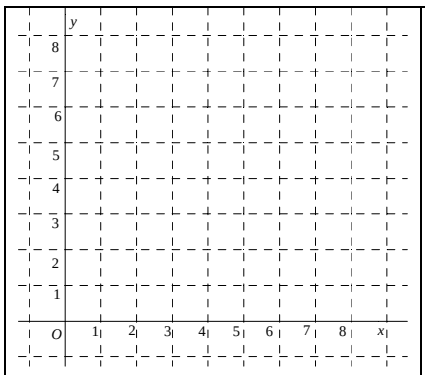
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0 ; 0)$ et $A(a ; b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

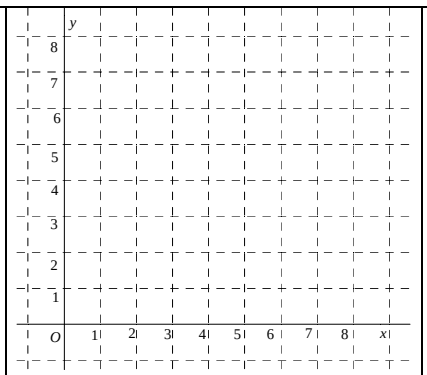
$0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $ay = bx$.

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,b}$.

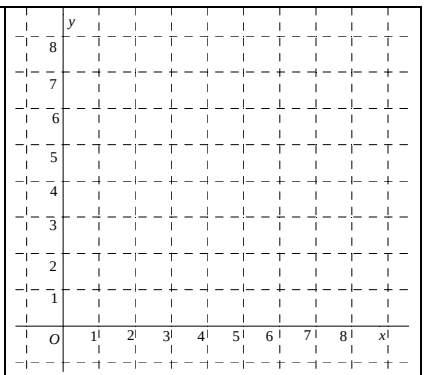
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)



Graphique n°1



Graphique n°2



Graphique n°3

4. 50. Codage affine,

5 points

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) tel que $0 \le u \le 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$,

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11\times11+8 = 129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

4. 51. Surface+Eq. dioph.,

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (*xOy*).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. *M* étant un point de (C), on désigne par *a* son abscisse et par *b* son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point *M* de (C) tel que *a* et *b* soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm(*a* ; *b*)= 440, c'est-à-dire tel que (*a*, *b*) soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a\,;b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si (*a*, *b*) est solution de (1) alors pgcd(*a* ; *b*) est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

1. Si $M(x\,;y\,;z)$ appartient à (S), alors on a $x^2+y^2-z^2=1$, soit $x^2+y^2-(-z)^2=x^2+y^2-z^2=1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x\,;y\,;-z)$ appartient également à (S) et réciproquement.

Par conséquent, le plan d'équation $z=0$, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la surface (S).

2. a. $M\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-4k \\ y-1=0k \\ z+3=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4k+3 \\ y=1 \\ z=4k-3 \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

b. On remplace *x*, *y* et *z* dans l'équation de (S) :

$x^2+y^2-z^2=(-4k+3)^2+1^2-(4k-3)^2=16k^2-24k+9+1-16k^2+24k-9=1$, ce qui est toujours vrai.

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S), la droite est incluse dans la surface (S).

3. Soit (P) un plan parallèle au plan (xOy). (P) a alors une équation de la forme $z=c$ où *c* est un réel, soit $x^2+y^2=c^2+1$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0\,;0\,;c)$ et de rayon $\sqrt{1+c^2}$, tracé dans (P). La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$.

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre $\Omega(0\,;0\,;68)$ et de rayon $\sqrt{1+68^2}=5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z=68$.

b. Soit $(a\,;b)$ une solution de (1). Alors : $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \text{ppcm}(a\,;b)=440 \end{cases}$.

d le PGCD de *a* et *b* divise *a* (et aussi a^2) et divise *b* (et aussi b^2), d'où *d* divise a^2+b^2 ; *d* divise 4625.
De plus, *d* divise le PPCM de *a* et *b*. Donc *d* divise 440, *d* est un diviseur commun de 440 et de 4625.
Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.
Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440.
d ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.

* $d=1$, $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=1\times440=440$.

a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.

Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+880=5505$; ce qui est impossible car $a+b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.

* Supposons que $d=5$; alors $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=5\times440=2200$.

a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+4400=9025$, soit $a+b=95$.

Seul le couple $(40\ ;\ 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $ppcm(a\ ;\ b) = 440$.

4. 52. Bézout+Fermat

5 points

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

4. 53. Bézout,

5 points

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 610 par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 64 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $640 \equiv 1[11]$ et que $640 \equiv 1[5]$.

d. Démontrer que 640 – 1 est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet aumoins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

4. 54. Codage affine

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 24\ ;\ 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

4. 55. Surface+éq. dioph

5 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1 ; 3 ; 2)$, $B(4 ; 6 ; -4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O ; \vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x ; y ; z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x, y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 56. QCM,

5 points

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;0\,;5)$ et de rayon 5 ».

3. Proposition 3 : « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

4. 57. Bézout,

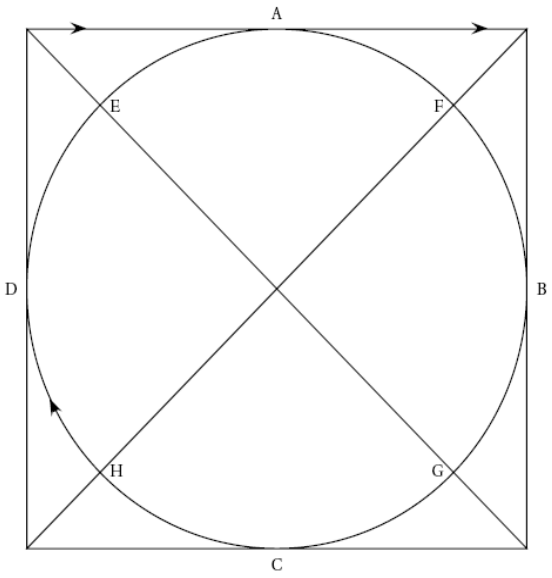
5 points

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

4. 58. Congruences,

5 points

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $ac \equiv bd \bmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On appelle *ordre* de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

Correction

1. a. On écrit que $a = b + 7k$, $c = d + 7k'$ d'où

$ac = (b+7k)(d+7k') = bd + 7(bk' + dk + 7kk') \Leftrightarrow ac \equiv bd\,[7]$.

b. Par récurrence : vrai pour $n = 1$. Supposons $a^n \equiv b^n \bmod 7$, alors $a^n \times a \equiv b^n \times b\,[7] \Leftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}\,[7]$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

On cherche les restes de 2^n et 3^n modulo 7 :

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	1	2	4	1
3^n	3	2	6 ou −1	4 ou −3	5 ou −2	1

Donc pour 2 la première valeur de n est 3, pour 3 c'est 6.

3. a. Théorème de Fermat : si p premier ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$ d'où avec $p = 7$: $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On a donc $6 = kq + r \Rightarrow a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q a^r$; comme $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $\left(a^k\right)^q \equiv 1^q\,[7] \equiv 1\,[7]$ donc $a^r \equiv 1\,[7]$. Comme k est le plus petit entier tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $r = 0$ donc k divise 6, soit k=1, 2, 3 ou 6.

c.

a	$a^2 \bmod 7$	$a^3 \bmod 7$	$a^6 \bmod 7$
1 (k=1)	1	1	1
2 (k=3)	4	1	1
3 (k=6)	2	6	1
4 (k=3)	2	1	1
5 (k=6)	4	6	1
6 (k=2)	1	6	1

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$, et $2006 = 2 \times 1003 = 3 \times 668 + 2 = 6 \times 334 + 2$; on a donc

$2^{2006} = \left(2^3\right)^{668} \times 2^2 \equiv 4\,[7]$, $3^{2006} = \left(3^6\right)^{334} \times 3^2 \equiv 9\,[7] \equiv 2\,[7]$, $4^{2006} = \left(4^3\right)^{668} \times 4^2 \equiv 16\,[7] \equiv 2\,[7]$,

$5^{2006} = \left(5^6\right)^{334} \times 5^2 \equiv 25\,[7] \equiv 4\,[7]$ et $6^{2006} = \left(6^2\right)^{1003} \equiv 1\,[7]$

d'où enfin $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1\,[7] \equiv 13\,[7] \equiv 6\,[7]$.

4. 59. QCM,

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \,(\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0 \,(\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;\,9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « Il existe un seul couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Correction

Proposition 1 : Vrai.

On fait l'essai. Ca semble marcher.

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

Vérifions : $2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$.

Proposition 2 : Faux.

$x^2 + x = x(x+1)$ est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes x ou $x + 1$ soit un multiple de 3 ; on pourrait alors avoir $x + 1 \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$. Par exemple 5 donne 25 + 5 = 30 qui est bien un multiple de 3.

Proposition 3 : Faux.

$12x - 5y = 3$ a comme solution particulière $x = 4$ et $y = 9$; on a alors

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12\times 4 - 5\times 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) - 5(y-9) = 0 \Leftrightarrow 12(x-4) = 5(y-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 5k \\ y - 9 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 9 + 12k \end{cases}.$$

Proposition 4 : Vrai.

Posons $\begin{cases} a = a_1 k \\ b = b_1 k \end{cases}$ où k est $\text{PGCD}(a, b)$; on a alors $a_1 b_1 k - k = 1 \Rightarrow k = 1$ sinon k diviserait 1. Notre équation devient alors : $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ devient donc $ab - 1 = 1 \Leftrightarrow ab = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Vrai.

$M = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $N = \overline{bca} = 100b + 10c + a$ donc

$$M - N = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 9(11a - 10b - c)$$

est divisible par 27 si $11a - 10b - c$ est divisible par 3.

Sachant qu'on a $M = 100a + 10b + c = 27k \Leftrightarrow 10b + c = 27k - 100a$, on remplace :

$$11a - 10b - c = 11a - 27k + 100a = 111a - 27k \ ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

4. 60. Restes chinois,

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12\times19$. Quel est le reste r de cette division ?

Correction

Partie A : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.

Partie B : $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13 + 19k$. Or $12v = 1 - 19u$ donc $N = 13(1 - 19u) + 6\times19u = 13 + 19\times(-7u)$; ok.

De même $N = 13\times12v + 6\times19u = 13\times12v + 6(1 - 12v) = 6 + 12\times7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n - n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5) + 12(8) = 1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13 + 19\times(-7u)$, ce qui donne $N = 678$; de même on prend $v = 8$ et $N = 6 + 12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0\,(12\times19) \equiv 678\,(12\times19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.

4. 222.

4. 61. Fermat,

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$, lorsque n est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A : quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \le n \le 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \ge 1$ tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n \ge 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$ .Onnote b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

b. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

c. En déduire que b divise $p-1$.

4. 62. Eq. diophantienne,

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1$ modulo 2^n.

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.

a. Montrer que $x^2+y^2+z^2 \equiv 1$ modulo 4.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, k^2+k est divisible par 2.

b. En déduire que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3$ modulo 8.

c. Conclure.

4. 63. Similitude & suite,

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i,\ b = 1+2i,\ c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3+2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (Un) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes dela suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n-1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p}+1)+U_{n-p}$.

La notation pgcd(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005}, U_{15}).

4. 64. QCM,

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2-x+4 \equiv 0\,(\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k),\ k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k),\ k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\ 89^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4(17)$.

D : $p \equiv 1(17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b-ia}{1-i}$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$.

C: $a - z = i(b - z)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a-z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction

1. Testons la réponse D : si $x \equiv 2(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$; si $x \equiv 5(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$. Ok.

2. Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que -7 et 5 est pas mal : $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On a $n = 1\,789 = 4\ (17)$; par ailleurs $4^2 = 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2\times 1002+1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. 65. Restes de puissances,

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $((10)^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$.

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

4. 66. Eq. dioph.,

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

Correction

Partie A

1. $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

comme N est impair, a et b n'ont pas la même parité.

2. Evident : $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$.

3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

Partie B

1. a.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	$-2 = 7$	$-2 = 7$	0	4	1
$X^2 - 1$	$-1 = 8$	0	3	$-1 = 8$	6	6	$-1 = 8$	3	0

b. On a 250 507 = 27 834 . 9 + 1, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont ceux de $X^2 - 1$.

c. Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2 \equiv b^2 + 1(9)$;

*si on prend $b \equiv 0(9)$ alors $a^2 \equiv 1(9) \Rightarrow a \equiv 1(9)$ ou $a \equiv 8(9)$,

*si on prend $b \equiv 1(9)$ alors $a^2 \equiv 2(9)$, ce qui est impossible,

*si on prend $b \equiv 2(9)$ alors $a^2 \equiv 5(9)$, ce qui est impossible, etc.

2. On a $a^2 - 250\,507 = b^2$ d'où $a^2 = 250\,507 + b^2 \geq 250\,507 = (500,...)^2 \geq 501^2$ donc $a \geq 501$. Si on avait une solution du type (501 ; b), on aurait $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$ or 494 n'est pas un carré parfait.

3. a. a est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre $503 \equiv 8(9)$ ou $505 \equiv 1(9)$.

b. Le plus simple est de faire quelques essais :

a	$a^2-250507$	$\sqrt{a^2-...}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
523	23022	151,730023
532	32517	180,324707
541	42174	205,363093
550	51993	228,019736
559	61974	248,945777
568	72117	268,546085
577	82422	287,09232

On a donc la première solution pour $k = 1$, ce qui donne la solution (514, 117).

Partie C

1. On a $250\ 507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$.

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

u	v	quotient	reste
631	397	1	234
397	234	1	163
234	163	1	71
163	71	2	21
71	21	3	8
21	8	2	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part p = 1, q = 250507, par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

4. 67. Bézout+Fermat

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k, 68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1[\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g\ (a)]= a$?

4. 68. Suite de restes,

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2(\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0(\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28(\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Correction

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.

On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$. Or $24u_n + 36 \equiv 0[4]$, donc

$$u_{n+2} \equiv (u_n + 24u_n + 36)[4] \equiv (u_n + 0)[4] \equiv u_n[4].$$

On en déduit par récurrence que $u_{2k} \equiv u_0[4]$ or $u_0 \equiv 2[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$.

De même $u_{2k+1} \equiv u_1[4]$ or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3. a. Au rang 0 : $2u_0 = 28 = 52 + 3$: vrai.

Supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$ alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3$ or $5^n \equiv 1[4] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$ en multipliant tout par 25 ; finalement $2u_n \equiv (25 + 3)[100] \equiv 28[100]$.

4. La relation précédente donne $u_n = 14 + 50k, k \in \mathbb{Z}$; mais comme $u_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$, il faut $50k \equiv 0[4]$ et donc lorsque k est pair $u_k \equiv 14[100]$, lorsque k est impair $u_k \equiv 14 + 50[100] \equiv 64[100]$.

5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a $5u_n - u_{n+1} = 6$, la relation de Bézout montre que PGCD(u_{n+1} ; u_n) est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Conclusion : PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2.

4. 69. PGCD dans suite

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k}\ ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2\ \text{PGCD}(k^2\ ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD (k ; $k+1$).

c. Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

4. 70. Fibonacci,

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a=b$.

b. Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Correction

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab-b^2=1\\a^2+ab-b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+b)-b\times b=1\\b(b-a)-a\times a=1\end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a=b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow a^4=1\Rightarrow a=1$ $(a>0)$.

b. $(1\,;1)$ est déjà fait, $(2\,;3)$: $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et $(5\,;8)$: $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir -1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi $(x\,;y)$ est une solution :

$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1$;

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. $(2\,;3)$ est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; $(5\,;8)$ est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : $(1\,;1)$ est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.

En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

4. 71. QCM

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\ ;\ 99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = iz + (1 - i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

Correction

1. **Vrai** : $4\,002 = 2\,004 \times 1 + 1\,998$; $2\,004 = 1\,998 \times 1 + 6$; $1\,998 = 6 \times 336$. Le dernier reste non nul est bien 6.

2. **Vrai** : $2^{pq} - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = \left(2^p\right)^q - 1$; or $a^m - 1 = (a-1)\left(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1\right)$.

3. **Faux** : contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.

4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions $(35k - 144\ ;\ 99 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. **Faux** : soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \times 3\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. **Vrai** : les points invariants vérifient $z = iz + (1 - i)$, soit avec $z = x + iy$, $x + iy = ix - y + 1 - i$, soit $x + y - 1 + i(y - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$ qui est bien l'équation d'une droite.

4. 72. Congruences

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

4. 73. Rep

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers* ? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \ldots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

4. 74. Fermat et Bézout,

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm$' et $n = dn$'. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu-nv=d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Correction

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+...+a^{d(k-1)})=a^{dk}-1=a^n-1 \ .$$

a^d-1 est en facteur dans a^n-1, c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004=2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^4-1=15, 2^6-1=63, 2^{12}-1=4095, ...$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

3. a. Bézout dit : m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par d : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d}=0 \Leftrightarrow a^{mu}=a^{nv+d} \Leftrightarrow mu=nv+d \Leftrightarrow mu-nv=d \ .$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ par $D=a^d-1$: $(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d=1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A-a^d.B=D$ où $A=\frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B=\frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. A et B sont donc premiers entre eux et D est le PGCD de A et B.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d = 3$. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant $a = 2$: $A=2^{63}-1$, $B=2^{60}-1$ et $D=2^3-1=7$.

4. 75. Fermat

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1(p)$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1(p)$ et soit n un entier naturel.Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1(p)$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1(p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A=2^q-1$. On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

4. 76. Restes chinois + plan

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p + 10$ et $p + 20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$.

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w(\mathrm{mod}\ 3)$.

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$.

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

4. 77. Eq. dioph

Soit l'équation (**1**) d'inconnue rationnelle x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'´equation (**1**).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (**1**) d'inconnue x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs. Montrer que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (**1**) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

4. 78. Bézout, France, sept 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1\,[2003]$.

c. Montrer que, pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456\,[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0\,[2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456\,[2003]$.

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que : $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456\,[2003]$.

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer PGCD(a ; 2003). En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1\,[2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que : $1 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b\,[2003]$.

4. 79. Congruences,

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.

4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$$

soit un nombre premier ?

4. 80. Suite, Antilles,

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction

1. a. $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 1+2\sqrt{6}+6 = 7+2\sqrt{6}$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$,

$\left(1+\sqrt{6}\right)^6 = \left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right) = 847+342\sqrt{6}$ ..

b. $847 = 342\times 2+163$; $342 = 163\times 2+16$; $163 = 16\times 10+3$; $16 = 3\times 5+1$ donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. $a_1 = 1, b_1 = 1$; $a_2 = 7, b_2 = 2$; $a_3 = 73, b_3 = 28$, etc.

b. $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = \left(a_n + b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) = a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

c. $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$; comme $5b_n$ est divisible par 5, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. Par ailleurs 5 ne divise pas $a_1 + b_1 = 2$ donc par récurrence 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases}$.

Comme il est clair que a_n et b_n sont entiers, $a_{n+1} - b_{n+1}$ et $6b_{n+1} - a_{n+1}$ sont divisibles par 5.

Si a_{n+1} et b_{n+1} ne sont pas premiers entre eux, il existe k tel que $a_{n+1} = k\alpha$, $b_{n+1} = k\beta$ (k ne peut être un multiple de 5 sinon il se mettrait en facteur dans $a_n + b_n$ qui serait alors divisible par 5). Remplaçons :

$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b_n = k(\alpha - \beta) \\ 5a_n = k(6\beta - \alpha) \end{cases}$ d'où a_n et b_n ont un facteur commun ce qui est contradictoire.

Par ailleurs a_2 et b_2 sont premiers entre eux donc par récurrence a_n et b_n sont premiers entre eux.

4. 81. PGCD,

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\, n+3) = \text{PGCD}(48\,;\, n+3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

4. 82. Congruences,

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1, y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a. Calculer le PGCD de x^8 et x^9, puis celui de x^{2002} et x^{2003}. Que peut-on en déduire pour x^8 et x^9 d'une part, pour x^{2002} et x^{2003} d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

4. 83. Repunit,

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité : $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

4. 84. Eq. dioph.,

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

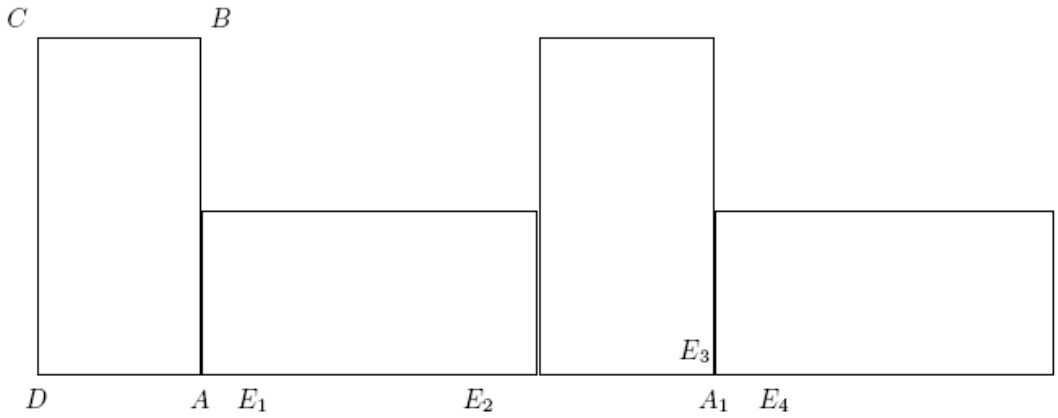
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\,;\, b)$$

(on pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux).

4. 85. Béout+rotation, France, sept. 2002

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire *ABCD*, puis les images respectives *M*, *N* et *P* de *B*, *C* et *D* par la rotation *r* de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre Ω de la rotation *r*' qui vérifie r'(*A*) = *N* et *r*'(*B*) = *P*. Déterminer l'angle de *r*'.

b. Montrer que l'image de *ABCD* par *r*' est *AMNP*.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles *ABCD* et *AMNP* par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.

Sur la demi-droite [*DA*), on définit ainsi la suite de points (A_k), $k > 1$, vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$.

Sur la même demi-droite, on considère la suite de points (E_n), $n > 1$, vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier *k* tel que E_{120} appartienne à [A_k, A_{k+1}]. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.

Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

4. 86. Bézout & suites

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées (x_n ; y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel *n*.

4. 87. Triplets pythag.,

Soit *p* un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (*x* ; *y*) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais que *p* est différent de 2 et que le couple (*x* ; *y*) est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que *x* et y sont premiers entre eux.

a. Montrer que *x* et *y* sont de parités différentes.

b. Montrer que *x* et *y* ne sont pas divisibles par *p*.

c. En d éduire que *x* et *y* sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de l'´equation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

4. 88. Bézout,

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$.

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

4. 89. PGCD,

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application : Déterminer Δ pour $n = 2\,001$; déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

4. 90. Calendrier,

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $abba$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Montrer que si un nombre entier n n'a pas de diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors il n'en a pas de supérieur à $\sqrt{n}$.

1. b. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

c. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $abba$.

a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l' équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s' écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.

3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

4. 91. Divisibilité,

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.

4. Dans cette question on suppose que n est impair.

a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b. Montrer que d divise n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

4. 92. PGCD & PPCM

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a + b\ ;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$).

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, demême, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD$(a\ ;\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\ ;\ b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\ ;\ ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) = 170 \end{cases}$.

4. 93. PGCD,

4 points

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$. Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

4. 94. Similitude & Bézout

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M_0 d'affixe z_0 définie par $z_0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour afflxe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

4. 95. Calendrier,

5 points

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;y_0)$ solution particulière de l'équation (E2) : $35x - 27y = 1$.

b. En déduire une solution particulière $(u_0\,;v_0)$ de (E_1).

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

d. Déterminer la solution $(u\,;v)$ permettant de déterminer J_1.

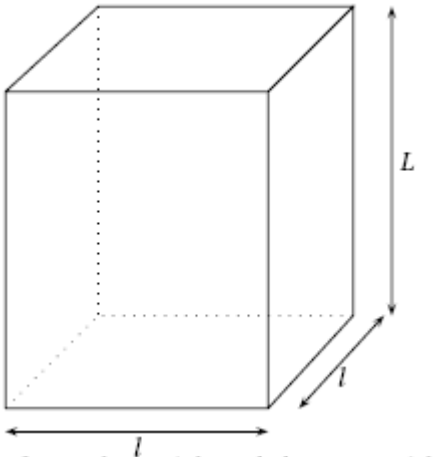
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

4. 96. Bézout,

5 points



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

4. 97. Bézout,

4 points

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x ; y)$ vérifie l'équation (E).

4. 98. Repunit,

4 points

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

4. 99. PGCD & PPCM,

5 points

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$.

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k+1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a : $\text{PPCM}(x, y) = k(k+1)(y - x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $\text{PPCM}(x, y) = 228$.

4. 100. Bézout,

4 points

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 32n - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E") $A_3 x + A_2 y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E").

b. Montrer que (E") admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

4. 101. Bézout & rotation

5 points

Les points $A_0 = O$; A_1 ; ... ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.

Les points $B_0 = O$; B_1 ; ... ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

- M_0 est l'un des points $A_0, A_1, A_2, ..., A_{20}$;
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_A(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

- P_0 est l'un des points $B_0, B_1, B_2, ..., B_{14}$
- pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_B(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = O$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = O$. En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$. On considère l'équation (E) : $7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a ; b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

4. 102. PGCD,

4 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCDde a et b.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

4. 103. Bézout,

5 points

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a. On suppose que l'équation (1) a aumoins une solution $(x_0 ; y_0)$.Montrer que d divise 60.

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.

On appellera S l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ solutions.

c. Énumérer tous les couples $(x\,;\,y)$ solutions de (2) et tels que : $-10 \le x \le 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x\,;\,y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.

Comment peut-on caractériser S ?

4. 104. Bézout et plans

5 points

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

(1) $2688x + 3024y = -3360$;

(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que $(1\,;\,-2)$ est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 105. Homothétie & multiples

5 points

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.

Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\ .$$

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \le x \le 8$ et $1 \le y \le 8$.

Les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\,;\,y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est unmultiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\,;\,y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x\,;\,y)$ correspondant aux couples $(x'\,;\,y')$ trouvés.

Correction

1. a. $z' = 2(z-a)+(z-b) = 3z-2a-b = 3z-6-i$.

b. $z = 3z+2-i \Leftrightarrow 2z = -2+i \Leftrightarrow z = -1+\frac{1}{2}i$. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$ donc f est une homothétie de centre Ω et de rapport 3.

2. $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$, et $1 \le y \le 8$.

a. $1 \le x \le 8$ donc $3\times1+2 \le x' \le 3\times8+2 \Leftrightarrow 5 \le x' \le 26$

et $1 \le y \le 8$ donc $3\times1-1 \le y' \le 3\times8-1 \Leftrightarrow 2 \le y' \le 23$.

b. $x'-y'=3x+2-3y+1=3x-3y+3=3(x-y+1)$.

c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.

d. $m=x'^2-y'^2=60k \Leftrightarrow (x'-y')(x'+y')=60k$; $x'+y'=3x+2+3y-1=3x+3y+1=3(x+y)+1$.

Si x' et y' sont de parité différente, $x'-y'$ et $x'+y'$ sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc x' et y ' sont de parité identique ; comme $x'-y'$ est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.

Si le nombre x' – y' est un multiple de 30, $x-y+1$ est un multiple de 10, or x et y sont plus petits que 8, c'est impossible.

e. Comme $x'-y'$ est un multiple de 6 et pas de 30, $x'-y'$ n'est pas divisible par 5 ; pour que $x'^2-y'^2$ soit un multiple non nul de 60, il faut donc que x' + y' soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors $\begin{cases} x'-y'=6p \\ x'+y'=10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'=6p+10q \\ 2y'=10q-6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=5q+3p \\ y'=5q-3p \end{cases}$ avec p = 1 ou 2 et q = 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne :

p	q	x'	y'	$x'^2-y'^2$	x	y
1	1	8	2	60	2	1
1	2	13	7	120	11/3	8/3
1	3	18	12	180	16/3	13/3
1	4	23	17	240	7	6
2	1	11	–1	120	3	0
2	2	16	4	240	14/3	5/3
2	3	21	9	360	19/3	10/3
2	4	26	14	480	8	5

et donc les solutions en x et y : $(2;1),(7;6),(8;5)$. On pouvait le faire rapidement avec Excel…

	y	1	2	3	4	5	6	7	8
	y'	2	5	8	11	14	17	20	23
x	x'								
1	5	21	0	-39	-96	-171	-264	-375	-504
2	8	60	39	0	-57	-132	-225	-336	-465
3	11	117	96	57	0	-75	-168	-279	-408
4	14	192	171	132	75	0	-93	-204	-333
5	17	285	264	225	168	93	0	-111	-240
6	20	396	375	336	279	204	111	0	-129
7	23	525	504	465	408	333	240	129	0
8	26	672	651	612	555	480	387	276	147

<u>4. 106. Congruences,</u>

5 points

1. a. Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$, n entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Correction

1. a. $3^0 = 1 \equiv 1[7], 3^1 = 3 \equiv 3[7], 3^2 = 9 \equiv 2[7], 3^3 \equiv 3\times 2[7] \equiv 6[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^5 \equiv 5[7], 3^6 \equiv 1[7]$.

Tous les 6 termes on retourne au point de départ.

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n\left(3^6 - 1\right)$ or $3^6 \equiv 1[7]$ donc $3^6 - 1$ est divisible par 7.

c. Divisons 1000 par 6 : $1000 = 6\times 166 + 4$ donc $3^{1000} = \left(3^6\right)^{166} \times 3^4$; comme $3^6 \equiv 1[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$,on a $3^{1000} \equiv 4[7]$.

d. En divisant n par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre tombera dans les restes calculés au 1.a.

e. En aucun cas on ne peut trouver un reste nul donc pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. a. On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 : $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. u_n est divisible par 7 lorsque $3^n \equiv 1[7]$, soit lorsque n est un multiple de 6.

c. $u_6 = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(3^3 - 1\right)\left(3^3 + 1\right) = 2^2 \times 7 \times 13$; tous les diviseurs sont donc

1, 13, 7, 91, 2, 26, 14, 182, 4, 52, 28, 364.

4. 107. PGCD & parité,

5 points

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair.Onpose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

b. Démontrer que si n est pair alors $81n^2 - 1$ est impair.

c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

4. 108. Bases,

5 points

On considère l'équation (1) : $20b - 9c = 2$ où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple $(b_0 ; c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b ; c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b ; c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre entier naturel P, déterminé par

$$P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r + \alpha_0$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \le \alpha_{n-1} < r$, ..., $0 \le \alpha_1 < r$, $0 \le \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ».

Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).

Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.

Donner l'écriture de P dans le système décimal.

4. 109. Bézout, 5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul ; on pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Complétez le tableau ci-dessous. Quelle conjecture pouvez vous faire sur d ?

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. On considère l'équation (E) : $7k - 4n = 3$, où n et k sont deux entiers naturels non nuls.

a. Déterminer une solution particulière de (E), puis tous les couples solutions de (E).

b. En déduire tous les couples d'entiers naturels $(n ; k)$ solutions tels que $4n + 3 = 7k$.

4. Déterminer, à l'aide des congruences, les entiers naturels n tels que $5n + 2$ soit divisible par 7.

5. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Correction

1.

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

Il semble que lorsque $n \equiv 1[7]$, $d = 7$ sinon $d = 1$.

2. $5a - 4b = 20n + 15 - 20n - 8 = 7$. d divise 7 donc $d = 1$ ou $d = 7$.

3. a. (E) : $7k - 4n = 3$: la solution $k = 1$, $n = 1$ est évidente. En appliquant la méthode habituelle on a :

$$\begin{cases} 7k - 4n = 3 \\ 7 \times 1 - 4 \times 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 7(k-1) - 4(n-1) = 0 \Rightarrow 7(k-1) = 4(n-1) \ ;$$

comme 4 ne divise pas 7 il divise $k-1$, de même comme 7 ne divise pas 4 il divise $n-1$ et finalement

$$\begin{cases} k - 1 = 4p \\ n - 1 = 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4p \\ n = 1 + 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z}.$$

b. $(n ; k)$ entiers naturels : $\begin{cases} k = 1 + 4p \geq 0 \\ n = 1 + 7p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -1/4 \\ p \geq -1/7 \end{cases} \Rightarrow p \geq 0$.

4. a. Avec un petit tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$5n+2$ mod 7	2	0	5	3	1	6	4

Donc $5n + 2$ est divisible par 7 lorsque $n \equiv 1[7]$.

5. D'après la question 3. on a $4n+3=7k$ lorsque $n \equiv 1[7]$, de même pour $5n+2=7k$. Lorsque $n \equiv 1[7]$, a et b sont divisibles par 7 qui est alors la valeur de d ; il faut donc $r = 1$.
Pour toutes les autres valeurs de r, ni a ni b ne sont divisibles par 7 et $d = 1$.

4. 110. Bézout & plan,

5 points

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation : $48x + 35y = 1$.

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b. Déduire de 1. a. tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées (−11 ; 35 ; −13).

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (P) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$.

b. Soit (D) la droite intersection de (P) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [−100 ; 100].

En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

4. 111. Bézout,

5 points

1. On considère l'équation (E) : $8x+ 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

4. 112. Bézout,

5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(12 ; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O ; \vec{j})$ tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (E) : $2x +3y = 78$.

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k ; 18 − 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \le x \le 21$ et $-5 \le y \le 14$?

4. 113. Th. de Wilson,

5 points

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.

Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1< q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

4. 114. Premiers,

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1\,,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1\,.$$

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (**1**) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (**1**) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (**1**).

c. Résoudre l'équation (**1**).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

4. 115. Congruences,

4 points

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?

b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire (en base 2) :

a = 1001001000, b = 1000100010000.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

4. 116. Eq. dioph.,

4 points

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?

3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Correction

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On pose $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$ où d est le PGCD de a et b : $a+b = dk + dk' = d(k+k') = 1999(k+k') = 11994 \Rightarrow k+k' = 6$.

Les valeurs possibles de k et k' et celles de a et b sont donc :

k	k'	a	b
0	6	0	11994
1	5	1999	9995
2	4	3998	7996
3	3	5997	5997
4	2	7996	3998
5	1	9995	1999
6	0	11994	0

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi $9 - 3S + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = 4001$; la deuxième solution est alors 4001−3=3008.

2. 5 est solution de (E) ssi $25 - 5S + 11994 = 0 \Leftrightarrow 5S = 12019$, S n'est pas entier, ça ne colle pas.

3. (E) peut s'écrire également $11994 = Sn - n^2 = n(S-n)$ donc n divise 11994.

Comme $11994 = 6 \times 1999 = 2 \times 3 \times 1999$, n peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où

S peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

n	$S-n$	S
1	11994	11995
2	5997	5999
3	3998	4001
6	1999	2005
1999	6	2005
3998	3	4001
5997	2	5999

11994	1	11995

Partie C

Evident… inutile de dépasser $\sqrt{1999} \approx 44,7$ …

4. 117. Diviseurs+pgcd,

n désigne un entier naturel.

1. Montrer que le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$ est le même que celui de $n + 3$ et 4.

Quelles valeurs peut prendre le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$?

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 1$ divise $n + 3$.

3. Montrer que pour tout n, les entiers $n - 1$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.

4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n - 1)(2n + 1)$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$.

4. 118. Bézout + ppcm,

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $18a + 23b = 2001$.

a. Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b. Déterminer une solution de (E).

c. Résoudre (E).

2. Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que $18d + 23m = 2001$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

4. 119. Base et diviseurs, Bac C, Inde, 1979

Soit B un entier strictement supérieur à 3. Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base B

1. Montrer que $\overline{132}$ est divisible par B + 1 et B + 2

2. Pour quelles valeurs de B $\overline{132}$ est il divisible par 6 ?

3. Montrer que A = $\overline{1320}$ est divisible par 6.

4. 120. Bases+congruences,

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4[\mathrm{mod}\,7]$).

3. On considère le nombre B qui s'écrit $\overline{2103211}^4$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 4.

4. 121. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel

Définition

On dira que deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont **consécutives** si $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ et s'il n'existe pas de fraction $\frac{a}{b}$ comprise dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{m}{n}; \frac{m'}{n'}\right[$ telle que b soit inférieur au plus petit des deux dénominateurs n et n'.

Théorème

Deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont consécutives si et seulement si

$$nm' - mn' = 1 \quad \textbf{(*)}$$

Démonstration

• Démontrer d'abord que si la relation (*) est vérifiée, alors les deux fractions sont effectivement consécutives (comparer $\frac{a}{b} - \frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n}$, dans le cas où b est inférieur à min(n, n')).

• Inversement, soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions irréductibles ne vérifiant pas la condition(*). On suppose d'abord : $n \leq n'$.

• Démontrer que l'équation $nx - my = 1$ a des solutions en nombres entiers, puis donner tous les couples d'entiers solutions à partir d'une solution (x_0, y_0).

• Démontrer qu'un des couples (m", n") solution est tel que $1 \leq n" < n$.

• Conclure d'après la démonstration du sens direct que les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ ne sont pas consécutives.

• Procéder de façon similaire dans le cas $n' < n$, en considérant l'équation : $xm' - yn' = 1$.

Définition

Soit N un entier naturel non nul.

On appelle **suite de Farey** d'ordre N la suite finie des fractions irréductibles inférieures ou égales à 1, dont le dénominateur vaut au plus N, classées dans l'ordre croissant.

Exemple : la suite de Farey d'ordre 7 est : $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Il est alors immédiat que deux termes successifs d'une suite de Farey : $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, sont consécutifs au sens ci-dessus.

Donc, d'après le Théorème : $nm' - mn' = 1$ (proposition 1).

Examinons maintenant comment une nouvelle fraction s'insère dans la précédente suite de Farey. Supposons que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m"}{n"}$ soient consécutifs dans une suite de Farey, et que dans une suite de Farey postérieure on ait comme termes consécutifs : $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m"}{n"}$. ($m'$, n') est une solution de $nx - my = 1$; (m", n") est la solution suivante, donc $m" = m + m'$, $n" = n + n'$ (proposition 2).

Telle est la formule qui donne l'insertion d'une nouvelle fraction. Il faut donc rechercher les dénominateurs de fractions consécutives dont la somme est égale au nouvel ordre de Farey.

Par exemple, avant la suite de Farey d'ordre 7 ci-dessus, nous avions celle d'ordre 5 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Les fractions consécutives dont la somme des dénominateurs fait 7 sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, entre lesquels va s'intercaler $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ qui vont donner naissance à $\frac{3}{7}$, etc.

On peut aussi montrer, plus généralement :

Si $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m"}{n"}$ sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors $\frac{m'}{n'} = \frac{m+m"}{n+n"}$.

Farey était un géologue britannique. Il introduisit en 1816 les suites qui portent son nom, en en énonçant les propriétés que nous venons de voir. Cauchy compléta ses preuves.

On peut aussi parler de l'approximation rationnelle d'un réel, par exemple sous l'aspect graphique, pour commencer. Les meilleures fractions approximantes sont les réduites de la fraction continuée. Le "Résultat" ci-dessus permet d'affirmer que deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ vérifient l'équation : $nm' - mn' = 1$ ou -1.

EXERCICES DE MATHEMATIQUES
TERMINALE C
ARITHMETIQUE

Proposés par Hugues SILA

1. 1. Division Euclidienne -1

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Correction

On a $320 = q \times b + 39 \Leftrightarrow q \times b = 320 - 39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 : 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

1. 2. Division Euclidienne-2

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

1. 3. Division Euclidienne-3 (c)

1. Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.

3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.

4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Correction

1. L'ensemble des diviseurs de 6 est $D = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

2. $n - 4$ divise 6 si $n - 4$ appartient à D, soit si n appartient à $D + 4 = \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$.

3. On peut remarquer que $n + 2 = n - 4 + 6$. Puisqu'il est évident que $n - 4$ divise $n - 4$, le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si $n - 4$ divise $n + 2$, alors $n - 4$ divise $n + 2 - (n - 4)$ c'est-à-dire $n - 4$ divise 6.

Réciproquement si $n - 4$ divise 6 alors $n - 4$ divise $6 + n - 4$ c'est-à-dire $n - 4$ divise $n + 2$. On a donc démontré que $n - 4$ divise $n + 2$ si et seulement si $n - 4$ divise 6.

4. On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n - 4 = 3(n + 1) - 7,$$

et puisqu'il est immédiat que $n + 1$ divise $3(n + 1)$, on peut écrire :

- si $n + 1$ divise $3n - 4$, alors $n + 1$ divise $3n - 4 - 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise -7 ;

réciproquement : si $n + 1$ divise -7 alors $n + 1$ divise $-7 + 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise $3n - 4$.

L'ensemble des diviseurs de -7 (ou de 7) étant $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$, on en déduit que $n + 1$ divise $3n - 4$ si et seulement si $n + 1$ appartient à $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ soit n appartient à $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

1. 4. Multiples - 1

a et b sont deux entiers relatifs. Démontrez que si $a^2 + b^2$ est divisible par 7 alors a et b sont divisibles par 7.

1. 5. PGCD - 1 (c)

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

...

1. 6. PPCM et PGCD - 2

Trouvez les deux nombres a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

1. 7. PPCM et PGCD - 3

Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187.

1. 8. Théorème de Gauss-1

1. a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2. a et b sont des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrez que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

1. 9. Bases de numération-1

Trouvez toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $n=\overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

1. 10. Bases de numération-2

A est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7. Ecrivez ce nombre en bases 10, puis 2 et enfin 16 (tous les calculs doivent apparaître).

1. 11. Bases de numération-3

Le nombre N s'écrit 23 dans le système décimal. Peut-il s'écrire 27 dans une autre base ?

1. 12. Ecriture répétée

Soit n un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n=\overline{abcabc}$ avec $a\neq 0$.

1. a. Déterminer n tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

* n est divisible par 5,
* L'entier $\overline{bc}$ est le double de a.

b. Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2. Etude du cas général

a. Montrer que n est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b. Montrer que n ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel).

3. Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4. On pose $n_1 = 121121$ et $n_2 = 140140$. On appelle (E) l'équation $n_1x+n_2y=1001$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Déterminer une solution particulière de (E)

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1. 13. Congruences-1 (c)

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Correction

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15.3, on a :

$$32^{45}\equiv 4^{45}(7)\equiv\left(4^3\right)^{15}(7)\equiv(1)^{15}(7)\equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

1. 14. Congruences-2

Démontrez que le nombre $n=ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs a et b.

1. 15. Congruences-3 (c)

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Correction

1. $p = 0 : 1$, $p = 1 : 5$, $p = 2 : -1$ ou 12, $p = 3 : -5$ ou 8, $p = 4 : 1$ donc

pour $p=4k$ le reste est 1,

pour $p=4k+1$ le reste est 5,

pour $p=4k+2$ le reste est 12 ou -1,

pour $p=4k+3$ le reste est 8 ou -5.

2. $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$: $31=2\times 13+5\equiv 5(13)$ et $18=13\times 1+5\equiv 5(13)$; on a donc

$$N=31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n-1}\right](13)\equiv\left[5^{4n+1}+5^{4n'+3}\right](13)\equiv[5+8](13)\equiv 0(13).$$

1. 16. Divers-1

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

1. 17. Divers-2

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

1. 18. Divers-3

a et b sont deux entiers positifs premiers entre eux. Montrez que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

1. 19. Divers-4

On considère la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ avec n entier positif.

a. prouvez que tout diviseur commun d à $2n + 1$ et $n^3 + n$ est premier avec n.

b. Déduisez en que d divise $n^2 + 1$, puis que $d = 1$ ou $d = 5$.

c. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la fraction est irréductible ?

1. 20. Nombres Premiers-1

Le nombre 401 est-il premier ? Résolvez en entiers naturels l'équation $x^2 - y^2 = 401$.

1. 21. Nombres Premiers-2

p et q sont des entiers naturels.

1. Démontrez que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

2. Déduisez en que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.

3. Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier.

1. 22. Nombres Premiers-3

Soit p un entier premier. Montrer que si $p \geq 5$ alors 24 divise $p^2 - 1$.

1. 23. Démonstration de Fermat

Soit p, un entier naturel premier.

1. a. Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$, le nombre $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

1. b. En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p (on pourra faire un raisonnement par récurrence).

3. Montrer que pour tout entier n premier avec p, $n^{p-1} - 1$ est divisible par p.

1. 24. La classe…

Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe (inférieur à 40…) ?

Correction

Appelons f le nombre de filles et g le nombre de garçons :

$f \times 160 + g \times 173,5 = (f + g) \times 167 \Leftrightarrow 6,5g = 7f \Leftrightarrow 13g = 14f$ donc il y a 13 filles et 14 garçons (ou 26 filles et 28 gars, mais le total dépasse 40).

1. 25. Un

Les nombres entiers de 1 à 9999 sont écrits en français : un, deux, trois, quatre, …dix, onze, …, vingt, …, mille deux cent trente quatre, … puis rangés par ordre alphabétique.

1. Quels sont les deux premiers et les deux derniers de la liste ?

2. Quelle est la position de « un » dans la liste ?

2. Bézout

2. 26. Bezout-1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x - 28y = 414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A(−30 ; − 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de −10 à +10 en abscisses et de −14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [−40 ; +40] en abscisses et à [−50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

2. 27. Bezout-2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $13x - 23y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $-156x + 276y = 24$.

2. 28. Bezout-3

1. Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$ soit satisfaite, pour x et y entiers naturels, il faut prendre x et y de la forme : $x = 9(k+3)$ et $y = 4k$ avec k entier naturel.

2. Démontrer que le PGCD de x et y ne peut être qu'un diviseur de 108.

3. On pose m = PPCM(x ; y) et on envisage la décomposition de m en facteurs premiers. Comment faut il choisir k pour que :

a. m ne contienne pas le facteur 2 ?

b. m contienne le facteur 2 ou le facteur 2^2 ?

c. m ne contienne pas le facteur 3 ?

d. m contienne le facteur 3, ou le facteur 3^2 , ou le facteur 3^3 ?

4. Comment faut-il choisir x et y de telle façon que l'on ait PGCD(x ; y) = 18 ?

2. 29. Bezout-4

1. Décomposer 319 en facteurs premiers.

2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x + 5y$ et $x + 2y$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$ où m est le PPCM de a et b.

2. 30. Bezout-5

Au 8° siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

3. Anciens

3. 31. Somme et produit

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose S = $x + y$ et P = xy.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que S et P sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : SP = 84.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$$ avec d = PGCD(a ; b)

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux.)

3. 32. Quadratique

1. Soit x un entier impair. Quel est le reste de la division de x^2 par 8 ?

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.

3. On veut tracer sur l'écran d'une calculatrice comportant 320 points de large sur 200 points de haut les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$.

Le repère choisi a son origine en bas à gauche de l'écran, et chaque point de l'écran a pour coordonnées sa position à l'écran − 1 (par exemple, le point en haut à droite aura pour coordonnées (319 ; 199)). Combien de points pourra-t-on tracer ?

3. 33. Divisibilité

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les cas suivants : n=1, n=11, n=15.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

3. 34. Equation diophantienne

1. On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a + b = 11994$ et dont le PGCD vaut 1999.

2. On considère l'équation (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}$

a. Peut on trouver S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

b. Même question avec 5 ?

c. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S.

3. 35. Base de numération 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5242 + 13x = 6y$.

2. Soit N le nombre dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25x3}$. Pour quelles valeurs de x :

* N est-il divisible par 6 ?

* N est-il divisible par 4 ?

* N est-il divisible par 24 ? (24 est écrit en décimal...).

3. 36. Base de numération 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

En déduire que $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 8 ?

b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A_p est divisible par 8.

4. On considère les nombres a et b écrits dans le système "base 3" :

$a = \overline{1110}_{\text{trois}}$.

$b = \overline{101010100}_{\text{trois}}$.

Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ?

5. De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}_{\text{trois}}$. Démontrer que c est divisible par 16.

Remarque : pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres a, b, c.

3. 37. Somme des cubes

1. Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Démontrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p \right)^2$. Exprimer $s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ en fonction de n.

3. Soit D_n le PGCD des nombres s_n et s_{n+1} . Calculer D_n lorsque

a. $n = 2k$,

b. $n = 2k+1$.

En déduire que s_n, s_{n+1} et s_{n+2} sont premiers entre eux.

3. 38. Somme des diviseurs

1. On considère le nombre $n = 200 = 2^3 5^2$.

a. Combien n a-t-il de diviseurs ? En utilisant un arbre, calculez les tous et faites leur somme s.

b. Vérifiez que $s=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$.

2. On considère maintenant le nombre $N=a^\alpha b^\beta$ où a et b sont deux nombre premiers, α et β des entiers.

a. Quel est le nombre de diviseurs de N ?

b. Soit S la somme des diviseurs de N. Montrez que $S=(1+a+a^2+...+a^\alpha)(1+b+b^2+...+b^\beta)$.

Déduisez en une expression « simple » de S.

c. Montrez alors que pour α et β suffisamment grands on a $\frac{S}{N}\approx\frac{a}{a-1}.\frac{b}{b-1}$.

3. Application numérique : $N=5^{100}7^{200}$; trouver une valeur approchée de S.

Rappel : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. 39. Racines rationnelles (méthode de Descartes)

1. Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3.

2. On se propose de trouver les solutions rationnelles de l'équation :

$$(1):\ 3x^3-2x^2+6x-4=0.$$

On rappelle qu'un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.

a. Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.

b. Montrer qu'une solution de (1) ne peut pas être négative.

c. Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $3x^3-2x^2+6x-4=0$.

3. 40. QCM.

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.

4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.

5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

3. 41. Cryptographie

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u-13v=1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0-26v_0=4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a-26k=4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

3. 42. Repunits 1,

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1+10+100+...+10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour k entier compris entre 1 et 8.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

3. 43. Repunits 2,

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1. Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.

3. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.

b. Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.

c. En déduire que $n^2 \equiv 1(20)$.

4. a. Soit $k > 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?

b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

3. 44. Recherche,

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \ldots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n).

$u_1 = 1$ $\quad$ $u_6 = 3^2 \times 97$

$u_2 = 3$ $\quad$ $u_7 = 3^4 \times 73$

$u_3 = 3^2$ $\quad$ $u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$

$u_4 = 3 \times 11$ $\quad$ $u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$

$u_5 = 3^2 \times 17$ $\quad$ $u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.

2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?

3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

3. 45. Cryptographie,

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par f la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».

On désire coder à l'aide de f le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g. Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de g ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit i un élément de Ω.

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

c. On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$.

En utilisant la division euclidienne de 10 par i, prouver que i est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrage et le déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.

4. Exercices

4. 46. Base

5 points

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 144 + 10\times 12 + 7 = 1711$ en base 10.

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 [3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 [11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Correction

Partie A : Question de cours

Les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances sont $a \equiv a' [p]$ et $b \equiv b' [p]$ alors $a + b \equiv a' + b' [p]$, $ab \equiv a'b' [p]$ et $a^n \equiv a'^n [p]$.

Propriété de compatibilité avec la multiplication :

on pose que $a = pk + a'$, $b = ph + b'$ d'où $ab = p^2 kh + a'ph + b'pk + a'b' = a'b' + p(\ldots)$.

Partie B

1. a. $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12} = 12^2\times 11 + 12\times 1 + 10 = 1606$.

b. Il faut diviser par 12 plusieurs fois : $1131 \equiv 12\times 94 + 3$, $94 \equiv 12\times 7 + 10 = 12\times 7 + \alpha$, donc

$$N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12} = 7\times 12^2 + \alpha\times 12 + 3 = 7\times 144 + 10\times 12 + 3 = 1131.$$

2. a. $N = 12^{n-1}\times a_n + \ldots + 12\times a_1 + a_0 \equiv a_0 [12] \equiv a_0 [3]$. Si le dernier chiffre est 0 modulo 3, soit un multiple de 3 le nombre sera divisible par 3.

b. N_2 se termine par 3 en base 12, il est divisible par 3. En base 10 la somme des chiffres est 6, il est donc divisible par 3.

3. a. Chaque puissance de 12 est congrue à 1 modulo 11 donc $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 [11]$. Si la somme des chiffres est un multiple de 11, ce nombre sera divisible par 11.

b. La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22$ donc N_1 est divisible par 11. En base 10 on fait la somme des termes de rang pair moins la somme des termes de rang impair : 12−1=11 qui est divisible par 11.

4. $N = \overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3 : $y = 3k$, et par 11 : $x + 4 + y = 11k'$.

On résoud : $\begin{cases} y = 3k \\ x + 4 + 3k = 11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3k \\ x = 11k' - 3k - 4 \end{cases}$; les valeurs possibles de k sont 0, 1, 2, 3 :

k	y	x	k'	N	N (b. 10)
0	0	$11k'-4$	$k'=1$ soit $x=7$	$\overline{740}^{12}$	1056
1	3	$11k'-7$	$k'=1$ soit $x=4$	$\overline{443}^{12}$	627
2	6	$11k'-10$	$k'=1$ soit $x=1$	$\overline{146}^{12}$	198
3	9	$11k'-13$	$k'=2$ soit $x=9$	$\overline{949}^{12}$	1353

4. 47. QCM,

5 points

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

Proposition 2 : « $x^2+x+3=0\,(\text{modulo } 5)$ si et-seulement si $x\equiv 1(\text{modulo } 5)$. »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'afiixe $1-i$ a pour écriture complexe $z'=\left(\sqrt{3}+i\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O\,;\vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s\circ s_A=s_A\circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

4. 48. QCM.

5 points

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z\to\frac{3}{2}(1-i)z+4-2i$.

Proposition 1 : « $f=r\circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

Proposition 3 : « $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x-5y=14$.

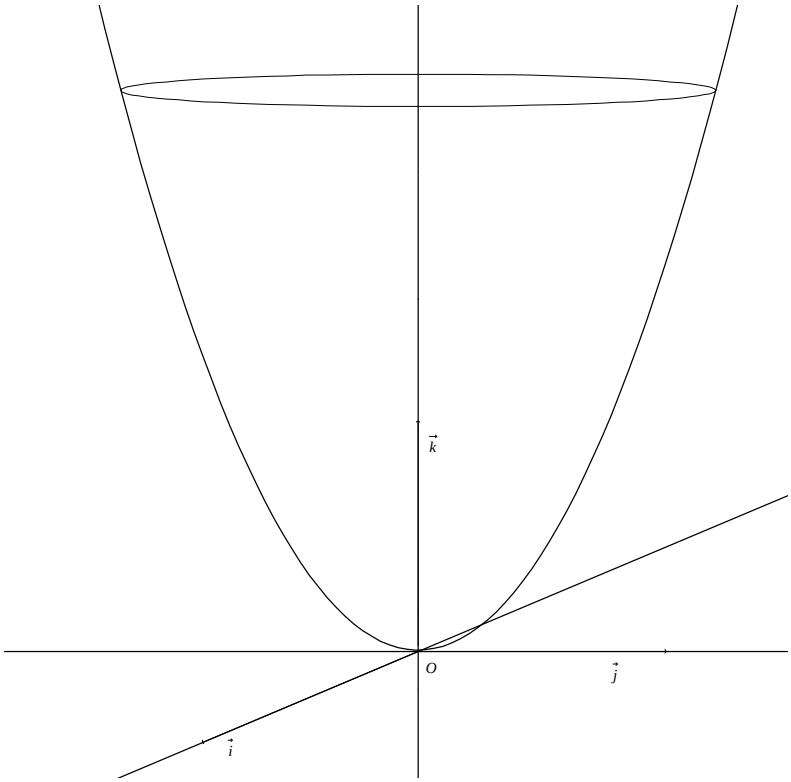
Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k+14\,;11k+28)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z=x^2+y^2$.

Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x=\lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z=9$ en deux solides de même volume ».



Rappel : *Soit V le volume du solide délimité par* Σ *et les plans d'équations z = a et z=b où* $0 \le a \le b \le 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,dk$ *où S(k) est l'aire de la section du solide par le plan d'équation z=k où* $k \in [a, b]$.

4. 49. Réseau,

5 points

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthononnal, dont les coordonnées $(x ; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A. Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x ; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 ;

2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 ;

3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3.

B. Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x ; y)$ pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C. Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

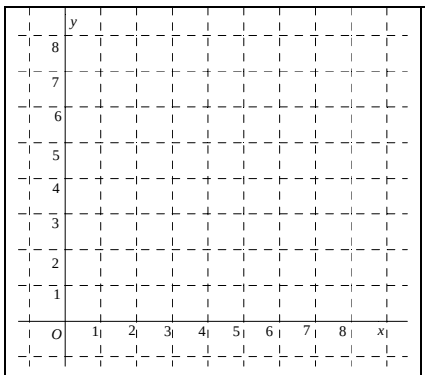
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0 ; 0)$ et $A(a ; b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

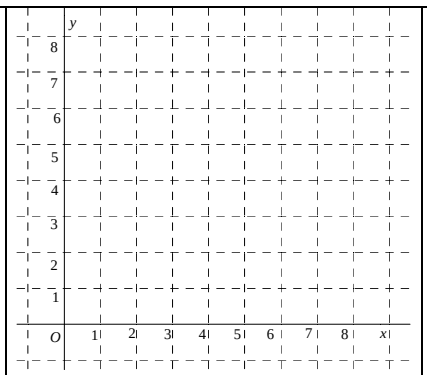
$0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $ay = bx$.

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,b}$.

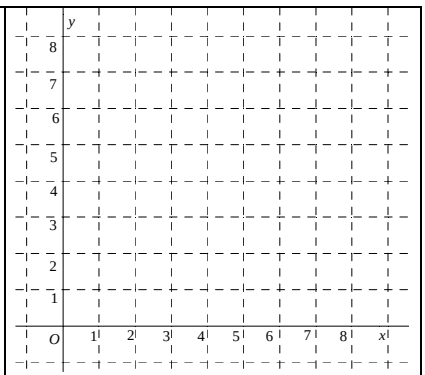
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)



Graphique n°1



Graphique n°2



Graphique n°3

4. 50. Codage affine,

5 points

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) tel que $0 \le u \le 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$,

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11\times11+8 = 129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

4. 51. Surface+Eq. dioph.,

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (*xOy*).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. *M* étant un point de (C), on désigne par *a* son abscisse et par *b* son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point *M* de (C) tel que *a* et *b* soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm(*a* ; *b*)= 440, c'est-à-dire tel que (*a*, *b*) soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a\,;b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si (*a*, *b*) est solution de (1) alors pgcd(*a* ; *b*) est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

1. Si $M(x\,;y\,;z)$ appartient à (S), alors on a $x^2+y^2-z^2=1$, soit $x^2+y^2-(-z)^2=x^2+y^2-z^2=1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x\,;y\,;-z)$ appartient également à (S) et réciproquement.

Par conséquent, le plan d'équation $z=0$, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la surface (S).

2. a. $M\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-4k \\ y-1=0k \\ z+3=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4k+3 \\ y=1 \\ z=4k-3 \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

b. On remplace *x*, *y* et *z* dans l'équation de (S) :

$x^2+y^2-z^2=(-4k+3)^2+1^2-(4k-3)^2=16k^2-24k+9+1-16k^2+24k-9=1$, ce qui est toujours vrai.

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S), la droite est incluse dans la surface (S).

3. Soit (P) un plan parallèle au plan (xOy). (P) a alors une équation de la forme $z=c$ où *c* est un réel, soit $x^2+y^2=c^2+1$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0\,;0\,;c)$ et de rayon $\sqrt{1+c^2}$, tracé dans (P). La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$.

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre $\Omega(0\,;0\,;68)$ et de rayon $\sqrt{1+68^2}=5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z=68$.

b. Soit $(a\,;b)$ une solution de (1). Alors : $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \text{ppcm}(a\,;b)=440 \end{cases}$.

d le PGCD de *a* et *b* divise *a* (et aussi a^2) et divise *b* (et aussi b^2), d'où *d* divise a^2+b^2 ; *d* divise 4625.
De plus, *d* divise le PPCM de *a* et *b*. Donc *d* divise 440, *d* est un diviseur commun de 440 et de 4625.
Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.
Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440.
d ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.

* $d=1$, $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=1\times440=440$.

a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.

Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+880=5505$; ce qui est impossible car $a+b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.

* Supposons que $d=5$; alors $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=5\times440=2200$.

a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+4400=9025$, soit $a+b=95$.

Seul le couple $(40\ ;\ 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $ppcm(a\ ;\ b) = 440$.

4. 52. Bézout+Fermat

5 points

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

4. 53. Bézout,

5 points

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 610 par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 64 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $640 \equiv 1[11]$ et que $640 \equiv 1[5]$.

d. Démontrer que 640 – 1 est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet aumoins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

4. 54. Codage affine

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 24\ ;\ 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

4. 55. Surface+éq. dioph

5 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1 ; 3 ; 2)$, $B(4 ; 6 ; -4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O ; \vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x ; y ; z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x, y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1 \text{ modulo } 10$.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 56. QCM,

5 points

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;0\,;5)$ et de rayon 5 ».

3. Proposition 3 : « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

4. 57. Bézout,

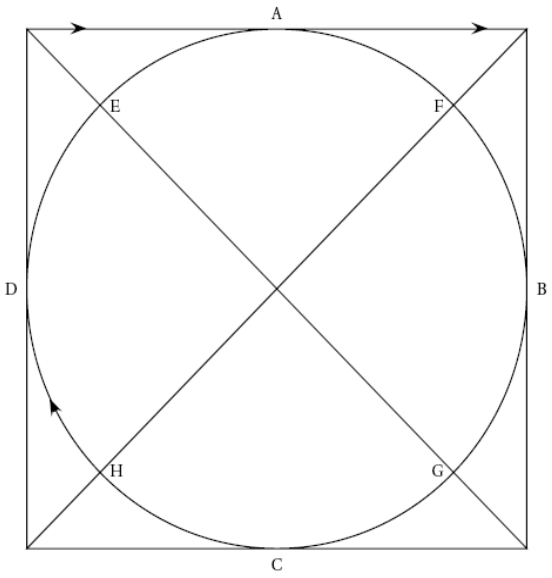
5 points

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

4. 58. Congruences,

5 points

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $ac \equiv bd \bmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On appelle *ordre* de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

Correction

1. a. On écrit que $a = b + 7k$, $c = d + 7k'$ d'où

$ac = (b+7k)(d+7k') = bd + 7(bk' + dk + 7kk') \Leftrightarrow ac \equiv bd\,[7]$.

b. Par récurrence : vrai pour $n = 1$. Supposons $a^n \equiv b^n \bmod 7$, alors $a^n \times a \equiv b^n \times b\,[7] \Leftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}\,[7]$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

On cherche les restes de 2^n et 3^n modulo 7 :

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	1	2	4	1
3^n	3	2	6 ou −1	4 ou −3	5 ou −2	1

Donc pour 2 la première valeur de n est 3, pour 3 c'est 6.

3. a. Théorème de Fermat : si p premier ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$ d'où avec $p = 7$: $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On a donc $6 = kq + r \Rightarrow a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q a^r$; comme $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $\left(a^k\right)^q \equiv 1^q\,[7] \equiv 1\,[7]$ donc $a^r \equiv 1\,[7]$. Comme k est le plus petit entier tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $r = 0$ donc k divise 6, soit k=1, 2, 3 ou 6.

c.

a	$a^2 \bmod 7$	$a^3 \bmod 7$	$a^6 \bmod 7$
1 (k=1)	1	1	1
2 (k=3)	4	1	1
3 (k=6)	2	6	1
4 (k=3)	2	1	1
5 (k=6)	4	6	1
6 (k=2)	1	6	1

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$, et $2006 = 2 \times 1003 = 3 \times 668 + 2 = 6 \times 334 + 2$; on a donc

$2^{2006} = \left(2^3\right)^{668} \times 2^2 \equiv 4\,[7]$, $3^{2006} = \left(3^6\right)^{334} \times 3^2 \equiv 9\,[7] \equiv 2\,[7]$, $4^{2006} = \left(4^3\right)^{668} \times 4^2 \equiv 16\,[7] \equiv 2\,[7]$,

$5^{2006} = \left(5^6\right)^{334} \times 5^2 \equiv 25\,[7] \equiv 4\,[7]$ et $6^{2006} = \left(6^2\right)^{1003} \equiv 1\,[7]$

d'où enfin $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1\,[7] \equiv 13\,[7] \equiv 6\,[7]$.

4. 59. QCM,

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \,(\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0 \,(\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;\,9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « Il existe un seul couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Correction

Proposition 1 : Vrai.

On fait l'essai. Ca semble marcher.

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

Vérifions : $2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$.

Proposition 2 : Faux.

$x^2 + x = x(x+1)$ est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes x ou $x + 1$ soit un multiple de 3 ; on pourrait alors avoir $x + 1 \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$. Par exemple 5 donne 25 + 5 = 30 qui est bien un multiple de 3.

Proposition 3 : Faux.

$12x - 5y = 3$ a comme solution particulière $x = 4$ et $y = 9$; on a alors

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12\times 4 - 5\times 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) - 5(y-9) = 0 \Leftrightarrow 12(x-4) = 5(y-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 5k \\ y - 9 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 9 + 12k \end{cases}.$$

Proposition 4 : Vrai.

Posons $\begin{cases} a = a_1 k \\ b = b_1 k \end{cases}$ où k est $\text{PGCD}(a, b)$; on a alors $a_1 b_1 k - k = 1 \Rightarrow k = 1$ sinon k diviserait 1. Notre équation devient alors : $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ devient donc $ab - 1 = 1 \Leftrightarrow ab = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Vrai.

$M = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $N = \overline{bca} = 100b + 10c + a$ donc

$$M - N = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 9(11a - 10b - c)$$

est divisible par 27 si $11a - 10b - c$ est divisible par 3.

Sachant qu'on a $M = 100a + 10b + c = 27k \Leftrightarrow 10b + c = 27k - 100a$, on remplace :

$$11a - 10b - c = 11a - 27k + 100a = 111a - 27k \ ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

4. 60. Restes chinois,

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12\times19$. Quel est le reste r de cette division ?

Correction

Partie A : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.

Partie B : $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13 + 19k$. Or $12v = 1 - 19u$ donc $N = 13(1 - 19u) + 6\times19u = 13 + 19\times(-7u)$; ok.

De même $N = 13\times12v + 6\times19u = 13\times12v + 6(1 - 12v) = 6 + 12\times7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n - n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5) + 12(8) = 1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13 + 19\times(-7u)$, ce qui donne $N = 678$; de même on prend $v = 8$ et $N = 6 + 12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0\,(12\times19) \equiv 678\,(12\times19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.

4. 222.

4. 61. Fermat,

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$, lorsque n est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A : quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \le n \le 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \ge 1$ tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n \ge 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$ .Onnote b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

b. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

c. En déduire que b divise $p-1$.

4. 62. Eq. diophantienne,

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1$ modulo 2^n.

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.

a. Montrer que $x^2+y^2+z^2 \equiv 1$ modulo 4.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, k^2+k est divisible par 2.

b. En déduire que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3$ modulo 8.

c. Conclure.

4. 63. Similitude & suite,

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i,\ b = 1+2i,\ c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3+2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (Un) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes dela suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n-1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p}+1)+U_{n-p}$.

La notation pgcd(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005}, U_{15}).

4. 64. QCM,

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2-x+4 \equiv 0\,(\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k),\ k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k),\ k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\ 89^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4(17)$.

D : $p \equiv 1(17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b-ia}{1-i}$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$.

C: $a - z = i(b - z)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a-z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction

1. Testons la réponse D : si $x \equiv 2(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$; si $x \equiv 5(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$. Ok.

2. Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que -7 et 5 est pas mal : $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On a $n = 1\,789 = 4\ (17)$; par ailleurs $4^2 = 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2\times 1002+1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. 65. Restes de puissances,

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $((10)^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$.

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

4. 66. Eq. dioph.,

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

Correction

Partie A

1. $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

comme N est impair, a et b n'ont pas la même parité.

2. Evident : $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$.

3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

Partie B

1. a.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	$-2 = 7$	$-2 = 7$	0	4	1
$X^2 - 1$	$-1 = 8$	0	3	$-1 = 8$	6	6	$-1 = 8$	3	0

b. On a 250 507 = 27 834 . 9 + 1, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont ceux de $X^2 - 1$.

c. Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2 \equiv b^2 + 1(9)$;

*si on prend $b \equiv 0(9)$ alors $a^2 \equiv 1(9) \Rightarrow a \equiv 1(9)$ ou $a \equiv 8(9)$,

*si on prend $b \equiv 1(9)$ alors $a^2 \equiv 2(9)$, ce qui est impossible,

*si on prend $b \equiv 2(9)$ alors $a^2 \equiv 5(9)$, ce qui est impossible, etc.

2. On a $a^2 - 250\,507 = b^2$ d'où $a^2 = 250\,507 + b^2 \geq 250\,507 = (500,...)^2 \geq 501^2$ donc $a \geq 501$. Si on avait une solution du type (501 ; b), on aurait $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$ or 494 n'est pas un carré parfait.

3. a. a est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre $503 \equiv 8(9)$ ou $505 \equiv 1(9)$.

b. Le plus simple est de faire quelques essais :

a	$a^2-250507$	$\sqrt{a^2-...}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
523	23022	151,730023
532	32517	180,324707
541	42174	205,363093
550	51993	228,019736
559	61974	248,945777
568	72117	268,546085
577	82422	287,09232

On a donc la première solution pour $k = 1$, ce qui donne la solution (514, 117).

Partie C

1. On a $250\ 507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$.

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

u	v	quotient	reste
631	397	1	234
397	234	1	163
234	163	1	71
163	71	2	21
71	21	3	8
21	8	2	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part p = 1, q = 250507, par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

4. 67. Bézout+Fermat

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k, 68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1[\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g\ (a)]= a$?

4. 68. Suite de restes,

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2(\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0(\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28(\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Correction

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.

On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$. Or $24u_n + 36 \equiv 0[4]$, donc

$$u_{n+2} \equiv (u_n + 24u_n + 36)[4] \equiv (u_n + 0)[4] \equiv u_n[4].$$

On en déduit par récurrence que $u_{2k} \equiv u_0[4]$ or $u_0 \equiv 2[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$.

De même $u_{2k+1} \equiv u_1[4]$ or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3. a. Au rang 0 : $2u_0 = 28 = 52 + 3$: vrai.

Supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$ alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3$ or $5^n \equiv 1[4] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$ en multipliant tout par 25 ; finalement $2u_n \equiv (25 + 3)[100] \equiv 28[100]$.

4. La relation précédente donne $u_n = 14 + 50k, k \in \mathbb{Z}$; mais comme $u_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$, il faut $50k \equiv 0[4]$ et donc lorsque k est pair $u_k \equiv 14[100]$, lorsque k est impair $u_k \equiv 14 + 50[100] \equiv 64[100]$.

5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a $5u_n - u_{n+1} = 6$, la relation de Bézout montre que PGCD(u_{n+1} ; u_n) est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Conclusion : PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2.

4. 69. PGCD dans suite

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k}\ ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2\ \text{PGCD}(k^2\ ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD (k ; $k+1$).

c. Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

4. 70. Fibonacci,

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a=b$.

b. Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Correction

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab-b^2=1\\a^2+ab-b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+b)-b\times b=1\\b(b-a)-a\times a=1\end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a=b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow a^4=1\Rightarrow a=1$ $(a>0)$.

b. $(1\,;1)$ est déjà fait, $(2\,;3)$: $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et $(5\,;8)$: $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir -1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi $(x\,;y)$ est une solution :

$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1$;

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. $(2\,;3)$ est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; $(5\,;8)$ est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : $(1\,;1)$ est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.

En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

4. 71. QCM

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\ ;\ 99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = iz + (1 - i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

Correction

1. **Vrai** : $4\,002 = 2\,004 \times 1 + 1\,998$; $2\,004 = 1\,998 \times 1 + 6$; $1\,998 = 6 \times 336$. Le dernier reste non nul est bien 6.

2. **Vrai** : $2^{pq} - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = \left(2^p\right)^q - 1$; or $a^m - 1 = (a-1)\left(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1\right)$.

3. **Faux** : contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.

4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions $(35k - 144\ ;\ 99 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. **Faux** : soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \times 3\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. **Vrai** : les points invariants vérifient $z = iz + (1 - i)$, soit avec $z = x + iy$, $x + iy = ix - y + 1 - i$, soit $x + y - 1 + i(y - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$ qui est bien l'équation d'une droite.

4. 72. Congruences

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

4. 73. Rep

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers* ? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \ldots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

4. 74. Fermat et Bézout,

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm$' et $n = dn$'. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu-nv=d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Correction

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+...+a^{d(k-1)})=a^{dk}-1=a^n-1 \ .$$

a^d-1 est en facteur dans a^n-1, c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004=2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^4-1=15, 2^6-1=63, 2^{12}-1=4095, ...$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

3. a. Bézout dit : m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par d : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d}=0 \Leftrightarrow a^{mu}=a^{nv+d} \Leftrightarrow mu=nv+d \Leftrightarrow mu-nv=d \ .$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ par $D=a^d-1$: $(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d=1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A-a^d.B=D$ où $A=\frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B=\frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. A et B sont donc premiers entre eux et D est le PGCD de A et B.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d = 3$. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant $a = 2$: $A=2^{63}-1$, $B=2^{60}-1$ et $D=2^3-1=7$.

4. 75. Fermat

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1(p)$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1(p)$ et soit n un entier naturel.Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1(p)$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1(p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A=2^q-1$. On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

4. 76. Restes chinois + plan

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p + 10$ et $p + 20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$.

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w(\mathrm{mod}\ 3)$.

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$.

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

4. 77. Eq. dioph

Soit l'équation (**1**) d'inconnue rationnelle x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'´equation (**1**).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (**1**) d'inconnue x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs. Montrer que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (**1**) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

4. 78. Bézout, France, sept 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1\,[2003]$.

c. Montrer que, pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456\,[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0\,[2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456\,[2003]$.

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que : $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456\,[2003]$.

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer PGCD(a ; 2003). En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1\,[2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que : $1 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b\,[2003]$.

4. 79. Congruences,

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.

4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$$

soit un nombre premier ?

4. 80. Suite, Antilles,

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction

1. a. $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 1+2\sqrt{6}+6 = 7+2\sqrt{6}$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$,

$\left(1+\sqrt{6}\right)^6 = \left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right) = 847+342\sqrt{6}$ ..

b. $847 = 342\times 2+163$; $342 = 163\times 2+16$; $163 = 16\times 10+3$; $16 = 3\times 5+1$ donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. $a_1 = 1, b_1 = 1$; $a_2 = 7, b_2 = 2$; $a_3 = 73, b_3 = 28$, etc.

b. $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = \left(a_n + b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) = a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

c. $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$; comme $5b_n$ est divisible par 5, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. Par ailleurs 5 ne divise pas $a_1 + b_1 = 2$ donc par récurrence 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases}$.

Comme il est clair que a_n et b_n sont entiers, $a_{n+1} - b_{n+1}$ et $6b_{n+1} - a_{n+1}$ sont divisibles par 5.

Si a_{n+1} et b_{n+1} ne sont pas premiers entre eux, il existe k tel que $a_{n+1} = k\alpha$, $b_{n+1} = k\beta$ (k ne peut être un multiple de 5 sinon il se mettrait en facteur dans $a_n + b_n$ qui serait alors divisible par 5). Remplaçons :

$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b_n = k(\alpha - \beta) \\ 5a_n = k(6\beta - \alpha) \end{cases}$ d'où a_n et b_n ont un facteur commun ce qui est contradictoire.

Par ailleurs a_2 et b_2 sont premiers entre eux donc par récurrence a_n et b_n sont premiers entre eux.

4. 81. PGCD,

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\, n+3) = \text{PGCD}(48\,;\, n+3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

4. 82. Congruences,

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1, y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a. Calculer le PGCD de x^8 et x^9, puis celui de x^{2002} et x^{2003}. Que peut-on en déduire pour x^8 et x^9 d'une part, pour x^{2002} et x^{2003} d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

4. 83. Repunit,

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité : $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

4. 84. Eq. dioph.,

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

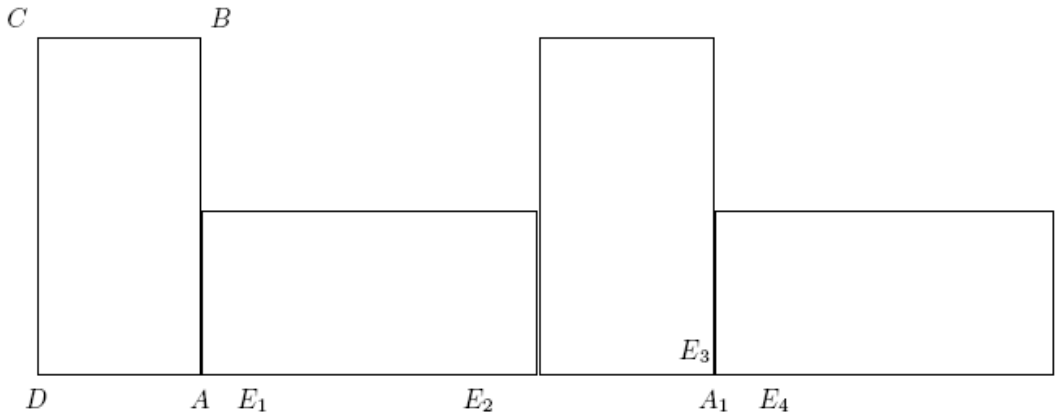
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\,;\, b)$$

(on pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux).

4. 85. Béout+rotation, France, sept. 2002

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire *ABCD*, puis les images respectives *M*, *N* et *P* de *B*, *C* et *D* par la rotation *r* de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre Ω de la rotation *r*' qui vérifie r'(*A*) = *N* et *r*'(*B*) = *P*. Déterminer l'angle de *r*'.

b. Montrer que l'image de *ABCD* par *r*' est *AMNP*.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles *ABCD* et *AMNP* par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.

Sur la demi-droite [*DA*), on définit ainsi la suite de points (A_k), $k > 1$, vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$.

Sur la même demi-droite, on considère la suite de points (E_n), $n > 1$, vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier *k* tel que E_{120} appartienne à [A_k, A_{k+1}]. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.

Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

4. 86. Bézout & suites

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées (x_n ; y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel *n*.

4. 87. Triplets pythag.,

Soit *p* un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (*x* ; *y*) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais que *p* est différent de 2 et que le couple (*x* ; *y*) est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que *x* et y sont premiers entre eux.

a. Montrer que *x* et *y* sont de parités différentes.

b. Montrer que *x* et *y* ne sont pas divisibles par *p*.

c. En d éduire que *x* et *y* sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de l'´equation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

4. 88. Bézout,

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$.

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

4. 89. PGCD,

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application : Déterminer Δ pour $n = 2\,001$; déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

4. 90. Calendrier,

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $abba$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Montrer que si un nombre entier n n'a pas de diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors il n'en a pas de supérieur à $\sqrt{n}$.

1. b. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

c. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $abba$.

a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l' équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s' écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.

3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

4. 91. Divisibilité,

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.

4. Dans cette question on suppose que n est impair.

a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b. Montrer que d divise n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

4. 92. PGCD & PPCM

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a + b\ ;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$).

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, demême, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD$(a\ ;\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\ ;\ b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\ ;\ ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) = 170 \end{cases}$.

4. 93. PGCD,

4 points

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$. Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

4. 94. Similitude & Bézout

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M_0 d'affixe z_0 définie par $z_0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour afflxe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

4. 95. Calendrier,

5 points

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;y_0)$ solution particulière de l'équation (E2) : $35x - 27y = 1$.

b. En déduire une solution particulière $(u_0\,;v_0)$ de (E_1).

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

d. Déterminer la solution $(u\,;v)$ permettant de déterminer J_1.

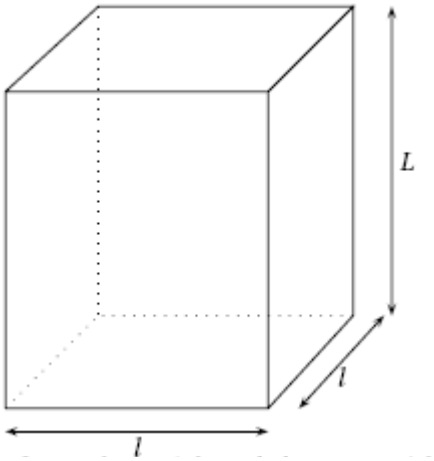
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

4. 96. Bézout,

5 points



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

4. 97. Bézout,

4 points

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x ; y)$ vérifie l'équation (E).

4. 98. Repunit,

4 points

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

4. 99. PGCD & PPCM,

5 points

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$.

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k+1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a : $\text{PPCM}(x, y) = k(k+1)(y - x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $\text{PPCM}(x, y) = 228$.

4. 100. Bézout,

4 points

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 32n - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E") $A_3 x + A_2 y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E").

b. Montrer que (E") admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

4. 101. Bézout & rotation

5 points

Les points $A_0 = O$; A_1 ; ... ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.

Les points $B_0 = O$; B_1 ; ... ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

- M_0 est l'un des points $A_0, A_1, A_2, ..., A_{20}$;
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_A(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

- P_0 est l'un des points $B_0, B_1, B_2, ..., B_{14}$
- pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_B(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = O$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = O$. En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$. On considère l'équation (E) : $7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a ; b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

4. 102. PGCD,

4 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCDde a et b.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

4. 103. Bézout,

5 points

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a. On suppose que l'équation (1) a aumoins une solution $(x_0 ; y_0)$.Montrer que d divise 60.

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.

On appellera S l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ solutions.

c. Énumérer tous les couples $(x\,;\,y)$ solutions de (2) et tels que : $-10 \le x \le 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x\,;\,y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.

Comment peut-on caractériser S ?

4. 104. Bézout et plans

5 points

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

(1) $2688x + 3024y = -3360$;

(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que $(1\,;\,-2)$ est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. 105. Homothétie & multiples

5 points

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.

Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\ .$$

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \le x \le 8$ et $1 \le y \le 8$.

Les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\,;\,y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est unmultiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\,;\,y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x\,;\,y)$ correspondant aux couples $(x'\,;\,y')$ trouvés.

Correction

1. a. $z' = 2(z-a)+(z-b) = 3z-2a-b = 3z-6-i$.

b. $z = 3z+2-i \Leftrightarrow 2z = -2+i \Leftrightarrow z = -1+\frac{1}{2}i$. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$ donc f est une homothétie de centre Ω et de rapport 3.

2. $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$, et $1 \le y \le 8$.

a. $1 \le x \le 8$ donc $3\times1+2 \le x' \le 3\times8+2 \Leftrightarrow 5 \le x' \le 26$

et $1 \le y \le 8$ donc $3\times1-1 \le y' \le 3\times8-1 \Leftrightarrow 2 \le y' \le 23$.

b. $x'-y'=3x+2-3y+1=3x-3y+3=3(x-y+1)$.

c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.

d. $m=x'^2-y'^2=60k \Leftrightarrow (x'-y')(x'+y')=60k$; $x'+y'=3x+2+3y-1=3x+3y+1=3(x+y)+1$.

Si x' et y' sont de parité différente, $x'-y'$ et $x'+y'$ sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc x' et y ' sont de parité identique ; comme $x'-y'$ est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.

Si le nombre x' – y' est un multiple de 30, $x-y+1$ est un multiple de 10, or x et y sont plus petits que 8, c'est impossible.

e. Comme $x'-y'$ est un multiple de 6 et pas de 30, $x'-y'$ n'est pas divisible par 5 ; pour que $x'^2-y'^2$ soit un multiple non nul de 60, il faut donc que x' + y' soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors $\begin{cases} x'-y'=6p \\ x'+y'=10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'=6p+10q \\ 2y'=10q-6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=5q+3p \\ y'=5q-3p \end{cases}$ avec p = 1 ou 2 et q = 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne :

p	q	x'	y'	$x'^2-y'^2$	x	y
1	1	8	2	60	2	1
1	2	13	7	120	11/3	8/3
1	3	18	12	180	16/3	13/3
1	4	23	17	240	7	6
2	1	11	–1	120	3	0
2	2	16	4	240	14/3	5/3
2	3	21	9	360	19/3	10/3
2	4	26	14	480	8	5

et donc les solutions en x et y : $(2;1),(7;6),(8;5)$. On pouvait le faire rapidement avec Excel…

	y	1	2	3	4	5	6	7	8
	y'	2	5	8	11	14	17	20	23
x	x'								
1	5	21	0	-39	-96	-171	-264	-375	-504
2	8	60	39	0	-57	-132	-225	-336	-465
3	11	117	96	57	0	-75	-168	-279	-408
4	14	192	171	132	75	0	-93	-204	-333
5	17	285	264	225	168	93	0	-111	-240
6	20	396	375	336	279	204	111	0	-129
7	23	525	504	465	408	333	240	129	0
8	26	672	651	612	555	480	387	276	147

<u>4. 106. Congruences,</u>

5 points

1. a. Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$, n entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Correction

1. a. $3^0 = 1 \equiv 1[7], 3^1 = 3 \equiv 3[7], 3^2 = 9 \equiv 2[7], 3^3 \equiv 3\times 2[7] \equiv 6[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^5 \equiv 5[7], 3^6 \equiv 1[7]$.

Tous les 6 termes on retourne au point de départ.

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n\left(3^6 - 1\right)$ or $3^6 \equiv 1[7]$ donc $3^6 - 1$ est divisible par 7.

c. Divisons 1000 par 6 : $1000 = 6\times 166 + 4$ donc $3^{1000} = \left(3^6\right)^{166} \times 3^4$; comme $3^6 \equiv 1[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$,on a $3^{1000} \equiv 4[7]$.

d. En divisant n par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre tombera dans les restes calculés au 1.a.

e. En aucun cas on ne peut trouver un reste nul donc pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. a. On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 : $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. u_n est divisible par 7 lorsque $3^n \equiv 1[7]$, soit lorsque n est un multiple de 6.

c. $u_6 = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(3^3 - 1\right)\left(3^3 + 1\right) = 2^2 \times 7 \times 13$; tous les diviseurs sont donc

1, 13, 7, 91, 2, 26, 14, 182, 4, 52, 28, 364.

4. 107. PGCD & parité,

5 points

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair.Onpose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

b. Démontrer que si n est pair alors $81n^2 - 1$ est impair.

c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

4. 108. Bases,

5 points

On considère l'équation (1) : $20b - 9c = 2$ où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple $(b_0 ; c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b ; c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b ; c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre entier naturel P, déterminé par

$$P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r + \alpha_0$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \le \alpha_{n-1} < r$, ..., $0 \le \alpha_1 < r$, $0 \le \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ».

Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).

Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.

Donner l'écriture de P dans le système décimal.

4. 109. Bézout, 5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul ; on pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Complétez le tableau ci-dessous. Quelle conjecture pouvez vous faire sur d ?

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. On considère l'équation (E) : $7k - 4n = 3$, où n et k sont deux entiers naturels non nuls.

a. Déterminer une solution particulière de (E), puis tous les couples solutions de (E).

b. En déduire tous les couples d'entiers naturels $(n ; k)$ solutions tels que $4n + 3 = 7k$.

4. Déterminer, à l'aide des congruences, les entiers naturels n tels que $5n + 2$ soit divisible par 7.

5. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Correction

1.

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

Il semble que lorsque $n \equiv 1[7]$, $d = 7$ sinon $d = 1$.

2. $5a - 4b = 20n + 15 - 20n - 8 = 7$. d divise 7 donc $d = 1$ ou $d = 7$.

3. a. (E) : $7k - 4n = 3$: la solution $k = 1$, $n = 1$ est évidente. En appliquant la méthode habituelle on a :

$$\begin{cases} 7k - 4n = 3 \\ 7 \times 1 - 4 \times 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 7(k-1) - 4(n-1) = 0 \Rightarrow 7(k-1) = 4(n-1) \ ;$$

comme 4 ne divise pas 7 il divise $k-1$, de même comme 7 ne divise pas 4 il divise $n-1$ et finalement

$$\begin{cases} k - 1 = 4p \\ n - 1 = 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4p \\ n = 1 + 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z}.$$

b. $(n ; k)$ entiers naturels : $\begin{cases} k = 1 + 4p \geq 0 \\ n = 1 + 7p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -1/4 \\ p \geq -1/7 \end{cases} \Rightarrow p \geq 0$.

4. a. Avec un petit tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$5n+2$ mod 7	2	0	5	3	1	6	4

Donc $5n + 2$ est divisible par 7 lorsque $n \equiv 1[7]$.

5. D'après la question 3. on a $4n+3=7k$ lorsque $n \equiv 1[7]$, de même pour $5n+2=7k$. Lorsque $n \equiv 1[7]$, a et b sont divisibles par 7 qui est alors la valeur de d ; il faut donc $r = 1$.
Pour toutes les autres valeurs de r, ni a ni b ne sont divisibles par 7 et $d = 1$.

4. 110. Bézout & plan,

5 points

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation : $48x + 35y = 1$.

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b. Déduire de 1. a. tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées (−11 ; 35 ; −13).

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (P) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$.

b. Soit (D) la droite intersection de (P) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [−100 ; 100].

En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

4. 111. Bézout,

5 points

1. On considère l'équation (E) : $8x+ 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

4. 112. Bézout,

5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(12 ; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O ; \vec{j})$ tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (E) : $2x +3y = 78$.

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k ; 18 − 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \le x \le 21$ et $-5 \le y \le 14$?

4. 113. Th. de Wilson,

5 points

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.

Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1< q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

4. 114. Premiers,

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1\,,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1\,.$$

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (**1**) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (**1**) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (**1**).

c. Résoudre l'équation (**1**).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

4. 115. Congruences,

4 points

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?

b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire (en base 2) :

a = 1001001000, b = 1000100010000.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

4. 116. Eq. dioph.,

4 points

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?

3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Correction

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On pose $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$ où d est le PGCD de a et b : $a+b = dk + dk' = d(k+k') = 1999(k+k') = 11994 \Rightarrow k+k' = 6$.

Les valeurs possibles de k et k' et celles de a et b sont donc :

k	k'	a	b
0	6	0	11994
1	5	1999	9995
2	4	3998	7996
3	3	5997	5997
4	2	7996	3998
5	1	9995	1999
6	0	11994	0

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi $9 - 3S + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = 4001$; la deuxième solution est alors 4001−3=3008.

2. 5 est solution de (E) ssi $25 - 5S + 11994 = 0 \Leftrightarrow 5S = 12019$, S n'est pas entier, ça ne colle pas.

3. (E) peut s'écrire également $11994 = Sn - n^2 = n(S-n)$ donc n divise 11994.

Comme $11994 = 6 \times 1999 = 2 \times 3 \times 1999$, n peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où

S peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

n	$S-n$	S
1	11994	11995
2	5997	5999
3	3998	4001
6	1999	2005
1999	6	2005
3998	3	4001
5997	2	5999

11994	1	11995

Partie C

Evident… inutile de dépasser $\sqrt{1999} \approx 44,7$ …

4. 117. Diviseurs+pgcd,

n désigne un entier naturel.

1. Montrer que le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$ est le même que celui de $n + 3$ et 4.

Quelles valeurs peut prendre le pgcd de $n - 1$ et $n + 3$?

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 1$ divise $n + 3$.

3. Montrer que pour tout n, les entiers $n - 1$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.

4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n - 1)(2n + 1)$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$.

4. 118. Bézout + ppcm,

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $18a + 23b = 2001$.

a. Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b. Déterminer une solution de (E).

c. Résoudre (E).

2. Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que $18d + 23m = 2001$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

4. 119. Base et diviseurs, Bac C, Inde, 1979

Soit B un entier strictement supérieur à 3. Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base B

1. Montrer que $\overline{132}$ est divisible par B + 1 et B + 2

2. Pour quelles valeurs de B $\overline{132}$ est il divisible par 6 ?

3. Montrer que A = $\overline{1320}$ est divisible par 6.

4. 120. Bases+congruences,

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4[\mathrm{mod}\,7]$).

3. On considère le nombre B qui s'écrit $\overline{2103211}^4$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 4.

4. 121. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel

Définition

On dira que deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont **consécutives** si $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ et s'il n'existe pas de fraction $\frac{a}{b}$ comprise dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{m}{n}; \frac{m'}{n'}\right[$ telle que b soit inférieur au plus petit des deux dénominateurs n et n'.

Théorème

Deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont consécutives si et seulement si

$$nm' - mn' = 1 \quad \textbf{(*)}$$

Démonstration

• Démontrer d'abord que si la relation (*) est vérifiée, alors les deux fractions sont effectivement consécutives (comparer $\frac{a}{b} - \frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n}$, dans le cas où b est inférieur à min(n, n')).

• Inversement, soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions irréductibles ne vérifiant pas la condition(*). On suppose d'abord : $n \leq n'$.

• Démontrer que l'équation $nx - my = 1$ a des solutions en nombres entiers, puis donner tous les couples d'entiers solutions à partir d'une solution (x_0, y_0).

• Démontrer qu'un des couples (m", n") solution est tel que $1 \leq n" < n$.

• Conclure d'après la démonstration du sens direct que les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ ne sont pas consécutives.

• Procéder de façon similaire dans le cas $n' < n$, en considérant l'équation : $xm' - yn' = 1$.

Définition

Soit N un entier naturel non nul.

On appelle **suite de Farey** d'ordre N la suite finie des fractions irréductibles inférieures ou égales à 1, dont le dénominateur vaut au plus N, classées dans l'ordre croissant.

Exemple : la suite de Farey d'ordre 7 est : $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Il est alors immédiat que deux termes successifs d'une suite de Farey : $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, sont consécutifs au sens ci-dessus.

Donc, d'après le Théorème : $nm' - mn' = 1$ (proposition 1).

Examinons maintenant comment une nouvelle fraction s'insère dans la précédente suite de Farey. Supposons que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m"}{n"}$ soient consécutifs dans une suite de Farey, et que dans une suite de Farey postérieure on ait comme termes consécutifs : $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m"}{n"}$. ($m'$, n') est une solution de $nx - my = 1$; (m", n") est la solution suivante, donc $m" = m + m'$, $n" = n + n'$ (proposition 2).

Telle est la formule qui donne l'insertion d'une nouvelle fraction. Il faut donc rechercher les dénominateurs de fractions consécutives dont la somme est égale au nouvel ordre de Farey.

Par exemple, avant la suite de Farey d'ordre 7 ci-dessus, nous avions celle d'ordre 5 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Les fractions consécutives dont la somme des dénominateurs fait 7 sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, entre lesquels va s'intercaler $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ qui vont donner naissance à $\frac{3}{7}$, etc.

On peut aussi montrer, plus généralement :

Si $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m"}{n"}$ sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors $\frac{m'}{n'} = \frac{m+m"}{n+n"}$.

Farey était un géologue britannique. Il introduisit en 1816 les suites qui portent son nom, en en énonçant les propriétés que nous venons de voir. Cauchy compléta ses preuves.

On peut aussi parler de l'approximation rationnelle d'un réel, par exemple sous l'aspect graphique, pour commencer. Les meilleures fractions approximantes sont les réduites de la fraction continuée. Le "Résultat" ci-dessus permet d'affirmer que deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ vérifient l'équation : $nm' - mn' = 1$ ou -1.

GLOBAL MATHS CLUB

EXERCICES DE MATHEMATIQUES :

NOMBRES COMPLEXES ET ETUDE DES FONCTIONS

EXERCICE 1 :

Donner la forme trigonométrique du complexe 1- i.

1- En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1- i)^n$. soit un réel.

2- P est le polynôme de la variable complexe z :$P(z) = z^3 + (1 +i)z^2 + (2 – 2i)z + 8i$.

   a) Vérifie que 1-i est une racine de P.

   b) Résoudre alors l'équation P(z) = 0 dans C.

3- A,B et C sont trois points (1; -1) ; (0; 2) et (-2; -2) dans un repère orthonormé direct du plan, S la similitude directe de centre B et transformant A en C.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

   b) Donner l'écriture complexe de S.

EXERCICE 2 :

1) Soit (E) : $4z^2 – 12z + 153 = 0$

   a) Montrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).

   b) Résoudre (E) dans C.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique 1cm. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = - 3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w} = -1 + \frac{5}{2}i$.

   a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation t de vecteur $\vec{w}$

   b. Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

   c. Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

4) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

5) Justifier que les points P,Q,R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera l'affixe de son centre et son rayon.

EXERCICE 3 :

soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal, unité 2cm sur les axes.

1. Montrer (C) admet deux asymptotes horizontales.
2. Déterminer la dérivée première de f et dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera.
4. Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α et que $\alpha \in [-1,0]$.
5. Montrer que $\forall x \in R$, $| f(x) + \frac{1}{2} | \leq \frac{1}{2} | x|$.
6. Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère.

Terminale S

Suites — Exercices corrigés

1. 1. QCM 1
1. 2. Fesic 2002 Exercice 10 1
1. 3. Fesic 2004 Exercice 9 2
1. 4. Fesic 2004 Exercice 10 2
1. 5. Fesic 2004 Exercice 11 3
1. 6. Fesic 2004 Exercice 12 4
1. 7. QCM divers 5
1. 8. ROC+exemples, France 2005 6
1. 9. Récurrence 1, France 2004 7
1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004 8
1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005 8
1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008 12
1. 13. Suite récurrente, France remplt 2007 14
1. 14. Barycentre 1, N. Caledonie 2005 16
1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004 17
1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005 18
1. 17. Formule de Stirling 19
1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004 21
1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée 22
1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe 24
1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie 29
1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000 30
1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005 33

1. 1. QCM

Répondez par VRAI ou FAUX en JUSTIFIANT (sauf la question f. où il « suffit » de prouver).

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty[$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Alors

a. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.

b. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.

c. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

d. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.

e. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.

f. Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

Correction

a. Vrai, b. Vrai, c. Vrai, d. Vrai, e. Faux.

1. 2. Fesic 2002 Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n .$$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

Correction

a. **Faux** : Si la suite v_n est arithmétique, $v_{n+1}-v_n$ est constante :

$v_{n+1}-v_n=(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-2u_{n+1}+u_n=-\frac{5}{3}u_{n+1}+\frac{5}{3}u_n=-\frac{5}{3}v_n$;

c'est donc faux, mais nous gagnons une information intéressante : $v_{n+1}=-\frac{5}{3}v_n+v_n=-\frac{2}{3}v_n$; v_n est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=1-0=1$ d'où $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

b. **Vrai :** Recommençons :

$w_{n+1}-w_n=u_{n+2}+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=0$ donc c'est vrai. En plus on a $w_n=w_0=u_1+\frac{2}{3}u_0=1$.

c. **Vrai :** $\frac{3}{5}(w_n-v_n)=\frac{3}{5}\left(u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-u_{n+1}+u_n\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}u_n\right)=u_n$. Ok !

d. **Faux :** Remplaçons pour calculer u_n : $u_n=\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ dont la limite est $\frac{3}{5}$.

1. 3. Fesic 2004 Exercice 9

Soient l un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs. Pour les questions a., b., c. on suppose que u_n converge vers l.

a. l est strictement positif.

b. Il existe n entier naturel tel que l soit une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.

c. La suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ln(l).

d. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\ln u_n$ et que $u_0>u_1$. On ne suppose pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	F	V

a. Si l pouvait être négative, il existerait des termes de u_n négatifs à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

Par contre l peut être nulle : par exemple les suites q^n avec $0<q<1$ convergent vers 0.

b. La traduction de cette phrase est : il existe n tel que $|u_n-l|\le 10^{-3}$; c'est la définition même d'une suite convergente : il existe N tel que pour tout $n>N$, $|u_n-l|\le kv_n$ où v_n converge vers 0.

c. Supposons que u_n converge vers 0 alors la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ « convergerait » vers $-\infty$. En fait cette suite divergerait.

d. La fonction ln est croissante donc si $u_0>u_1$ alors $\ln u_0>\ln u_1\Leftrightarrow u_1>u_2$, etc. Par récurrence on a $u_n>u_{n+1}$ donc bien décroissante. Remarquez que si on avait $u_0<u_1$ alors la suite aurait été croissante. En fait dans le cas d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f croissante tout dépend de l'ordre des deux premiers termes.

1. 4. Fesic 2004 Exercice 10

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=1$ et, pour tout entier n, $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

a. La suite $\left(|z_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Quel que soit n entier naturel, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles.

c. M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.

d. Pour tout n entier naturel, $z_n = \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	V

a. On a $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\left(|z_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Il nous faut calculer $(\overrightarrow{M_nO}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \arg(\frac{z_{n+1}-z_n}{0-z_n}) = \arg\frac{\frac{1+i}{2}-1}{-1} = \arg\frac{1-i}{2} = -\frac{\pi}{4}$, ainsi que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \arg(\frac{z_{n+1}}{z_n}) = \arg\frac{1+i}{2} = \frac{\pi}{4}$. Le dernier angle vaut donc bien $\frac{\pi}{2}$ (on aurait pu calculer un seul angle mais ç'aurait été moins amusant…).

c. On a évidemment $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ donc M_n appartient à l'axe des abscisses si $n\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4k\pi}{\pi} = 4k$.

d. Avec la réponse au c. et en remarquant que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on retrouve bien $z_n = \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

1. 5. Fesic 2004 Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère dans ce repère les points A(1 ; −1), B(5 ; 3) et I le milieu de [AB]. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

* $G_0 = O$,

* Pour n entier naturel, G_{n+1} est le barycentre de {(G_n ; 2), (A ; 1), (B ; 1)}.

On appelle $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de G_n.

a. G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

b. Quel que soit n, G_{n+1} est l'image de Gn par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = x_n - 3$ est une suite géométrique de premier terme -3 et de raison $\frac{1}{2}$.

d. Pour tout n, $x_n = 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	V	F	V	V

a. En utilisant le barycentre partiel on a G_{n+1} barycentre de {(G_n ; 2), (I ; 2)}, soit le milieu de [G_nI], tous les G_n sont donc alignés.

b. L'homothétie est bien de centre I mais de rapport 1/2. Les coordonnées de I sont (3 ; 2).

c. En utilisant la définition d'une homothétie : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, on a $\begin{cases} x_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(x_n - 3) \\ y_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(y_n - 2) \end{cases}$ d'où $u_n = x_n - 3$ est géométrique de raison 1/2, de premier terme $u_0 = x_0 - 3 = -3$.

d. Avec ce qu'on a fait, $(x_n - 3) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow x_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. On peut compléter avec le calcul de y_n : $y_n - 2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow y_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Quand n tend vers l'infini x_n et y_n tendent respectivement vers 3 et 2, soit G_n tend vers I (ce qui était prévisible puisqu'à chaque itération on prend le milieu de $[G_nI]$).

1. 6. Fesic 2004 Exercice 12

On considère une droite graduée Δ d'origine O. On considère les suites de points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ainsi :

* $G_0 = O$,
* Pour n entier naturel, G_{n+1} est le barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$,
* H_0 a pour abscisse 1,
* Pour n entier naturel, H_{n+1} est le barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$.

On appelle g_n et h_n les abscisses respectives de G_n et H_n.

a. La suite $(g_n - h_n)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.

b. La suite $(g_n + h_n)$ est une suite constante.

c. Les deux suites g_n et h_n convergent vers la même limite.

d. Les suites g_n et h_n sont adjacentes.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	V	V	V	F

a. Il faut évidemment trouver les relations entre g_n et h_n.

G_{n+1} barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$ nous donne

$$2(g_{n+1} - g_n) + 3(g_{n+1} - h_n) = 0 \Leftrightarrow 5g_{n+1} = 2g_n + 3h_n \Leftrightarrow g_{n+1} = \frac{2}{5}g_n + \frac{3}{5}h_n \ ;$$

H_{n+1} barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$ nous donne

$$3(h_{n+1} - g_n) + 2(h_{n+1} - h_n) = 0 \Leftrightarrow 5h_{n+1} = 3g_n + 2h_n \Leftrightarrow h_{n+1} = \frac{3}{5}g_n + \frac{2}{5}h_n \ ;$$

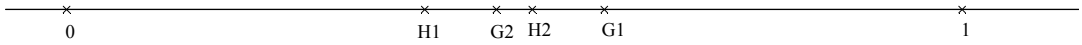
d'où $g_{n+1} - h_{n+1} = \frac{2}{5}g_n + \frac{3}{5}h_n - \frac{3}{5}g_n - \frac{2}{5}h_n = -\frac{1}{5}(g_n - h_n)$.

On peut alors calculer $g_n - h_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^n (g_0 - h_0) = -\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

b. $g_{n+1} + h_{n+1} = \frac{5}{5}g_n + \frac{5}{5}h_n = g_n + h_n = \ldots = g_0 + h_0 = 0 + 1 = 1$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

c. Des deux relations précédentes on tire un petit système : $\begin{cases} g_n - h_n = -(-1/5)^n \\ g_n + h_n = 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} g_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1/5)^n\right) \\ h_n = \frac{1}{2}\left(1+(-1/5)^n\right) \end{cases}$ qui convergent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$, soit le milieu de $[G_0H_0]$.

d. C'est du cours… la condition de monotonie des deux suites n'est pas respectée.
On voit bien qu'à chaque itération la distance $[G_nH_n]$ est divisée par 5.



1. 7. QCM divers

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a.	Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\left(e^a\right)^{\ln b} = b^a$.
Affirmation 1. b.	Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
Affirmation 1. c.	La tangente en 1 à la courbe de la fonction exponentielle a pour équation $y = ex$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a.	Si f est continue sur I, alors f admet une seule primitive sur I.
Affirmation 2. b.	Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a.
Affirmation 2. c.	Si f n'est pas dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite infinie en a.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a.	Si (u_n) est monotone décroissante et minorée et (v_n) est monotone croissante et majorée alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
Affirmation 3. b.	Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec a et b dans l'intervalle $]0\,;1[$ alors u_n converge.
Affirmation 3. c.	Si (u_n) converge, alors la suite $\left(\ln|u_n|\right)$ converge.
Affirmation 3. d.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$.

Correction

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a.	Vrai : $\left(e^a\right)^{\ln b} = \left(e^{\ln b}\right)^a = b^a$.

Affirmation 1. b.	Faux : $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b = \ln(ab)$.
Affirmation 1. c.	Vrai : en 1, la tangente est $y = e^1(x-1)+e^1 = ex - e + e = ex$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a.	Faux : Si f est continue sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I, toutes différentes d'une constante.
Affirmation 2. b.	Vrai : Si f n'est pas continue en a, on n'a pas $f(a)$ et f n'est pas dérivable en a.
Affirmation 2. c.	Faux : pas forcément, on peut avoir des demi-tangentes.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a.	Faux : il faudrait par exemple en plus que $v_n - u_n$ tende vers 0.
Affirmation 3. b.	Vrai : u_n est croissante, et si on fait la somme des inégalités $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$, on a $\sum_k a^k < u_{n+1} - u_0 < \sum_k b^k \Leftrightarrow \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + u_0 < u_{n+1} < \frac{1-b^{n+1}}{1-b} + u_0 < \frac{1}{1-b} + u_0$; donc u_n est bornée.
Affirmation 3. c.	Faux : Si (u_n) converge vers 0, alors la suite $(\ln\lvert u_n \rvert)$ diverge.
Affirmation 3. d.	Vrai : $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$.

1. 8. ROC+exemples, France 2005

4 points

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

PARTIE A : QUESTION DE COURS

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

PARTIE B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Correction

PARTIE A **:** « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

On a $u_n \leq v_n$ et (v_n) décroissante donc $u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_0$ d'où (u_n) est majorée et converge vers l ; même chose pour (v_n) qui est décroissante et minorée par u_0 et converge vers l'.

Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$.

Pour une première ROC la difficulté est raisonnable… Inutile de raconter sa vie non plus !

PARTIE B : (u_n) non nulle, $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 :

Vrai : $2 \leq u_n \Rightarrow \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{1}{u_n} \Rightarrow -\dfrac{2}{2} \leq -\dfrac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \leq v_n$.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

Faux ; $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-2}{u_{n+1}} - \dfrac{-2}{u_n} = \dfrac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow 0 \leq u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n .

Dans l'ensemble les questions ne sont pas trop compliquées, la fabrication de contre-exemples est une bonne activité qui permet la compréhension des phénomènes en jeu. Il est vrai que ne pas connaître les réponses est déstabilisant, mais les correcteurs feront certainement preuve de compréhension.

1. 9. Récurrence 1, France 2004

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Correction

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ qui est évidemment positif. u_n est croissante.

2. a. Par récurrence : $u_0 = 1 > 0^2$, la propriété est vraie au rang 0. Au rang $n+1$ il faut montrer que $u_{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; or si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ qui est évidemment supérieur à $n^2 + 2n + 1$. C'est fini.

b. Comme et que n^2 tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend clairement vers $+\infty$.

3. On calcule les premières valeurs de u_n : $u_0 = 1, u_1 = 1+2.0+3 = 4, u_2 = 4+2.1+3 = 9, u_3 = 9+2.2++3 = 16$. On voit apparaître la suite des carrés des entiers avec un décalage d'un cran par rapport à l'indice ; il s'agit donc de montrer que $u_n = (n+1)^2$: encore une récurrence.

$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. C'est bon.

1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004

1. Soit la suite *u* définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a. Clauculer u_1, u_2, u_3. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite *u* aux quatre premiers termes de la suite *w* définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = w_n$.

2. Soit *v* la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier *n* non nul par $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de *n*. Déterminer la limite de S_n lorsque *n* tend vers l'infini.

Correction

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{2-2/3} = \dfrac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0, w_n = \dfrac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, soit $2 - u_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{2n+2-n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Tout va bien.

2. a. $v_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

b. $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{n-1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005

6 points

Le graphique ci-dessous sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2]. Montrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $f(x) \in [1\,;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$,

$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

Pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

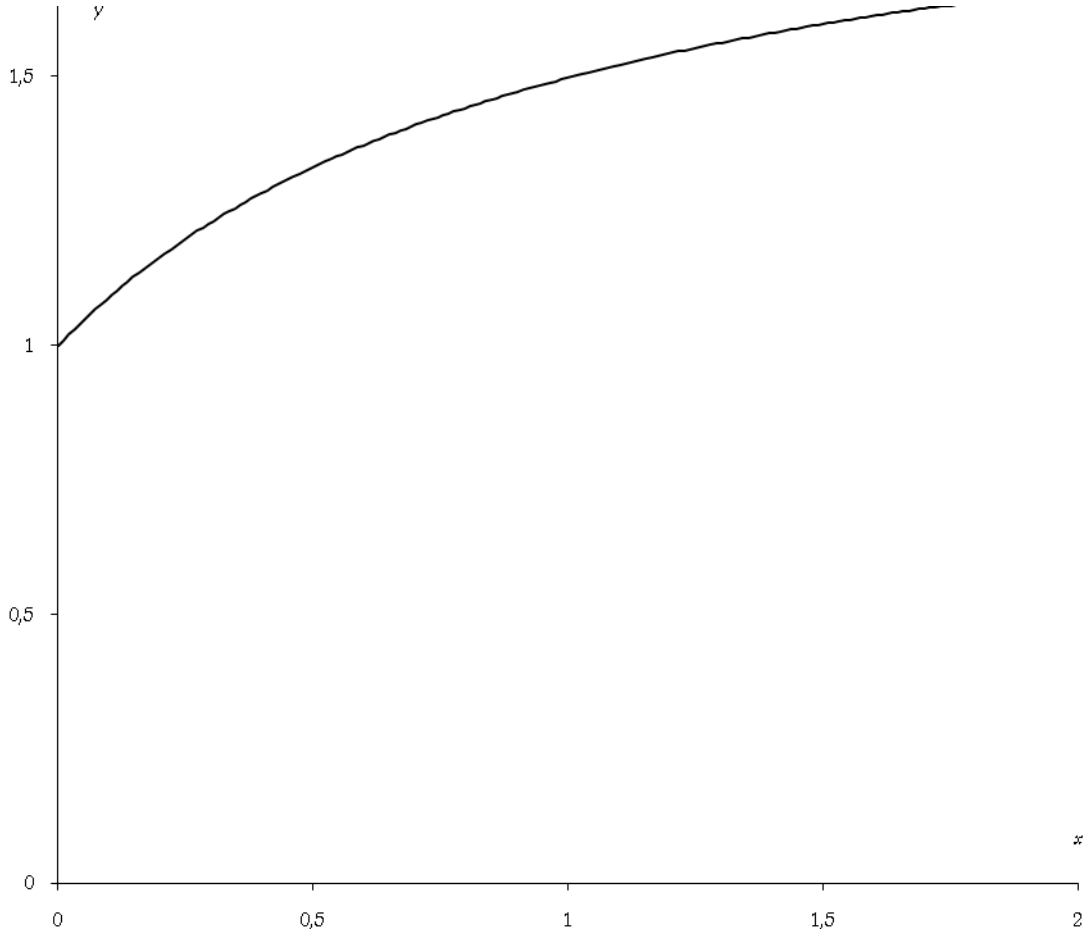
Pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

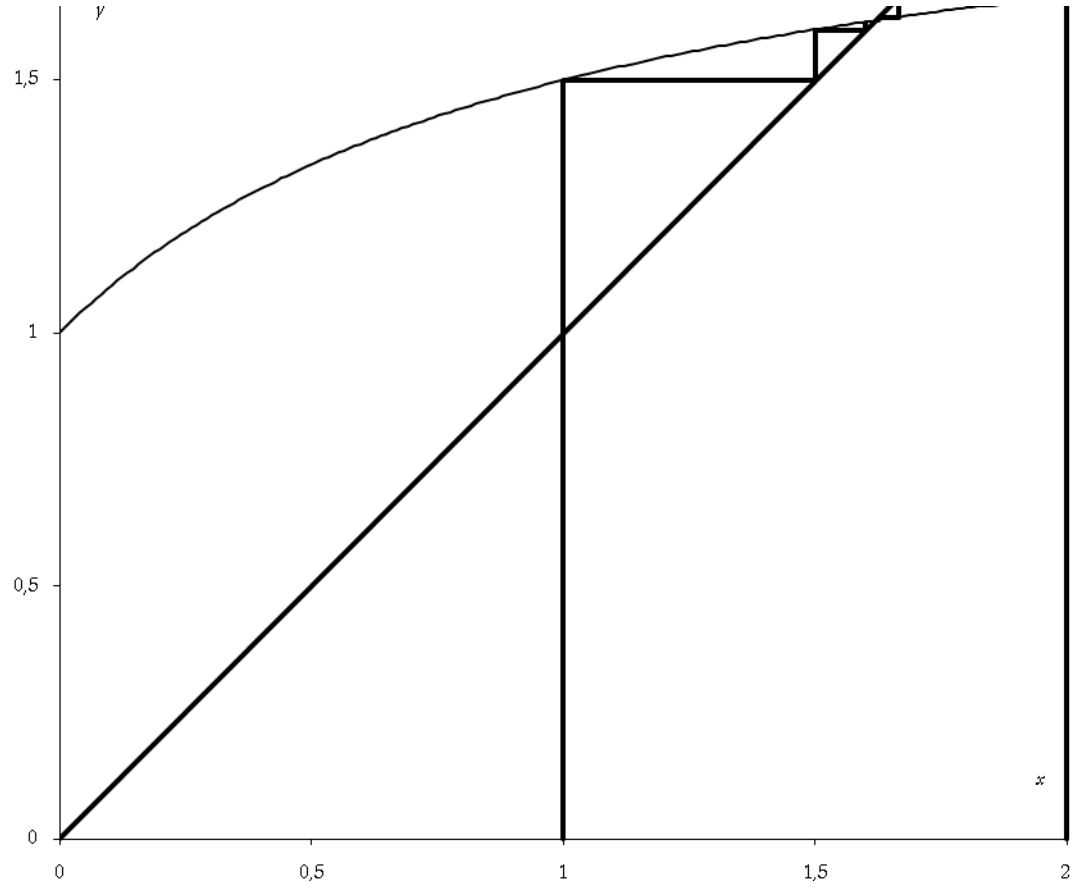
e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.



Correction

1. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante ; $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$ donc si $x \in [1\,;2]$, $f(x) \in [1\,;2]$.

2. a. Visiblement la suite u_n est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite ($y = x$), soit environ 1,6 ; de même v_n semble décroissante et converger vers le même point.



b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle [1 ; 2] ; par ailleurs si $1 \le v_n \le 2$ alors comme f est croissante, $f(1) \le f(v_n) \le f(2) \Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le 2$; la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$; par ailleurs si $v_{n+1} \le v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \le f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \le v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de f. Pour u_n c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2u_n v_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - v_n - 2u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

$v_{n+1} - u_{n+1}$ est du signe de $v_n - u_n$; comme $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, par récurrence on a $v_n - u_n \ge 0$; on a $v_n > 1 \Rightarrow v_n + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{v_n + 1} < \frac{1}{2}$ et pareil pour u_n donc $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Encore une récurrence : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \le \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$; grâce à la relation précédente on a évidemment $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n - u_n) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

e. Les suites u_n et v_n sont adjacentes car $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n - u_n\right) \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n - u_n\right) = 0$; elles convergent bien vers une même limite α telle que

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 2a+1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ \alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008

5 points

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ 6[$ par $f\left(x\right) = \frac{9}{6-x}$. On définit pour tout entier n la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f\left(U_n\right) \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce graphique les points $M_0(U_0\ ;\ 0)$, $M_1(U_1\ ;\ 0)$, $M_2(U_2\ ;\ 0)$, $M_3(U_3\ ;\ 0)$ et $M_4(U_4\ ;\ 0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.

b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

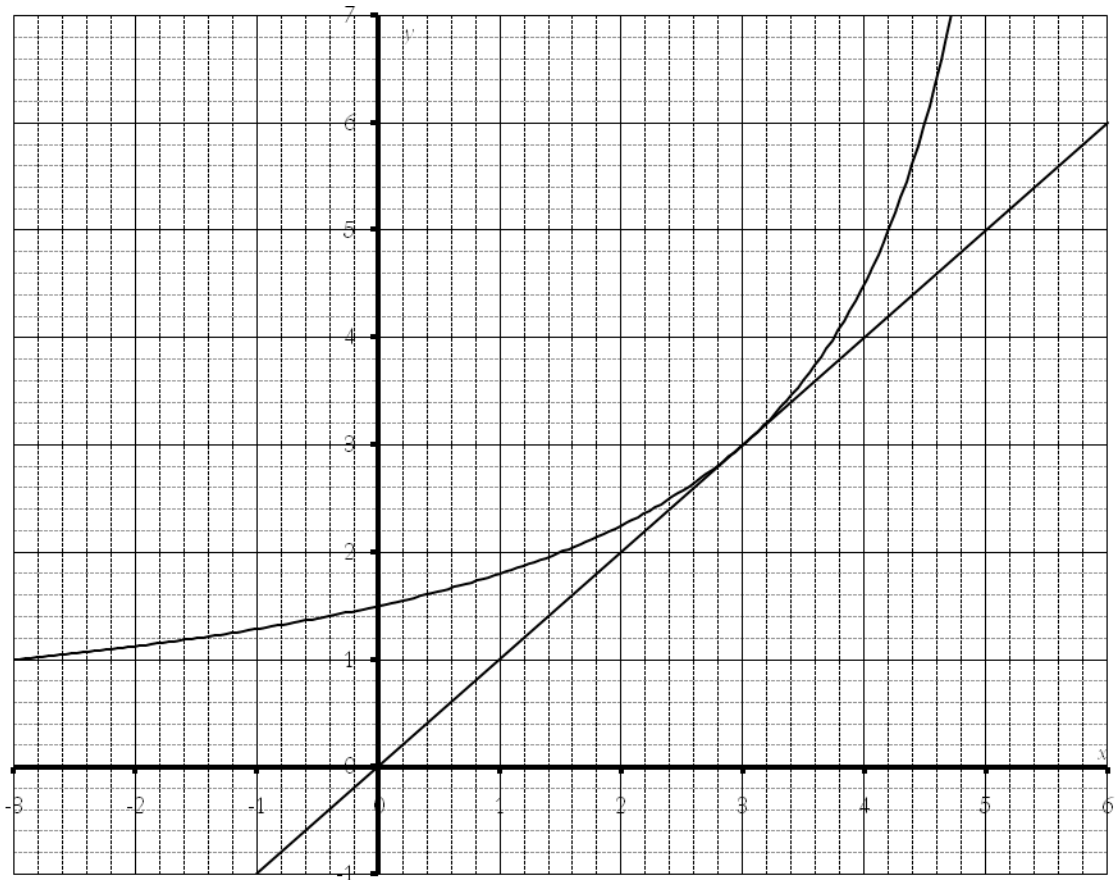
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

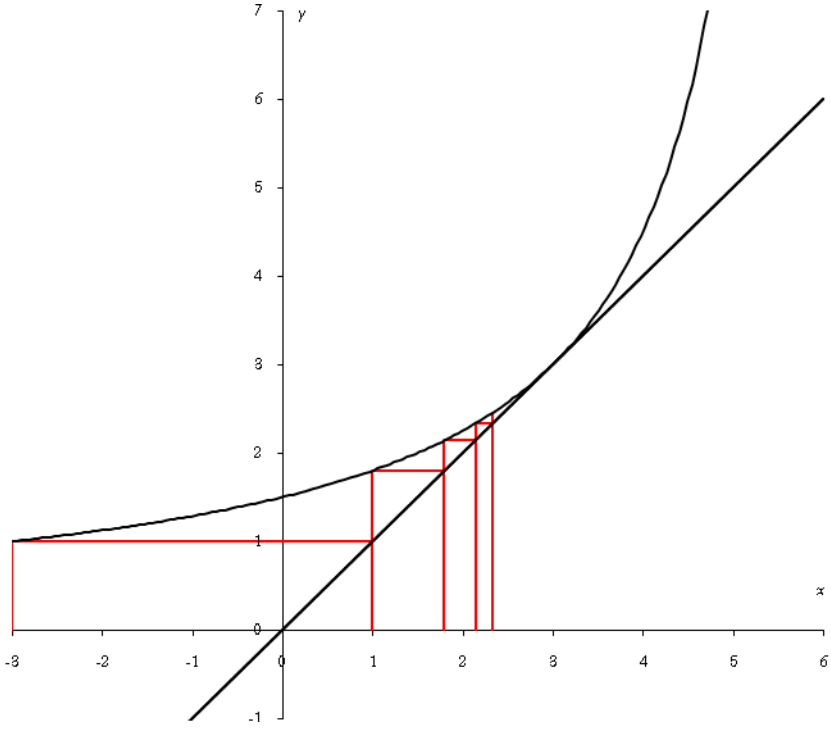
b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (U_n).



Correction

1. Voir la figure ci-dessous.



La suite semble croissante et converger vers le point (3 ; 3), soit vers une limite égale à 3.

2. a. Si $x < 3$, $-x > -3 \Rightarrow 6 - x > 3 \Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-x} < 3$ (on aurait pu utiliser les variations de *f*).

Par récurrence on a alors : $U_0 < 3$ par définition ; si $U_n < 3$ alors $f(U_n) = \frac{9}{6-U_n} < 3$ et donc $U_{n+1} < 3$.

b. $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{U_n^2 - 6U_n + 9}{6-U_n} = \frac{(U_n - 3)^2}{6-U_n}$ qui est positif puisuqe $U_n < 6$.

La suite est croissante.

c. U_n est croissante et majorée, elle converge donc.

3. a. $V_n = \frac{1}{U_n - 3} \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{1}{V_n}$; on a donc en remplaçant :

$$U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{6-3-\frac{1}{V_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{3-\frac{1}{V_n}} - 3 = \frac{9V_n}{3V_n - 1} - 3 = \frac{9V_n - 9V_n + 3}{3V_n - 1} = \frac{3}{3V_n - 1},$$

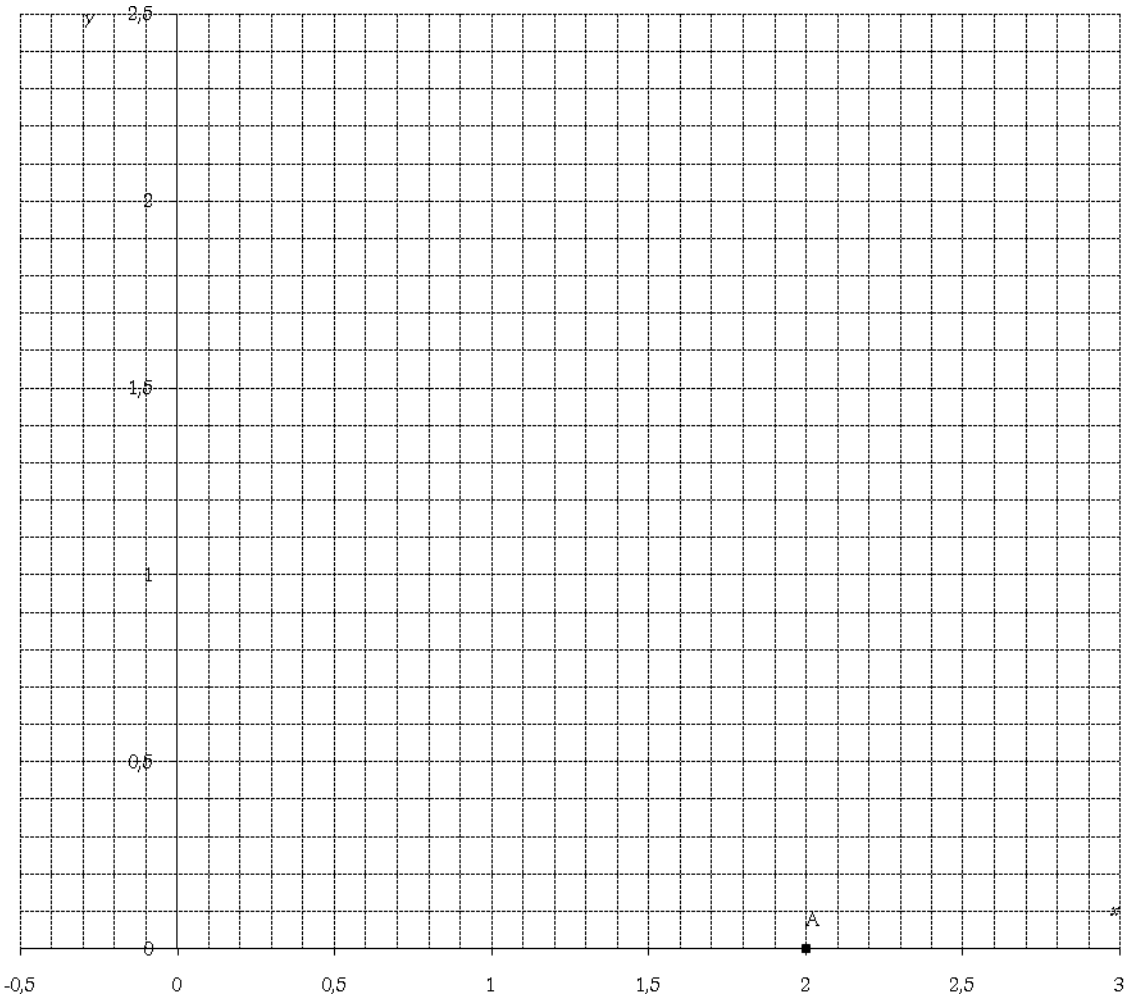
soit $V_{n+1} = \frac{3V_n - 1}{3} = V_n - \frac{1}{3}$; (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. $V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = -\frac{1}{6}$ d'où $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\frac{1+2n}{6}$ et $U_n = 3 + \frac{1}{V_n} = 3 - \frac{6}{2n+1}$.

c. La limite de la suite (U_n) est alors bien évidemment 3…

1. 13. Suite récurrente, France remplt 2007

6 points



1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0).
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}277\,7\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.
En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Correction

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

a. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Si la suite u est convergente alors sa limite l est telle que $l = \frac{1}{3}l + \frac{23}{27} \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = \frac{23}{27} \Leftrightarrow l = \frac{23}{18}$.

c. Par récurrence : $u_0 = 2 > \frac{23}{18}$.

On suppose $u_n > \frac{23}{18}$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} > \frac{1}{3}\times\frac{23}{18} + \frac{23}{27} = \frac{23+46}{54} = \frac{69}{54} = \frac{23}{18}$ CQFD.

d. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$ qui est positif lorsque $-\frac{2}{3}u_n > -\frac{23}{27} \Leftrightarrow u_n < \frac{23}{18}$, ce qui est faux donc u_n est décroissante. La suite est décroissante, minorée elle converge donc vers $l = \frac{23}{18}$.

2. a. Somme des n premiers termes (de 2 à $n+1$ il y a n termes) d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ et de raison $\frac{1}{10}$: $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

b. $v_0 = 1,2$, $v_1 = v_0 + 0,07 = v_0 + 7\frac{1}{10^2}$, $v_2 = v_1 + 0,007 = v_0 + 7\frac{1}{10^2} + 7\frac{1}{10^3}$, etc.

On a donc $v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}}\right) = 1,2 + 7\left[\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0 et v_n tend vers $1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$.

3. u décroissante et minorée, v croissante et majorée (évident) ; elles ont même limite, elles sont adjacentes.

1. 14. Barycentre 1, N. Caledonie 2005

5 points

PARTIE A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0 ; \vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

PARTIE B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

PARTIE C

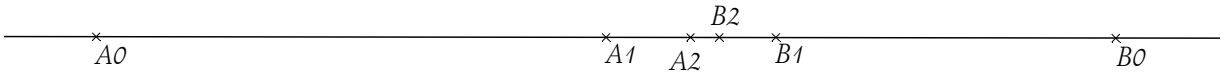
À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

PARTIE A

A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.



Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$ et $v_{n+1} = \dfrac{1.u_n + 2.v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ car B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

PARTIE B

1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{v_n - u_n}{6}$ donc w_n est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{1}{2} w_n > 0$ donc (u_n) est croissante ;

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\dfrac{1}{3} w_n < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Comme $w_n > 0$, on a $u_n < v_n$ donc u_n est croissante majoée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2\dfrac{u_n + v_n}{2} + 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n = \ldots = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$.

PARTIE C

Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l, en remplaçant dans t_n on a :

$$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \to 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \frac{36}{5}.$$

1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Correction

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{29}{8}$, $v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = \dfrac{\dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \dfrac{v_n - u_n}{4} = \dfrac{1}{4} w_n$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc $w_n = 1.\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.

3. On a vu que $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = w_{n+1} > 0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $u_n > v_n$; enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}v_n - v_n = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - v_n) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n) = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) < 0$ donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant…).

4. a. $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + 2\dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + \dfrac{u_n + v_n}{2} + v_n \right) = \dfrac{1}{3}\left(u_n + 2v_n \right) = t_n$. On a donc $t_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + v_0) = \dfrac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\dfrac{7}{3} = \dfrac{1}{3}(l + 2l) \Rightarrow l = \dfrac{7}{3}$.

1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005

6 points

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1\le\alpha\le n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\le 1,9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\le u_n\le 0,95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$$u_{n+1}\le 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\le 0,95\frac{n^{10}}{2^n}\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}}\le 0,95\frac{2^n.2}{2^n}\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\le 1,9\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1,9.$$

2. a. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$; $f'(x)=10\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9=10\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9<0$ donc f est décroissante ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}=1^{10}=1$.

b. $f(1)=2^{10}$ et f décroissante donc f est bijective de $[1\,;+\infty[$ vers $]1\,;2^{10}]$; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel α tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. On a $f(15)\approx 1,9067$ et $f(16)\approx 1,8335$ d'où $16-1=15\le\alpha\le 16$.

d. Lorsque $x\ge\alpha$, comme f est décroissante, on a : $f(x)\le f(\alpha)=1,9$, donc pour tous les n tels que $n\ge 16\ge\alpha$, on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}=f(n)\le f(16)\le f(\alpha)=1,9$.

3. a. D'aprèe ce que nous venons de dire, la suite (u_n) est telle que $u_{n+1}\le 0,95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite (u_n) est décroissante à prtir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0\le u_n\le 0,95^{n-16}u_{16}$: on vérifie facilement au rang 16 car $0\le u_{16}\le u_{16}$; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1}\le 0,95u_n\le 0,95.0,95^{n-16}u_{16}=0,95^{(n+1)-16}u_{16}$, CQFD.

Comme $0,95<1$, $0,95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que u_n grâce à nos amis les gendarmes.

1. 17. Formule de Stirling

Soit la suite (u_n) $(n>0)$ définie par : $u_n=\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. Donner des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 à 10^{-2} près.

2. a. Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(t)=\ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{4}$. En utilisant les variations de g, démontrer que pour tout t de $[0\,;1]$ on a : $\ln(1+t)\le t-\dfrac{t^2}{4}$.

b. En déduire que pour tout $n > 0$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e^{1-\frac{1}{4n}}$ (on pourra poser $t = 1/n$).

3. a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$.

4. a. Par des considérations d'aire montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}dt \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}.$$

b. En déduire que que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Commentaire : on explore ici un moyen d'approcher n! : comme u_n tend vers 0, on peut se dire qu'en multipliant par quelque chose de la forme Kn^α la limite peut devenir 1. Ceci donnerait alors un équivalent de n! de la forme $Kn^\alpha\left(\frac{n}{e}\right)^n$. En l'occurrence ça marche, il s'agit de $\left(\sqrt{2\pi}\right)n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi n}$: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Correction

1. $u_1 \approx 0,3679, u_2 \approx 0,2707, u_3 \approx 0,2240$.

2. a. $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$; $g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{t}{2} = \frac{2-2-2t+t+t^2}{2(1+t)} = \frac{t^2-t}{2(1+t)} = \frac{t(t-1)}{2(1+t)} < 0$ sur [0 ; 1].

g est décroissante et $g(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$ par conséquent $g(t) \le g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) \le t - \frac{t^2}{4}$.

b. Posons $t = \frac{1}{n}$ dans la relation précédente : $\ln(1+t) \le t - \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \Leftrightarrow n\ln(1+\frac{1}{n}) \le 1 - \frac{1}{4n}$ d'où

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \ln\left(e^{1-\frac{1}{4n}}\right) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3. a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{(n+1)(n+1)^n \cancel{e^{-n}} e^{-1}}{n^n \cancel{e^{-n}}}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \le e^{1-\frac{1}{4n}}e^{-1} = e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. On a $u_{n+1} \le e^{-\frac{1}{4n}}u_n \Rightarrow u_n \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} \le e^{-\frac{1}{4(n-2)}}u_{n-2} \ldots \Rightarrow u_2 \le e^{-\frac{1}{4.1}}u_1 = e^{-\frac{1}{4.1}}e^{-1}$.

Par conséquent on a en effectuant les produits d'inégalités successifs :

$u_n \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}u_{n-1} \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}u_{n-2} \le \ldots \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}\ldots e^{-\frac{1}{4.1}}u_1 = e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}\ldots e^{-\frac{1}{4.1}}e^{-1}$,

soit $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$.

4. a. Cet argument est très classique. Entre deux valeurs entières consécutives, k et $k+1$, l'aire sous la courbe de $1/x$ est inférieure à l'aire du rectangle de largeur 1 et de hauteur $1/(k+1)$:

$$k \le t \le k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \le \frac{1}{k}$$

d'où en sommant sur tous ces rectangles :

$$\int_1^n \frac{1}{t}dt = \int_1^2 \frac{1}{t}dt + \ldots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t}dt \le \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}.$$

b. On a donc $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1} \ge \ln n \Rightarrow -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right) \le -\ln n$, soit

$$-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right) \le -1-\frac{1}{4}\ln n$$

et d'après l'inégalité du 3.b : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$.

La suite (u_n) est positive et la partie droite tend vers $\exp(-\infty)$, soit 0. Donc la suite tend vers 0.

1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit D une droite munie d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\right)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Comparez a_n et b_n. Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.

4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout entier n. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

Corrigé

1. Les points ont pour abscisse :

$a_1 = \frac{1}{3}(2+7) = 3$; $b_1 = \frac{1}{3}(1+14) = 5$; $a_2 = \frac{1}{3}(6+5) = \frac{11}{3}$; $b_2 = \frac{1}{3}(3+10) = \frac{13}{3}$.

2. (u_n) est géométrique : on a $u_n = b_n - a_n$ d'où

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 7 - 1 = 6$. Finalement on a $u_n = 6 \times \frac{1}{3^n}$.

3. Comparons a_n et b_n et cherchons les variations de ces suites :

$b_n - a_n = u_n = \frac{6}{3^n} > 0$ donc $b_n > a_n$.

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = -\frac{1}{3}(b_n - a_n) = -\frac{1}{3}u_n < 0$ donc (b_n) est décroissante.

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n = \frac{1}{3}u_n > 0$ donc (a_n) est croissante.

Graphiquement cela se traduit par le fait que la suite des points A_n avance vers la droite alors que la suite des points B_n se déplace vers la gauche mais les points A_n demeurent en permanence à gauche des points B_n.

4. Montrons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes : (b_n) est décroissante, (a_n) est croissante, $\lim(b_n - a_n) = \lim(6\frac{1}{3^n}) = 0$ car la limite d'une suite géométrique de raison r telle que $|r|<1$ est 0, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. $v_n = a_n + b_n$ donc $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) + \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) = a_n + b_n = v_n$ donc (v_n) est constante : le milieu du segment $[A_nB_n]$ est I_n d'abscisse $i_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2} = \frac{v_0}{2}$ car (v_n) est constante donc le milieu de $[A_nB_n]$ est constant et est la point I d'abscisse 4 car $v_0 = 1+7 = 8$.

6. Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante et $b_n > a_n$ donc

$1 = a_0 \le a_n \le b_n \le b_0 = 7$;

(a_n) est croissante et majorée par 7 donc (a_n) converge.

(b_n) est décroissante et minorée par 1 donc (b_n) converge.

De plus ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite L.

En utilisant la suite constante (v_n) telle que $v_n = a_n + b_n = 8$ et par passage à la limite : $\lim a_n + \lim b_n = 8$ donc $L + L = 8$ donc $L = 4$.

Géométriquement, cela se traduit par le fait que les suites de points (A_n) et (B_n) vont se rapprocher du point $I(4)$, l'une par la gauche, l'autre par la droite.

1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \ge 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \ge \frac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \le \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

7. Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.

Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1er siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.

Correction

1. $v_0 = \dfrac{7}{u_0} = \dfrac{7}{3}$; $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{3+\frac{7}{3}}{2} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$; $v_1 = \dfrac{7}{u_1} = \dfrac{7}{\frac{8}{3}} = \dfrac{21}{8}$; $u_2 = \dfrac{u_1+v_1}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2} = \dfrac{64+63}{48} = \dfrac{127}{48}$;

$v_2 = \dfrac{7}{u_2} = \dfrac{7}{\frac{127}{48}} = \dfrac{336}{127}$; $u_3 = \dfrac{u_2+v_2}{2} = \dfrac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2} = \dfrac{32257}{12192} \approx 2,64575$; $v_3 = \dfrac{7}{u_3} = \dfrac{7}{\frac{32257}{12192}} = \dfrac{85344}{32257} \approx 2,64575$.

Il semble que les suites tendent vers $2,64575\ldots$ et que la convergence soit très rapide.

2. P_n : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

P_0 : $u_0 = 3 > 0$ et $v_0 = 7/3 > 0$: P_0 est vérifiée.

Supposons P_n vraie : $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} > 0$ puisque u_n et v_n sont positifs, et bien sûr il en résulte que $v_{n+1} = \dfrac{7}{u_{n+1}} > 0$. On a bien, quel que soit n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. a. $\left(u_n+v_n\right)^2 - 28 = \left(u_n-v_n\right)^2 \Leftrightarrow \left(u_n+v_n\right)^2 - \left(u_n-v_n\right)^2 = 28 \Leftrightarrow 2(2u_nv_n) = 28 \Leftrightarrow u_nv_n = 7 \Leftrightarrow v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

3. b. $\dfrac{1}{4u_{n+1}}\left(u_n-v_n\right)^2 = \dfrac{1}{4u_{n+1}}\left(\left(u_n+v_n\right)^2 - 28\right) = \dfrac{1}{u_{n+1}}\left(\dfrac{\left(u_n+v_n\right)^2}{4} - 7\right)$

$$= \frac{1}{u_{n+1}}\left({u_{n+1}}^2 - 7\right) = u_{n+1} - \frac{7}{u_{n+1}} = u_{n+1} - v_{n+1}.$$

3. c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1} - v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit n, c'est-à-dire en remplaçant $n+1$ par n, on a $u_n - v_n$ positif pour $n \geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour $n = 0$: $u_0 - v_0 = 3 - \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{3} > 0$. On a bien $u_n - v_n > 0$ ou encore $u_n > v_n$.

4. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - u_n = \dfrac{u_n+v_n-2u_n}{2} = \dfrac{v_n-u_n}{2} < 0$ car $v_n - u_n < 0$; $v_{n+1} - v_n = \dfrac{7}{u_{n+1}} - \dfrac{7}{u_n} = \dfrac{7(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}u_n} > 0$ car $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_n > 0$ quel que soit n. La suite (u_n) est bien décroissante et la suite (v_n) est croissante.

5. a. On sait que $u_n > v_n$ or la suite v_n est croissante, donc $v_n > v_1$, on a donc : $u_n > v_n > v_1 = \dfrac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}\left(u_n-v_n\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4u_{n+1}}\left(u_n-v_n\right)^2 \leq \dfrac{1}{10}\left(u_n-v_n\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4u_{n+1}} \leq \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 4u_{n+1} \geq 10 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \dfrac{5}{2}$. Or on sait que $u_n > \dfrac{21}{8} > \dfrac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété P_n : $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

Vérifions P_0 : $u_0 - v_0 = \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{10^{2^0-1}} = 1$, ok.

Démontrons P_{n+1} :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}\left(u_n-v_n\right)^2 \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{\left(10^{2^n-1}\right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{(2^n-1)\times 2}} = \frac{1}{10 \times 10^{2^n \times 2} \times 10^{-2}} = \frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}.$$

5. d. On a $0 \le u_n - v_n \le \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^{2^n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ (gendarmes).

6. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite λ. Celle-ci vérifie la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{7}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n} \Leftrightarrow l = \dfrac{7}{l} \Leftrightarrow l^2 = 7$; or $l > 0$ donc $l = \sqrt{7}$.

7. $u_3 - v_3 \le \dfrac{1}{10^{2^3-1}} = \dfrac{1}{10^{8-1}} = 10^{-7}$: la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup…
On se trouve en présence d'une convergence dite *quadratique*.

8. Pour trouver $\sqrt{a}$, il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{a}{u_n}$ puisque si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles ont même limite l telle que $l = \dfrac{a}{l} \Leftrightarrow l^2 = a$. Les démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.

L'algorithme présenté ici débouche sur bon nombre de problèmes dont certains sont très actuels : on l'utilise par exemple pour calculer les décimales de π, c'est l'algorithme de Brent et Salamin. Il s'agit essentiellement de l'algorithme de la *moyenne arithmético-géométrique* étudié par Lagrange puis par Gauss au 19ème siècle.

1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe

Etude de l'aire sous une courbe à l'aide de suites

Objectifs :

Comprendre comment on peut encadrer l'aire sous une courbe par deux suites, comprendre les notations associées, savoir écrire le terme général des suites, prouver qu'elles ont l'aire comme limite commune (l'existence de l'aire est ici admise).

Application à deux exemples.

Remarques :

L'énoncé ci-dessous est un peu long pour être proposé tel quel à une classe. Par contre, il est possible d'en exploiter des parties avec des élèves sous la forme d'un TP encadré et commenté (surtout pour les notations) par le professeur .

f est une fonction continue monotone positive définie sur [0 ; 1] et (C) est la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

On s'intéresse à l'aire **A** du domaine **D** délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour approcher **A**, on utilise les suites u et v définies ainsi :

- le segment [OA] est partagé en n segments de même longueur ($n \ge 1$) ;
- conformément aux figures ci-dessous, on construit :

  * les n rectangles $R_{k,\ 0\le k\le n-1}$ situés sous la courbe (C), ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C) ;

  * les n rectangles $S_{k,\ 0\le k\le n-1}$ contenant la courbe (C), ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C);

- u_n est la somme des aires des n rectangles $R_{k,\ 0\le k\le n-1}$;

- v_n est la somme des aires des n rectangles $S_{k,\ 0\le k\le n-1}$;

La monotonie de f assure que : $u_n \le \mathbf{A} \le v_n$ pour tout $n \ge 1$.

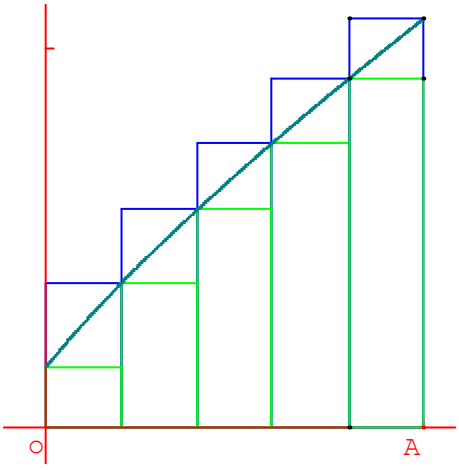


Figure 1

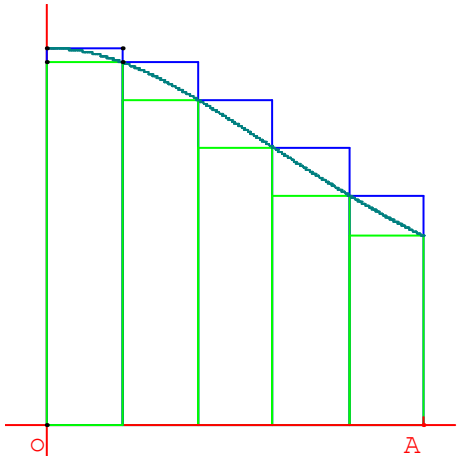


Figure 2

Partie A - Etude des notations

1. On note $A_0 = O$ et A_1, A_2, …, A_n les points de $[OA]$ correspondant à sa subdivision en n segments de même longueur.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points A_k pour $k \in \{0,1, \ldots ,5\}$.

b. On reprend n quelconque. Quel point de la suite est confondu avec A ?

c. Quelle est la longueur d'un segment $[A_kA_{k+1}]$, $k \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$?

d. Quelle est l'abscisse du point A_k, $k \in \{0,1, \ldots ,n\}$?

2. On note B_0, B_1, B_2, … , B_n les points de (C) d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, … , 1.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points B_k pour $k \in \{0,1, \ldots ,5\}$.

On reprend n quelconque. Quelles sont les coordonnées de B_k, $k \in \{0,1, \ldots ,n\}$?

3. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus :

a. Indiquer les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0,1, \ldots ,4\}$.

b. Colorier la surface correspondant à l'aire u_n.

c. Dans une couleur différente de celle du b. colorier la surface correspondant à $v_n - u_n$.

Partie B – Etude des suites *u* et *v*

1. Dans cette question, on suppose que f est croissante sur [0 ; 1] (figure 1).

a. Prouver que $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$ (on pourra par exemple « empiler » tous les petits rectangles coloriés pour v_n - u_n).

b. Quelle est la hauteur du rectangle R_k pour $k \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$?

c. Quelle est l'aire du rectangle R_k ? En déduire une écriture de u_n.

2. Dans cette question, on suppose que f est décroissante sur [0 ; 1] (figure 2).

a. Prouver que $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$.

b. Quelle est la hauteur du rectangle S_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$?

c. Donner une écriture de v_n.

3. Prouver que les suites u et v convergent vers **A** (on pourra encadrer **A** − u_n, puis **A** - v_n à l'aide de l'inégalité $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$).

Partie C – Un exemple où *f* est décroissante

f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

1. Faire une figure dans le cas $n = 5$. Placer (C), les points A_k et B_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ainsi que les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

2. A l'aide de la question B. 2. c. vérifier que pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n-2} + \dfrac{1}{2n-1}$.

3. A l'aide de la question B. 2. a. en déduire que $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n}$.

4. Pour quelle valeur minimale de n, u_n et v_n donnent-ils un encadrement de **A** d'amplitude 0,01 ?
Calculer les u_n et v_n correspondants à l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un logiciel.

Partie D – Un exemple où *f* est croissante

f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

1. Faire une figure dans le cas $n = 5$. Placer (C), les points A_k et B_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ainsi que les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

2. Prouver que l'aire du rectangle R_k est égale à $\dfrac{k^2}{n^3}$.

3. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)$.

4. A l'aide de l'égalité

$$1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ pour } n \geq 1,$$

prouver que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

En déduire la limite de la suite u.

5. A l'aide de la question B. 1. a. exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire la limite de la suite v.

6. Conclure : quelle est l'aire **A** ?

Correction

A. 1. $A = A_n$; $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{n}$; abscisse de $A_k = \dfrac{k}{n}$.

2. Coordonnées de B_k : $\left(\dfrac{k}{n} ; f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$.

B. 1. v_n - u_n est la somme des aires des petits rectangles coloriés sur la figure. En « empilant » ces rectangles, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(1)-f(0)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(1)-f(0))$.

Hauteur de R_k = $f\left(\frac{k}{n}\right)$; aire de R_k = $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$. u_n = aire de R_0 + aire de R_1 + … + aire de R_{n-1} = $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{0}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots\frac{1}{n}\times f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

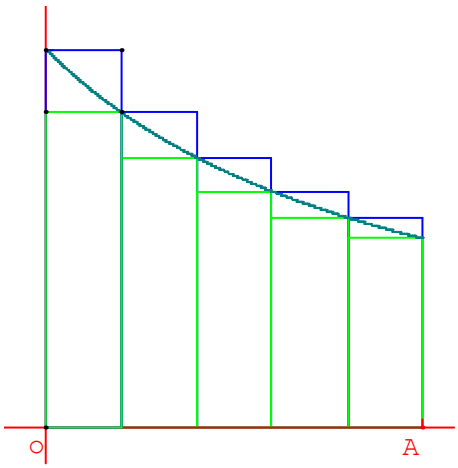
2. En « empilant » les rectangles correspondant à $v_n - u_n$, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(0)-f(1)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0)-f(1))$.

Hauteur de S_k = $f\left(\frac{k}{n}\right)$; aire de S_k = $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$. v_n = aire de S_0 + aire de S_1 + … + aire de S_{n-1} = $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{0}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots\frac{1}{n}\times f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. $u_n \le \mathbf{A} \le v_n$ donc $0 \le \mathbf{A} - u_n \le v_n - u_n$ et $u_n - v_n \le \mathbf{A} - v_n \le 0$.

Or $|v_n - u_n| = \frac{1}{n}|f(0)-f(1)|$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$. Par conséquent, d'après le « théorème des gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}-u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}-v_n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}v_n = \mathbf{A}$.

C. 1.



2. Aire de S_k = $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{\frac{k}{n}+1}=\frac{1}{k+n}$ donc v_n = aire de S_0 + aire de S_1 + … + aire de S_{n-1} = $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n-2}+\frac{1}{n+n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}$.

$v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0)-f(1)) = \frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2n}$.

Donc $u_n = v_n - \frac{1}{2n}$ = $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$ = $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$.

3. $v_n - u_n = \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n} = 0,01$ pour $n = 50$.

Excel donne $u_{50} \simeq 0,688172179$ et $v_{50} \simeq 0,698172179$.

Remarques

* Evidemment **A**= ln 2, mais deux sommes de n termes (u_n et v_n) ne donnent un encadrement de **A** que d'amplitude $\frac{1}{2n}$. Ce n'est pas très efficace(croissance très lente de la série harmonique) pour calculer ln 2.

* En fait, les suites u et v sont adjacentes, mais il est assez pénible de prouver que u est croissante et que v est décroissante :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ \dots\ +\frac{1}{2(n+1)-1}+\frac{1}{2(n+1)}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0.$$

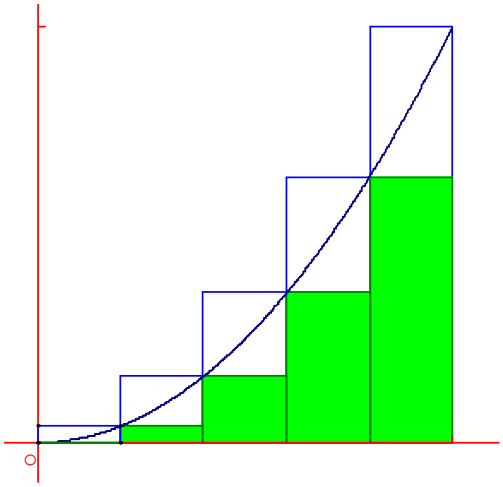
$$v_{n+1}-v_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2(n+1)-2}+\frac{1}{2(n+1)-1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=\frac{(2n+1)+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)}=-\frac{1}{2n(2n+1)}<0.$$

C'est donc long et nous avons vu que le seul intérêt de prouver que les suites sont adjacentes est que cela permettrait d'établir l'existence de l'aire.

D. 1.



2. Aire de $R_k=\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{k^2}{n^3}$.

3. u_n = aire de R_0 + aire de R_1 + … + aire de $R_{n-1}=\frac{0^2}{n^3}+\frac{1^2}{n^3}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2)$.

4. $1^2+2^2+\dots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n\geq 1$. Donc

$u_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)\times n\times(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{6n^2}=\frac{1}{3}$.

Pour tout $n\geq 1$, $v_n-u_n=\frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right)=\frac{1}{n}$, donc $v_n=u_n+\frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}$.

6. Comme $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$, on en déduit $\mathbf{A} = \frac{1}{3}$.

Remarque

Ici aussi, les deux suites u et v sont adjacentes. Pour le démontrer, il faudrait établir que u est croissante et que v est décroissante.

C'est faisable car pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3n^2+n-1}{6n^2(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{-3n^2-5n-1}{6n^2(n+1)^2} < 0$, mais les calculs sont difficiles. De plus, ici, c'est tout à fait inutile car la convergence des suites u est v vers un même nombre est immédiate et prouve donc l'existence de l'aire, dont on obtient en plus la valeur exacte.

1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie

Le principe de la dichotomie

** On admet la propriété des suites adjacentes : Si u est une suite croissante et v une suite décroissante telles que (v – u) converge vers 0, alors u et v convergent vers une même limite l.*

On en déduit que l est l'unique réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

** Méthode de dichotomie :*

I_0 est un intervalle fermé borné. On le partage en deux intervalles fermés de longueurs égales I et I'.

On choisit l'un d'entre eux noté I_1, sur lequel on effectue à nouveau cette opération.

On construit ainsi par récurrence une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles.

** Il s'agit de prouver qu'il existe un unique réel appartenant à tous les intervalles I_n.*

Preuve :

On définit deux suites a et b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [a_n \ ; b_n]$ (avec $a_n \leq b_n$), $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $I_n' = [a_n \ ; c_n]$ et $I_n'' = [c_n \ ; b_n]$.

Si on choisit $I_{n+1} = I_n'$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, sinon on choisit $I_{n+1} = I_n''$, et donc $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On prouve que les deux suites a et b sont adjacentes :

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, donc la suite $(b - a)$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers 0.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Par conséquent, a est croissante et b est décroissante .

* Les deux suites a et b sont donc adjacentes.

Conséquences :

Les deux suites a et b convergent vers une limite commune l et l est l'unique nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$, c'est à dire $l \in I_n$.

Démonstration du théorème de la convergence monotone à l'aide de la méthode de dichotomie :

* On a déjà prouvé que si une suite d'intervalles $I_n = [a_n \ ; b_n]$ a été construite par dichotomie, les deux suites a et b convergent vers un même réel l.

** Il s'agit de démontrer que toute suite croissante majorée est convergente.*

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée par un réel M. On construit par récurrence la suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

* $I_0 = [u_0 \ ; \ M]$;

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [a_n \ ; \ b_n]$, $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $I_n' = [a_n \ ; \ c_n]$ et $I_n'' = [c_n \ ; \ b_n]$. Si I_n'' contient un terme de la suite u, alors $I_{n+1} = I_n''$ sinon $I_{n+1} = I_n'$.

La suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été construite par dichotomie, les deux suites a et b convergent vers un même réel l.

Par récurrence, chaque intervalle I_n contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_n :

* $I_0 = [u_0 \ ; \ M]$ contient tous les termes de la suite u à partir du rang $0 = p_0$.

* Supposons que I_n contienne tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_n. Alors :

- ou bien I_n'' contient un terme u_p de u, donc $I_{n+1} = I_n''$; comme u est croissante, I_n' contient au plus les termes u_n pour $n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Donc I_{n+1} contient les mêmes termes de u que I_n, sauf peut-être certains des p premiers, et par conséquent contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_{n+1} ;
- ou bien I_n'' ne contient pas de terme de u, donc $I_{n+1} = I_n'$. Dans ce cas, I_{n+1} contient les mêmes termes de u que I_n, donc tous à partir du rang $p_n = p_{n+1}$.

* Par conséquent, chaque intervalle I_n contient tous les termes de u à partir d'un certain rang p_n.

On maintenant prouve que la suite u converge vers l :

Soit I un intervalle ouvert contenant l.

Comme $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, il existe un rang N pour lequel a_N et b_N sont dans I, donc $I_N \subset I$.

Or I_N contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_N. A partir de ce rang, tous les termes de la suite u sont aussi dans I. Donc la suite u converge vers l.

1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000

11 points

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par : $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en +∞. Déterminer les asymptotes de (C).

2. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l' intervalle $\left[\dfrac{1}{e} ; 1\right]$ une solution unique, notée α.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur]0 ; +∞ [.

4. Tracer la courbe (C).

Partie B : Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.

2. a. Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$.

En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

c. En déduire la position relative de (C) et de (D).

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).

a. Hachurer ce domaine.

b. Soit A son aire, en cm^2. Écrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C : Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$. On note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0.

1. a. Donner une équation de la tangente (T_0) à (C) en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses.

Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction h définie sur $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$ par : $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0) = x_1$).

a. Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$. En déduire que $\dfrac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$ $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$.

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Correction

Partie A : Étude d'une fonction $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Limite de f en 0 : on écrit $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ d'où la limite est $-\infty$. En $+\infty$ $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 donc f tend vers 1.

2. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ qui est positif lorsque $x \leq e$. $f(e) = 1 + \dfrac{1}{e}$.

3. Sur l' intervalle $\left[\dfrac{1}{e}\ ;\ 1\right]$ f est croissante vers l'intervalle $\left[1 - \dfrac{1}{e}\ ;\ 1\right]$ qui contient 0 : $f(x) = 0$ a donc une solution unique α. La machine donne 0,567 comme valeur approchée de α.

Comme f est croissante, $f(x)\le 0$ lorsque $x\le\alpha$ et $f(x)\ge 0$ lorsque $x\ge\alpha$.

Partie B : Calcul d'aire

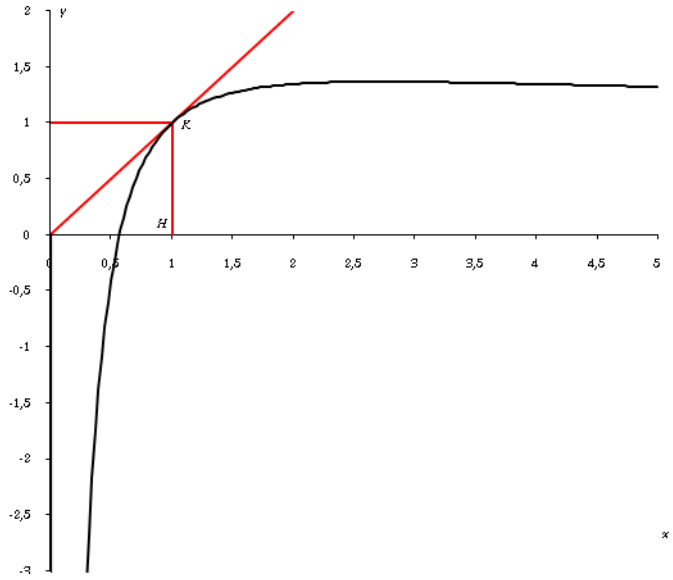
1. (D) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+1=x$.

2. a. $\varphi(x)=x-x^2+\ln x$; $\varphi'(x)=1-2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1+x-2x^2}{x}=\dfrac{(-2x-1)(x-1)}{x}$: positif lorsque $x\le 1$, négatif sinon. $\varphi(1)=0$ donc $\varphi(x)\le\varphi(1)=0$.

b. $f(x)-x=1+\dfrac{\ln x}{x}-x=\dfrac{x+\ln x-x^2}{x}=\dfrac{\varphi(x)}{x}$.

c. La position relative de (C) et de (D) est donnée par le signe de $f(x)-x$ donc (C) est toujours en dessous de (D).

3. a.



b. Il faut d'abord calculer l'intégrale $I=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\int_\alpha^1 1+\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\left[x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^1=1-\alpha-\dfrac{1}{2}(\ln\alpha)^2$; comme $f(\alpha)=0$, on a $\ln(\alpha)=-\alpha$ d'où en remplaçant : $I=1-\alpha-\dfrac{1}{2}\alpha^2$. Par ailleurs il faut soustraire cette intégrale à l'aire du triangle OKH qui vaut $\dfrac{1}{2}$, et multiplier le tout par l'unité d'aire, soit 25 cm^2.

Finalement $A=25\left(\dfrac{1}{2}-1+\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)=\dfrac{25}{2}\left(\alpha^2+2\alpha-1\right)$.

Partie C : Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$. On note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0.

1. a. (T_0) : $f'(x_0)=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}$; $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

b. Lorsqu'on fait $y=0$ dans l'équation précédente, on trouve

$$0=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow x=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1.$$

2. On considère la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$ par : $h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0)=x_1$).

a. $h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow h'(x)=1-\frac{f'(x)\times f'(x)-f''(x)\times f(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=\frac{\left[f'(x)\right]^2-\left[f'(x)\right]^2+f''(x)\times f(x)}{f''(x)\times f(x)}$,

soit $h'(x)=\frac{f''(x)\times f(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

b. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$. $-3+2\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$

donc sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$, $f''(x)<0$.

c. f est également négative sur cet intervalle donc h' est positive et h est croissante.

On a $h(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha$ et $x_1=h(x_0)$.

Comme $x_0<\alpha$ et que h est croisssante, on a donc bien $h(x_0)<h(\alpha)\Leftrightarrow x_1<\alpha$.

d. $h(x)-x=-\frac{f(x)}{f'(x)}$ est positive sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$ car f' est positive et f est négative.

Enfin on a $\frac{1}{e}<x_0$ et $h(x_0)-x_0=x_1-x_0>0\Rightarrow x_1>x_0$, soit $\frac{1}{e}<x_0<x_1<\alpha$.

3. a. Nous venons de montrer que pour un x_0 dans $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$ alors $x_1=h(x_0)$ est dans $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$. C'est ok.

b. Par récurrence : $x_2=h(x_1)$ est alors tel que $\frac{1}{e}<x_0<x_1<x_2<\alpha$, etc. Le raisonnement fait en x_0 est le même à n'importe quel rang.

Donc la suite (x_n) est strictement croissante. Comme elle est majorée par α, elle converge. Il faudrait encore montrer qu'elle converge vers α, ce que l'on voit en faisant le calcul : la rapidité de convergence est même spectaculaire.

n	x_n	n	x_n
0	0,36787944117144200000	4	0,56714261155675600000
1	0,48415152013885700000	5	0,56714329040871200000
2	0,55183615060547200000	6	0,56714329040978400000
3	0,56660294853210500000	7	0,56714329040978400000

Cette méthode est très performante ; elle fut inventée par Newton et améliorée par J. Raphson quelques années plus tard. C'est celle que l'on utilise en général dans les logiciels de calcul.

1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005

7 points

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$.

Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c. Préciser la valeur de α_1.

d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln x - x + 1$.

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

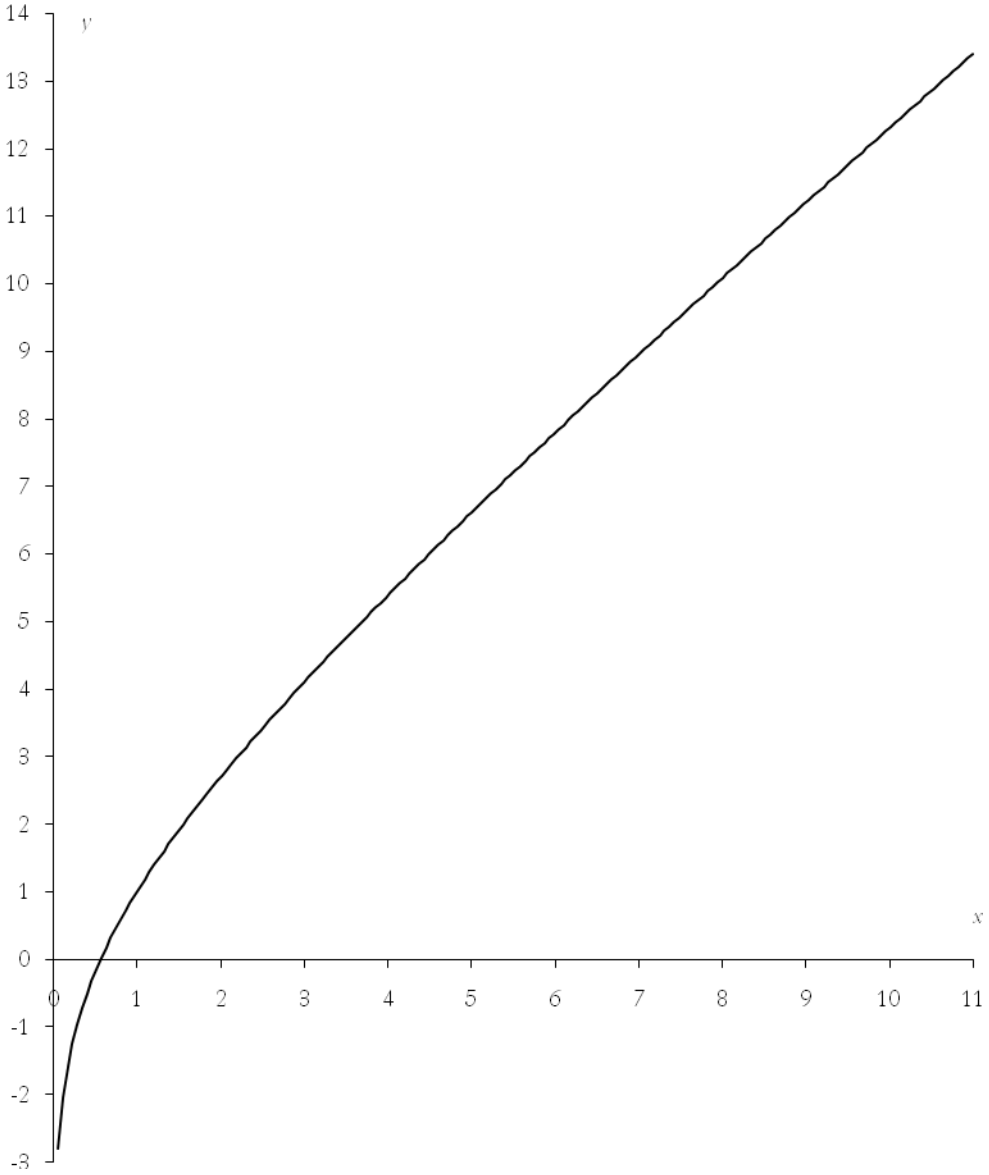
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Page annexe



Correction

Partie A $f(x) = x + \ln x$.

1. a. En $+\infty$ les deux termes tendent vers $+\infty$ donc f tend vers $+\infty$; en 0^+ $\ln x$ tend vers $-\infty$ donc f également.

b. x est croissante, ln est croissante, la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Sinon on a facilement $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

2. a. f est continue, monotone croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$; elle est donc bijective et toutes les valeurs n entières sont atteintes. A chaque n correspond donc un unique antécédent α_n avec $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. On part des valeurs entières 1, 2, 3, 4 et 5 sur l'axe des ordonnées et on trace.

c. α_1 : $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$; cette équation a l'unique solution 1 : $1 + \ln 1 = 1$.

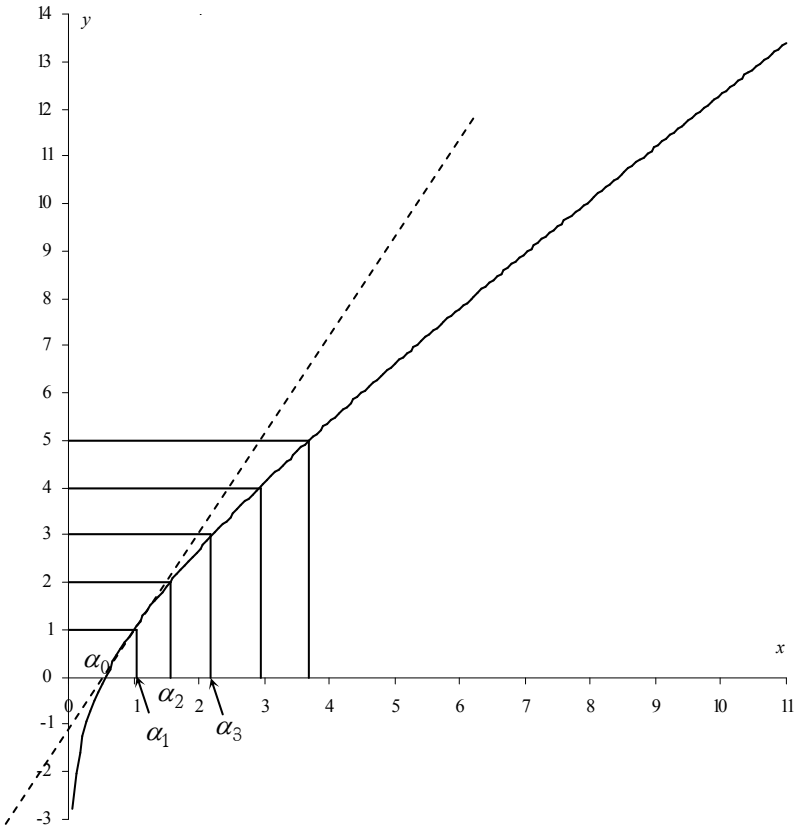
d. Comme f est croissante et que $n+1 > n$, alors les antécédents α_n et α_{n+1} sont rangés dans le même ordre : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow f(\alpha_n) \leq f(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow n \leq n+1$.

3. a. $f'(1)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(1)=1$ d'où l'équation de Δ : $y=2(x-1)+1=2x-1$.

b. $h(x) = \ln x - x + 1$, $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ est positif lorsque $x < 1$, négatif lorsque $x > 1$. On a $h(1)=0$ donc h est croissante avant 1, décroissante après 1 d'où $h(x)\le h(1)=0$. La position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $f(x)-(2x-1)=x+\ln x-2x+1=\ln x-x+1=h(x)$, donc Γ est toujours en dessous de Δ.

c. Comme $h(x)\le 0$ pour $x>1$, ceci est valable pour α_n : $f(\alpha_n)-2\alpha_n+1\le 0 \Leftrightarrow n-2\alpha_n+1\le 0 \Leftrightarrow \alpha_n \ge \frac{n+1}{2}$.

4. Comme n tend vers $+\infty$, $\frac{n+1}{2}$ également et α_n également.



Partie B

g continue, strictement croissante sur]0 ; +∞ [et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

1. Démonstration de cours : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration par l'absurde : si (u_n) est croissante non majorée et qu'elle tend vers une limite L, alors il arriverait un moment (une valeur N de n) où $u_N < L-\varepsilon$ où ε est un réel positif choisi arbitrairement (aussi petit qu'on le veut) ; si le terme suivant est supérieur à $L-\varepsilon$, la suite ne converge pas vers L et si le terme suivant reste inférieur à L, la suite est majorée. Dans les deux cas il y a contradiction.

Démonstration directe : si (u_n) est non majorée, pour tout A réel il existe une valeur N de n pour laquelle $u_N \ge A$; comme (u_n) est croissante, pour toutes les valeurs de n supérieures à N, on a $u_n \ge A$. La définition précédente est respectée, (u_n) tend bien vers $+\infty$.

2. La suite (β_n) est croissante pour les mêmes raisons que (α_n) ; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $g(\beta_n)=n$, les termes β_n sont comme x et tendent donc vers l'infini.

De manière plus élégante on peut considérer que g est bijective et a une application réciproque g^{-1} qui est telle que $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty$.

Exercice n°1 :

Pour tout réel t et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$.

1.a) Démontrer que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel et donner l'expression $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t.

b) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t$.

c) Démontrer que pour tout réel $t \leq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$.

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$. En déduire I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?

c) Donner un encadrement de I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et calculer cette limite.

Exercice n°2 :

I- On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) > 0$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

3. Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$ et qui vérifie : $G(0) = 1$.

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $I =]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $-0,53 < \alpha < -0,52$.

3.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique.

b) Montrer que les courbes (C) et (C'), représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, se coupent en un unique point dont l'abscisse β vérifie $-0,81 < \beta < -0,80$.

c) Démontrer que : $(f^{-1})'(\beta) = \frac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}$.

4.a) Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y = 2x$.

c) Construire les courbes (C) et (C').

5. Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.

a) Montrer que : $A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1))dx$.

b) Calculer A en fonction de α et β (On pourra utiliser une intégration par parties).

Exercice n°3 :

1. On considère la fonction $\mathbf{u}$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\mathbf{u(x)=x-2+\ln x}$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathbf{u}$.

b) Montrer que $\mathbf{u}$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $\mathbf{u(x)=0}$ admet une unique solution α puis vérifier que : $\mathbf{1\le\alpha\le 2}$.

d) En déduire le signe de $\mathbf{u(x)}$ sur $]0;+\infty[$.

2. Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie par : $\begin{cases} \mathbf{f(x)=\frac{-3}{4}x^2+x-\frac{1}{2}x^2\ln x\ ,\ x>0} \\ \mathbf{f(0)=0} \end{cases}$

Soit $(\mathbf{C})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O;\vec{i},\vec{j}})$ d'unité $\mathbf{1cm}$.

a) Démontrer que $\mathbf{f}$ est continue à droite de $\mathbf{x_0=0}$.

b) Démontrer que $\mathbf{f}$ est dérivable à droite de $\mathbf{x_0=0}$. Préciser $\mathbf{f'_d(0)}$ et interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout réel $\mathbf{x}$ strictement positif on a : $\mathbf{f'(x)=xu(\frac{1}{x})}$; où $\mathbf{u}$ est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de $\mathbf{f'(x)}$.

d) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)=0}$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution β et vérifier que : $\mathbf{1\le\beta\le 2}$.

e) Tracer la courbe $(\mathbf{C})$.

3. Pour tout entier naturel $\mathbf{n\ge 1}$ on pose: $\mathbf{I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx}$

a) Exprimer $\mathbf{I_n}$ en fonction de β et de $\mathbf{n}$, (On pourra utiliser une intégration par parties).

b) Calculer $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n}$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.

Exercice n°4 :

1. On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbf{IR}$ par : $\mathbf{f(x)=e^x-x-1}$.

a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.

b) En déduire que pour tout réel $\mathbf{x}$: $\mathbf{e^x\ge x+1}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $\mathbf{x>-1}$: $\mathbf{\ln(1+x)\le x}$.

b) Montrer que pour tout réel $\mathbf{x<1}$: $\mathbf{\ln(1-x)\le -x}$.

3. On considère la suite numérique $(\mathbf{S_n})$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n\ge 1}$ par son terme général:

$$\mathbf{S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

a) En utilisant la question **2,** montrer que pour tout $\mathbf{n\ge 1}$: $\mathbf{S_n\ge\ln(n+1)}$.

b) En déduire $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n}$.

4. Pour tout entier naturel $\mathbf{n\ge 1}$ on pose : $\mathbf{U_n=S_n-\ln n}$.

a) Montrer que pour tout $\mathbf{n>1}$: $\mathbf{U_n-U_{n-1}=\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})}$. En déduire le sens de variation de la suite $(\mathbf{U_n})$.

b) En déduire que la suite $(\mathbf{U_n})$ est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $\mathbf{0<\gamma<1}$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Construire la courbe (C).

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Pour $n \geq 2$, étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f_n.

3.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera.

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}).

4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale U_n.

b) Justifier sans calcul, que la suite (U_n) est positive et décroissante.

c) Donner l'expression de U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = \ln 3$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$.

a) Calculer U_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \ln 3$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 - f'(x) = (f(x))^2$. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

Exercice n°7 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Construire la courbe (C).

2. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+...+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n).$$

a) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\int_n^{n+1} f(t)dt\leq\dfrac{1}{n\ln n}$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1} f(t)dt$. En déduire le sens de variation de (U_n).

c) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$. En déduire que $U_n\geq -\ln(\ln 2)$.

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln 2)\leq\ell\leq\dfrac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)$.

Exercice n°8 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{e^x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1.

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe (C).

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n).

b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ?

c) Donner un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calculer cette limite.

4.a) Calculer I_0.

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout n : $I_{n+1}=\dfrac{-1}{e}+(n+1)I_n$.

c) Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Exercice n°9 :

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ et $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

2.a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de a, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln a$.

3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n=\int_0^{\ln a}(f(t))^n dt$

a) Vérifier que $I_1=2\ln\left(\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$.

b) Vérifier que pour tout réel x: $f^2(x)=1-2f'(x)$. En déduire la valeur de I_2

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0\le I_n\le\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°10 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C).

d) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'-y=-e^x$ et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n\ge1$ par :

$U_n=\dfrac{3^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\ge3$, $0\le\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\le\dfrac{3}{4}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\ge3$, $0\le U_n\le\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout entier naturel $n\ge1$; on pose $I_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^3(3-x)^n e^x dx$ et

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{3^k}{k!}=1+3+\dfrac{3^2}{2!}+\dfrac{3^3}{3!}+...+\dfrac{3^n}{n!}$.

a) Justifier que $I_1 = e^3 - 4$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + ... + \frac{3^n}{n!} + I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e^3$.

Exercice n°11 :

1) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 0^+ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^3}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^3)^2}$. En déduire le tableau de variation de f .

3) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$. Calculer $F'(x)$ et déterminer le sens de variations de F.

b) Vérifier que pour tout t de $[1, +\infty[$, on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

c) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$.

d) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$;

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} \quad .$$

4.a) En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1 - 2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

b) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$. Montrer que : $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}$.

Exercice n°12 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.

Soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donner une interprétation graphique.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ, (On remarquera que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$).

2) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1\le A\le\frac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A.

3) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-nx}dx$, pour $n\in\mathbb{N}^*$; et $I_0=1$

a) Montrer que $I_1=1-2e^{-1}$, (On pourra utiliser une intégration par parties).

b) Montrer que pour tout entier naturel $n>1$ on a , $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) On pose pour tout entier naturel n: $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$.

a) Justifier que : $S_n=\int_0^1\frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

b) Montrer que : $A-S_n=\int_0^1\frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

c) Montrer que : $0\le A-S_n\le\frac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=A$.

Exercice n°13 :

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à droite de zéro (On pourra écrire $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$) .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ (On pourra poser $t=\frac{1}{x}$) . Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe de f.

3) Pour tout entier naturel $n\ge1$; on pose: $\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$ et $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n).

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\le x^{n-1}f(x)\le x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0\le A_n\le\frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

4) On pose $I_n(\alpha)=\int_\alpha^1 x^n\ln x dx$, $I_n=\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)$ et $J_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α et de n .

b) Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)=\frac{-1}{(n+1)^2}$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $J_{n+1}=\frac{2\ln2}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{n+1}{n+2}J_n$.

Exercice n°14 :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n(x)=\dfrac{(1+x)^n}{e^x}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $F_n(x)=\int_{-1}^{x} f_n(t)dt$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in$]
$F_{n+1}(x)=(n+1)F_n(x)-f_{n+1}(x)$

3) Soit $I_n=F_n(0)=\int_{-1}^{0} f_n(t)dt$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1}\le I_n\le\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $U_n=\dfrac{I_n}{n!}$

a) Montrer que $U_{n+1}=U_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$. En déduire que $U_n=e-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

Exercice n°15 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\ln(x+1)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ et justifier que :

$$\begin{cases} -1<x\le 0\Rightarrow f'(x)\le 0 \\ x\ge 0\Rightarrow f'(x)\ge 0 \end{cases}$$

.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Tracer la courbe (C).

b) En remarquant que $\dfrac{x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x}dx$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

3) Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx$

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). Justifier que

$U_1=\dfrac{1}{4}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\le U_n\le\dfrac{\ln 2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°16 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0,\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4<\alpha<0,5$.

c) Tracer les courbes (C) et (C').

d) Calculer, en fonction de α, l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$).

3) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^{\alpha} f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1=\alpha+\ln(2\alpha)$.

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x)=f^2(x)-f(x)$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}-I_n=\dfrac{1}{n}\left(\alpha^n-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?

4.a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1}\le I_n\le\dfrac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$.

b) Montrer que $I_n=\alpha+\ln(2\alpha)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\left(\alpha^k-\dfrac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\left(\alpha^k-\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Exercice n°17 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) Interpréter les limites précédentes.

2.a) Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe (C).

b) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

3) Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ on a : $0\le f_n(x)\le\dfrac{e}{n!}$.

4) Soit la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} dx$.

a) En interprétant graphiquement I_1, donner sa valeur (On pourra utiliser A.2)).

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = e - U_n$.

b) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n°18 :

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur R par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.

2) a- Dresser le tableau de variation de f_0.

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ?

3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

b- Déduire le tableau de variation de f_1

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter.

b- Calculer f_n' et dresser le tableau de variation de f_n.

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, $n \in \mathbb{N}$

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

b- Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°19 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déduire que pour tout entier $n \ge 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \le \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \le \frac{\ln k}{k^2}$

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$, $n \ge 2$.

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + ... + \frac{\ln n}{n^2}$

a- Montrer que $S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \le \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \le S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}$

b- En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \le S_n \le \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$.

Exercice n°20 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ **par** $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ **puis calculer** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ **. Interpréter graphiquement.**

2. a) Calculer $f'(x)$ **et** $f''(x)$ **puis étudier les variations de** f' .

b) Calculer $f'(0)$ **et en déduire le signe de** $f'(x)$.

3. a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Tracer la courbe (C) .

4 a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt$ **et à l'aide d'une intégration par parties, calculer** $\int_0^x (t+1)\ln(1+t) dt$.

b) En déduire la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ **qui s'annule en 0.**

c) Calculer l'aire A_n **du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives** $x = 0$ **et** $x = n$ **, pour n un entier naturel** $n \ge 1$ **.**

Exercice n°21 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,54 < \alpha < 0,55$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et en donner une interprétation géométrique.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x)$ .En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ) .

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 1}{\alpha}$ et en donner une valeur approchée.

3.a) Donner une équation de la tangent (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{e}$.

b) Tracer (C) , (Δ) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

4.a) Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

b) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.

Exercice n°22 :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=3x-3-2x\ln x,\ x>0 \\ f(0)=-3 \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f est continue à droite de $x_0=0$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ et interpréter graphiquement.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2.a) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$ et vérifier que $f'(\sqrt{e})=0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0=1$.

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses (Ox) en un point B autre que A dont l'abscisse α est telle que : $2.3\le\alpha\le 2.4$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) sur $[0;+\infty[$.

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x^2\ln x\ ;\ x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)=3x-3+g'(x)$.

b) En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

5) Pour tout entier naturel $n\ge 1$ on pose: $U_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°23 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-2)(1+e^x)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x-2)\big)$ et en donner une interprétation graphique.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis la dérivée seconde $f''(x)$.

b) En déduire que la courbe (C) possède un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.

c) Dresser le tableau de variation de la dérivée f'. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

3.a) A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. On désigne par (C') la courbe représentative de la réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4.a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes de coordonnées.

b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T à la courbe (C) est parallèle à l'asymptote (D). Donner une équation de T.

c) Tracer (C), T, (D) et (C').

5.a) Calculer l'intégrale $I=\int_0^2 (x-2-2e^x)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J=\int_0^2 xe^x dx$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Exercice n°24 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2-\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. Donner une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0=e$.

4.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β $(\alpha<\beta)$ et que $0,1<\alpha<0,2$; $3,1<\beta<3,2$. Démontrer que : $\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

5. Soit g la restriction de f sur $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(e-3)$, (On pourra utiliser la question 3)

6. Tracer (C) et (C') courbes respectives des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

7.a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x\,dx$.

b) Calculer l'aire du domine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice n°25 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{x}{e^x}=x-1+xe^{-x}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x+e^x$.

a) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g.

b) Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2.a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative de (C) et (Δ).

3.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4.a) Déterminer le point A de (C) où la tangente T à la courbe (C) est parallèle à l'asymptote (Δ). Donner une équation de T.

b) Tracer T , (Δ) et (C).

5) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x)=-(x+1)e^{-x}$.

a) Vérifier que $H'(x)=f(x)-x+1$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

Exercice n°26 :

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3-2+4\ln x$.

1.a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α . Vérifier que $1,1<\alpha<1,2$.

c) En déduire le signe de g(x) sur $]0,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{2\ln x}{x^2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.

c) Etudier la position relative de (C) et Δ.

2.a) Calculer f '(x) et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^3-2\alpha^2-2}{2\alpha^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3.a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. Vérifier que T est perpendiculaire à Δ.

b) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un point B autre que A d'abscisse β telle que $1,3<\beta<1,4$.

c) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit S l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x=1$ et $x=\beta$.

a) Justifier que : $S=-\int_1^{\beta} f(x)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I=\int_1^{\beta}\dfrac{\ln x}{x^2}dx$. Calculer S en fonction de β .

Exercice n°27 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2+x+x\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Vérifier que $f(x)=\dfrac{2}{x}+1+\ln x$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement

2° a) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variation de f.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=1$

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;2]$

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} , où g^{-1} est la fonction réciproque de g .

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(3)$ (on pourra utiliser 2° b))

d) Construire (C) , (C') et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où (C') est la courbe de g^{-1}.

4°) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α, telle que $2<\alpha<3$. Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et en déduire que $\forall x\geq\alpha$ on a $f(x)-x\leq 0$

5°) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $u_n\geq\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que (u_n) est convergente.

6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K=\int_1^e \ln x dx$.

b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Exercice n°28 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 + e^{2-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1 - x)\, e^{2-x}$

a) Étudier le sens de variation de **h** sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de **h**).

b) En déduire le signe de h(x) sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Soit (Δ) la droite d'équation : $y = x$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

3. a) Déterminer f'(x) puis étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
On notera f^{-1} la bijection réciproque de f.

d) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ? Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

e) Construire (C) et (Δ) puis en déduire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère.

Partie B

1. Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

On donne : $e \approx 2{,}7$.

Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
Sis à L'ECOLE PUBLIQUE DE SONGMINKOUGUI EDEA
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2019-2020
Epreuve : **Mathématiques**
Durée : **3h** **15h00-18h00**
Mercredi, 11 septembre 2019

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 1 : CLASSE DE T^{le} C

EXERCICE 1

1. Dans $\mathbb{N}$, on définit la loi de composition interne notée $*$ par :

$$\forall a,b\in\mathbb{N},\ a*b=a+b+ab.$$

On définit également $a^{(n)}$ par $a^{(1)}=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ a^{(n)}=a^{(n-1)}*a.$

(a) Exprimer $a^{(2)},a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de $a.$

(b) Faire une conjecture sur l'expression de $a^{(n)}.$

(c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer la conjecture de (b).

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2-y^2-x+3y=30.$

EXERCICE 2

1. **(a)** Démontrer par récurrence que :

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\forall n\geq 2,\ a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}\right).$$

(b) Démontrer que si p et q sont deux entiers naturels quelconques :

$2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par $2^q-1.$

2. On note P l'ensemble des nombres premiers.

(a) Démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N},\ (2^n-1)\in P\Rightarrow n\in P.$

(b) Démontrer que $2^{11}\equiv 1[23].$

(c) La réciproque de la proposition 3.(a) est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2-1}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x-3.$

(a) Etudier les variations de f.

(b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}.$

(c) Donner un encadrement de α d'amplitude $10^{-2}.$

(d) Préciser le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}.$

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\sin x}{x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Montrer que pour tout $x<0, x+\dfrac{1}{x}\leq f(x)\leq x-\dfrac{1}{x}$.
4. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 5

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $A_n=3^{2n}-2^n$.
   Démontrer par récurrence que : A_n est multiple de 7
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n\geq 2$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k2^k=(n-1)2^{n+1}+2$.
   En déduire la somme $S=11\times 2^{11}+12\times 2^{12}+13\times 2^{13}+...+21\times 2^{21}$.

EXERCICE 6

Soit n un entier naturel. On pose $F_n=2^{2^n}+1$.

1. Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3.
2. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, F_{n+1}=(F_n-1)^2+1$.
3. Montrer que pour tout $n>1$, l'écriture décimale de F_n se termine par 7.
4. Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, F_n=2+\prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
5. Pour $k\geq 1$, on pose $F_{n+k}=2^{2^{n+k}}+1$ et $a=2^{2^n}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{F_{n+k}-2}{F_n}=\dfrac{a^{2^k}-1}{a+1}$.
   (b) En déduire que F_n divise $F_{n+k}-2$.
   (c) Montrer que si d divise F_n et F_{n+k}, alors d divise 2.
   (d) Montrer que $d=1$.

EXERCICE 7

1. Montrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{N}^*, (x+1)^n-nx-1$ est divisible par x^2.
3. Déterminer les nombres premiers p tels que p divise 8^p+20.

Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
Sis à L'ECOLE PUBLIQUE DE SONGMINKOUGUI EDEA
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2019-2020
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h 15h00-18h00
Mercredi, 18 septembre 2019

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 2 : CLASSE DE T^{le} C

EXERCICE 1

1. Déterminer trois entiers naturels a, b et c tels que : $\frac{59}{3^2} = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2}$ avec $0 \le b < 3$ et $0 \le c < 3$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n-1$ divise $n+10$.

EXERCICE 2

1. Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $26a - 54b = 2019$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs tels que $2n+5$ divise $3n+4$.
3. Dans le division euclidienne de 1512 par un entier naturel non nul b, le quotient est 17 et le reste r. Déterminer les valeurs possibles pour b et r.

EXERCICE 3

1. Un entier naturel x s'écrit $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ dans la numération décimale.
   Démontrer que 6 divise x si et seulement si, 6 divise $4\left(a_n + a_{n-1} + ... + a_1\right) + a_0$.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On pose $a = 6k - 2$ et $b = 4k + 3$.
   (a) Montrer que si δ divise a et b, alors δ divise 13.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de 13?

EXERCICE 4

1. Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division de 2^n par 5.
2. En déduire le reste de la division par 5 de 1357^{2019}.

EXERCICE 6

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
2. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$.
4. Etudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

EXERCICE 8

1. Montrer que dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ n'a pas de solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1[4]$.

EXERCICE 9

1. **(a)** Justifier que $a \equiv b[n]$ si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = qn + b$.

(b) A quelle condition peut-on dire que b est le reste de la division euclidienne de a par n.

2. Justifier que le chiffre des unités d'un entier naturel N est le reste dans la division euclidienne de N par 10.

3. Déterminer le chiffre des unités de $\left(7^7\right)^7$.

4. On souhaite déterminer le chiffre des unités de $2^n + 3^n$ selon les valeurs de n.

(a) Déterminer le chiffre des unités de 3^{2012}.

(b) Déterminer le reste de 2^{2012} dans la division par 5. En déduire son chiffre des unités.

(c) Quel est alors le chiffre des unités de $2^{2012} + 3^{2012}$?

(d) Déterminer les restes possibles de $2^n + 3^n$ en fonction de n.

(e) En étudiant la parité de $2^n + 3^n$, donner son chiffre des unités en fonction de n.

(f) En déduire le chiffre des unités de $2^{2019} + 3^{2019}$.

EXERCICE 10

1. Un nombre N s'écrit $\overline{abc0}$ en base 5 et $\overline{abc}$ en base 12 où a, b et c sont des entiers naturels tels que $0 < a < 5$, $0 \leq b < 5$ et $0 \leq c < 5$.

(a) Démontrer que $a + b$ est un multiple de 4.

(b) Déterminer les entiers a, b et c.

2. Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

(a) Mettre $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs.

(b) Déterminer suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n$.

(c1) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 13.

(c2) Quel est le reste de la division de $B = 5^{500} + 5^{375} + 5^{250} + 5^{125}$ par 13 ?

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f et construire $\mathscr{C}$.

2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

3. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

(a) Déterminer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

(b) Tracer la courbe représentative (Γ) de f^{-1} dans le repère précédent.

preparation au baccalaureat C 2019
CONGES DE NOEL
Opération 100% mention.

Lieu : COLLEGE LA CONQUETE
Proposé par Boris Gisclair DONGMO:697.24.70.18/ 674.06.85.83

site web : www.E-excellencia-Academy.com
Ou par e-mail :gisclairdongmo@yahoo.fr

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Notions abordées : CONDENSES POUR LES CONGES DE NOEL

Patie I : ARITHMETIQUE

Exercice 1:

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x ; y)$ vérifie l'équation (E).

EXERCICE 2:

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x - 28y = 414$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A(−30 ; − 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de −10 à +10 en abscisses et de −14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [−40 ; +40] en abscisses et à [−50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

EXERCICE 3:

1. Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$ soit satisfaite, pour x et y entiers naturels, il faut prendre x et y de la forme : $x = 9(k+3)$ et $y = 4k$ avec k entier naturel.

2. Démontrer que le PGCD de x et y ne peut être qu'un diviseur de 108.

3. On pose m = PPCM(x ; y) et on envisage la décomposition de m en facteurs premiers. Comment faut il choisir k pour que :

a. m ne contienne pas le facteur 2 ?
b. m contienne le facteur 2 ou le facteur 2^2 ?
c. m ne contienne pas le facteur 3 ?
d. m contienne le facteur 3, ou le facteur 3^2 , ou le facteur 3^3 ?

4. Comment faut-il choisir x et y de telle façon que l'on ait PGCD(x ; y) = 18

Exercice 4 :

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (a ; b) est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x : $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=x^k-1$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu-nv=d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Exercice 6 :

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.

Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $\overrightarrow{OM'}=2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$.

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$.

Les coordonnées (x' ; y') de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x' ; y')$ de G×H tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x' ; y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x ; y)$ correspondant aux couples $(x' ; y')$ trouvés.

Exercice 7 :

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres $a_n = 4\times10^n - 1$, $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$.

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (E) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (E).

c. Résoudre l'équation (E).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation $7^n - 3\times2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 32)$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 5)$.

d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Partie 2 : Nombres complexes

Exercice 1 :

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Proposition : Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel *n*, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de *n*, et déterminer la limite de la suite (b_n).

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes *z* et *z'* : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (inégalité triangulaire).

Montrer que pour tout entier naturel *n*, $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $|a_n| \leq u_n$.

En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 2 :

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre *j* et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre *j*

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+z+1=0$.

b. Vérifier que le nombre complexe *j* est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe *j*, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

a. $j^3 = 1$;

b. $j^2 = -j-1$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, *j* et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit *a*, *b*, *c* trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+bj+cj^2=0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres *a*, *b*, *c* dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a-c=j(c-b)$.

2. En déduire que AC = BC .

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

3. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2(b-c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 :

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0=0$, et telle que : $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n+1$, pour tout entier naturel *n*. On note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. a. Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe *s*, dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω, d'affixe ω.

b. Démontrer que le triangle ΩA_nA_{n+1} est isocèle rectangle.

3. a. Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $\Omega A_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. À partir de quelle valeur de *n* les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?

4. Pour tout entier naturel *n*, on note a_n la longueur A_nA_{n+1} et L_n la somme $\sum_{k=0}^{n}a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonal A_0A_1 … A_nA_{n+1}.

Déterminer la limite de L_n quand *n* tend vers $+\infty$.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 5 :

1) Soit l'équation (E) : $z^5=1$

a) Résoudre (E) dans C et montrer que la somme de ses solutions est nulle

b) Déduire que : $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

c)Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2+2x-1=0$

d) Déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

2) Soit l'équation (E') : $(z-1)^5=(z+1)^5$, $z\in C$

a)Démontrer que si z_0 est solution de (E'), alors ; $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|=1$

b) En déduire que les solutions de (E') sont imaginaire pures puis résoudre (E'

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par *A* et *B* les points d'affixes respectives 2 et 3.

On fera un dessin (unité graphique : 2 cm) qui sera complété selon les indications de l'énoncé.

On désigne par *f* l'application du plan qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* défini par l'égalité : $z'=z^2-4z+6$.

1. Cette transformation admet-elle des points invariants ?

2. a. Déterminer le(s) point(s) admettant l'origine *O* comme transformé.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

b. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$. Déterminer la forme algébrique du complexe $\frac{z_1 - 3}{z_1}$, donner son argument et en déduire la nature du triangle OBM_1.

c. Démontrer, sans nouveau calcul, que les points O, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle (C) que l'on précisera et construira. Placer les points M_1 et M_2.

3. a. Vérifier que pour tout point M du plan d'affixe z on a : $z' - 2 = (z-2)^2$.

b. On désigne par (Γ) le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. Justifier que les points M du cercle (Γ) sont caractérisés par une affixe z vérifiant : $z = 2 + \sqrt{2}\,e^{i\theta}$, où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

c. Montrer, à l'aide des deux questions précédentes, que si M appartient au cercle (Γ), alors l'affixe z' de M' vérifie : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$.

d. En déduire que M' est situé sur un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon. Construire Γ'.

e. Déterminer l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'})$ en fonction de $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$.

4. Application : On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$; D' est son image par f.

a. Ecrire sous forme exponentielle le complexe $d - 2$. En déduire que D est situé sur le cercle (Γ).

b. A l'aide de la question **3. d.** donner une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AD'})$ et placer le point D' sur le dessin.

c. Démontrer que le triangle OAD' est équilatéral.

Partie 3 : Calculs vectorels dans l'espace

Exercice 1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}.$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\,;-4\,;-1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

Étudier les variations de f. Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ? Dans la suite, on désignera ce point par I. Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

EXERCICE 2 :

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et K celui de (G ; 2) et (C ; 1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Γ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K sur la figure de l'annexe qui sera rendue avec la copie.

2. Soit Ω le point de Γ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal $\left(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.

4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).

5. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x ; y ; z).

a. Démontrer que M appartient à Γ si, et seulement si, le triplet (x ; y ; z) est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Γ ?

b. Vérifier que P et Q appartiennent à Γ. Tracer Γ sur la figure.

6. a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Dans l'espace, on considère un tétraèdre *ABCD* dont les faces *ABC, ACD* et *ABD* sont des triangles rectangles et isocèles en *A.* On désigne par *E*, *F* et *G* les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*BC*], et [*CA*].

On choisit *AB* pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par (P) le plan qui passe par *A* et qui est orthogonal à la droite (*DF*). On note *H* le point d'intersection du plan (P) et de la droite (*DF*).

a. Donner les coordonnées des points *D* et *F*.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (*DF*).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

d. Calculer les coordonnées du point *H.*

e. Démontrer que l'angle EHG est un angle droit.

2. On désigne par *M* un point de la droite (*DF*) et par *t* le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique EMG.

Le but de cette question est de déterminer la position du point *M* pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle *MEG* est isocèle en *M*. En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

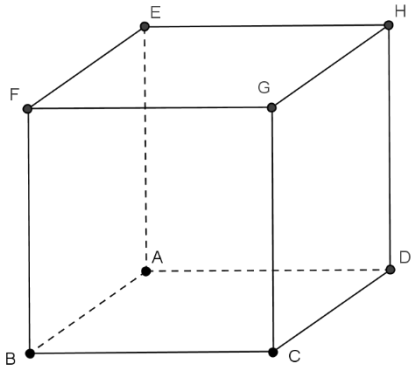
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

Exercice 4 :

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$



On considère les points $I\left(1\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$, $J\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)$ et $L(a\,;1\,;0)$ avec *a* un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a=\frac{1}{4}$.

Partie B

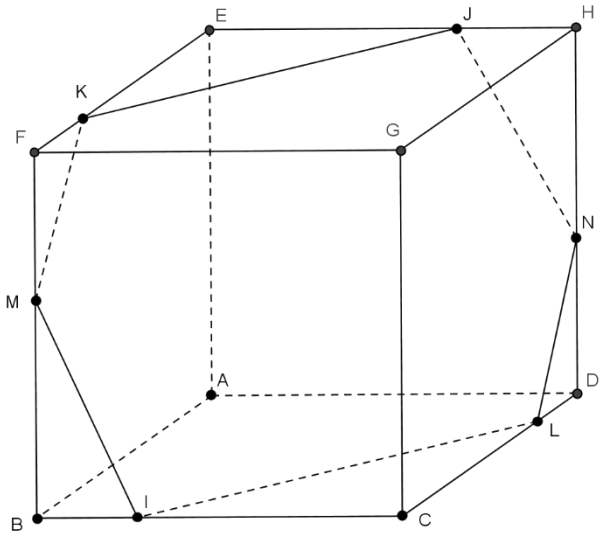
Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a=\frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;1\,;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (JJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

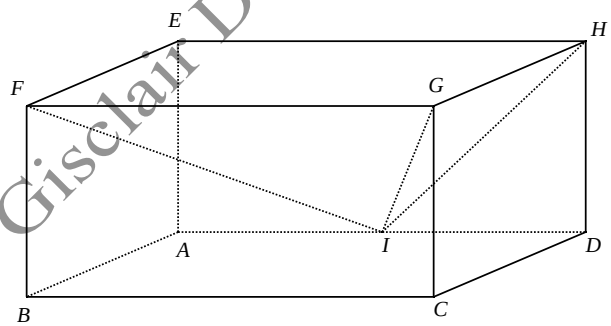
c. En déduire les coordonnées des points M et N.

EXERCICE 5 :

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit *ABCDEFGH* tel que :

$AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.

On appelle *I* le milieu de [*AD*]. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points *F*, *G*, *H*.

2. a. Montrer que le volume *V* du tétraèdre *GFIH* est égal à $\frac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle *FIH* est rectangle en *I*.

En exprimant *V* d'une autre façon, calculer la distance *d* du point *G* au plan (*FIH*).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2 ; 1 ; –1).

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (*FIH*).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (*FIH*).

c. Retrouver par une autre méthode la distance *d* du point *G* au plan (*FIH*).

4. a. La droite (*AG*) est-elle perpendiculaire au plan (*FIH*) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection *K* de (*AG*) et de (*FIH*).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre *G* passant par *K*. Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (*FIH*) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection).

Basique, N. Calédonie 2009

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points : *A*(4 ; 0 ; 0), *B*(0 ; 2 ; 0), *C*(0 ; 0 ; 3) et $E\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{9}\right)$.

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point *E* au plan (*ABC*).

1. a. Montrer que les points *A*, *B* et *C* déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4). Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (*ABC*).

c. Montrer qu'une équation du plan (*ABC*) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. a. Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (*ABC*) et passe par le point *E*.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal *G* du point *E* sur le plan (*ABC*).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points *E* et *G* la distance δ_E.

Intersections, Liban 2010

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points *A*(1 ; −2 ; −1) et *B*(3 ; −5 ; −2).

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$.

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k, k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$.

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point *C* dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point *C* et de vecteur directeur $\vec{w}(1;1;-1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Plans, Polynésie 2009

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points : *A*(1 ; −1 ; 3), *B*(0 ; 3 ; 1), *C*(6 ; −7 ; −1), *D*(2 ; 1 ; 3) et *E*(4 ; −6 ; 2).

1. a. Montrer que le barycentre du système {(*A*, 2), (*B*, −1), (*C*, 1)} est le point *E*.

b. En déduire l'ensemble Γ des points *M* de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$.

2. a. Montrer que les points *A*, *B* et *D* définissent un plan.

b. Montrer que la droite (*EC*) est orthogonale au plan (*ABD*).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABD*).

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*EC*).

b. Déterminer les coordonnées du point *F* intersection de la droite (*EC*) et du plan (*ABD*).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que le plan (*ABD*) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

PARTIE 4 : Suites numériques

EXERCICE 1 :

1)Soit la fonction g définie de $]0;+\infty[$ dans IR par $g(x)=1+\frac{1}{x}$. Construire la courbe de g et la droite (L) d'équation $y=x$

2)Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=1+\frac{1}{U_n}\end{cases}$

a.Démontrer par récurrence que pour tout n de N, $\frac{3}{2}\le U_n\le 2$

b.Construire les termes U_1 ; U_2 ; U_3 ; et U_4 sur l'axe des abscisses.

c.Démontrer que sur $\left]\frac{3}{2};2\right[$; $|g'(x)|\le\frac{4}{9}$

d.Démontrer que $|g(U_n)-g(l)|\le\frac{4}{9}|U_n-l|$ où l est la solution de l'équation $g(x)=x$

e.En déduire que $|U_n-l|\le\left(\frac{4}{9}\right)^n|U_0-l|$

f.Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

EXERCICE 2 :

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que 0 <a <b. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : u_0= a, v_0= b et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : u_n>0 et v_n>0.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{v_n - u_n}{2} \right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

EXERCICE 3 :

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur · par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n} \right)$ (‡).

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x} \right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n > \sqrt{7}$.

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation (‡) que la limite L de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L} \right)$. Déterminer L.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \frac{\left(u_n - \sqrt{7} \right)}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par : $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

EXERCICE 4 :

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_1 = 12, v_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, démontrer que $u_n \geq v_n$. En déduire que $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite constante.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis les limites de (u_n) et (v_n).

EXERCICE 6 :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

1. On considère la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$[par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

Proposition : Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

a. On pose $x=\frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

PARTIE 5 : Primitives

Exercice1 :

Déterminez une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants : (pensez à vérifier vos réponses)

1. $f(x)=12x^5-4x^3+1$; $I=\mathbb{R}$ 2. $f(x)=3-\frac{4}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$ 3. $f(x)=\frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I=\mathbb{R}$ 4. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I=]1;+\infty[$

5. $f(x)=\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I=\mathbb{R}$ 6. $f(x)=-\cos x+2\sin x$; $I=\mathbb{R}$ 7. $f(x)=\cos x\sin^3 x$; $I=\mathbb{R}$

8. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ 9. $f(x)=(2x+1)^2$; $I=\mathbb{R}$ 10. $f(x)=\frac{x^4-4x^2-2}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$

11. $f(x)=(3x-1)^2$; $I=\mathbb{R}$ 12. $f(x)=\frac{2x^4-3x^2+1}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$ 13. $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$; $I=]1;+\infty[$

14. $f(x)=\frac{-5x}{(x^2+1)^3}$; $I=\mathbb{R}$ 15. $f(x)=\cos x\sin^4 x$; $I=\mathbb{R}$ 16. $f(x)=-\sin x+2\cos x$; $I=\mathbb{R}$

17. $f(x)=\frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I=\mathbb{R}$ 18. $f(x)=-1+\frac{3}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$ 19. $f(x)=7x^3-2x^2+3$; $I=\mathbb{R}$

20. $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}+\sin x$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ 21. $f(x)=3+\cos x$, $I=\mathbb{R}$ 22. $f(x)=\sin 3x$, $I=\mathbb{R}$ 23. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $I=\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$

24. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$, $I=]3;+\infty[$ 25. $f(x)=x^2(x^3+2)^3$, $I=\mathbb{R}$ 26. $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-4\sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right)+\frac{5}{3}\cos\frac{2\pi}{3}$

Exercice1:

I) Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes sur I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=(2x^2-2)\sqrt{(x^3-3x+6)^5}$; I=IR 2) $f(x)=\frac{3}{x}\cos(\ln\sqrt{x})$); I=[0; +∞[

3) $f(x)=\frac{5}{\cos^2 2x\sqrt{\tan^3 2x}}$; $I=\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ 4) $f(x)=Cos^3 x\,Sin^n x$;I=IR

0.5 ptx4

Exercice1 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ par: $f(x)=\frac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x distinct de $-\frac{1}{2}$,

$f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(2x+1)^2}$.

En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Proposition : Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Déterminer la primitive *F* de *f* sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ vérifiant *F*(0) = 1.

Exercice2 :

Soit $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}$

1) Sur quel intervalle f possède-t-elle au moins une primitive?

2) Montrer que $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ où a et b sont des réels à déterminer.

3) En déduire la primitive de f qui s'annule à l'origine.

Exercice3 :

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}$

1) Sur quel intervalle f possède-t-elle au moins une primitive?

2) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{2x+1}+\dfrac{c}{x+1}$

3) En déduire la primitive de f qui s'annule à l'origine.

Exercice4 :

On considère les fonctions numériques suivantes : $f(x)=Sin^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)+\frac{x+1}{x-1}$ $u(x)=Sin^3x$ et $v(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

1) Déterminer deux réels a et b tel que pour $x\in]1,+\infty[$ on ait $v(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$ et en déduire une primitive V de v sur $]1,+\infty[$.

2) Linéariser Sin^3x et en déduire une primitive U de u sur $]1,+\infty[$.

3) En déduire l'expression de F(x) où F est la primitive de f qui s'annule en 2.

PARTIE 7 : Fonctions

Exercice 1 :

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; $+\infty$ [par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; $+\infty$ [et calculer $f'(x)$.
3. Soit *u* la fonction définie sur]0 ; $+\infty$ [par $u(x)=\ln x+x-3$.

a. Etudier les variations de *u*.

b. Montrer que l'équation *u*(*x*) = 0 possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3]. Montrer que 2,20 < α < 2,21.

c. Etudier le signe de *u*(*x*) sur]0 ; $+\infty$ [.

4. a. Etudier les variations de *f*.

b. Exprimer ln· comme un polynôme en α. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de *f*(α) d'amplitude 2×10^{-2}

5. a. Etudier le signe de *f*(*x*) sur]0 ; $+\infty$ [.

b. Tracer la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm..

Problème (09.25pts)

Le problème comporte deux parties *A* et *B.*

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Partie A (05.25pt)

1) Soit *f* la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$

a) Étudier les variations de *f* sur]0 ; +∞[et préciser ses limites en 0 et en +∞. **01 pt**

b-i) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur]0 ; +∞[. On note α cette solution **0.5 pt**

ii) Etablir l'encadrement $1,30 < \alpha < 1,35$. **0.5 pt**

c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. **0.5 pt**

d) Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$. **0.25 pt**

2-a)Montrer que l'équation $f(x) = 0$est équivalente à l'équation $g(x) = x$avec$g$ est la fonction définie sur, $I = [1,30 ; 1,35]$ Par $g(x) = \sqrt{2 - lnx}$ **0.5 pt**

b) Justifier que g est décroissante sur I et prouver que $g(I) \subset I$ **01pt**

c) Etablir que $\forall x \in I, -\frac{1}{3} \leq g'(x) \leq$ 1/3 **0.5 pt**

d) En déduire que $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$ **0.5 pt**

Partie B (04pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1,30$et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. **0.5 pt**

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$. **0.5 pt**

3-a)En déduire que pout tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{100}(\frac{1}{3})^n$. **0.5 pt**

b) Déterminer la limite de la suite (u_n). **0.25 pt**

4) Déterminerun entier natureln_0 tel que$|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$ **0.5 pt**

5-a)En utilisant le sens de variation de$g$, prouver que $u_{n_0} - \alpha$ et $u_{n_0+1} - \alpha$ sont de signes contraires **0.75 pt**

b) En déduire que est compris entre u_{n_0} et u_{n_0+1} **0.5 pt**

6) Déterminer l'entier a tel que, $(a)10^{-6} < \alpha < (a+1)10^{-6}$ (On admet que $u_{10} \approx 1,3140967$ et$u_{11} \approx 1,314096$

Exercice 3 (5 points)

Partie A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. On note · sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit *g* la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction *g* est positive sur $[1;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout *x* de $[1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de *f* sur $[1;+\infty[$.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

c. Montrer que la droite ⋅ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe ⋅.

d. Étudier la position de la courbe ⋅ par rapport à la droite ⋅.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de ⋅ et ⋅.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln k}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 4 :

Le but du probléme est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; 2[par : $f(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repére orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

1. Résoudre dans l'intervalle]0 ; 2[l'équation : $1+2\ln x = 0$.

2. On considére la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; 2[par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$.

a. Déterminer la dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle]0 ; 2[.

b. Démontrer que la fonction g admet en $\frac{1}{\sqrt{e}}$ un maximum égal à $\frac{2}{\sqrt{e}} - 2$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle]0 ; 2[.

Partie B - Étude et représentation graphique de la fonction f

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle]0 ; 2[. En déduire l'existence de deux asymptotes á la courbe C.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle]0 ; 2[: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)^3}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 2[.

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b. Tracer T et C.

EXERCICE 6 :

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{\ln x}{x}$, où ln x désigne le logarithme népérien de x.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par : $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Les limites aux bornes ne sont pas demandées.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle]0 ; $+\infty$[. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe C que l'on précisera.

2. Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Proposition : Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

3. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+1$. Sa courbe représentative P dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est donnée ci-après.

a. Déterminer la limite de [*f*(*x*) − *h*(*x*)] en $+\infty$.

b. Déterminer le signe de [*f*(*x*) − *h*(*x*)]. Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes C et P ?

4. Tracer la courbe C sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction : $x\to\frac{1}{x}\ln x$ sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

2. On appelle *S* l'aire en cm², de la partie du plan limitée par les deux courbes C et P et les droites d'équations *x* =1 et *x* = 4. Donner la valeur exacte de *S* puis la valeur arrondie au mm².

Problème :10 points

Partie A

On considère la fonction *f* déflnie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. En remarquant que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle]0 ; $+\infty$[, *f*(*x*) est égal à $\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$, déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

Montrer que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle]0 ; $+\infty$[, $f'(x)=\frac{-2+\ln x}{x^2}$.

b. Étudier le signe de −2 +ln *x* sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[. En déduire le signe de f' sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

4. On note *I* le point d'intersection de C et de l'axe $(O;\vec{i})$. Déterminer les coordonnées du point *I*.

5. On note T la tangente à la courbe C au point *A* d'abscisse 1. Déterminer une équation de la droite T.

6. Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C et la droite T.

On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $(O;\vec{i})$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $(O;\vec{j})$.

Partie B

1. a. On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par $g(x)=(\ln x)^2$. On note g' la fonction dérivée de la fonction *g* sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

Calculer $g'(x)$.

b. En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.

2. a. Calculer $J=\int_1^e f(x)\,dx$ où *f* est la fonction définie dans la partie A.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale *J*.

***Problème :* (11 points)**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[par $g(x)=\ln x-2x^2-1$.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée).

2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur I'intervalle $]0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Calcul d'une aire

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

2. On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

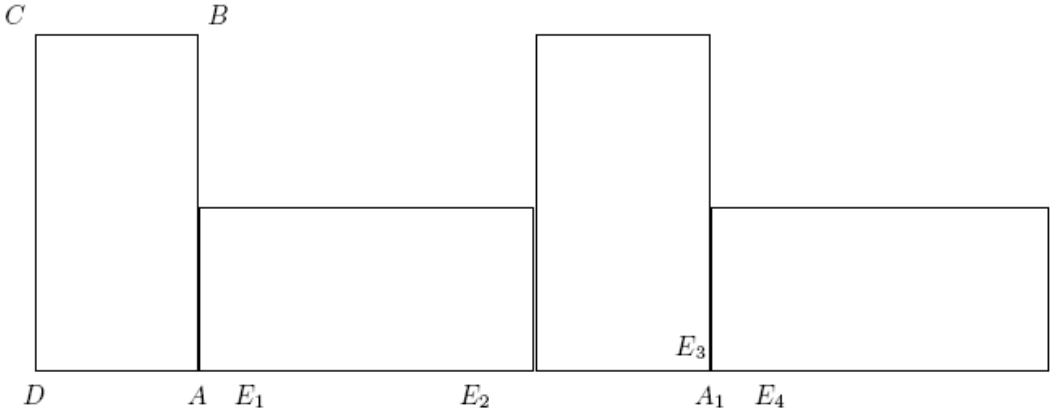
a. Hachurer sur le graphique la partie du plan définie ci-dessus.

b. Calculer la valeur exacte du nombre réel A.

PARTIE 8 : ISOMETRIE ET APPLICATIONS AFFINES

Exercice 1 :

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



1. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Proposition : Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie r'(A) = N et r'(B) = P. Déterminer l'angle de r'.

b. Montrer que l'image de *ABCD* par r' est *AMNP*.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles *ABCD* et *AMNP* par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.

Sur la demi-droite [*DA*), on définit ainsi la suite de points (A_k), $k > 1$, vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$.

Sur la même demi-droite, on considère la suite de points (E_n), $n > 1$, vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à [A_k, A_{k+1}]. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.

Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres n = 7 100 et k = 3 100 forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

Exercice2 :

ABC est un triangle tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB < AC.$ (C) est le cercle circonscrit à ABC et O est son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point de [AC] tel que AB=CP. La droite (OE) coupe (C) en I et J, tels que J et A soient sur le meme arc de corde [BC].

1-a) Faire une figure.

b) quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2-a) Justifier qu'il existe une unique rotation r telle que : r(A)=P et r(B)=C. Déterminer son angle.

b) démontrer que son centre est un point de (C), que l'on précisera.

c) Quel es la nature du triangle JAP ?

3) a) déterminer l'image de B par roS_B , où S_B est la symétrie centrale de centre B.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de roS_B

Exercice 3 :

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après.

ABCD est un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère EFGH est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré ABCD.

Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. On se propose de démontrer que EFGH est un carré.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment [AN]. Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment [BP]. En déduire r(F) et la nature du triangle FOG.

b. Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2. Comparaison des aires des carrés ABCD et EFGH

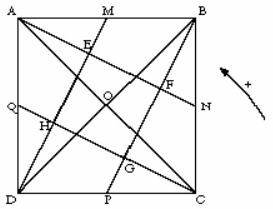
a. Justifier les égalités AE = EH = DH et AE = 2QH.

b. Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q. Démontrer que AEHK est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c. En déduire le rapport entre les aires des carrés ABCD et EFGH.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

3. On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités : $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. On construit le quadrilatère E'F'G'H' en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. Pour démontrer que E'F'G'H' est un carré ?



Exercice 4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et de B.

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

Exercice 5:

Dans le plan orienté, on considère un triangle *ABC* tel que *AB* = *AC* et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. Soient *I*, *J* et *K* les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*] et [*AB*].On appelle *R* la rotation de centre *I* et d'angle $\frac{\pi}{2}$, *T* la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$. On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

1-a) Déterminer l'image de *K* par *f* et l'image de *J* par *g*.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de *f* et *g*.

2-a) Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$.

b) Chercher l'image de *A* par cette transformation et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

3) Soit *M* un point du plan, M_1 l'image de *M* par *f* et M_2 l'image de *M* par *g*.

a)Déterminer $g \circ f^{-1}(M_1)$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

4) On choisit le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

a)Déterminer les affixes des points *I*, *J* et *K*.

b) Donner l'expression complexe de *f* et celle de *g*.

c)Déterminer les affixes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$. Conclure.

Exercice 6 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application *f* qui au point *M* d'affixe *z* fait correspondre le point *M'* d'affixe *z'* tel que $z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}$.

1. On note *x* et *x'*, *y* et *y'* les parties réelles et imaginaires de *z* et *z'*. Démontrer que $\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*.

   b. Quelle est la nature de l'application *f* ?

3. Déterminer l'ensemble D des points *M* d'affixe *z* tels que *z'* soit réel.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points *M* d'affixe $z=x+iy$ tels que $x=1$ et $y\in\mathbb{Z}$. Le point $M'=f(M)$ a pour affixe *z'*. Déterminer les entiers *y* tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5)

Exercice 7 :

Similitude & suite, Am. du Sud, sept. 2005

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm.

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives *a*, *b*, *c* et *d* telles que : *a* = *i*, *b* = 1 + 2*i*, $c=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et *d* = 3 + 2*i*.

On considère la similitude directe *s* qui transforme *A* en *B* et *C* en *D*. Soit *M* un point d'affixe *z* et *M'*, d'affixe *z'*, son image par *s*.

1. Exprimer *z'* en fonction de *z*. Déterminer les éléments caractéristiques de *s*.

Soit (*Un*) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=2U_n+1 \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude *s*, les termes de la suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $U_n=2^n-1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels *n* et *p* non nuls tels que $n\geq p$, $U_n=U_p(U_{n-p}+1)+U_{n-p}$.

La notation pgcd(*a* ; *b*) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels *a* et *b*. Montrer pour $n\geq p$ l'égalité $\mathrm{pgcd}(U_n,U_p)=\mathrm{pgcd}(U_p,U_{n-p})$.

6. Soit *n* et *p* deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\mathrm{pgcd}(U_n,U_p)=U_{\mathrm{pgcd}(n,p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005} , U_{15}).

Exercice

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en *O* et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel *n* les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
- B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. a. **Démonstration de cours**. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.

b. Soit *s* cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est *O*. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, la similitude *s* transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points *O*, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers *n* et *p* sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle A_0B_0 est isocèle en Ω.

c. Calculer la distance A_0B_4.

d. Démontrer que $\Omega A_0=4\Omega B_4$.

e. En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

Exercice 2 : **(5 points)**

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$

1)Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω, le rapport K et l'angle θ.

2)Soit M_0, le point d'affixe $z_0 = 1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier n, le point M_{n+1} = f(M_n)

a.En utilisant la première question, calculer ΩM_n en fonction de n.

b.0Déterminer les coordonnées des points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c.A partir de quel rang n_0 a-t-on : pour tout n $\geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon r = 0,05 ?

3- a - Calculer M_0M_1.

b- Pour tout entier naturel n, On note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c- On pose $I_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + d_n$. Calculer I_n en function de n et en déduire la limite de I_n en $+\infty$.

4) Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n, l'isobarycentre des points M_0, M_1, M_2,..., M_n.

a- Montrer que pour tout n>0, $n > 0,\ \ \Omega M \leq \frac{16}{n+1}$

b- En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 1 :

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle *r* la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et *h* l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $\sigma : z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.

c. Soit *M* un point quelconque du plan, d'affixe *z*. On désigne par *M'* son image par σ et on note *z'* l'affixe de *M'*. Montrer que $z - z' = i(2 - z')$.

2. a. Démonter que : si *A* est un point donné d'affixe *a*, alors l'image du point *P* d'affixe *p* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point *Q* d'affixe *q* telle que $q - a = i(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour *M* distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel *n*, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$

a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, l'affixe a_n de A_n est donnée par : $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

b. Déterminer l'affixe de A_3.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n > n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

La perfection n'étant pas humaine, nous vous tout humblement a nous faire parvenir vos remarques par WhatSapp au 674 06 85 83 ou contactez-nous par

site web : www.E-excellencia-Academy.com

Ou par e-mail :gisclairdongmo@yahoo.fr

« Toujours dire "c'est dure" est une expression implicite de l'incompétence »

Proposition : Boris Gisclair DONGMO.

Proposition: Boris Gisclair DONGMO (674068583/697247018)

COLLEGE POLYVALENT BILINGUE « LES AIGLONS » Discipline-Unité-Travail					
Examen	**Epreuve**	**Coef**	**Durée**	**Classe**	**Année Scolaire**
Séquence 3	**Mathématiques**	**05**	**4H**	**TleC**	**2018/2019**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations

EXERCICE 1 : 5 points

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD, et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A' le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD). **0,5pt**
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$ puis calculer AA'. **0,75pt**
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.
   a. Montrer que $G \in [AA']$ et détermine la longueur AG. **0,5pt**
   b. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{Z})$ des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ **0,5pt**
4. Soit J le symétrique de A par rapport à G.
   a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$. **0,5pt**
   b. Démontrer l'égalité $JC^2 - JD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et en déduire que $JC = JD$. **0,75pt**
5. a. Donner une interprétation géométrique du nombre réel $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$. **0,25pt**
   b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ **0,5pt**
   c. Déterminer et construire l'ensemble (Π) des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \frac{1}{2}AB$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

Dans cette partie, le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

I-On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout M point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. Déterminer le rapport et l'angle de f. **0,75pt**
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. Calculer ΩM_0, puis donner $mes(\vec{u}, \widehat{\Omega M_0})$. **0.5pt**
3. On considère la suite des points $(M_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel par : $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$. **0,75pt**
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le point M_n soit situé à l'extérieur du disque de centre Ω et de rayon 10^2. **0,5pt**
4. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $(E): 7x - 12y = 1$. **0,5pt**
   b. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $M_n \in [\Omega, \vec{u})$. **0,5pt**
   c. Donner l'ensemble (Φ) des points M_n d'affixe z_n telle que $Im(z_n) = 1$ et $Re(z_n) \geq 0$. **0,5pt**

II. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et $-2 + i$, g une application de $P\backslash\{A\}$ vers P qui à tout point $M'(z')$ tel que $z' = i\frac{Z+2-i}{Z-i}$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\arg(z') \equiv \pi[2\pi]$. **0,5pt**

Problème : 10,5points

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :$f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique étant égale à 2cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f . Etudier les limites de f aux bornes de D. préciser les asymptotes de la courbe (C). **0,75pt**
   b) Etudier les variations de f ;dresser son tableau de variation.
   c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. **1,25pt**
   d) Construire avec soin (T) et la courbe (C). **1pt**
2. On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$une solution unique.

a) Etudier les variations de la fonction derivée f' sur$[0; 1]$.Démontrer que pour tout x de l'intervalle$[0; 1], on\ a$: $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$. **1pt**

b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur$[0,1]$ par :$g(x) = f(x) - x$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$une solution unique α. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$. **1pt**

3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α.

   Soit (u_n) la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, N, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   a) Démontrer par reccurrence que :pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$. **0,5pt**
   b) En utilisant l'inégalite des accroissements finis, démontrer que :
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$. En déduire que : **0,5pt**
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ **0,5pt**
   c) Démontrer que la suite(u_n) est convergente.Quelle est sa limite ? **0,5pt**
   d) Déterminer un entier n_0 tel que : si n≥ n_0, alors$|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$. **0,5pt**

4. Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale I=$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$.
   a) Justifier l'existence de I et en donner une interprétation graphique. **0,5pt**
   b) On pose :J=$\int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)e^x\, dx$ et K=$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\, dx$. Vérifier que :4I=J+K. **0,5pt**
   c) Calculer J. **0,5pt**
   d) Quelle est l'image par f du segment$\left[0; \frac{1}{2}\right]$? En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera. **1pt**
   e) A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I. En déduire un encadrement de I, d'amplitude10^{-2} par des nombres décimaux. **0,5pt**

Léonard de Vinci a dit : *« Tout obstacle renforce la détermination... »*

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES **REPULIQUE DU CAMEROUN**
COLLEGE PASCAL TOHOUA KAMGA **Paix-Travail-Patrie**
CLASSE : Tle C **COEF : 6 Durée : 03H**

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES :
THEME : FONCTION LOGARITHME ET SUITE NUMERIQUE

EXERCICE 1:

PARTIE A :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par u(x) = $\frac{x}{x+1} lnx$.

1. **Justifier que l'ensemble de définition de u est]0, +∞[.**
2. **Montrer que u est prolongeable par continuité en 0.**
3. **Définir le prolongement par continuité v de u en 0.**

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur [0 ;+∞[par : $\begin{cases} \frac{x}{x+1} lnx & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. **Soit φ la fonction définie sur]0, +∞[par : φ(x) = x + 1 + lnx.**
   a. **Etudier les variations de φ et dresser son tableau de variation.**
   b. **Montrer que l'équation φ(x) = 0 admet une solution unique $\beta > 0$.**
   c. **Vérifier que 0,27< β < 0,28.**
   d. **En déduire suivant les valeurs de x le signe de $\varphi(x)$.**
2. **Etude de la continuité et de la dérivabilité de f.**
   a. **Etudier la continuité de f en 0**
   b. **Etudier la dérivabilité de f en 0.**
   c. **Interpréter géométriquement le résultat à la question 2.b**
3. **Etude des variations de f.**
   a. **Vérifier que f(β) = - β**
   b. **Déterminer la limite de f en +∞.**
   c. **Montrer que pour tout réel x positif, on a : f'(x) = $\frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$.**
   d. **En déduire les variations de f et son tableau de variation**
   e. **Représenter dans un repère orthonormé la courbe de f. (unité sur les axes : 2cm)**

PARTIE C

1. **Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une solution unique dans I= [3,4] notée α.**
2. **Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : g(x) = exp (1 + $\frac{1}{x}$).**
   a. **Montrer que g(α) = α**
   b. **Etudier les variations de g.**
   c. **Montrer que g(I) ⊂ I**
   d. **Montrer que pour réel x de I , on a |g'(x)| ≤ $\frac{1}{2}$**
   e. **En déduire que pour tout réel x de I, on |g(x) – α | ≤ $\frac{1}{2}$| x − α|.**
3. **On considère la suite (u_n) définie par u_o = 3 et u_{n+1} = g(u_n).**
   a. **Montrer que pour tout entier naturel n, u_n ∈ I.**
   b. **En déduire que ∀$n \in \mathbb{N}$,on a: | $u_{n+1} - \alpha$ | ≤ $\frac{1}{2}$| $u_n - \alpha$|**
   c. **Montrer que pour tout entier naturel n, on a : | $u_n - \alpha$ | ≤ $\frac{1}{2^n}$.**
   d. **Que dire de la suite (u_n)**
   e. **Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près qui est l'un des termes de la suite (U_n).**

EXERCICE 2

Le Génie De BRAZZA

Soit h la fonction numérique définie sur R par : h(x) = $\frac{2e^x+2x-2}{e^x}$, On désigne par (Γ) la courbe représentative de h dans repère orthonormé.(unité sur les axes :2cm)

1.a) Montrer que l'on peut écrire h(x) sous la forme 2 + $\varphi(x)$ où φ est une fonction que l'on déterminera.

b) Montrer que la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ est 0

c) Etudier les variations de h et calculer h(0)

2.a) montrer que la courbe (Γ) coupe son asymptote en un point I dont on déterminera les coordonnées

b) Ecrire une équation de la tangente (T) de (Γ) au point d'abscisse 0

c) Tracer la courbe (Γ)

3) Soit (D_m) la courbe d'équation y = - m, m étant un réel.

a) Tracer (D_1) et (D_{-2})

b) Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe les solutions de l'équation E_m :

$(2+m)e^x + 2x - 2 = 0$

EXERCICE 3

PARTIE : A

La fonction g est définie sur R par : g(x) = $2e^x + 2x - 7$.

1. Etudier les limites de g en - ∞ et en +∞.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur R et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet dans R une solution unique α tel que : 0,94 $< \alpha < 0{,}941$
4. Etudier le signe de g sur R.

PARTIE : B

La fonction f est définie sur R par : f(x) = $(2x - 5)(1 - e^{-x})$. On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Etudier le signe de f sur R.
2. Etudier les limites de f en - ∞ et en +∞.
3. Calculer f'(x) où f' désigne la fonction dérivée de f, et vérifier que f'(x) et g(x) ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f.
4. a. Montrer que f(α) = $\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la fonction définie par h(x) = $\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$. Sur l'intervalle]-∞ ; $\frac{5}{2}$[puis en déduire à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de f(α).

5. Montrer que la droite (D) d'équation y= 2x – 5 est asymptote à (C_f) en +∞. Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).
6. Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) (unité graph 2cm).

EXERCICE 4

PARTIE : A

Soit h la fonction définie sur ℝ par ; h(x) = $(3e^x - x - 4)e^{3x}$.

1. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout réel x, h'(x) = $(12e^x - 3x - 13)e^{3x}$.
3. Soit f la fonction définie sur ℝ par : f(x) = $12e^x - 3x - 13$. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet 2 solutions réelles de signes contraires

   b. soit α la solution négative et β la solution positive. Montrer que -4,3< α < −4,2. on admet que β est te que : 0,1< β < 0,2.

   c. En déduire e signe de f sur ℝ puis le sens de variations de la fonction h.

   d. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).(unité graphique :1cm pour 0,1 sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10 sur l'axe des ordonnées). Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle [-5 ;-3,9].

   5. Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique b dans l'intervalle]-∞ ;0[. Donner un encadrement de b à 10^{-1} près.

Le Génie De BRAZA

PARTIE: B

On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle I=[0 ;1] tel que h(a) = 0. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) \ln(\frac{x+4}{3})$.

1. **Montrer que dans I, l'équation h(x) = 0 est équivalente à l'équation $\varphi(x) = x$.**
2. **a. Montrer que, pour tout x ∈ I, $\varphi(x) \in I$.**
   b. Montrer que, pour tout x ∈ I,$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{4}$.
   c. Calculer $\varphi(a)$.
3. **On considère a suite (U_n) avec n∈ N d'éléments de I définiepar:** $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

a. Montrer que pour n ∈ ℕ, $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|U_n - a|$

b. Montrer que pour n ∈ ℕ, $|U_n - a| \leq (\frac{1}{4})^n$

c. En déduire que la suite (U_n) converge. Préciser sa limite.

d. Déterminer un nombre entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

4. **Donner une valeur approchée de U_p à 10^{-4}.**

EXERCICE 5 :

On considère la fonction f définie par f(x) = $\frac{x-1}{x} lnx$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère du plan

1) Etude d'une fonction auxiliaire

a) Etudier les variations de la fonction g définie dans]0 ;+∞[par g(x) = x – 1 + lnx

b) Dresser le tableau de variations de g

c) Calculer g(1) puis en déduire le signe de g sur]0 ;+∞[

2) Etude de la fonction f

a) déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites en ses bornes

b) Démontrer que pour tout x ∈ D_f ; f(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$

c) En déduire le signe de f'(x) ; son sens de variation puis dresser son tableau de variation

d) calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus

3. Représentations graphiques

a) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe (Γ) d'équation y = ln x

b) calculer $\lim_{x \to +\infty}[f(x) - ln\, x]$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

c) construire la courbe (Γ) et (C) dans le même repère

4. Etude d'une réciproque

Soit h la restriction de f à [1 ;+∞[

a) prouver que h réalise une bijection de [1 ;+∞[dans un intervalle I à préciser

b) tracer les courbes de et de h^{-1} dans un autre repère

5. Détermination d'une Primitive

a) prouve que pour tout x ∈]0; +∞[, f(x) = ln x - $\frac{1}{x} ln\, x$

b) calculer la dérivée de la fonction u(x) = xlnx – x

c) en deduire la primitive F de la fonction f sur]0 ;+ ∞[qui s'annule en 1.

EXERCICE 6 :

Soit h la fonction definie pour $x > \frac{1}{2}$ par $h(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

1) Démontrons $h(x) > 1$

2) On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$ (V_n) et (w_n) sont d'autres suites définies par $V_n = \frac{U_n+1}{U_n}$ et $w_n = \ln(V_n)$

a) Vérifier que ces 2 suites sont définies

b) Calculer w_0 et w_1 et montrons que (W_n) est suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

c) Pour $n \in N$ exprimer W_n puis V_n en fonction de n

d) Montrer que $U_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2n}}$ et en déduire $\lim_{n\to\infty} Un \in N_n$

EXERCICE 7 :

(U_n) et (V_n) sont deux suites définies par $U_0 = 9$ et pour $n \in N$ par $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$ et $Vn = Un + 6$

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique à terme positifs. Préciser sa raison

2) Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V_n$ puis $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ On fonction de n

3) Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n$ et $\lim_{n\to\infty} S'_n$

4) On définit la suite (Wn) pour $n \in N$ $Wn = \ln(Vn)$

a) Montrer que (Wn) est une suite arithmétique. Préciser sa raison

b) Exprimer $S''_n = W_0 + W_1 + W_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W_n$ en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to\infty} S''_n$

5) Calculer le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ en fonction de n. en déduire $\lim_{n\to\infty} P_n$

Ministère des Enseignements Secondaires **Classe : $T^{le}C$** **Coef : 5** **Durée : 4 heures**

Academic College of Excellence **Évaluation sommative 1 : Octobre 2019**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.

Exercice 1 [3 Points]

On considère le polynôme complexe P défini par $P(z) = z^3 - (1+\mathrm{i})z^2 - (8+4\mathrm{i})z - 4 + 28\mathrm{i}$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure z_0. **[0,5pt]**
2. Déterminer trois nombres complexes a; b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. **[0,5pt]**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1+3\mathrm{i})z - 14 - 2\mathrm{i} = 0$. **[0,75pt]**
4. Achever alors dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équation $P(z) = 0$. **[0,25pt]**
5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, $(0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. On considère les points $A(2\mathrm{i})$, $B(-4-2\mathrm{i})$ et $C(3-\mathrm{i})$.
   a) Placer les points A, B et C sur le repère. **[0,25pt]**
   b) Calculer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et déduire la nature du triangle ABC. **[0,75pt]**

Exercice 2 [3,5 Points]

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. **[1pt]**
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2(n^4 - 1)$ est divisible par 5 puis par 60. **[1pt]**
3. On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = (2 - 3\sqrt{5})^n$.
   a) Montrer par récurrence que : $\exists a_n; b_n \in \mathbb{Z} /\ A_n = a_n + b_n\sqrt{5}$ **[1pt]**
   b) Exprimer alors a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n. **[0,5 pt]**

Exercice 3 [3,5 Points]

1. Soient $a; b \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, a^n - b^n = (a-b)(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1})$ **[1 pt]**
2. Soient $a; d; n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d divise n alors $(a^d - 1)$ divise $(a^n - 1)$ **[0,75 pt]**
3. Déduire que $2^{2004} - 1$ est divisible par 3, par 7 puis par 21. **[0,75 pt]**
4. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes $\begin{cases} PGCD(a;b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$ et $\begin{cases} PPCM(a;b) = 168 \\ ab = 1008 \end{cases}$ **[1 pt]**

PROBLEME [10 Points]

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

PARTIE A **[6 Points]**

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par : $\begin{cases} x_0 = 3;\ y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(x_n; y_n) \in (D) : 2x - y - 5 = 0$. **[1pt]**
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 1$. **[0,5pt]**
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{Z}$. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in \mathbb{Z}$. **[1pt]**
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5. **[1pt]**
   b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux. **[0,5pt]**
5. **a)** Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$. **[0,5pt]**
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si x_{n+4} est divisible par 5. **[1pt]**
   c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5. **[0,5pt]**

PARTIE B **[4 Points]**

1. Pour tout nombre complexe $z \neq 2 - \mathrm{i}$, on pose $Z' = \dfrac{z + 1 - 2\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}$. On pose aussi $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z' = x' + \mathrm{i}y'$.
   a) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points $M(x; y)$ du plan tels que $Z' \in \mathbb{R}$. **[1pt]**
   b) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points $M(x; y)$ du plan tels que Z' soit imaginaire pur. **[0.5pt]**
2. On considère le nombre complexe $u = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
   a) Calculer u^2 et l'écrire sous forme algébrique et exponentielle **[1pt]**
   b) Déterminer la forme exponentielle de u. **[1pt]**
   b) Déduire les valeurs exactes de $Cos(\frac{7\pi}{8})$ et de $Sin(\frac{7\pi}{8})$. **[0.5pt]**

Examinateur : NGUEFO Amour , *PLEG mathématiques*

LES GRANDS PROFS DE MATHS
TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES CLASSE DE TC

MODULE1 : ARITHMETIQUES

EXERCICE 1

Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ premiers entre eux. Montrez qu'il existe deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = 1 \text{ et } |u| < |b|,\ |v| \leqslant |a|$$

EXERCICE 2

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n,\ b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$. Montrer ensuite que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

EXERCICE 3

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E *des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}$ vérifiant l'équation de Pythagore :*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

1. *Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le triplet $(a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2)$ appartient à l'ensemble* E. *Donner* 3 *éléments distincts de l'ensemble* E.
2. *On considère un triplet $(x,y,z) \in$ E vérifiant $x \wedge y = 1$.*
   a. *Montrer qu'alors $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$.*
   b. *Montrer que les entiers x et y ne sont pas de même parité.*
   c. *On suppose par exemple que x est impair et que y est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ premiers entre eux tels que*

$$x = p - q,\ y = p + q,\ y^2 = 4pq$$

   Montrer que p et q sont des carrés parfaits.
3. *En déduire l'ensemble* E.

EXERCICE 4

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. *Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.*
b. *Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.*
c. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,*

$$u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$$

et en déduire que

$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$$

d. *Montrer que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$,*

$$u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$$

e. *Montrer que pour tout entier $n \geqslant 5$, si u_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?*

EXERCICE 5

1. *Prouver que pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$,*

$$x^p + 1 = (x+1)\left(1 - x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\right)$$

2. *Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $a^n + 1$ est premier.*
   (a) *Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.*
   (b) *Que penser de l'affirmation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2^n} + 1$ est premier ?*

EXERCICE 6

1 Soit a un entier naturel.
Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2 Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$.
Démontrer que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

EXERCICE 7

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1 Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2 Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \mod 4$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \mod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \mod 4$.

3 *a.* Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b. En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \mod 100$.
Peut-on en conclure que $u_n \equiv 14 \mod 100$?

4 Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n et valider ainsi la conjecture faite à la question 1.

5 Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant et préciser sa valeur.

EXERCICE 8

Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux.

1 Démontrer que si $(a\,;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors le système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$ admet une unique solution x modulo mn.

2 Application : dans une boutique qui vend des macarons, il y a des boîtes de rangement par 5 et par 9.
Une société souhaite acheter un certain nombre de macarons. La préparatrice constate que si elle ne prend que des rangements par 5, il lui reste à la fin 3 macarons. Si elle ne prend que des rangements par 9, il lui reste au final 2 macarons.
Combien la société a-t-il commandé de macarons sachant que ce nombre est compris entre 100 et 140 ?

EXERCICE 9

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 144 + 10\times 12 + 7 = 1711 \text{ en base 10.}$$

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 [3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 [11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 10

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

MODULE2 : PROBABILITES

EXERCICE 1

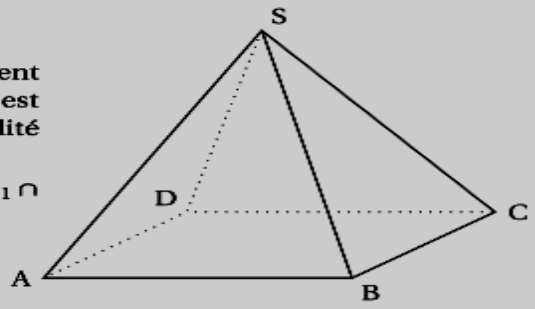
Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.
Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.
2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé. En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.
   a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.
   b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

EXERCICE 2

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».
   a. La fourmi se trouve en A. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :
   • en A ? • en B ? • en C ? • en D ?
   b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note : S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.
   Donner p_1. En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n).$$



2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}.$$

   a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

EXERCICE 3

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :
   A : « Les quatre numéros sont identiques ».
   B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
   C : « Tous les jetons sont blancs ».
   D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
   E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».
   a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\frac{4}{105}$.
   b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.
   c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B. On établit la règle de jeu suivante :
      - Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
      - Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
      - Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
      - Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

      Pour tous les autres tirages, il perd 5 F. G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

EXERCICE 4

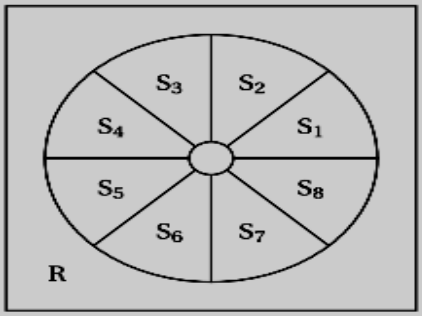
Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,)$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : **A** « Le point M est sur l'axe des abscisses » ; **B** « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\frac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant : **C** : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 5

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :
- un disque D de rayon 1 cm,
- 8 secteurs S_1, S_2, …, S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,
- une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle àl'aire de cette zone.



1. **a.** Déterminer la probabilité $p(D)$ pour que le point soit placé dans le disque D.
   b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.
2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $p(D) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1\,;\,2;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\}$, $p(S_k) = 0{,}078\,5$.
   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1\,;\,2;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\}$;
   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note X la variable alatoire égale au gain algébrique obtenu.
   a. Calculer la probabilité $p(R)$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.
   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.
   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE 6

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a, -5, 1-a)$ et $(1+b, 1, b)$.
Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.
Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
Pour tout entier n, on désigne par :
A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,
B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,
C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

   a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

   b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.
   Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n$ et en déduire que $p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

EXERCICE 7

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.
   Pour chaque tirage :
   - si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
   - si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

   On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).
   On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 8

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
   Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
   puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
      On précisera la raison et le premier terme U_1.
   b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (a_n).
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

EXERCICE 9

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm]. On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{11}.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{12}\right)}$.
3. a. Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
   - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
   - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$. En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral. On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.
4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M_0, M_1, M_2, $\cdots$, M_{11} sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

MODULE3 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIES

EXERCICE 1

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A_1 et A_2 dans le plan.

c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc. Ainsi $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.

EXERCICE 3

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3) Démontrer les égalités suivantes :
   a) $j^3 = 1$;
   b) $j^2 = -1 - j$.
4) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1) En utilisant la question A - 3) b), démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2) En déduire que AC = BC .
3) Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. **a.** Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
   b. Faire une figure et construire les points P et Q.
2. **a.** Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
   b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On suppose que l'origine O du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.
   b. Montrer que $a + b + c = 0$.
   c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.
   d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.
2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.
   a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.
   c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

EXERCICE 5

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A. Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

a. **a.** Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

b. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b. Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

c. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b. On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

EXERCICE 6

Partie A

a. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) &= 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 &= -4+3\mathrm{i} \end{cases}$

b. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2-(1+3\mathrm{i})z+(-4+3\mathrm{i})$.
Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 5 cm.

a. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
Montrer que $b = \mathrm{i}a$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

b. On considère le point C d'affixe $c = -1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

c. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

d. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

e. Prouver que $\mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DA}$.

f. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

EXERCICE 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
L'unité graphique est 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda \cdot z_n + i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

a. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.

a. Vérifier les égalités : $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i$.

b. Étude du cas $\lambda = i$.

a. Montrer que $z_4 = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points M_0 , M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c. Caractérisation de certaines suites (z_n).

a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

EXERCICE 8

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = B$.

1. Déterminer la nature de $r_C \circ r_B \circ r_A$ et préciser la position du point E.

2. a. Montrer qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude.

b. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}\right)$. En déduire $S(E)$.

3. Soit Ω le centre de la similitude S.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrit aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.

4. a. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre $[BD]$.

En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment $[DE]$.

EXERCICE 9

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

a. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

b. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 ; 2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe $f(M) = MA \times MB$.

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

c. **a.** En utilisant 2. c., montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 10

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
- B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A_0 en A_1.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s, puis montrer que la similitude s transforme B_0 en B_1.

b. Démontrer que pour tout entier n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$ (tout élément de réponse, par exemple l'exposé d'une méthode ou la détermination d'une valeur approchée, sera pris en compte).

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Unité graphique : 0,5 cm.
On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

b. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
En déduire que O est un point de la droite (BB').

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

c. On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance OA + OB + OC.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leqslant |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

EXERCICE 12

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2i$, $z_{A'} = -2 + 4i$, $z_B = 3 - i$, $z_{B'} = 5i$.

1. a. Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Monter que $ABB'A'$ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montrer que $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1$.

2. Soit g l'application du plan dans luimême qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z} + 5 - i$.

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ etsoit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2. Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, imagepar g d'un point M quelconque donné du plan.

EXERCICE 13

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$,
$b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

a. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.

b. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

b. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

c. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b. Exprimer z' en fonction de θ.

c. Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

EXERCICE 14

ABC est un triangle équilatéral du plan tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixé et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct. On note a, b, c, m, n et p les abscisses respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité. On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{(A,1-t);(B,t)\}$ et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1 la similitude directe de centre G, de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$. Montrer qu'elle transforme les points A, B et C respectivement en M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

EXERCICE 15

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Prérequis : on rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère le carré $EDGF$ tel que $\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{2}[\mathrm{mod}\,2\pi]$.

1. a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.

b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.

c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.

a. Déterminer son rapport k et son angle θ.

b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.

c. Déterminer le centre Ω de la similitude directe s.

EXERCICE 16

2. 49. Rotations, homothéties, Aix. du Sud, nov 2003 (C)

Le plan complexe estmuni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.

2. Soit I le point d'affixe 1. On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique (C) de centre O. Sa position initiale est en I.

On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcouru le point A sur le cercle (C) après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle (C) à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.

2. On pose $S_m = s_1 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul), $S'_n = s_2 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n \circ S_m$.

a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n}\times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.

b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

c. On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f. Peut-on avoir $OM' = 240$? Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $OM' = 576$.

Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$.

EXERCICE 17

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = AC = l$, où l est un réel fixe strictement positif et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de $[CD]$ et (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$. Placer sur une figure les points A, B, C, D, O et (Γ).

On désigne par s la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1. Méthode géométrique

a. Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude s ; en déduire l'existence de I.

b. Montrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ (**1**) et que $IC = 2\,ID$ (**2**).

c. A l'aide de (**1**), prouver que I appartient au cercle (Γ), puis, en utilisant (**2**), prouver que $ID = l$. Etablir enfin que $BI = BC$.

d. Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de $[IC]$. Préciser la nature du quadrilatère $CADI$. Placer le point I.

2. Utilisation des complexes

On pose $\vec{u} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormal $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe. On note z_0 l'affixe de I.

a. Déterminer les affixes des points B, C et D.

b. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s. Déterminer z_0 et préciser la position de I.

2. 67. Similitude

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre du cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de $[BC]$; N celui de $[CA]$ et P celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n, p.

1. Dans cette question $m = -1 - 3i$ et $n = 2$. Construire les triangles ABC et MNP.

2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à chaque point d'affixe $z = x + iy$ associe le point d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p)$.

Quelle est la nature de f ? Donnez ses éléments caractéristiques.

3. a, b, c désignent les affixes respectives des points A, B, C. Montrez que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que $a = n + p - m$. Exprimez de manière analogue b et c en fonction de m, n et p.

4. On pose $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. On désigne par a', b' et c' les affixes de A', B' et C'. Démontrez que : $a' = (1+i)\,m$, $b' = (1+i)\,n$, $c' = (1+i)\,p$.

En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que A' appartient à (BC).

Montrez de même que B' appartient à (AC) et que C' appartient à (AB).

5. Montrez que les triangles MNP et $A'B'C'$ sont directement semblables (précisez le centre de la similitude directe transformant le triangle MNP en $A'B'C'$).

6. Construisez les points A', B' et C' sur la figure du 1.

EXERCICE 18

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = i\overline{z}\,.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe $(O,\vec{u})$ et R une rotation dont on précisera les éléments.

2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit g l'application du plan dans lui même qui au point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' tel que

$$z'' = i\overline{z} + 1 + i$$

a. Caractériser l'application T telle que $g = T \circ f$.

b. En déduire une construction géométrique , pour tout point M du plan , du point M'' image de M par g.

c. Montrer que pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM'']$ appartient à une droite fixe.

EXERCICE 19

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Lorsqu'un point de P est désigné par une lettre majuscule (A, B, G, ..., M_1, M', ...), on convient de désigner son affixe complexe par la lettre minuscule correspondante ($a, b, g, ..., m_1, m', ...$).

Soit A, B, C trois points du plan P. On note G leur isobarycentre.

À tout point M du plan P on associe les points M_1, M_2, M_3 isobarycentres respectifs de {M, B, C}, {M, A, C} et {M, A, B}. On note enfin M' l'isobarycentre de $\{M_1, M_2, M_3\}$.

1. a. Tracer le triangle ABC et son isobarycentre G sur une figure.

Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$. En déduire l'expression de g en fonction de a, b, c.

b. Exprimer de même m_1, m_2, m_3, puis m' en fonction de a, b, c, m.

2. Soit f la transformation qui, à tout point M de P, associe le point M'.

a. Montrer que $m' - g = \frac{1}{3}(m - g)$.

b. En déduire la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques.

c. Placer sur la figure l'image A'B'C' du triangle ABC par la transformation f.

MODULE4 : FONCTIONS

EXERCICE 1

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln\left(e^x + kx\right) - x.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1 En étudiant le sens de variation d'une fonction convenablement choisie, démontrer que pour tout réel positif x,

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

2 Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.

3 Montrer que pour tout réel positif x,

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

4 *a.* Dresser le tableau de variations de f_k.

b. Montrer que pour tout réel positif x,

$$f_k(x) \leqslant \frac{k}{e}.$$

5 Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_k$ à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point O.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par :

$$f(x) = \frac{|2x^2 - x - 1|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1 La fonction f est-elle continue en 1 ?

2 La fonction f est-elle continue en -1 ?

3 La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

4 La fonction f est-elle dérivable en -1 ?

5 La fonction f est-elle dérivable en $-\frac{1}{2}$?

6 *a.* Montrer que, sur $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$, la dérivée de f s'exprime par : $f'(x) = \frac{-2x^3+3x-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$.

7 *a.* Montrer que, sur $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, la dérivée de f s'exprime par : $f'(x) = \frac{2x^3-3x+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$.

8 Dresser un tableau de variations complet de f sur $]-1\,;1[$.
Tracer alors la courbe représentative de f en mettant en valeur les tangentes et asymptotes

EXERCICE 3

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leqslant t \leqslant 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b \quad , \quad a,\ b,\ k \text{ étant trois réels, } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes. Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

1 Montrer que $f(t) = ae^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a$.

2 On sait que 50 % des bactéries disparaissent au bout de deux jours.
En déduire que $ae^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \dfrac{1}{2} - a = 0$.

Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = xe^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - x + \frac{1}{2}.$$

3 Montrer que $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right)e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 1$.

4 *a.* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$.

b. On admet que $g''(x) = \dfrac{-2}{9x(x-1)}e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.
En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1\,;+\infty[$.

5 Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]1,3\,;1,4[$.
On admet que $\alpha \approx 1,309$.

EXERCICE 4

On considère la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1 *a.* Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

b. En déduire qu'il existe un réel positif unique α tel que : $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2 *a.* Déterminer les limites de f aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$ en utilisant la question 1. Dresser le tableau de variations de f.

c. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Justifier que : $2,32 \leqslant m \leqslant 2,34$.

3 Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{T}$ et de l'axe des abscisses.

4 Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$.

EXERCICE 5

1 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction φ : $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

2 Soit n un entier naturel non nul, n étant fixé pour cette question. On définit la fonction f_n sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de f_n sur $[0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f_n.

d. En déduire que l'équation, d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.

e. Justifier que $0 < \alpha_n < 1$.

3 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $\ln(\alpha_n^2+1) = 2n(1-\alpha_n)$.

En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

4 Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. À l'aide de la calculatrice, proposer sans justification, des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de α_1, α_4 et α_{10}.

b. Démontrer que la suite (α_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (α_n) est convergente.

d. Déterminer la limite de la suite (α_n).

EXERCICE 6

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation :

$$(E) \qquad : \qquad \mathrm{e}^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$

1 Démontrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2 Étude du signe de f.

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

3 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

4 En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

5 Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

7 En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

8 Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

9 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

EXERCICE 7

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2 Montrer que f est périodique.

3 Déterminer $f'(x)$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 8

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x).$$

1 Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2 À l'aide de la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, déterminer une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

3 Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

4 Déterminer le sens de variation de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en indiquant la valeur exacte de $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On admettra que $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{8}$.

5 Résoudre sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.

6 Dessiner alors la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$est nommée $\mathscr{C}$.

1 Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;1[$. On la notera α.

3 Montrer que l'équation réduite de la tangente (T_0) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 1$ est :

$$y = -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} + 1\right)x + \frac{4-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}.$$

On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et en considérant que pour tout entier naturel n, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente (T_n) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_n et de l'axe des abscisses.
Ainsi, x_1 est l'abscisse du point d'intersection de (T_0) et de l'axe des abscisses.

4 Montrer que $x_1 = \dfrac{4-\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}$.

5 *a.* Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \neq 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

7 On admet que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de (T_n).
Expliquer les raisons pour lesquelles, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant \alpha$.

8 Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
En déduire qu'elle converge vers α.

EXERCICE 10

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: $\ln(1+x)\le\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x\ge 0$, alors $\ln(1+x)\ge x-\dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout x strictement positif on a $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

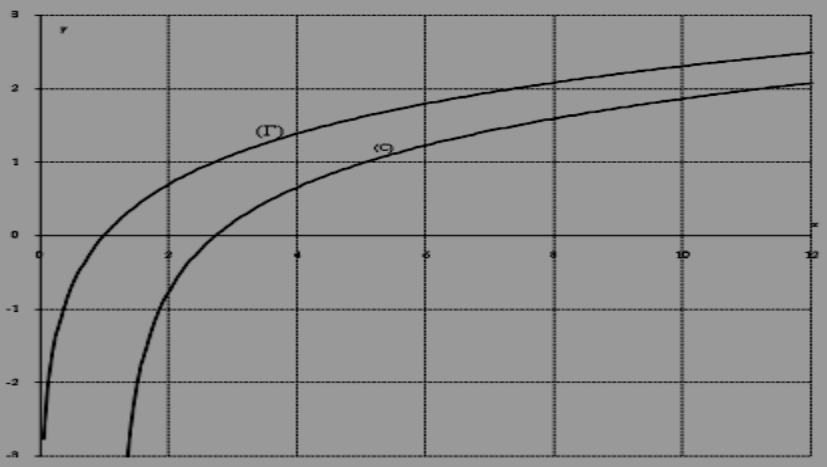
Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d. On désigne par C la représentation graphique de f. Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C.

EXERCICE 11



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de (Γ).

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

b. Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

La courbe (C) et la courbe (Γ) sont données ci-dessus. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x)=mx$ d'inconnue x.

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle]1 ; 10].

EXERCICE 12

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}.$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x^2+2+2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ.

e. Tracer (C), Δ et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0.

On désigne par h la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.

3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h.

b. Étudier les variations de h' sur I.

c. En déduire que, pour tout x de I, on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1/2} |u_n - \alpha|$.

c. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{\frac{-n}{2}}$.

5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2} e^{\frac{-n}{2}} < 10^{-2}$.

EXERCICE 13

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(E): \quad (x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$$

Dans la suite, on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
2) On note f'' la fonction dérivée de f'.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
3) Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0. À l'aide de l'algorithme par dichotomie donner un encadrement au centième de x_0. On pourra calculer $f'(1)$
4) a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f. Montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; x_0]$.
b) Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur. Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

EXERCICE 14

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4) Déterminer la dérivée de la fonction f.
5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
2) Comparer les fonctions h_n et g_n', g_n' étant la dérivée de la fonction g_n.
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3) Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite

MODULE 5 : ISOMETRIES ET AUTRES

EXERCICE 1

On donne deux points distincts O_1 et O_2 et deux angles $(\widehat{\alpha_1})$ et $(\widehat{\alpha_2})$.

Soient r_1 et $r_2$deux rotations de centre respectifs O_1, O_2 et d'angles orientés respectifs $(\widehat{\alpha_1})$, $(\widehat{\alpha_2})$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

EXERCICE 2

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteurs $\vec{u}$ et $r_{(A,\alpha)}$ la rotation de centre A et d'angle $(\hat{\alpha})$.

Déterminer la composée $t_{\vec{u}} \circ r_{(A,\alpha)}$.

EXERCICE 3

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soient $(\Delta): x - y = 1$ $(\Delta'): y = 2$ et $(D): x + y = 1$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_\Delta \circ s_D$et $s_{\Delta'} \circ s_D$.

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle isocèle en A et r la rotation de centre A et d'angle $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$. A tout point M, distinct de B et C, on associe le point M' tel que : $M' = r(M)$.

1) Démontrer que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{M'C}}\right) \equiv Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}}\right) + \alpha[\pi]$
2) En déduire le lieu des points M tels que les points C, M et M' soient alignés.

EXERCICE 5

Dans cet exercice le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points invariants par f.
2) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.
3) Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathscr{D}$.
4) Reconnaître f.

EXERCICE 6

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
I est le milieu de $[BC]$ et J le point tel que B soit le milieu de $[JC]$, r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

1. Soit A' et B' les images respectives de A, B par $r_2 \circ r_1$.
   Démontrez que I est le milieu de $[AA']$ et B le milieu de $[AB]$.
2. En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$, démontrez que pour tout point M du plan, I est le milieu de $[M_1M_2]$, M_1 étant l'image de M par r_1 et M_2 l'image de M par r_2.
3. Démontrez que $r_2 \circ r_1$ est une rotation. Précisez son centre et son angle.

EXERCICE 7

Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en A et B. Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ passant par A et B coupent respectivement $\mathscr{C}$ en P et Q et $\mathscr{C}'$ en P' et Q'. Quelle est la nature du quadrilatère $PP'QQ'$?

EXERCICE 9

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

1) Déterminer le centre Ω et l'angle θ de la rotation r qui transforme A en B et B en C.
2) Montrer qu'il existe une rotation r' de centre Ω' à préciser, qui transforme A en C et B en D, où D est le symétrique de A par rapport à C.

EXERCICE 10

1. Á tout point $m(x,y)$ l'application T_2 associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ y' = -x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ désigne un réel quelconque}).$$

Montrer que T_2 est une rotation dont vous préciserez le centre et l'angle.
Quelle est l'application T_2 lorsque $\sin(\theta) = 1$?

2. Á tout point $m(x,y)$ l'application T_3 associe le point $M''(x'',y'')$ tel que :

$$\begin{cases} x'' = a + x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ y'' = a - x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \end{cases} \quad (a \text{ et } \theta \text{ sont des réels quelconques avec } a \text{ non nul}).$$

a. Montrer que $T_3 = t' \circ T_2$ où t' désigne une translation.
b. Étudiez le cas : $\sin(\theta) = 1$.

c. On suppose $\sin(\theta) \neq 1$: montrez que T_3 est une rotation.
Précisez son angle, et les coordonnées (x_0, y_0) de son centre Ω.
Calculer $x_0 + y_0$, puis, quand c'est possible, le quotient $\dfrac{y_0}{x_0}$.
Démontrer que si θ varie, a restant fixe, le point Ω est sur une droite $\mathscr{D}$ et que si a varie, θ restant fixe, le point Ω est sur une droite $\mathscr{D}'$. Déduisez-en une construction géométrique simple du point Ω, connaissant a et θ.
Placez $\Omega_1(\theta = \frac{\pi}{3}, a = 2)$ puis $\Omega_2(\theta = \pi, a = -1)$.

EXERCICE 11

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $(I + A)^n = I + nA$.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de n.

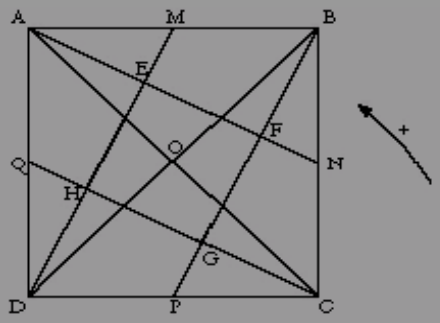
EXERCICE 12

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après.

ABCD est un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère EFGH est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré ABCD.



Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. On se propose de démontrer que EFGH est un carré.

Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'image par *r* du point N, puis celle du segment [AN]. Déterminer l'image par *r* du point P, puis celle du segment [BP]. En déduire *r*(F) et la nature du triangle FOG.

b. Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2. Comparaison des aires des carrés ABCD et EFGH

a. Justifier les égalités AE = EH = DH et AE = 2QH.

b. Soit K l'image de H par la symétrie *s* de centre Q. Démontrer que AEHK est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c. En déduire le rapport entre les aires des carrés ABCD et EFGH.

3. Généralisation de la question 1.

On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

On construit le quadrilatère E'F'G'H' en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').

Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. Pour démontrer que E'F'G'H' est un carré ?

EXERCICE 13

Soit $\mathcal{R} = \left\{ M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, M(\theta)M(\theta') = M(\theta + \theta')$.

2) Montrer que : $\mathcal{R}$ est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$ et déterminer l'inverse de $M(\theta)$.

3) Montrer que $(\mathcal{R}, \cdot)$ est un groupe abélien.

EXERCICE 14

Soit A l'espace vectoriel des fonctions de $[0;2[$ dans $\mathbb{R}$, f_1, f_2, f_3 et f_4 les éléments de A définis par :

$$f_1(x) = 1 - x, \qquad f_2(x) = |1 - x|, \qquad f_3(x) = E(x), \qquad f(4) = xE(x).$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est un système libre. De quel sous-espace vectoriel est-il une base ?
2. Montrer que f_4 appartient à $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ et calculer les composantes (ie coordonnées) de f_4 dans la base (f_1, f_2, f_3)

EXERCICE 15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

1 Déterminer le polynôme $P(x) = \det(A - xI_2)$, puis déterminer ses racines.

2 Calculer $A - I_2$ puis montrer que la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est telle que $(A - I_2)X = 0$.

3 On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouver a telle que $PTP^{-1} = A$.

4 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 En déduire une expression de A^n en fonction de n.

EXERCICE 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

1 Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2 En considérant la somme des $u_{n+1} - u_n$, exprimer u_n en fonction de n, puis A^n.

EXERCICE 17

E est un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $B = (i, j, k)$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de u, sa dimension ainsi qu'une base de celui-ci.
2. Quelle est l'image de E par u ?
3. Calculer A^n si n appartient à $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 18

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. On définit les matrices $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   Montrer que P et Q sont inverses l'une de l'autre.
4. Déterminer la matrice diagonale D telle que $QDP = A$.
5. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 19

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0,3$, $b_0 = 0,7$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 0,7a_n + 0,6b_n \\ b_{n+1} &= 0,3a_n + 0,4b_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, calculer A^2, A^3 et A^4.
   Que peut-on conjecturer quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$, et donc sur la limite des suites (a_n) et (b_n) ?

EXERCICE 20

On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ est $(1, i)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_2 = (1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$.
2. Soit z un complexe dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ sont $(a; b)$. Déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par :

$$f(a + ib) = (3a - 2b + i(-a + b)).$$

4. Déterminer la matrice $M(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$
5. Déterminer le noyau de f.

EXERCICE 21

On considère l'ensemble E des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x} \qquad \text{où} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}$.
2. Démontrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base de E notée B.
3. Démontrer que $(f_{1,1}, f_{3,2})$ est une base de E notée B′.
4. Déterminer les coordonnées de $f_{a,b}$ dans la base B′.

EXERCICE 22

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image d'un triplet quelconque (x, y, z).
2. Déterminer le noyau de f. En donner une base.
3. Déterminer l'image de f. En donner une base.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
5. Démontrer que tout triplet est la somme d'un élément de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. Cette décomposition est-elle unique ?

EXERCICE 23

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les réels α tels qu'il existe au moins un couple (x, y) différent de $(0, 0)$ vérifiant $f((x, y)) = \alpha(x, y)$.
2. Déterminer l'ensemble E_1 des couples (x, y) et l'ensemble E_2 des couples (x, y) qui vérifient respectivement :

$$f((x, y)) = -(x, y) \qquad \text{et} \qquad f((x, y)) = 2(x, y).$$

3. On donne $\vec{e_1} = (-1, 1)$ et $\vec{e_2} = (2, 1)$.
   (a) Soit (x, y) de $\mathbb{R}^2$, exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soit $f(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}) = \alpha'\vec{e_1} + \beta'\vec{e_2}$ où $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont des réels. Calculer (α', β') en fonction de α et β.
   (c) On pose $f^2 = f \circ f$ et $f^{n+1} = f^n \circ f$ pour $n > 0$. Exprimer $f^2(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$, $f^3(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$ puis $f^n(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
   (d) En déduire l'expression de $f^n((x, y))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la suite réelle u définie par la donnée de u_0 et u_1 et de la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

   Pour tout entier n, on associe le couple $\vec{X}_n = (u_{n+1}, u_n)$.
   (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(\vec{X}_n) = \vec{X}_{n+1}.$$

   (b) En déduire que :

$$\vec{X}_n = f^n(\vec{X}_0).$$

   (c) En utilisant le 3), calculer u_{n+2} en fonction de n, u_0 et u_1.

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

CLASSES : Tle C,D, E

1. 1. Exercice1 Rangements

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à *n* personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de *r* places (i.e. séparés par *r* – 1 personnes) ?.

1. 2. Exercice 2 Calcul d'événements 1

Soient *A* et *B* deux événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que *A* et *B* soient incompatibles. Calculer $P(B)$.

2. Supposons que *A* et *B* soient indépendants. Calculer $P(B)$.

3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement *A* ne peut être réalisé que si l'événement *B* est réalisé.

1. 3. Exercice 3. Calcul d'événements 2

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques *A*, *B*, *C*, on a :

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$.

2. Généraliser dans le cas de *n* événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

1. 4. Exercice 4 Calcul d'événements 3

Soient *A*, *B* et *C* des événements. On pose $E_1 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ et $E_2 = A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.

2. Déterminer l'ensemble $E_1\cup E_2$.

3. On sait que $P(A)=0,6$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,3$, $P(B\cap C)=0,1$, $P(A\cap C)=0,1$, $P(A\cap B)=0,2$ et $P(A\cap B\cap C)=0,05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

1. 5. Exercice 5 Dés pipés

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.

2. le premier résultat est 6.

1. 6. Exercice 6 Pièces d'or

Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?

2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

1. 7. Exercice 7 Agriculteur pas écolo

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes ne sont pas différentiables (parce qu'illisibles).

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard (écologiquement totalement incorrect…).

a. Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?

b. Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?

1. 8. Exercice 8. Boules

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

b. Deux boules de couleurs différentes.

1. 9. Exercice 9 Jeux

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que

- **1182 jouent à la loterie (A)**
- **310 vont au casino (B)**
- **190 jouent autant à la loterie qu'au casino.**

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

1. 10. Exercice 10 Conformité 1

D'après les données recueillies jusqu'à ce jour, 2 % de la production d'une unité d'une entreprise est non conforme et ne peut être commercialisée.

a. Quelle est la probabilité que 2 pièces choisies au hasard de la production de cette unité soient non conformes ?

b. Quelle est la probabilité que la première pièce soit non conforme et que la seconde soit conforme

1. 11. exercice 11 Fumeurs

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

exercice 12

1. 12. Conformité 2

On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25 % pour X, 35 % pour Y, 40 % pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont :

5 % pour les microprocesseurs de X, 4 % pour ceux de Y et 2 % pour ceux de Z.

Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?

b. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?

1. 13. exercice 13 Chiens chats

On sait que 36 % des foyers ont un chien et que dans 22 % des foyers où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% des foyers ont un chat.

a. Quelle est la proportion de foyers dans lesquels on trouve un chien et un chat ?

b. Quelle est la probabilité qu'un foyer possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

1. 14. exercice 14 Maladie

Dans une population, un sujet a une probabilité de 0,3 d'être atteint d'une maladie M.

On sait que si un sujet n'est pas atteint de M, il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et que s'il est atteint de M, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement à T.

On fait le test.

a. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?

b. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

1.15. Exercice 15

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de trois sortes :

4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 : Le jeu est

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable.

Question 2 : le joueur joue quatre parties indépendamment les unes des autres. La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ **B :** $\frac{544}{625}$ **C :** $\frac{2}{5}$.

Lors d'un second jeu le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\frac{4}{15}$ **B :** $\frac{11}{30}$ **C :** $\frac{11}{15}$.

1.16. Exercice 16. Vrai ou faux ?

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

*** N l'événement : « le dé tiré est normal » ;**

*** U l'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;**

*** pour *n* entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des *n* premiers lancers ».**

a. On a : $\mathrm{P}(\mathrm{U}) = \frac{2}{9}$.

b. Pour tout entier *n* non nul, on a : $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour *n* entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des *n* premiers lancers.

c. Pour tout entier *n* non nul, on a : $p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

1. 15. Exercice17 vrai ou faux

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- **une boule numérotée 0,**
- **une boule numérotée 1,**
- **2^1 boules numérotées 2,**
- **2^2 boules numérotées 3,**

…….

- **2^{k-1} boules numérotées *k* (*k* entier compris entre 1 et *n*),**

…….

- **2^{n-1} boules numérotées *n*.**

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note *X* la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a. L'urne contient $2^n - 1$ boules.

b. Pour tout entier naturel *k* tel que $1 \le k \le n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.

c. On a pour $n \ge 2$: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

d. On a : $E(X) = (n-1)2^n + 1$.

1. 16. Exercice 18 vrai ou faux ?

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et *n* boules noires ; l'urne V contient *n* boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par *U* l'événement : « on choisit l'urne U », par *V* l'événement : « on choisit l'urne V » et par *B* l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a. On a : $\mathrm{P}(B \cap U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b. On a : $P(B) = \frac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

c. $P(U / B) = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.

d. Pour que $P(U / B) \le 0,1$, il suffit que $n \ge 4$.

1. 17. EXERCICE 19 VRAI OU FAUX ?

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. On effectue *n* tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle *p* la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

*** On appelle A_n l'événement : « Les *n* − 1 tirages ont donné la même boule et la $n^{ième}$ boule tirée est différente des précédentes » ;**

*** Lorsque *k* est un entier compris entre 1 et *n*, on appelle B_k, V_k et R_k les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du $k^{ième}$ tirage.**

a. $p(B_1 \cap \overline{B}_2) = 1 - p(V_1 \cap \overline{V}_2) - p(R_1 \cap \overline{R}_2)$.

b. $p(A_2) = \frac{2}{3}$.

c. Pour tout entier $n \geq 2$ **, on a :** $p(A_n) = \frac{2}{3^{n-1}}$ **.**

d. $\lim\limits_{n\to\infty} [\, p(A_2) + p(A_3) + ... + p(A_n)\,] = \frac{1}{3}$ **.**

EXERCICE 20

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que *p*(R) = 0,15.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit *x* un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne *x* euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par *G* la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire *G* prend donc les valeurs 2*x*, *x*−1 et – 4.

1. Déterminer la loi de probabilité de *G*.

2. Exprimer l'espérance E(*G*) de la variable aléatoire *G* en fonction de *x.*

3. Pour quelles valeurs de *x* a-t-on E(*G*) > 0 ?

EXERCICE 21

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

*** si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;**

*** si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.**

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\bar{\mathrm{E}}$. La probabilité d'un événement est notée *p*(E).

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre partie de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

*** chaque joueur paye 1 euro par partie ;**

*** si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;**

*** si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.**

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X) < 0. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre *n* de jetons noirs (*n* entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier *n* le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

1. 18. EXERCICE 22 Lancer dés+binomiale

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

***D*$_1$: « le dé indique 1 »,** ***D*$_2$: « le dé indique 2 »,**

***D*$_3$: « le dé indique 3 »,** ***G* : « la partie est gagnée ».**

***A* et *B* étant deux évènements tels que** $p(A) \neq 0$ **, on note** $p_A(B)$ **la probabilité de *B* sachant que *A* est réalisé.**

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$ **,** $p_{D_2}(G)$ **et** $p_{D_3}(G)$ **.**

b. Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$ **.**

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 23

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune *k* boules, où *k* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

*** s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;**

*** s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;**

*** si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.**

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ». **B : « Le dé amène un multiple de 3 ».**

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$ **.**

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, *k* est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

EXERCICE 24 :Boules

5 points, énoncé légèrement modifié.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0)=\frac{6}{15}$ et $p(A_1)=\frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

EXERCICE 25

1. 19. Boules et urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient *n* boules blanches et 3 boules noires (*n* est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble des ces opérations constitue une épreuve.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".

2. a. Démontrer que la probabilité *p*(A) de l'événement A peut s'écrire : $p(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

2. b. Déterminer la limite de *p*(A) lorsque *n* tend vers $+\infty$.

3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".

Calculer *p*(B).

4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.

- **Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2*n* francs ;**
- **Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit *n* francs ;**
- **Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.**

4. a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que *n* ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère *n* > 10, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, X = 2*n* – 20).

4.b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4.c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4.d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

<u>EXERCICE 26</u>

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit *x* un entier tel que $0 \le x \le 10$. On place maintenant *x* boules blanches et 10 – *x* boules noires dans l'urne A et les 10 – *x* boules blanches et *x* boules noires restantes dans l'urne B.

On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend *x* = 6. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\frac{1}{55}\left(-x^2+10x+5\right)$.

c. Pour quelles valeurs de *x* l'évènement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{\text{M}}$?

<u>EXERCICE 27 Urnes</u>

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2 .

a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)

b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

2. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.

***X* est la variable aléatoire qui prend pour valeur *k* si le premier jeton blanc apparaît au *k*-ième tirage.**

Donner la loi de probabilité de *X*, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

1. 20. Exercices 28 : Boules et suite

Une urne contient *n* boules blanches ($n \ge 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?

2. Déterminer la limite de p_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

1. 21. Exercice 29 : Exercice de base : Efficacité d'un test (probabilité conditionnelle)

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

1. 22. Exercice 30 :Urne

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.

On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne, et on note *b* le numéro du jeton tiré.

On note G l'événement : "La partie est gagnée", lorsque la somme des numéros *a* et *b* est égale à 5.

1. Montrer que la probabilité de gagner est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes *A* et *B* jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la question 1.

Si *A* gagne et *B* perd, *A* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, si *A* perd et *B* gagne, *B* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier *n*, on désigne les événements suivants :

A_n : "*A* gagne la nième partie".

B_n : "*B* gagne la nième partie".

C_n : "Le jeu continue après la nième partie."

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fontion de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n)=\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

c. Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$

d. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

e le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

1. 23. Exercice 31 : Jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- **4 jetons blancs marqués 0 ;**
- **3 jetons rouges marqués 7 ;**
- **2 jetons blancs marqués 2 ;**
- **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles.

2. On considère que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants :

A : "Les 4 numéros sont identiques."

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

C : "Tous les jetons sont blancs."

D : "Tous les jetons sont de la même couleur."

E : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

a. Calculer la probabilité de B

b. Calculer la probabilité des événements A, C, D et E.

c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit la règle du jeu suivante :

Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 f

Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 f

Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 f

Pour tous les autres tirages, il perd 5f

G est la variable aléatoire égale au gain du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

1. 24. Exercice 32 : Contrôle de qualité,

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;

B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'évènement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

1. 25. Exercice 33 :Erreurs d'impression

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. a. Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3}, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les *n* premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4.

On admet que, pour chaque élément *n* de l'ensemble {0, 1, 2, 3}, $P(E_n) = 32\times10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

a. Calculer la probabilité *P*(E_4). Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P_{E_0}(C)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C\cap E_0)$.

c. Déterminer de même $P_{E_n}(C)$ puis $P(C\cap E_n)$ pour tout élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3, 4}.

En déduire *P*(C).

d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

1. 26. exercice 34 : Clefs et portes,

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.

Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clef numéro *x* la clef utilisée au *x*-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.

En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'événement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note (*i* ; *j*) l'événement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros *i* et *j* », et *P*(*i* ; *j*) la probabilité de cet évènement.

a. Calculer *P*(2 ; 4).

b. Calculer *P*(4 ; 5).

1. 27. Exercice 35 : Boules,

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de *X*.

Calculer l'espérance mathématique de *X*.

2. Soit *k* un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi *k* tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de *k* pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 36 :

1. 28. Boules et fonction

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

***A* « Les trois boules sont rouges. »**

***B* « Les trois boules sont de lamême couleur. »**

***C* « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »**

a. Calculer les probabilités *p*(*A*), *p*(*B*) et *p*(*C*).

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de *X*. Calculer *E*(*X*).

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par *n* boules rouges où *n* est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc *n* + 5 boules, c'est-à-dire, *n* rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

***D* « Tirer deux boules rouges. »**

***E* « Tirer deux boules de la même couleur. »**

a. Montrer que la probabilité de l'événement *D* est $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$**.**

b. Calculer la probabilité *p*(*E*) de l'évènement *E* en fonction de *n*.

Pour quelles valeurs de *n* a-t-on $p(E)\geq\dfrac{1}{2}$ **?**

1. 29. Exercice 37 : Jetons+VA,

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- **4 jetons blancs marqués 0 ;**
- **3 jetons rouges marqués 7 ;**
- **2 jetons blancs marqués 2 ;**
- **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

***A* : « Les quatre numéros sont identiques ».**

***B* : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».**

C **: « Tous les jetons sont blancs ».**

D **: « Tous les jetons sont de lamême couleur ».**

E **: « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».**

a. Montrer que la probabilité de l'évènement *B* est $\frac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements *A*, *C*, *D*, *E*.

c. On suppose que l'évènement *C* est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement *B*.

3. On établit la règle de jeu suivante :

– Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.

– Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.

– Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.

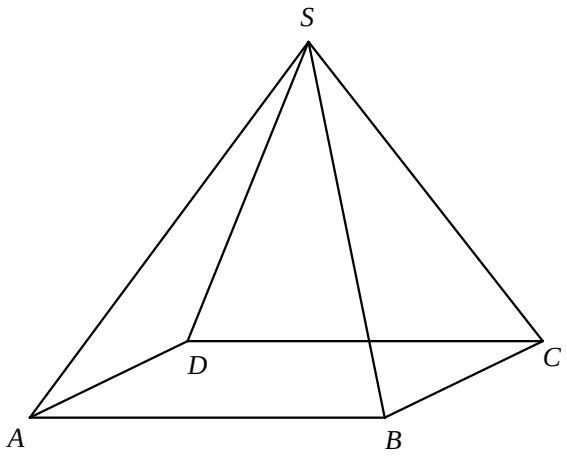
– Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

– Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G **est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.**

Établir la loi de probabilité de *G* et calculer l'espérance mathématique de *G*.

1. 30. Exercice 38 :Fourmis markoviennes



1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- **en A ?**
- **en B ?**
- **en C ?**
- **en D ?**

b. Pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif, on note S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après *n* pas » et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1.

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap S_n$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier *n* strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel *n* strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

1. 1. Exercices 39 :AU DELA DU PROIGRAMME Durée de vie+binom.

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

2. À quel instant *t*, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

EXERCICES NON CORRIGES

2. EXERCICE 40 :Rappels et exercices de base

2. 1. QCM

1. A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,2 et p(B) = 0,3 alors p(A $\cup$ B) =….

a. 0,06	**b. 0,44**	**c. 0,5**	**d. 0,56**

2. A et B sont deux évènements. p(A $\cap \overline{B}$) = ……

a. p(A) – p(A $\cap$ B)	**b. p(B) – p(A $\cap$ B)**	**c. p($\overline{B}$) – p(A $\cap$ B)**	**d. p(A) – p(A $\cap$ $\overline{B}$)**

3. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne. La probabilité de l'événement : « la 2ième boule tirée est noire sachant que la première l'est aussi » est égale à ….

a. $\frac{5}{4}$	**b.** $\frac{25}{64}$	**c.** $\frac{5}{14}$	**d.** $\frac{4}{7}$

4. Lors d'une course de chevaux comportant 20 partants, la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre est combien de fois supérieure à la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

a. 10 fois	**b. 6 fois**	**c. 5 fois**	**d. 3 fois**

5. Dans un tiroir il y a 3 paires de chaussettes de couleurs différentes, on tire au hasard 2 chaussettes ; la probabilité qu'elles appartiennent à la même paire est égale à ….

a. $\frac{1}{3}$	**b.** $\frac{1}{5}$	**c.** $\frac{1}{6}$	**d.** $\frac{1}{2}$

6. Une seule de ces 4 affirmations est fausse laquelle ?

a. Deux évènements incompatibles ne sont pas nécessairement indépendants	**b. Si p(A) $\neq$ 0 alors $p_A(A)=1$**	**c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir les 4 as dans une main de 5 cartes est inférieure à un dix millième.**	**d. Que l'on joue au loto ou pas, la probabilité de gagner le gros lot est identique au millionième près**

7. On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé non truqué. On gagne 20 € si on obtient le 6, on perd 4 € sinon. L'espérance de gain pour ce jeu est ….

a. Impossible à déterminer	**b. Négative**	**c. Positive**	**d. Nulle**

8. On choisit au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants :

R : «La boule tirée est rouge » ; A : « la boule tirée est numérotée 1 » ; B : « la boule tirée est numérotée 2 ».

Laquelle de ces 4 affirmations est vraie ?

a. Il n'y a pas d'évènements indépendants	**b. R et A sont indépendants**	**c. A et B sont indépendants**	**d. R et B sont indépendants**

9. En considérant une année de 365 jours, la probabilité pour que dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, 2 personnes au moins aient la même date anniversaire est……

a. Inférieure à 0,5	b. Egale à 0,5	c. Supérieure à 0,5	d. Proche de 0,003

10. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM. La probabilité qu'il obtienne la moyenne est environ égale à ….

a. 0,003	b. 0,058	c. 0,078	d. 0,0035

2. 2. EXERCICE 41 :Boules+VA+répétition,

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par *X* la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par *X* ?

b. Calculer *P*(*X* = 0).

c. On se propose de déterminer maintenant *P*(*X* = 1).

– Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

– En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer *P*(*X* = 1).

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On effectue maintenant *n* tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

Soit *k* un entier compris entre 1 et *n*.

Soit N l'évènement : « la *k*-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».

Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des *k* − 1 premiers tirages et une boule noire au *k*-ième ».

Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des (*n* − *k*) derniers tirages ».

Calculer *P*(A), P_A(B) et *P*(N).

2. 3. EXERCICE 42 :Boules+VA

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1. On limite le nombre de tirages à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le 4ème tirage on prend X = 0.

a. Calculer la probabilité *p*(X = 0).

b. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

2. On procède maintenant à *n* tirages au maximum, *n* > 1. X est la v.a. définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les *n* tirages on prend X = 0.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Montrez que $\mathrm{E(X)} = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$ **où *f* est la fonction définie par :** $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$ **.**

b. On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ **. Montrez par récurrence que** $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ **.**
Calculez *g'*(*x*) en utilisant les deux formes, déduisez-en une autre expression de *f*(*x*). Calculez alors E(X).

c. Déterminez la limite de E(X) quand *n* tend vers $+\infty$ **. Interprétez.**

2. 4. EXERCICE 43 : Boules+suite,

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève *n* successivement et avec remise, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les événements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que $p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ **,** $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ **,** $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$ **.**

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ **si et seulement si** $2^{n-1} = n + 1$ **.**

3. Soit (u_n**) la suite définie par** $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ **, *n* > 1. Calculer** u_2 **,** u_3 **,** u_4 **.**

Montrer que u_n **est strictement croissante. En déduire la valeur de l'entier *n* tel que les événements A et B soient indépendants.**

2. 5. EXERCICE 44 :Boules et urnes

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

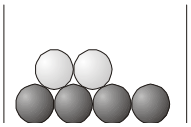
c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

2. 6. EXERCICE 45 : Boules sans ou avec remise



Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2. On effectue 4 tirages successifs d'une boule, sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

3. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

c. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche au cours des quatre tirages.

d. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

4. On effectue *n* tirages successifs, avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir, au cours de ces *n* tirages, une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a. Calculer P_1, P_2, P_3.

b. Conjecturer P_n.

2. 7. EXERCICE 46 :Urnes, boules, tirages,

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les trois boules tirées sont rouges. »

D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B : « La boule tirée de l'urne U_2 est rouge ».

a. Calculer la probabilité de l'événement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

2. 8. EXERCICE 48 : Code d'entrée

Le code d'entrée d'un immeuble est composé de 5 symboles parmi les chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B. Un même symbole peut être utilisé plusieurs fois.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?

3. Combien de codes contiennent un et un seul 0 ?

4. Combien de codes contiennent au moins une lettre ?

5. Un nouveau syndic est nommé, qui décide que pour des raisons de sécurité, le code doit comporter au moins un chiffre et au moins une lettre. Combien y a-t-il dorénavant de codes possibles ?

6. Un SDF veut dormir dans le hall. Il sait par une indiscrétion que le code comporte les chiffres 1258 et la lettre B. Combien de codes devra-t-il essayer au maximum avant de passer la nuit au chaud ?

2. 9. EXERCICE 49 : Avec de la géométrie,

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement −1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro *x* et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro *y* et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro *z* et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le point *M* de coordonnées (*x*, *y*, *z*).

Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point *M*. Les coordonnées du point A sont (1 ; −1 ; −1) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On note *C* le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point *M* soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.

2. On note E_1 l'évènement : « *M* appartient à l'axe des abscisses ». Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.

3. Soit *P* le plan passant par *O* et orthogonal au vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1).

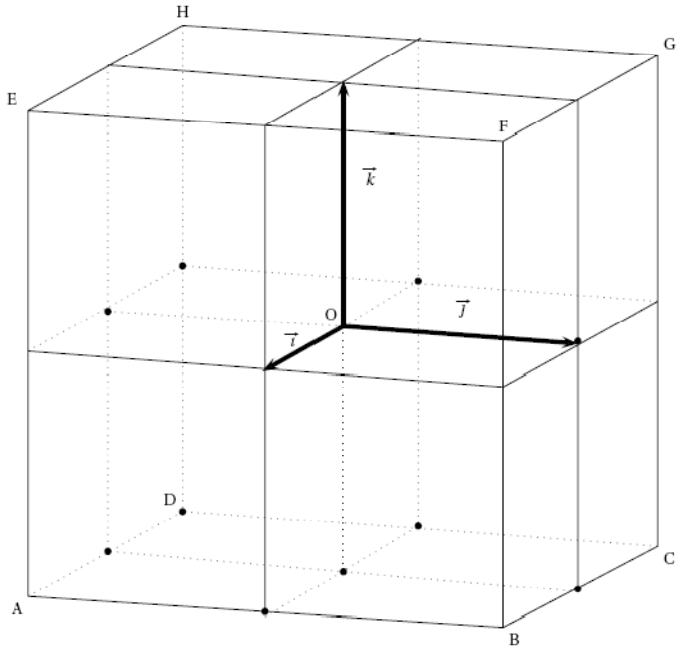
a. Déterminer une équation cartésienne du plan *P* .

b. Tracer en couleur sur le graphique la section du plan *P* et du cube *C*. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « *M* appartient à *P* ». Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4. On désigne par *B* la boule de centre :O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $OM \leq 1{,}5$).

On note E_3 l'évènement : « *M* appartient à la boule *B* ». Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.



TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

CLASSES : Tle C,D, E

1. 1. Exercice1 Rangements

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à *n* personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de *r* places (i.e. séparés par *r* – 1 personnes) ?.

1. 2. Exercice 2 Calcul d'événements 1

Soient *A* et *B* deux événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que *A* et *B* soient incompatibles. Calculer $P(B)$.

2. Supposons que *A* et *B* soient indépendants. Calculer $P(B)$.

3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement *A* ne peut être réalisé que si l'événement *B* est réalisé.

1. 3. Exercice 3. Calcul d'événements 2

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques *A*, *B*, *C*, on a :

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$.

2. Généraliser dans le cas de *n* événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

1. 4. Exercice 4 Calcul d'événements 3

Soient *A*, *B* et *C* des événements. On pose $E_1 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ et $E_2 = A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.

2. Déterminer l'ensemble $E_1\cup E_2$.

3. On sait que $P(A)=0,6$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,3$, $P(B\cap C)=0,1$, $P(A\cap C)=0,1$, $P(A\cap B)=0,2$ et $P(A\cap B\cap C)=0,05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

1. 5. Exercice 5 Dés pipés

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.

2. le premier résultat est 6.

1. 6. Exercice 6 Pièces d'or

Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?

2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

1. 7. Exercice 7 Agriculteur pas écolo

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes ne sont pas différentiables (parce qu'illisibles).

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard (écologiquement totalement incorrect…).

a. Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?

b. Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?

1. 8. Exercice 8. Boules

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

b. Deux boules de couleurs différentes.

1. 9. Exercice 9 Jeux

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que

- **1182 jouent à la loterie (A)**
- **310 vont au casino (B)**
- **190 jouent autant à la loterie qu'au casino.**

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

1. 10. Exercice 10 Conformité 1

D'après les données recueillies jusqu'à ce jour, 2 % de la production d'une unité d'une entreprise est non conforme et ne peut être commercialisée.

a. Quelle est la probabilité que 2 pièces choisies au hasard de la production de cette unité soient non conformes ?

b. Quelle est la probabilité que la première pièce soit non conforme et que la seconde soit conforme

1. 11. exercice 11 Fumeurs

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

exercice 12

1. 12. Conformité 2

On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25 % pour X, 35 % pour Y, 40 % pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont :

5 % pour les microprocesseurs de X, 4 % pour ceux de Y et 2 % pour ceux de Z.

Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?

b. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?

1. 13. exercice 13 Chiens chats

On sait que 36 % des foyers ont un chien et que dans 22 % des foyers où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% des foyers ont un chat.

a. Quelle est la proportion de foyers dans lesquels on trouve un chien et un chat ?

b. Quelle est la probabilité qu'un foyer possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

1. 14. exercice 14 Maladie

Dans une population, un sujet a une probabilité de 0,3 d'être atteint d'une maladie M.

On sait que si un sujet n'est pas atteint de M, il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et que s'il est atteint de M, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement à T.

On fait le test.

a. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?

b. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

1.15. Exercice 15

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de trois sortes :

4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 : Le jeu est

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable.

Question 2 : le joueur joue quatre parties indépendamment les unes des autres. La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ **B :** $\frac{544}{625}$ **C :** $\frac{2}{5}$.

Lors d'un second jeu le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\frac{4}{15}$ **B :** $\frac{11}{30}$ **C :** $\frac{11}{15}$.

1.16. Exercice 16. Vrai ou faux ?

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

*** N l'événement : « le dé tiré est normal » ;**

*** U l'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;**

*** pour *n* entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des *n* premiers lancers ».**

a. On a : $\mathrm{P}(\mathrm{U}) = \frac{2}{9}$.

b. Pour tout entier *n* non nul, on a : $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour *n* entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des *n* premiers lancers.

c. Pour tout entier *n* non nul, on a : $p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

1. 15. Exercice17 vrai ou faux

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- **une boule numérotée 0,**
- **une boule numérotée 1,**
- **2^1 boules numérotées 2,**
- **2^2 boules numérotées 3,**

…….

- **2^{k-1} boules numérotées *k* (*k* entier compris entre 1 et *n*),**

…….

- **2^{n-1} boules numérotées *n*.**

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note *X* la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a. L'urne contient $2^n - 1$ boules.

b. Pour tout entier naturel *k* tel que $1 \le k \le n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.

c. On a pour $n \ge 2$: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

d. On a : $E(X) = (n-1)2^n + 1$.

1. 16. Exercice 18 vrai ou faux ?

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et *n* boules noires ; l'urne V contient *n* boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par *U* l'événement : « on choisit l'urne U », par *V* l'événement : « on choisit l'urne V » et par *B* l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a. On a : $\mathrm{P}(B \cap U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b. On a : $P(B) = \frac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

c. $P(U / B) = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.

d. Pour que $P(U / B) \le 0,1$, il suffit que $n \ge 4$.

1. 17. EXERCICE 19 VRAI OU FAUX ?

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2. On effectue *n* tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle *p* la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

*** On appelle A_n l'événement : « Les *n* − 1 tirages ont donné la même boule et la $n^{ième}$ boule tirée est différente des précédentes » ;**

*** Lorsque *k* est un entier compris entre 1 et *n*, on appelle B_k, V_k et R_k les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du $k^{ième}$ tirage.**

a. $p(B_1 \cap \overline{B}_2) = 1 - p(V_1 \cap \overline{V}_2) - p(R_1 \cap \overline{R}_2)$.

b. $p(A_2) = \frac{2}{3}$.

c. Pour tout entier $n \geq 2$ **, on a :** $p(A_n) = \frac{2}{3^{n-1}}$ **.**

d. $\lim\limits_{n\to\infty} [\, p(A_2) + p(A_3) + ... + p(A_n)\,] = \frac{1}{3}$ **.**

EXERCICE 20

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que *p*(R) = 0,15.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit *x* un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne *x* euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par *G* la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire *G* prend donc les valeurs 2*x*, *x*−1 et – 4.

1. Déterminer la loi de probabilité de *G*.

2. Exprimer l'espérance E(*G*) de la variable aléatoire *G* en fonction de *x.*

3. Pour quelles valeurs de *x* a-t-on E(*G*) > 0 ?

EXERCICE 21

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

*** si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;**

*** si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.**

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\bar{\mathrm{E}}$. La probabilité d'un événement est notée *p*(E).

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre partie de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

*** chaque joueur paye 1 euro par partie ;**

*** si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;**

*** si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.**

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X) < 0. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre *n* de jetons noirs (*n* entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier *n* le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

1. 18. EXERCICE 22 Lancer dés+binomiale

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

***D*$_1$: « le dé indique 1 »,** ***D*$_2$: « le dé indique 2 »,**

***D*$_3$: « le dé indique 3 »,** ***G* : « la partie est gagnée ».**

***A* et *B* étant deux évènements tels que** $p(A) \neq 0$ **, on note** $p_A(B)$ **la probabilité de *B* sachant que *A* est réalisé.**

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$ **,** $p_{D_2}(G)$ **et** $p_{D_3}(G)$ **.**

b. Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$ **.**

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 23

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune *k* boules, où *k* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

*** s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;**

*** s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;**

*** si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.**

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ». **B : « Le dé amène un multiple de 3 ».**

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$ **.**

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, *k* est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

EXERCICE 24 :Boules

5 points, énoncé légèrement modifié.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0)=\frac{6}{15}$ et $p(A_1)=\frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

EXERCICE 25

1. 19. Boules et urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient *n* boules blanches et 3 boules noires (*n* est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble des ces opérations constitue une épreuve.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".

2. a. Démontrer que la probabilité *p*(A) de l'événement A peut s'écrire : $p(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

2. b. Déterminer la limite de *p*(A) lorsque *n* tend vers $+\infty$.

3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".

Calculer *p*(B).

4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.

- **Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2*n* francs ;**
- **Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit *n* francs ;**
- **Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.**

4. a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que *n* ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère *n* > 10, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, X = 2*n* – 20).

4.b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4.c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4.d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

<u>EXERCICE 26</u>

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit *x* un entier tel que $0 \le x \le 10$. On place maintenant *x* boules blanches et 10 – *x* boules noires dans l'urne A et les 10 – *x* boules blanches et *x* boules noires restantes dans l'urne B.

On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend *x* = 6. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\frac{1}{55}\left(-x^2+10x+5\right)$.

c. Pour quelles valeurs de *x* l'évènement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{\text{M}}$?

<u>EXERCICE 27 Urnes</u>

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2 .

a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)

b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

2. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.

***X* est la variable aléatoire qui prend pour valeur *k* si le premier jeton blanc apparaît au *k*-ième tirage.**

Donner la loi de probabilité de *X*, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

1. 20. Exercices 28 : Boules et suite

Une urne contient *n* boules blanches ($n \ge 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?

2. Déterminer la limite de p_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

1. 21. Exercice 29 : Exercice de base : Efficacité d'un test (probabilité conditionnelle)

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

1. 22. Exercice 30 :Urne

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.

On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne, et on note *b* le numéro du jeton tiré.

On note G l'événement : "La partie est gagnée", lorsque la somme des numéros *a* et *b* est égale à 5.

1. Montrer que la probabilité de gagner est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes *A* et *B* jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la question 1.

Si *A* gagne et *B* perd, *A* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, si *A* perd et *B* gagne, *B* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier *n*, on désigne les événements suivants :

A_n : "*A* gagne la nième partie".

B_n : "*B* gagne la nième partie".

C_n : "Le jeu continue après la nième partie."

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fontion de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n)=\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

c. Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$

d. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

e le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

1. 23. Exercice 31 : Jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- **4 jetons blancs marqués 0 ;**
- **3 jetons rouges marqués 7 ;**
- **2 jetons blancs marqués 2 ;**
- **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles.

2. On considère que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants :

A : "Les 4 numéros sont identiques."

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

C : "Tous les jetons sont blancs."

D : "Tous les jetons sont de la même couleur."

E : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

a. Calculer la probabilité de B

b. Calculer la probabilité des événements A, C, D et E.

c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit la règle du jeu suivante :

Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 f

Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 f

Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 f

Pour tous les autres tirages, il perd 5f

G est la variable aléatoire égale au gain du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

1. 24. Exercice 32 : Contrôle de qualité,

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;

B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'évènement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

1. 25. Exercice 33 :Erreurs d'impression

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. a. Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3}, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les *n* premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4.

On admet que, pour chaque élément *n* de l'ensemble {0, 1, 2, 3}, $P(E_n) = 32\times10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

a. Calculer la probabilité *P*(E_4). Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P_{E_0}(C)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C\cap E_0)$.

c. Déterminer de même $P_{E_n}(C)$ puis $P(C\cap E_n)$ pour tout élément *n* de l'ensemble {1, 2, 3, 4}.

En déduire *P*(C).

d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

1. 26. exercice 34 : Clefs et portes,

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.

Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clef numéro *x* la clef utilisée au *x*-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.

En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'événement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note (*i* ; *j*) l'événement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros *i* et *j* », et *P*(*i* ; *j*) la probabilité de cet évènement.

a. Calculer *P*(2 ; 4).

b. Calculer *P*(4 ; 5).

1. 27. Exercice 35 : Boules,

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de *X*.

Calculer l'espérance mathématique de *X*.

2. Soit *k* un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi *k* tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de *k* pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 36 :

1. 28. Boules et fonction

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

***A* « Les trois boules sont rouges. »**

***B* « Les trois boules sont de lamême couleur. »**

***C* « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »**

a. Calculer les probabilités *p*(*A*), *p*(*B*) et *p*(*C*).

b. On appelle *X* la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de *X*. Calculer *E*(*X*).

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par *n* boules rouges où *n* est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc *n* + 5 boules, c'est-à-dire, *n* rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

***D* « Tirer deux boules rouges. »**

***E* « Tirer deux boules de la même couleur. »**

a. Montrer que la probabilité de l'événement *D* est $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$**.**

b. Calculer la probabilité *p*(*E*) de l'évènement *E* en fonction de *n*.

Pour quelles valeurs de *n* a-t-on $p(E)\geq\dfrac{1}{2}$ **?**

1. 29. Exercice 37 : Jetons+VA,

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- **4 jetons blancs marqués 0 ;**
- **3 jetons rouges marqués 7 ;**
- **2 jetons blancs marqués 2 ;**
- **1 jeton rouge marqué 5.**

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

***A* : « Les quatre numéros sont identiques ».**

***B* : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».**

C **: « Tous les jetons sont blancs ».**

D **: « Tous les jetons sont de lamême couleur ».**

E **: « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».**

a. Montrer que la probabilité de l'évènement *B* est $\frac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements *A*, *C*, *D*, *E*.

c. On suppose que l'évènement *C* est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement *B*.

3. On établit la règle de jeu suivante :

– Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.

– Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.

– Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.

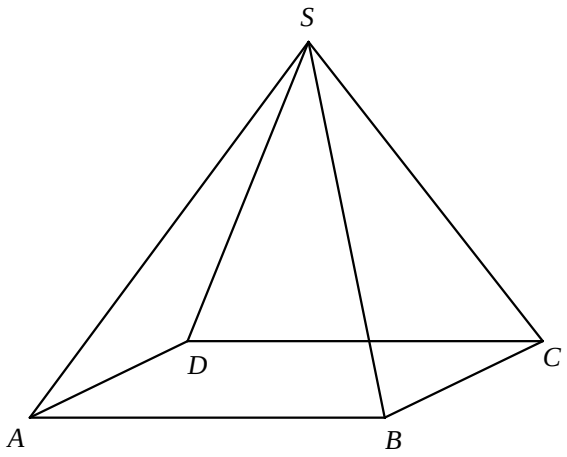
– Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

– Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G **est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.**

Établir la loi de probabilité de *G* et calculer l'espérance mathématique de *G*.

1. 30. Exercice 38 :Fourmis markoviennes



1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- **en A ?**
- **en B ?**
- **en C ?**
- **en D ?**

b. Pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif, on note S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après *n* pas » et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1.

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap S_n$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier *n* strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel *n* strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

1. 1. Exercices 39 :AU DELA DU PROIGRAMME Durée de vie+binom.

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

2. À quel instant *t*, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

EXERCICES NON CORRIGES

2. EXERCICE 40 :Rappels et exercices de base

2. 1. QCM

1. A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,2 et p(B) = 0,3 alors p(A $\cup$ B) =….

a. 0,06	**b. 0,44**	**c. 0,5**	**d. 0,56**

2. A et B sont deux évènements. p(A $\cap \overline{B}$) = ……

a. p(A) – p(A $\cap$ B)	**b. p(B) – p(A $\cap$ B)**	**c. p($\overline{B}$) – p(A $\cap$ B)**	**d. p(A) – p(A $\cap$ $\overline{B}$)**

3. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne. La probabilité de l'événement : « la 2ième boule tirée est noire sachant que la première l'est aussi » est égale à ….

a. $\frac{5}{4}$	**b.** $\frac{25}{64}$	**c.** $\frac{5}{14}$	**d.** $\frac{4}{7}$

4. Lors d'une course de chevaux comportant 20 partants, la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre est combien de fois supérieure à la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

a. 10 fois	**b. 6 fois**	**c. 5 fois**	**d. 3 fois**

5. Dans un tiroir il y a 3 paires de chaussettes de couleurs différentes, on tire au hasard 2 chaussettes ; la probabilité qu'elles appartiennent à la même paire est égale à ….

a. $\frac{1}{3}$	**b.** $\frac{1}{5}$	**c.** $\frac{1}{6}$	**d.** $\frac{1}{2}$

6. Une seule de ces 4 affirmations est fausse laquelle ?

a. Deux évènements incompatibles ne sont pas nécessairement indépendants	**b. Si p(A) $\neq$ 0 alors $p_A(A)=1$**	**c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir les 4 as dans une main de 5 cartes est inférieure à un dix millième.**	**d. Que l'on joue au loto ou pas, la probabilité de gagner le gros lot est identique au millionième près**

7. On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé non truqué. On gagne 20 € si on obtient le 6, on perd 4 € sinon. L'espérance de gain pour ce jeu est ….

a. Impossible à déterminer	**b. Négative**	**c. Positive**	**d. Nulle**

8. On choisit au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants :

R : «La boule tirée est rouge » ; A : « la boule tirée est numérotée 1 » ; B : « la boule tirée est numérotée 2 ».

Laquelle de ces 4 affirmations est vraie ?

a. Il n'y a pas d'évènements indépendants	**b. R et A sont indépendants**	**c. A et B sont indépendants**	**d. R et B sont indépendants**

9. En considérant une année de 365 jours, la probabilité pour que dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, 2 personnes au moins aient la même date anniversaire est……

a. Inférieure à 0,5	b. Egale à 0,5	c. Supérieure à 0,5	d. Proche de 0,003

10. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM. La probabilité qu'il obtienne la moyenne est environ égale à ….

a. 0,003	b. 0,058	c. 0,078	d. 0,0035

2. 2. EXERCICE 41 :Boules+VA+répétition,

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par *X* la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par *X* ?

b. Calculer *P*(*X* = 0).

c. On se propose de déterminer maintenant *P*(*X* = 1).

– Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

– En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer *P*(*X* = 1).

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On effectue maintenant *n* tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

Soit *k* un entier compris entre 1 et *n*.

Soit N l'évènement : « la *k*-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».

Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des *k* − 1 premiers tirages et une boule noire au *k*-ième ».

Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des (*n* − *k*) derniers tirages ».

Calculer *P*(A), P_A(B) et *P*(N).

2. 3. EXERCICE 42 :Boules+VA

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1. On limite le nombre de tirages à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le 4ème tirage on prend X = 0.

a. Calculer la probabilité *p*(X = 0).

b. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

2. On procède maintenant à *n* tirages au maximum, *n* > 1. X est la v.a. définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les *n* tirages on prend X = 0.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Montrez que $\mathrm{E(X)} = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$ **où *f* est la fonction définie par :** $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$ **.**

b. On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ **. Montrez par récurrence que** $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ **.**
Calculez *g'*(*x*) en utilisant les deux formes, déduisez-en une autre expression de *f*(*x*). Calculez alors E(X).

c. Déterminez la limite de E(X) quand *n* tend vers $+\infty$ **. Interprétez.**

2. 4. EXERCICE 43 : Boules+suite,

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève *n* successivement et avec remise, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les événements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que $p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ **,** $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ **,** $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$ **.**

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ **si et seulement si** $2^{n-1} = n + 1$ **.**

3. Soit (u_n**) la suite définie par** $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ **, *n* > 1. Calculer** u_2 **,** u_3 **,** u_4 **.**

Montrer que u_n **est strictement croissante. En déduire la valeur de l'entier *n* tel que les événements A et B soient indépendants.**

2. 5. EXERCICE 44 :Boules et urnes

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

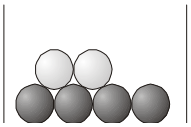
c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

2. 6. EXERCICE 45 : Boules sans ou avec remise



Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2. On effectue 4 tirages successifs d'une boule, sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

3. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

c. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche au cours des quatre tirages.

d. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

4. On effectue *n* tirages successifs, avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir, au cours de ces *n* tirages, une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a. Calculer P_1, P_2, P_3.

b. Conjecturer P_n.

2. 7. EXERCICE 46 :Urnes, boules, tirages,

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les trois boules tirées sont rouges. »

D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B : « La boule tirée de l'urne U_2 est rouge ».

a. Calculer la probabilité de l'événement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

2. 8. EXERCICE 48 : Code d'entrée

Le code d'entrée d'un immeuble est composé de 5 symboles parmi les chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B. Un même symbole peut être utilisé plusieurs fois.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?

3. Combien de codes contiennent un et un seul 0 ?

4. Combien de codes contiennent au moins une lettre ?

5. Un nouveau syndic est nommé, qui décide que pour des raisons de sécurité, le code doit comporter au moins un chiffre et au moins une lettre. Combien y a-t-il dorénavant de codes possibles ?

6. Un SDF veut dormir dans le hall. Il sait par une indiscrétion que le code comporte les chiffres 1258 et la lettre B. Combien de codes devra-t-il essayer au maximum avant de passer la nuit au chaud ?

2. 9. EXERCICE 49 : Avec de la géométrie,

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement −1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro *x* et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro *y* et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro *z* et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le point *M* de coordonnées (*x*, *y*, *z*).

Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point *M*. Les coordonnées du point A sont (1 ; −1 ; −1) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On note *C* le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point *M* soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.

2. On note E_1 l'évènement : « *M* appartient à l'axe des abscisses ». Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.

3. Soit *P* le plan passant par *O* et orthogonal au vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1).

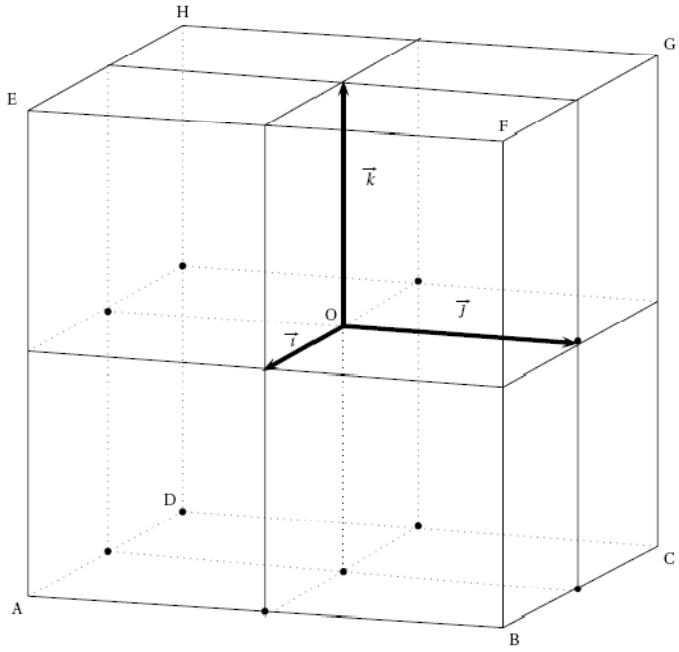
a. Déterminer une équation cartésienne du plan *P* .

b. Tracer en couleur sur le graphique la section du plan *P* et du cube *C*. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « *M* appartient à *P* ». Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4. On désigne par *B* la boule de centre :O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $OM \leq 1{,}5$).

On note E_3 l'évènement : « *M* appartient à la boule *B* ». Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.



COURS DE MATHÉMATIQUES

Terminale S

Valère BONNET (valere.bonnet@gmail.com)

29 mai 2011

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

Table des matières

Table des matières iii

I Vocabulaire de la logique 1
- I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ? . . . 1
- I.2 Négation d'une proposition . . . 1
- I.3 Le « et » . . . 1
- I.4 Le « ou » . . . 2
- I.5 Propositions et parties d'un ensemble . . . 2
- I.6 Lois de MORGAN . . . 2
- I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 3
- I.8 Implications . . . 5
  - I.8.1 Introduction . . . 5
  - I.8.2 Réciproque d'une implication . . . 5
  - I.8.3 Contraposée d'une implication . . . 6
  - I.8.4 Implication contraire . . . 6
- I.9 Double implication ou équivalence . . . 6
- I.10 Formules récapitulatives . . . 7
- I.11 Raisonnement par récurrence . . . 7

II Révisions 9
- II.1 Identités remarquables . . . 9
- II.2 Éléments de symétries d'une courbe . . . 9
  - II.2.1 Symétries dans $\mathbb{R}$ . . . 9
  - II.2.2 Axe de symétrie d'une courbe . . . 10
  - II.2.3 Centre de symétrie d'une courbe . . . 11
- II.3 Trigonométrie . . . 12
  - II.3.1 Quelques valeurs remarquables . . . 12
  - II.3.2 Quelques formules . . . 13
  - II.3.3 Équations trigonométriques . . . 14
- II.4 Géométrie du triangle . . . 18
  - II.4.1 Aire d'un triangle . . . 18
  - II.4.2 Théorème des sinus . . . 18
  - II.4.3 Théorème d'AL KASHI . . . 19
  - II.4.4 Théorème de la médiane . . . 19
- II.5 Polynômes du second degré . . . 19
  - II.5.1 Forme canonique . . . 19
  - II.5.2 Représentation graphique et sens de variation . . . 20
  - II.5.3 Factorisation et résolution d'équations . . . 21
  - II.5.4 Signe d'un trinôme . . . 24
  - II.5.5 Tableau récapitulatif . . . 25
  - II.5.6 Compléments . . . 25
  - II.5.7 Travaux dirigés . . . 25
  - II.5.8 Exercices . . . 26
- II.6 Exercices résolus . . . 26

III Suites numériques **31**
III.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$ . . . 31
III.1.1 Majorants, minorants . . . 31
III.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément) . . . 31
III.2 Définitions . . . 32
III.2.1 Introduction . . . 32
III.2.2 Composée d'une suite par une fonction . . . 32
III.2.3 Exercices . . . 32
III.3 Représentation graphique d'une suite . . . 32
III.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement . . . 32
III.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence . . . 33
III.3.3 Exercices . . . 33
III.4 Suites bornées . . . 34
III.4.1 Généralités . . . 34
III.4.2 Exercices . . . 34
III.5 Suites monotones . . . 35
III.5.1 Définitions . . . 35
III.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite . . . 35
III.5.3 Exercices . . . 37
III.6 Suites arithmétiques - suites géométriques . . . 37
III.6.1 Suites arithmétiques . . . 37
III.6.2 Suites géométriques . . . 39
III.6.3 Exercices résolus . . . 41
III.7 Limites de suites . . . 42
III.7.1 Limite finie, limite infinie . . . 42
III.7.2 Théorèmes de comparaisons . . . 44
III.7.3 Calcul algébrique de limites . . . 45
III.7.4 Limites de suites géométriques . . . 48
III.7.5 Exercices . . . 48
III.8 Suites monotones bornées . . . 49
III.8.1 Théorème de convergence d'une suite monotone . . . 49
III.8.2 Suites adjacentes . . . 50
III.8.3 Exercices résolus . . . 50
III.8.4 Exercices . . . 51
III.9 Exercices . . . 51

IV Limites de fonctions, continuité **53**
IV.1 Limite finie (ou réelle) . . . 53
IV.1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$ . . . 53
IV.1.2 Limite d'une fonction en un réel a . . . 53
IV.2 Notion de continuité . . . 53
IV.3 Utilisation de la continuité . . . 53
IV.3.1 Continuité et bijection . . . 53

V Exponentielles et équations différentielles **57**
V.1 La fonction exponentielle de base e . . . 57
V.1.1 Propriété fondamentale . . . 57
V.1.2 Sens de variation . . . 58
V.1.3 Autres propriétés algébriques de l'exponentielle . . . 58
V.1.4 Quelques limites . . . 58
V.2 La fonction logarithme népérien . . . 59
V.2.1 Introduction . . . 59
V.2.2 Dérivabilité . . . 61
V.2.3 Dérivée de $\ln u$ . . . 61
V.2.4 Logarithme népérien et calcul intégral . . . 62
V.3 Des exponentielles et des logarithmes . . . 62
V.3.1 Notation a^b, pour a, b réels et $a > 0$ . . . 62
V.3.2 Fonctions exponentielles de base a (avec $a > 0$) . . . 62
V.3.3 Fonctions logarithmes de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) . . . 63
V.4 Équations différentielles . . . 64
V.4.1 Introduction . . . 64

V.4.2 Équations du type $y' - ay = 0$ . . . 65
V.4.3 Équations du type $y' - ay = b$ . . . 66
V.4.4 Exercices . . . 68

VI Dérivabilité **69**
VI.1 Fonctions dérivables . . . 69
VI.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée . . . 69
VI.1.2 Dérivabilité des fonctions usuelles . . . 70
VI.1.3 Principaux résultats . . . 70
VI.2 Dérivation d'une fonction composée . . . 70
VI.2.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée . . . 70
VI.2.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$ . . . 71
VI.2.3 Dérivée de la fonction u^n ($n \in \mathbb{Z}$) . . . 71
VI.3 Dérivation et études de fonctions . . . 72
VI.3.1 Sens de variation . . . 72
VI.3.2 Extremum local . . . 72
VI.4 Dérivées successives d'une fonction . . . 73
VI.5 Exercices résolus . . . 73

VII Nombres complexes **77**
VII.1 Introduction . . . 77
VII.1.1 Des équations et des ensembles . . . 77
VII.1.2 Activités . . . 77
VII.1.3 Définitions . . . 78
VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$ . . . 78
VII.2 Interprétations géométriques . . . 80
VII.2.1 Affixe, point image, vecteur image . . . 80
VII.2.2 $\vec{u} + \vec{u'}$, $k\vec{u}$, $\overrightarrow{MM'}$ . . . 81
VII.2.3 Écriture complexe de certaines symétries . . . 81
VII.2.4 Coordonnées polaires . . . 81
VII.2.5 Module et arguments . . . 82
VII.3 Propriétés algébriques . . . 83
VII.3.1 Propriétés du conjugué . . . 83
VII.3.2 Propriétés du module et des arguments . . . 84
VII.3.3 Formule de MOIVRE (complément) . . . 84
VII.4 Notation exponentielle . . . 85
VII.4.1 Une équation différentielle . . . 85
VII.4.2 Définitions et propriétés . . . 85
VII.4.3 Forme exponentielle et symétries usuelles . . . 86
VII.4.4 Formules d'EULER . . . 86
VII.4.5 Racines carrées d'un nombre complexe . . . 86
VII.5 Nombres complexes et polynômes (compléments) . . . 86
VII.5.1 Théorème fondamental de l'algèbre . . . 87
VII.5.2 Résolution des équations du second degré . . . 87
VII.6 Utilisation des nombres complexes (compléments) . . . 89
VII.6.1 Racines n-ièmes de l'unité . . . 89
VII.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul . . . 89
VII.6.3 Polynômes . . . 90
VII.6.4 Forme algébrique des racines carrées d'un nombre complexe . . . 92
VII.6.5 Trigonométrie . . . 93
VII.7 Géométrie et nombres complexes . . . 94
VII.7.1 Propriétés générales . . . 95
VII.7.2 Écriture complexe de quelques transformations usuelles . . . 95
VII.7.3 Affixe du barycentre d'un système de points pondérés . . . 96

VIII Intégration **97**
VIII.1 Primitives d'une fonction . . . 97
VIII.1.1 Introduction . . . 97
VIII.1.2 Détermination pratique . . . 98
VIII.1.3 Exercices . . . 99
VIII.2 Premiers calculs . . . 99
VIII.2.1 Introduction . . . 99
VIII.2.2 Intégrale d'une fonction constante . . . 100
VIII.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 100
VIII.2.4 Activité . . . 102
VIII.2.5 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier . . . 103
VIII.3 Intégrale de Riemann . . . 103
VIII.3.1 Définition . . . 103
VIII.3.2 Sommes de Riemann . . . 104
VIII.3.3 Exemple d'intégrale d'une fonction usuelle . . . 107
VIII.4 Théorème fondamental de l'analyse . . . 108
VIII.4.1 Problème ouvert . . . 108
VIII.4.2 Théorème fondamental de l'analyse . . . 108
VIII.4.3 Exercices . . . 110
VIII.5 Proptiétés algébriques . . . 110
VIII.5.1 Relation de Chasles . . . 110
VIII.5.2 Linéarité . . . 111
VIII.5.3 Exercices . . . 112
VIII.6 Propriétés de comparaison . . . 112
VIII.6.1 Signe de l'intégrale . . . 112
VIII.6.2 Inégalité de la moyenne . . . 113
VIII.6.3 Valeur moyenne d'une fonction . . . 115
VIII.6.4 Exercices . . . 116
VIII.7 Autres techniques de calcul . . . 117
VIII.7.1 Intégration par parties . . . 117
VIII.7.2 Intégration et invariance géométrique . . . 118
VIII.7.3 Exercices . . . 120

IX Dénombrement **121**
IX.1 Notions Préliminaires . . . 121
IX.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles . . . 121
IX.1.2 Produit cartésien d'ensembles . . . 122
IX.2 Factorielle . . . 123
IX.3 Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments . . . 124
IX.3.1 Tirages successifs avec remise . . . 124
IX.3.2 Tirages successifs sans remise . . . 124
IX.3.3 Combinaisons - Tirages simultanés . . . 125
IX.3.4 Tableau récapitulatif . . . 129

X Calcul des probabilités **131**
X.1 Calculs de probabilités . . . 131
X.1.1 Vocabulaire des événements . . . 131
X.1.2 Probabilité d'un événement . . . 132
X.1.3 Probabilités conditionnelles . . . 136
X.2 Variable aléatoire . . . 138
X.2.1 Introduction . . . 138
X.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . . 139
X.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire . . . 139
X.2.4 Variables aléatoires indépendantes . . . 142
X.3 Lois de probabilités discrètes . . . 144
X.3.1 Loi binomiale . . . 144
X.3.2 Loi de Poisson . . . 146
X.4 Lois de probabilités continues . . . 148
X.4.1 Intégrales généralisées . . . 148
X.4.2 Généralités sur lois de probabilités continues . . . 149
X.4.3 Loi uniforme . . . 151

X.4.4 Loi exponentielle 151
X.5 Adéquation à la loi équirépartie 151

XI Barycentre **153**
XI.1 Barycentre 153
XI.1.1 Introduction 153
XI.1.2 Activités 153
XI.1.3 Définition et propriétés 154
XI.1.4 Propriétés 156
XI.1.5 Exercices 158

Index **159**

Chapitre I

Vocabulaire de la logique

I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ?

DÉFINITION I.1.1 PROPOSITION

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan.*
On peut envisager les propositions, P : « ABCD est un carré » ;
Q : « ABCD est un parallélogramme ».
Suivant la nature du quadrilatère ABCD la proposition P, comme la proposition Q, est soit vraie, soit fausse.

I.2 Négation d'une proposition

DÉFINITION I.2.1

La négation d'une proposition P est la proposition, notée « non P » ou « $\overline{\text{P}}$ » ou encore « ¬P », qui est fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

Exemples
1. *Reprenons les propositions de l'exemple précédent.*
On a, $\overline{P}$: « ABCD n'est pas un carré » ; $\overline{Q}$: « ABCD n'est pas un parallélogramme ».
2. *Soit n un nombre entier.*
La négation de T : « n est pair » ; est $\overline{T}$: « n n'est pas pair » ;
c'est-à-dire : « n est impair ».
3. *Soit x un nombre réel.*
La négation de R : « $x > 2$ » ; est , $\overline{R}$: « $x \leqslant 2$ ».
4. *La négation de S : « pour tout réel x : $0 \leqslant x^2$ » ; est $\overline{S}$: « il existe un réel x (au moins) tel que : $0 > x^2$ ».*

Remarques
1. *La négation de la négation d'une proposition P, c'est-à-dire $\overline{\overline{P}}$, est* synonyme *de la proposition P elle même. On écrit : $\overline{\overline{P}} \equiv P$.*
2. *Désignons par K l'intervalle $]2;+\infty[$ et par $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$; $\overline{K}$ est donc l'intervalle $]-\infty;2]$.*
Les propositions R et $\overline{R}$ s'écrivent alors R : « $x \in K$ » ; et $\overline{R}$: « $x \in \overline{K}$ ».
En effet, les propositions « $x \notin K$ » et « $x \in \overline{K}$ » sont synonymes.

I.3 Le « et »

DÉFINITION I.3.1

Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P et Q) est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes deux vraies, et fausse dans le cas contraire.

Exemples
1. *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $1 < x$ » ; Q : « $x \leqslant 3$ ».*
P et Q est la proposition : « $1 < x$ et $x \leqslant 3$ » ; c'est-à-dire : « $1 < x \leqslant 3$ ».
2. *Considérons un quadrilatère ABCD et les propositions P : « ABCD a deux côtés perpendiculaires » ; Q : « ABCD est un parallélogramme ».*
On a, P et Q : « ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés perpendiculaires ».

Remarques
1. *Dans le premier exemple, si on désigne par I l'intervalle $]1;+\infty[$ et par J l'intervalle $]-\infty;3]$, P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in I$ » et « $x \in J$ ». La proposition (P et Q) s'écrit alors : « $x \in I \cap J$ ». En effet, les propositions « $x \in I$ et $x \in J$ » et « $x \in I \cap J$ » sont synonymes.*
2. *La proposition P et Q est parfois notée : $P \wedge Q$.*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in$ A » et Q : « $x \in$ B ». La proposition $P \wedge Q$: « $x \in$ A et $x \in$ B » est synonyme de :« $x \in$ A $\cup$ B »*

I.4 Le « ou »

Dans le langage courant, le mot « ou » a deux sens distincts : un sens exclusif comme dans l'affirmation « le menu propose fromage ou dessert », et un sens inclusif comme dans la phrase « Les Canadiens parlent l'anglais ou le français ». Dans le premier cas il signifie « soit fromage,soit dessert », dans le second cas il n'est pas exclu que certains Canadiens parlent les deux langues. C'est dans ce sens inclusif que « ou » est utilisé en mathématiques et en logique. Quand il est utilisé dans son sens exclusif, en général on le précise.

DÉFINITION I.4.1
Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P ou Q) est la proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions Q, P est vraie, et fausse dans le cas contraire.

Exemple *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $x \leqslant 1$ » ; Q : « $3 < x$ ».*
P ou Q est la proposition : « $x \leqslant 1$ ou $3 < x$ ».

Remarques
1. *Reprenons les intervalles I et J introduits dans la remarque précédente.*
Les propositions P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in \overline{I}$ » et « $x \in \overline{J}$ ».
La proposition (P ou Q) s'écrit alors : « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ ».
En effet, les propositions « $x \in \overline{I}$ ou $x \in \overline{J}$ » et « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ » sont synonymes.
2. *La proposition P ou Q est parfois notée : $P \vee Q$*

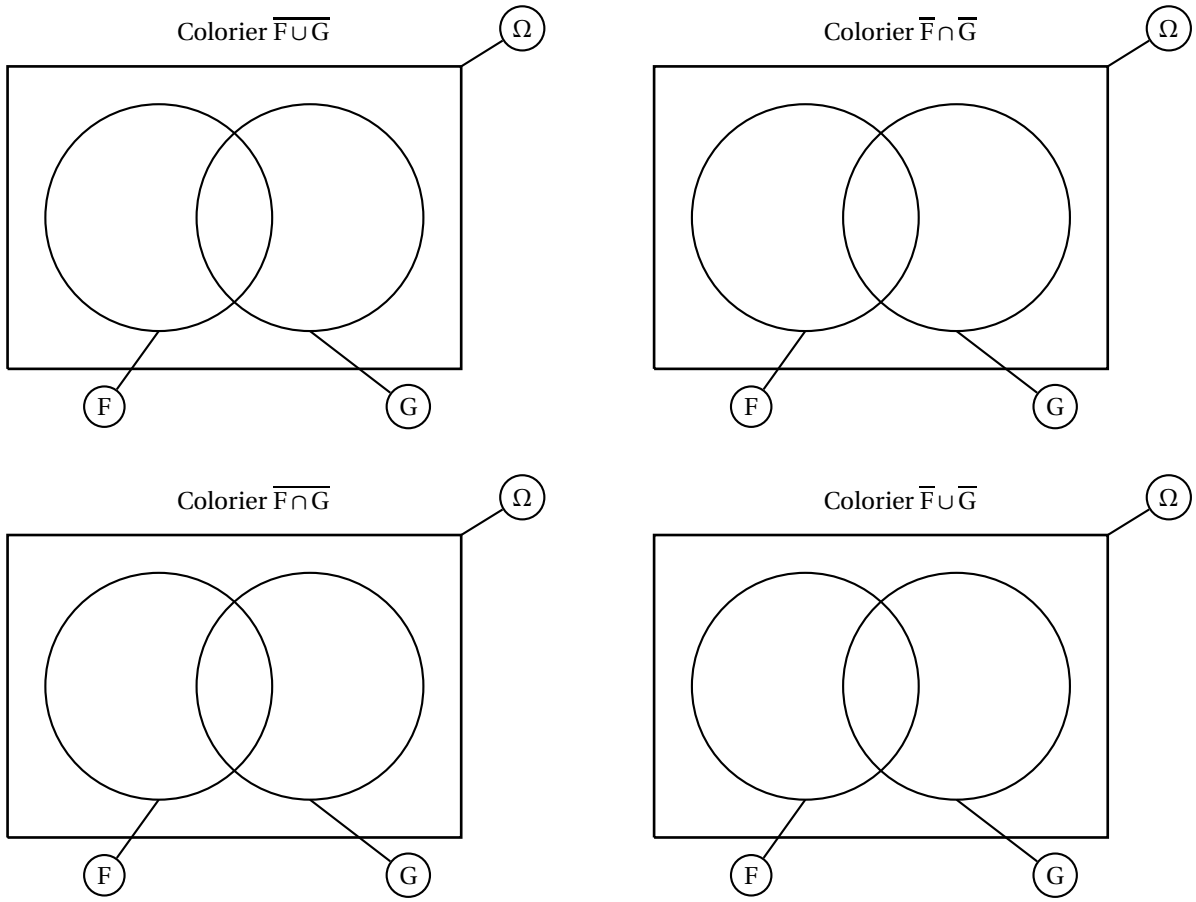
Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in$ A » et Q : « $x \in$ B ». La proposition $P \vee Q$: « $x \in$ A et $x \in$ B » est synonyme de :« $x \in$ A $\cup$ B »*

I.5 Propositions et parties d'un ensemble

Nous avons constaté à travers les remarques précédentes et nous admettons que de façon générale :
– la négation est aux propositions ce que le complémentaire est aux parties d'un ensemble ;
– la conjonction (le « et ») est aux propositions ce que l'intersection est aux parties d'un ensemble ;
– la disjonction (le « ou ») est aux propositions ce que l'union est aux parties d'un ensemble.

I.6 Lois de MORGAN

F et G désignent deux parties d'un ensemble Ω.



Soit Q, P deux propositions. Dire que la proposition (P ou Q) est fausse signifie que les propositions Q, P sont toutes deux fausses.
La proposition (non(P ou Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) et (non Q)).

$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

De même, dire que la proposition (P et Q) est fausse signifie que l'une au moins des propositions Q, P est fausse.
La proposition (non(P et Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) ou (non Q)).

$$\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$$

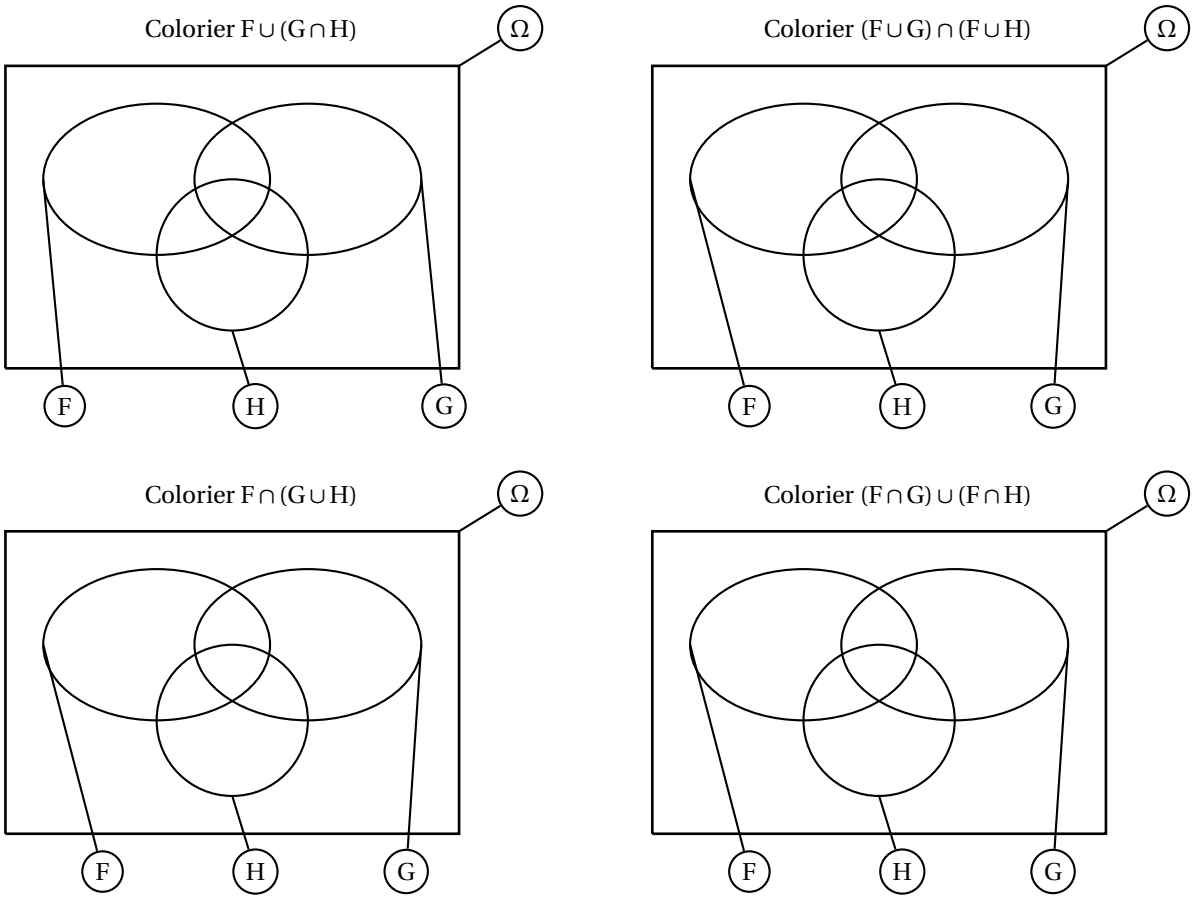
Exemples
1. *x désigne un nombre réel.*
La négation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ » est « $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».
La négation de « $0 < x$ ou $x \leqslant -1$ » est « $0 \geqslant x$ et $x > -1$ ».
2. *ABCD désigne un quadrilatère.*
La négation de « ABCD est un parallélogramme mais n'est pas un carré » est « ABCD est un carré ou n'est pas un parallélogramme».

Remarque *Les formules : $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$; $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$; $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$; sont appelées lois (ou formules) de Morgan*[1].

I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit Ω un ensemble. L'ensemble des parties de Ω est noté : $\mathscr{P}(\Omega)$.
F, G et H désignent trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.

1. MORGAN (AUGUSTUS DE) *Inde 1806 - Londres 1871,* mathématicien et logicien britannique.



THÉORÈME I.7.1

Soit Ω un ensemble. Pour tous éléments F, G, H de $\mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$F \cap G = G \cap F$	$\cap$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup G = G \cup F$	$\cup$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$	$\cap$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$	$\cup$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$;
$F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$;
$\Omega \cap F = F \cap \Omega = F$	Ω est élément neutre pour $\cap$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$\emptyset \cup F = F \cup \emptyset = F$	$\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarques

1. *Lorsque Ω est non vide, $(\mathscr{P}(\Omega), \cup)$ et $(\mathscr{P}(\Omega), \cap)$ ne sont pas des groupes car la plupart des éléments ne sont pas inversibles.*
Par exemple il n'existe pas d'élément Ω' dans $\mathscr{P}(\Omega)$ tel que : $\Omega \cup \Omega' = \emptyset$.

2. *L'associativité permet de légitimer des écritures telles que $F \cup G \cup H$ ou $F \cap G \cap H$.*

On peut réécrire le théorème précédent en remplaçant les parties de Ω par des propositions. On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME I.7.2

Soit P, Q, R trois propositions.
Les propositions (P et Q) et (Q et P) sont synonymes.
Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q et R)) et ((P et Q) et R) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q ou R)) et ((P ou Q) ou R) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q et R)) et ((P ou Q) et (P ou R)) sont synonymes.

Remarques

1. *Pour démontrer les propriétés du théorème ci-dessus, on peut utiliser un tableau de vérité. Par exemple le tableau ci-dessous envisage dans les trois premières colonnes tous les cas possibles et on constate qu'a chaque fois les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) ont la même valeur, ce qui prouve qu'elles sont synonymes.* ***2.*** *Pour démontrer les propriétés du théorème I.7.1, on peut utiliser également un tableau de vérité. Par exemple la propriété*

P	Q	R	P et (Q ou R)	(P et Q) ou (P et R)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.1 –

$F\cap(G\cup H)=(F\cap G)\cup(F\cap H)$ signifie que pour tout élément x, les propositions $x\in F\cap(G\cup H)$ et $x\in(F\cap G)\cup(F\cap H)$ sont synonymes ; ce qui est démontré par le tableau de vérité suivant.

$x\in$ F	$x\in$ G	$x\in$ H	$x\in$ F $\cap$ (G $\cup$ H)	$x\in$ (F $\cap$ G) $\cup$ (F $\cap$ H)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.2 –

I.8 Implications

I.8.1 Introduction

Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan, et les propositions P : « ABCD est un carré » et Q : « ABCD est un parallélogramme ». On sait que : « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme ». On dit que la proposition P implique la propositions Q ; on écrit : P $\Rightarrow$ Q.

Lorsque P $\Rightarrow$ Q, on dit que P est une condition suffisante de Q (pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que ABCD soit un carré) ou que Q est une condition nécessaire de P (pour que ABCD soit un carré, il faut que ABCD soit un parallélogramme).

En logique, on déduit d'une proposition fausse n'importe qu'elle autre proposition, vraie ou fausse. Donc si la proposition P est fausse alors la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie. Ainsi, P $\Rightarrow$ Q est synonyme de (Q ou non P).

Remarques

1. *Dans une argumentation une implication se reconnaît généralement à la structure « si ... alors ... », mais il arrive qu'elle soit moins reconnaissable. Ainsi on énonce parfois : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »*
Cette phrase signifie : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.»

2. *En mathématique, pour démontrer une proposition Q on démontre souvent une proposition du type : (P et (P $\Rightarrow$ Q)). En pratique, ce type d'argumentation (appelée* modus ponens*) se traduit par une structure « P donc Q » qui signifie que l'on sait d'une part que P est vrai et d'autre part que P $\Rightarrow$ Q.*

3. *Il existe une autre règle, appelée* modus tollens *qui permet de déduire $\overline{P}$ de $\left((P\Rightarrow Q)\text{ et }\overline{Q}\right)$.*
Le modus tollens *est à la base du raisonnement par l'absurde.*

I.8.2 Réciproque d'une implication

La réciproque de l'implication « P $\Rightarrow$ Q » est l' implication « Q $\Rightarrow$ P » (ou « P $\Leftarrow$ Q »).

Exemples

1. *Considérons un quadrilatère ABCD.*

L'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est vrai et pourtant son implication réciproque, « si ABCD est un parallélogramme, alors ABCD est un carré », est fausse.
2. *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB. Le théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si le triangle ABC est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2$ ».*
La réciproque du théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si $a^2 = b^2 + c^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ». Nous savons que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.

I.8.3 Contraposée d'une implication

La contraposée de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est l'implication « $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ » (ou « $\overline{P} \Leftarrow \overline{Q}$ »).
Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD.*
La contraposée de l'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est l'implication « si ABCD n'est pas un parallélogramme, alors ABCD n'est pas un carré ».

Nous constatons que ces deux dernières implications sont vraies. Plus généralement, on a la propriété suivante.

THÉORÈME I.8.1

Deux implications contraposées sont synonymes.

Démonstration En effet : $(P \Rightarrow Q) \equiv \left(Q \vee \overline{P}\right) \equiv \left(\overline{P} \vee \left(\overline{Q}\right)\right) \equiv \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$. □

Exercice I.8.1. ***Soit n un nombre entier, démontrer que si n^2 est impair, alors n est impair.***
Solution *On sait que le produit de deux entiers pairs est pair. Donc, en particulier, si n est pair alors n^2 est pair ; donc, par contraposition, si n^2 n'est pas pair alors n n'est pas pair ; c'est-à-dire si n^2 est impair, alors n est impair.* □

I.8.4 Implication contraire

L'implication contraire de « $P \Rightarrow Q$ » est l'implication « $P \Rightarrow \overline{Q}$ ».
Les propositions « $P \Rightarrow Q$ » et « $P \Rightarrow \overline{Q}$ » ne sont pas équivalentes et l'une n'est pas la négation de l'autre.

I.9 Double implication ou équivalence

Lorsqu'une implication « $P \Rightarrow Q$ » et sa réciproque « $P \Leftarrow Q$ » sont toutes les deux vraies, on dit qu'on a une double implication. Les propositions P et Q sont dites équivalentes, ce qui se note : $P \Leftrightarrow Q$.

Dans les propriétés et les raisonnements, les équivalences sont signalées par des expressions telles que « si et seulement si » ou « équivaut à ».
Exemple *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB.*
Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être regroupés dans l'énoncé suivant :
« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$. »

Remarques
1. *Lorsque la réciproque d'une implication est fausse, on n'a pas l'équivalence. Ainsi, en reprenant l'exemple du quadrilatère ABCD, l'énoncé « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme », en revanche l'énoncé « ABCD est un carré si et seulement si ABCD est un parallélogramme » est faux.*
2. *Si deux propositions sont équivalentes alors, par contraposition leurs négations sont équivalentes.*

Exemple *Soit x un nombre réel.*
On a : $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$;
donc, par contraposition : $|x| \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $2 \leqslant x$.

I.10 Formules récapitulatives

Les principales propriétés évoquées dans cet exposé sont résumées par les formules suivantes.

$$\overline{\overline{P}} \equiv P$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\overline{P \wedge Q} & \equiv & \overline{P} \vee \overline{Q} \\ \overline{P \vee Q} & \equiv & \overline{P} \wedge \overline{Q}\end{array}\right\} \quad \text{(lois de Morgan)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge Q & \equiv & Q \wedge P \\ P \vee Q & \equiv & Q \vee P\end{array}\right\} \quad \text{(commutativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge (Q \wedge R) & \equiv & (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) & \equiv & (P \vee Q) \vee R\end{array}\right\} \quad \text{(associativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge (Q \vee R) & \equiv & (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) & \equiv & (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{array}\right\} \quad \text{(distributivité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}(P \Rightarrow Q) & \equiv & \left(\overline{P} \Leftarrow \overline{Q}\right) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & \left(\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}\right)\end{array}\right\} \quad \text{(contraposée)}$$

I.11 Raisonnement par récurrence

Considérons les premiers entiers naturels non nuls et comparons la somme de leurs cubes au carré de leur somme.

On a : $1^3 = 1$ et $1^2 = 1$

$1^3 + 2^3 = 9$ et $(1+2)^2 = 9$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ et $(1+2+3)^2 = 36$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ et $(1+2+3+4)^2 = 100$

Cette étude nous amène à conjecturer que pour tout entier naturel non nul n, la proposition

$$P_n : \text{« } 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 \text{ »}$$

est vraie. Il est malheureusement impossible d'examiner la véracité de chacune de ces propositions. Pour démontrer ces propositions, nous allons utiliser une nouvelle méthode de raisonnement appelée *raisonnement par récurrence* dont le principe est le suivant : on vérifie que la première proposition est vraie et on démontre que chacune des propositions implique la proposition suivante ; on prouve ainsi, de proche en proche, que toutes les propositions sont vraies.

- D'après l'étude menée, P_1 est vraie.
- Supposons la proposition P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ (*hypothèse de récurrence*) ; c'est-à-dire : $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1+2+\cdots+k)^2$; déduisons-en que la proposition P_{k+1} est vraie ; c'est-à-dire : $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(1+2+\cdots+k+(k+1)\right)^2$;

  On a :

$$\begin{array}{rcll}1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 & = & (1+2+\cdots+k)^2 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 & \text{(hypothèse de récurrence et développement)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2 + 2\dfrac{k(k+1)}{2}(k+1) + (k+1)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right]^2 & \text{(identité remarquable)} \\ & = & \left(1+2+\cdots+k+(k+1)\right)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)}\end{array}$$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel non nul n :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- on vérifie que la proposition P_{n_0} est vraie
- on démontre, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, que si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Exercice I.11.1. ***Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9.***

Solution *Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition P_n : « $10^n - 1$ est multiple de 9 ».*

$10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$ *donc P_0 est vraie.*

Soit k un entier naturel. Supposons que $10^k - 1$ soit multiple de 9, démontrons que $10^{k+1} - 1$ est multiple de 9.

$10^{k+1} - 1 = \underbrace{9 \times 10^k}_{\text{multiple de 9}} + \underbrace{10^k - 1}_{\substack{\text{multiple de 9 d'après} \\ \text{l'hypothèse de récurrence}}}$ *; donc $10^{k+1} - 1$, comme somme de multiples de 9, est multiple de 9.*

D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9. □

Exercice I.11.2. ***(Inégalité de BERNOULLI)***

Démontrer que pour tout réel α vérifiant $\alpha \geqslant -1$ et pour tout entier naturel non nul n, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Solution *Soit α un réel vérifiant $\alpha \geqslant -1$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition B_n : « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ ».*
Pour $n=1$, on a : $(1+\alpha)^n = 1+\alpha$ et $1+n\alpha = 1+\alpha$; donc B_1 est vraie.
Soit k un entier naturel. Supposons que : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$; démontrons que : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
On a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ et $1+\alpha$ est positif, donc par produit : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha)$.
Or : $(1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2$ et $n\alpha^2 \geqslant 0$; donc : $(1+n\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1+(n+1)\alpha$; puis par transitivité : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
Donc par récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$. □

Remarques
1. *La première étape du raisonnement (vérifier que la première proposition est vraie) est essentielle. En considérant les propositions Q_n : « 10^n est multiple de 9 » ; on démontre comme dans l'exercice I.11.1. que pour tout k : $Q_k \Rightarrow Q_{k+1}$; et pourtant aucune des propositions Q_n n'est vraie.*
2. *Lorsqu'un raisonnement par récurrence est entrepris, l'expression « donc par récurrence » doit apparaître dans l'argumentation. Si de plus l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée, le raisonnement est alors faux.*

Chapitre II

Révisions

II.1 Identités remarquables

On obtient les identités remarquables suivantes par simple développement. Elles servent à développer des expressions factorisées ou à factoriser des expressions développées.

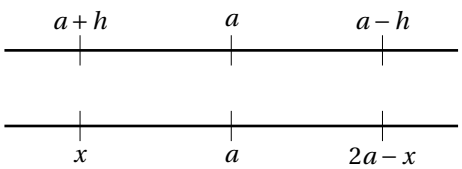
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{(II.1)}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad \text{(II.2)}$$
$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2 \quad \text{(II.3)}$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \text{(II.4)}$$
$$(a+b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \text{(II.5)}$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad \text{(II.6)}$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad \text{(II.7)}$$

II.2 Éléments de symétries d'une courbe

Dans toute cette partie f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II.2.1 Symétries dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel h, $a+h$ et $a-h$ sont symétriques par rapport à a ; en effet leur demi-somme vaut a. De même x et $2a-x$ sont symétriques par rapport à a.



Dans tout ce document f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple *Le symétrique de x par rapport à* 3 *est* $6-x$.

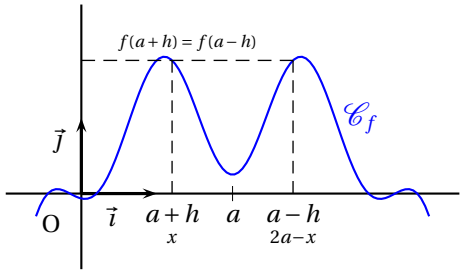
II.2.2 Axe de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME II.2.1

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si :

$\begin{cases} \textbf{(1)} & \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } a. \\ \textbf{(2)} & \text{Pour tout réel } h \text{ tel que } a+h \in \mathrm{D}_f : \\ & f(a+h) = f(a-h). \end{cases}$



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.1 peut également s'écrire :*
$\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.1. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *f est une fonction polynôme, son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 2.*
1re méthode *Soit h un réel, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^4 - 8(2+h)^3 + 22(2+h)^2 - 24(2+h) + 8 \\ &= (2+h)^3(2+h-8) + 22h^2 + 88h + 88 - 48 - 24h + 8 \\ &= (h^3 + 6h^2 + 12h + 8)(h-6) + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 - 64h - 48 + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-h) &= (2-h)^4 - 8(2-h)^3 + 22(2-h)^2 - 24(2-h) + 8 \\ &= (2-h)^3(2-h-8) + 22h^2 - 88h + 88 - 48 + 24h + 8 \\ &= (-h^3 + 6h^2 - 12h + 8)(-h-6) + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 + 64h - 48 + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2+h \in D_f$, on a : $f(2+h) = f(2-h)$;
donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2e méthode *Pour tout réel $x \in D_f$, on a :*

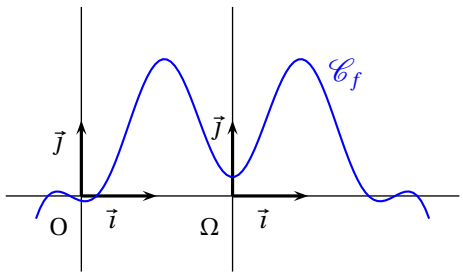
$$\begin{aligned} f(4-x) &= (4-x)^4 - 8(4-x)^3 + 22(4-x)^2 - 24(4-x) + 8 \\ &= (4-x)^3(4-x-8) + 22x^2 - 176x + 352 - 96 + 24x + 8 \\ &= -(x+4)\left(-x^3 + 12x^2 - 48x + 64\right) + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 128x - 256 + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &= f(x); \end{aligned}$$

donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.2

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et Ω le point de coordonnées $(a,0)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exercice II.2.2. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *Soit $\Omega(2,0)$, M un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ ; } \overrightarrow{\Omega M} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = 2\vec{\imath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &\iff Y = (X+2)^4 - 8(X+2)^3 + 22(X+2)^2 - 24(X+2) + 8 \\ &\vdots \\ &\iff Y = X^4 - 2X^2 \end{aligned}$$

La fonction polynôme $p : x \mapsto x^4 - 2x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$p(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = p(x).$$

Donc p est une fonction paire et par suite la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

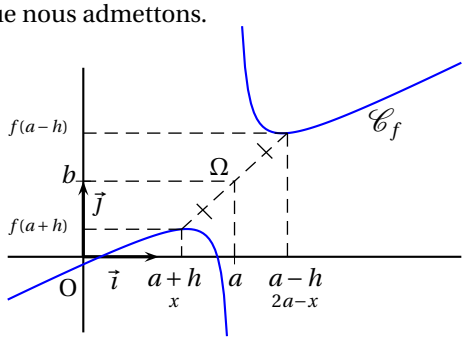
II.2.3 Centre de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME II.2.3

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$ si et seulement si :

- **(1)** D_f est symétrique par rapport à a.
- **(2)** Pour tout réel h tel que $h \in D_f$: $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.3 peut également s'écrire :*
$\forall x \in D_f,\ 2b - f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.3. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

Solution *f est une fonction rationnelle, son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et D_f est symétrique par rapport à 2.*

1re méthode *Soit h un réel tel que $2+h \in D_f$, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 3}{(2+h) - 2} \\ &= \frac{h^2 + 4h + 4 - 3h - 6 + 3}{h} \\ &= h + 1 + \frac{1}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2-h) &= \frac{(2-h)^2 - 3(2-h) + 3}{(2-h) - 2} \\ &= \frac{h^2 - 4h + 4 + 3h - 6 + 3}{-h} \\ &= -h + 1 - \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2+h \in D_f$, on a :

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{1}{2}\left(h + 1 + \frac{1}{h} - h + 1 - \frac{1}{h}\right) = 1$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2e méthode *Pour tout x de D_f, on a :*

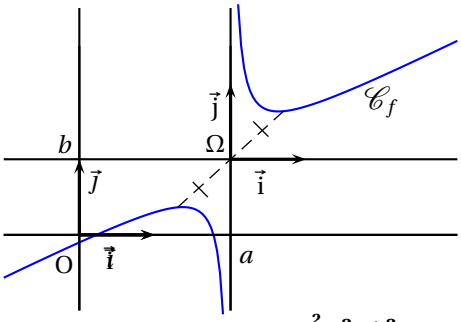
$$\begin{aligned} 2-f(4-x) &= 2-\frac{(4-x)^2-3(4-x)+3}{(4-x)-2} \\ &= \frac{2(2-x)-\left(x^2-8x+16+3x-12+3\right)}{2-x} \\ &= \frac{-x^2+3x-3}{2-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.4

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et Ω le point de coordonnées (a,b).
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction impaire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exercice II.2.4. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

Solution *Soit M un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{\imath}+Y\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = 2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff y = \frac{x^2-3x+3}{x-2} \\ &\iff Y+1 = \frac{(X+2)^2-3(X+2)+3}{(X+2)-2} \\ &\vdots \\ &\iff Y = X+\frac{1}{X} \end{aligned}$$

La fonction rationnelle $g : x \mapsto x+\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x :

$$g(-x) = (-x)+\frac{1}{-x} = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = -g(x).$$

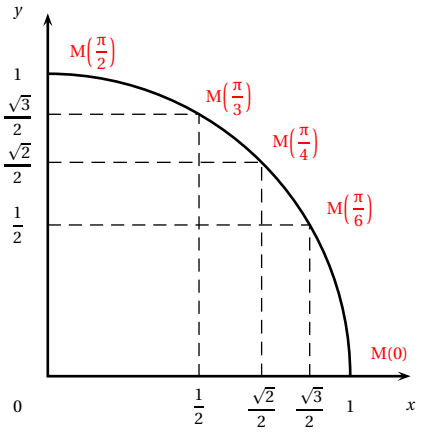
Donc g est une fonction impaire et par suite le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

II.3 Trigonométrie

II.3.1 Quelques valeurs remarquables

Le tableau ci-dessus a été vu en classe de 2e.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.



Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 ; \tag{II.8}$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \tag{II.9}$$

II.3.2 Quelques formules

II.3.2.a Formules de symétries

Les formules de ce paragraphe se déduisent des figures II.1 et II.2.
Pour tout réel x, on a :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \tag{II.10}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \tag{II.11}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \tag{II.12}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x \tag{II.13}$$

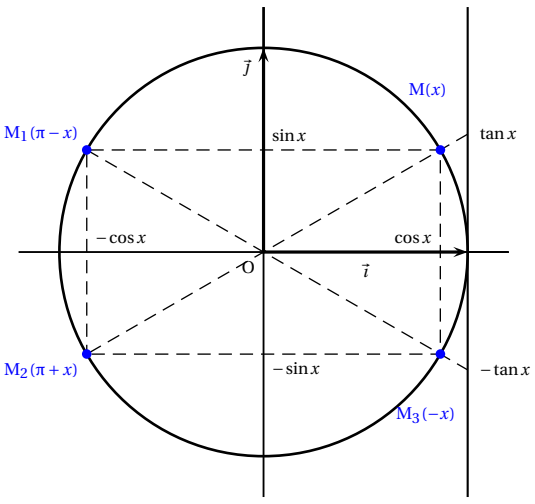


FIGURE II.1 – Images de x, $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$

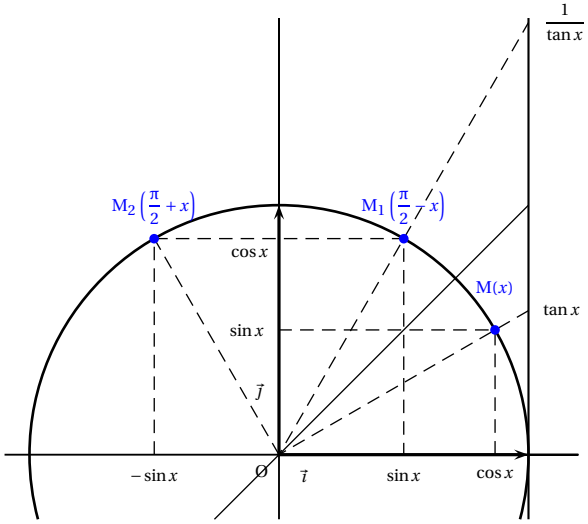


FIGURE II.2 – Images de x, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \tag{II.14}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x} \tag{II.15}$$

II.3.2.b Formules d'addition

Pour tous réel a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \tag{II.16}$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \tag{II.17}$$

Si de plus ni a ni b ni $a+b$ ne sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \tag{II.18}$$

II.3.2.c Formules de duplication

En prenant : $a = b = x$; dans les formules (II.16), (II.17) et (II.18), on obtient les formules suivantes.
Pour tout réel x, on a :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{II.19}$$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{4}$, on a :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{II.20}$$

En posant : $t = \tan\frac{x}{2}$; on déduit des formules (II.19) et (II.20), lorsque t et $\tan x$ son définis :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \tag{II.21}$$

II.3.2.d Sommes différences et produits de fonction circulaires

En posant $p = a+b$ et $q = a-b$ dans (II.16) et (II.17), on démontre que pour tous réels p et q, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.22}$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.23}$$

On déduit par addition ou soustraction dans les formules (II.16) et (II.17) que pour tous réels a et b :

$$\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \tag{II.24}$$
$$\sin a\sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b) \tag{II.25}$$
$$\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \tag{II.26}$$

II.3.3 Équations trigonométriques

II.3.3.a $\cos x = \cos\alpha$

THÉORÈME II.3.1

Soit α un nombre réel.

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array} \right.$$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x \equiv \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \\ ou \\ x \equiv -\alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{array} \right.$$

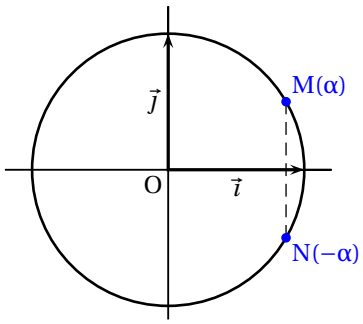


FIGURE II.3 – Équation $\cos x = \cos\alpha$

Exercice II.3.1. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm).***
a. $2\cos x = -1$.
b. $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solution a. *Résolvons l'équation :*

$$2\cos x = -1 \qquad (E_1)$$

On a :

$$(E_1) \iff \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$\iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.4.

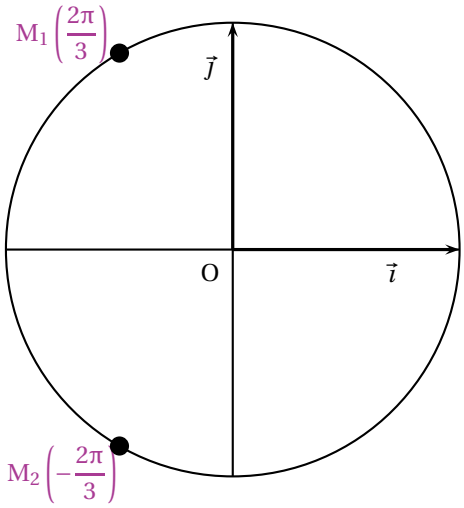


FIGURE II.4 – Images des solutions de (E_1)

b. *Résolvons l'équation :*

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (E_2)$$

On a :

$$(E_2) \iff \left| \begin{array}{l} 2x = x - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ 2x = -x + \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ 3x = \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k'\dfrac{2\pi}{3} \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.5.□

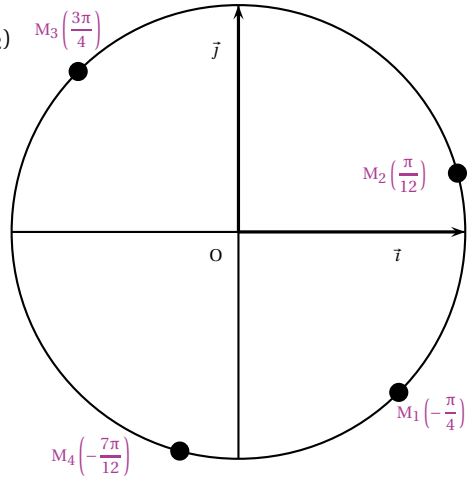


FIGURE II.5 – Images des solutions de (E_2)

II.3.3.b $\sin x = \sin\alpha$

THÉORÈME II.3.2

Soit α un nombre réel.

$$\sin x = \sin\alpha \iff \left|\begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

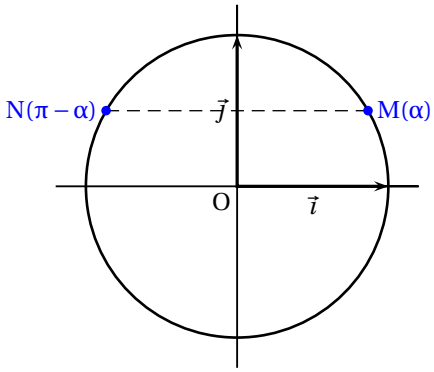


FIGURE II.6 – Équation $\sin x = \sin\alpha$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\sin x = \sin a \iff \left|\begin{array}{c} x \equiv \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \\ ou \\ x \equiv \pi - \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{array}\right.$$

Exercice II.3.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm) : $2\sin^2 x = 1$.***

Solution *Résolvons l'équation :*

$$2\sin^2 x = 1 \qquad (E_3)$$

$$\begin{aligned}
\textit{On a : } (E_3) &\iff \sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\
&\iff \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \; ou \; \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$(E_3) \iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 3\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 7\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 5\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(E_3) \iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + (4k) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+1) \times \dfrac{\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+3) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+2) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

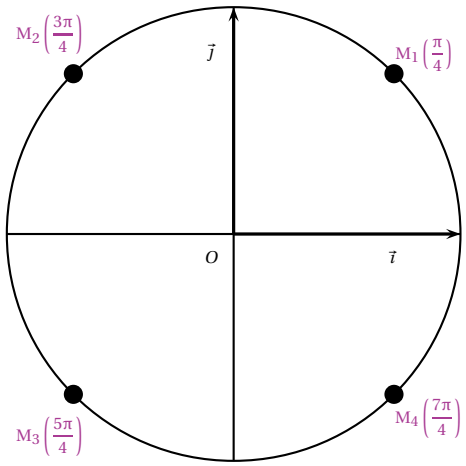


FIGURE *II.7 – Images des solutions de (E_3)*

Or $(4k)$, $(4k+1)$, $(4k+2)$, $(4k+3)$ sont des entiers et réciproquement tout entier n est de la forme : $4k+r$ avec $r \in$

$\{0;1;2;3\}$ *; en effet,* k *et* r *sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* n *par* 4 *; donc :*

$$\boxed{(E_3) \iff x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})}$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.7. □

II.3.3.c $\tan x = \tan\alpha$

THÉORÈME II.3.3

Soit α un nombre réel tel que $\tan\alpha$ soit défini.

$$\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\tan x = \tan\alpha \iff x \equiv \alpha \ (\mathrm{mod}\ \pi)$$

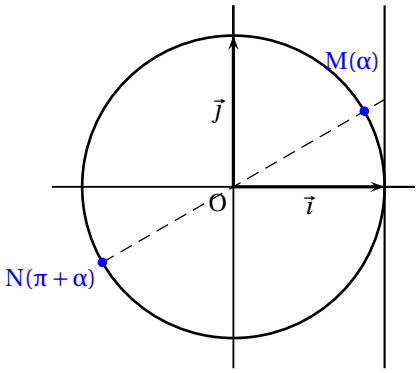


FIGURE II.8 – Équation $\tan x = \tan\alpha$

II.3.3.d $a\cos x + b\sin x = c$

On rappelle que les formules de passages entre coordonnées rectangulaires et coordonnées polaires sont par : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

et $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$.

Pour plus de précisions, on pourra se référer au paragraphe VII.2.4 page 81. On se propose de résoudre l'équation :

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad \text{(II.27)}$$

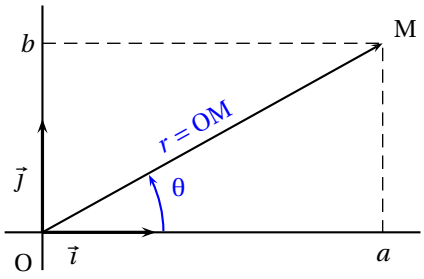


FIGURE II.9 – Coordonnées polaires

Où a, b, c sont des réels tels que a et b ne soient pas tous nuls.

Posons : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$; on a alors : $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$; d'où il vient :

$$\text{(II.9)} \iff r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{r}.$$

On est ainsi ramené au type d'équation étudié au paragraphe II.3.3.a (page 15).

Exercice II.3.3. ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***et représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation :***

$$3\cos x + \sqrt{3}\sin x = -3 \qquad \text{(II.28)}$$

Solution *On a :* $\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ *; on en déduit que :*

$$
\begin{aligned}
\text{(II.28)} &\iff 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = -3\\
&\iff \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}\\
&\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}\\
&\iff \left|\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \quad ou \qquad\qquad (k\in\mathbb{Z})\\ x-\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\\
&\iff \left|\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \quad ou \qquad\qquad (k\in\mathbb{Z})\\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

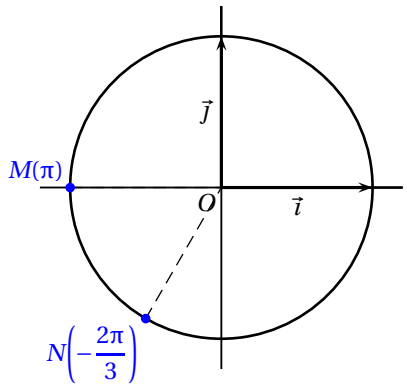


FIGURE *II.10 – Images des solutions de l'équation* (II.28)

□

II.4 Géométrie du triangle

Dans toute cette partie ABC désigne un triangle, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, désignent respectivement les angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$; a, b, c désignent respectivement les distances BC, CA et AB et $\mathscr{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

II.4.1 Aire d'un triangle

Comme chacun sait, l'aire d'un triangle se calcule par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Dans le triangle ABC ci-contre, si on choisit AB pour base alors la hauteur CH est déterminée par :

$$\text{CH} = \text{BC}\cos\widehat{ABC} = a\sin\widehat{B}.$$

On en déduit que : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B}$.

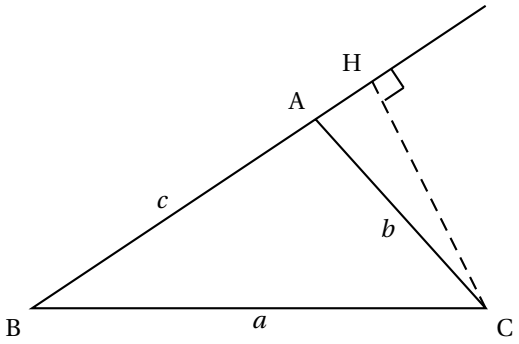


FIGURE II.11 –

Plus généralement :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} \qquad \text{(II.29)}$$

II.4.2 Théorème des sinus

THÉORÈME II.4.1

Soit ABC un triangle et $\mathscr{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit, on a :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

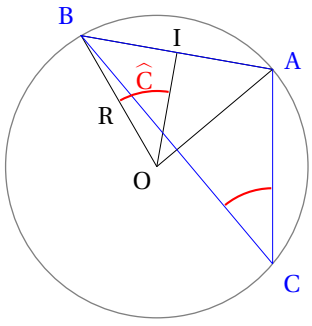


FIGURE II.12 –

Démonstration En multipliant (II.29) membre à membre par $\frac{2}{abc}$, il vient :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

Les trois angles du triangle ABC ne peuvent être tous droits ou obtus, car sinon leur somme serait strictement supérieure à un angle plat. On en déduit que l'un des angles au moins est aigu, par exemple $\widehat{C}$. Soit I le milieu du segment [AB] et O le centre du cercle circonscrit. Le triangle OAB est isocèle en O et, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. On en déduit que le triangle OBI est rectangle en I et que : $\widehat{BOI} = \widehat{C}$; d'où il vient : $\frac{c}{2} = \text{BI} = \text{R}\sin\widehat{C}$; donc : $\frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$. □

II.4.3 Théorème d'Al Kashi

Théorème II.4.2

Soit ABC un triangle, on a :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Démonstration (1) On a : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

On démontre de même **(2)** et **(3)**. □

Remarques

1. *Lorsque l'un des angles est droit, on retrouve le théorème de* Pythagore *; en effet si par exemple l'angle* $\widehat{A}$ *est droit,* ***(1)*** *devient :* $a^2 = b^2 + c^2$.

2. *Le théorème des sinus (II.4.1) et le théorème d'*Al Kashi *(II.4.2) permettent lorsqu'elle est possible la résolution des triangles*[1].

II.4.4 Théorème de la médiane

Théorème II.4.3

Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC], on a :

(1) $2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$;

(2) $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$.

Démonstration (1) On a :

$$\begin{aligned} 2AA'^2 &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}\right)^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 \\ &= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= AB^2 + AC^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \end{aligned}$$

(2) En utilisant **(1)**, il vient : $\frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$;

d'où l'on tire : $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$. □

II.5 Polynômes du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $P(x)$, résoudre l'équation $P(x) = 0$, étudier le signe $P(x)$ suivant les valeurs de x, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

II.5.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$; on écrit $P(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $P(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $P(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $P(x)$ est : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

1. Résoudre un triangle : étant donnés un certain nombre d'angles et de côtés d'un triangle, déterminer les angles et les côtés non donnés.

étapes	cas particulier	cas général
1.	$P(x)=3x^2+5x-7$	$P(x)=ax^2+bx+c$
	$P(x)=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
2.	$P(x)=3\left(x^2+2\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{84}{36}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$	
3.	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$	$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{109}}{6}\right)$	
	$P(x)=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$	

Récapitulatif des étapes

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise ; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteur de degré un à coefficient réels.

DÉFINITION II.5.1

Le nombre, Δ, défini par : $\Delta=b^2-4ac$; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{II.30}$$

II.5.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
D'après (II.30), pour tout réel x :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \tag{II.31}$$

Introduisons la fonction $u: x\mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (II.31) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2a}\\-\frac{\Delta}{4a}\end{pmatrix}$.

THÉORÈME II.5.1

La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à Oy et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$; de plus, dans le repère $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y=aX^2$.

Remarque *D'après (II.31) on a :* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Exemple *On se propose de représenter graphiquement la fonction f définie par :* $f(x)=x^2-5x+4$.
On a : $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ *et* $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}+4=\frac{16}{4}-\frac{25}{4}=-\frac{9}{4}$.
Introduisons le point $S\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$, *dans le repère* $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $Y=X^2$.
Nous en déduisons la courbe de la figure II.13.

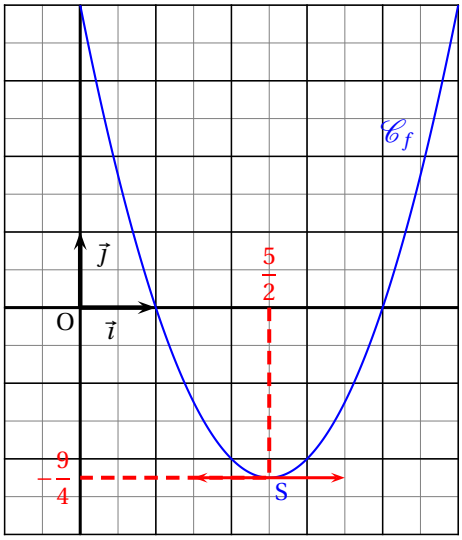


FIGURE II.13 – Représentation graphique de f.

On déduit du théorème II.5.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de a.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

FIGURE II.14 – Lorsque $a > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

FIGURE II.15 – Lorsque $a < 0$.

II.5.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : Si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (II.30) dans le cas où : $\Delta > 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME II.5.2

Soit $P : x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Si $\Delta = 0$ P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$P(x) = a(x-x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

Remarques

1. *Si on remplace Δ par 0 dans les formules de calcul de x_1 et x_2, on obtient : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$.*

2. *Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

3. *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

4. *Le théorème II.5.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré,P, que pour résoudre l'équation, $P(x) = 0$ (voir corollaire II.5.3).*

Exercice II.5.1. ***Factoriser lorsque cela est possible.***

a. **$P(x) = 2x^2+3x-6$.**

b. **$P(x) = 2x^2-8x+8$.**

c. **$P(x) = 2x^2-5x+8$.**

d. **$P(x) = -5x^2+3x+2$.**

Solution

a. *On a : $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-6) = 57$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} \quad et \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = 2\left(x-\frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)}.$$

b. Méthode des identités

$$\boxed{P(x) = 2\left(x^2-4x+4\right) = 2(x-2)^2}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = (-8)^2-4\times 2\times 8 = 0$; donc $\Delta = 0$ et P a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = 2(x-2)^2}.$$

c. *On a : $\Delta = (-5)^2-4\times 2\times(8) = 39$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\textbf{\textit{P n'est pas factorisable.}}}$$

d. Méthode de la racine évidente *On voit que 1 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$\boxed{P(x) = (x-1)(-5x-2)}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 3^2-4\times(-5)\times 2 = 49 = 7^2$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-7}{-10} = 1 \quad et \quad x_2 = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)}}.$$

□

COROLLAIRE II.5.3

Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{(E)}$$

et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.5.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$.***

a. $\mathbf{3x^2+5x-7=0}$.

b. $\mathbf{3x^2-5x-2=0}$.

c. $\mathbf{3x^2+5x+7=0}$.

d. $\mathbf{-5x^2+4x-\frac{4}{5}=0}$.

Solution ***a.*** *On a : $\Delta = 25-4\times3\times(-7) = 109$; donc $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{6} \quad et \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{-5-\sqrt{109}}{6}, \frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right\}}}.$$

b. Méthode de la racine évidente *On voit que 2 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$3x^2-5x-2 = (x-2)(3x+1).$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}}}.$$

c. *On a : $\Delta = 25-4\times3\times7 = -59$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\mathbf{S = \emptyset}}.$$

d. Méthode des identités

$$-5x^2+4x-\frac{4}{5} = -5\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right) = -5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 16-4\times(-5)\times\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$; donc $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

□

II.5.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x. On a vu en II.5.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
a	signe de a				
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (II.30) : $P(x) = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$; donc P est du signe de a.

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME II.5.4

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$ $P(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ $P(x)$ est du signe de a.

Exercice II.5.3. ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

a. $P_1 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 4$.

b. $P_2 : x \mapsto 3x^2 + 3x + 4$.

c. $P_3 : x \mapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}$.

Solution a. *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P_1 *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}.$$

On en déduit que le signe de P_1 *est donné par le tableau suivant.*

x		$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{4}$	
$P_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. *On a :* $\Delta = 9 - 48 = -39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$P_2 > 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

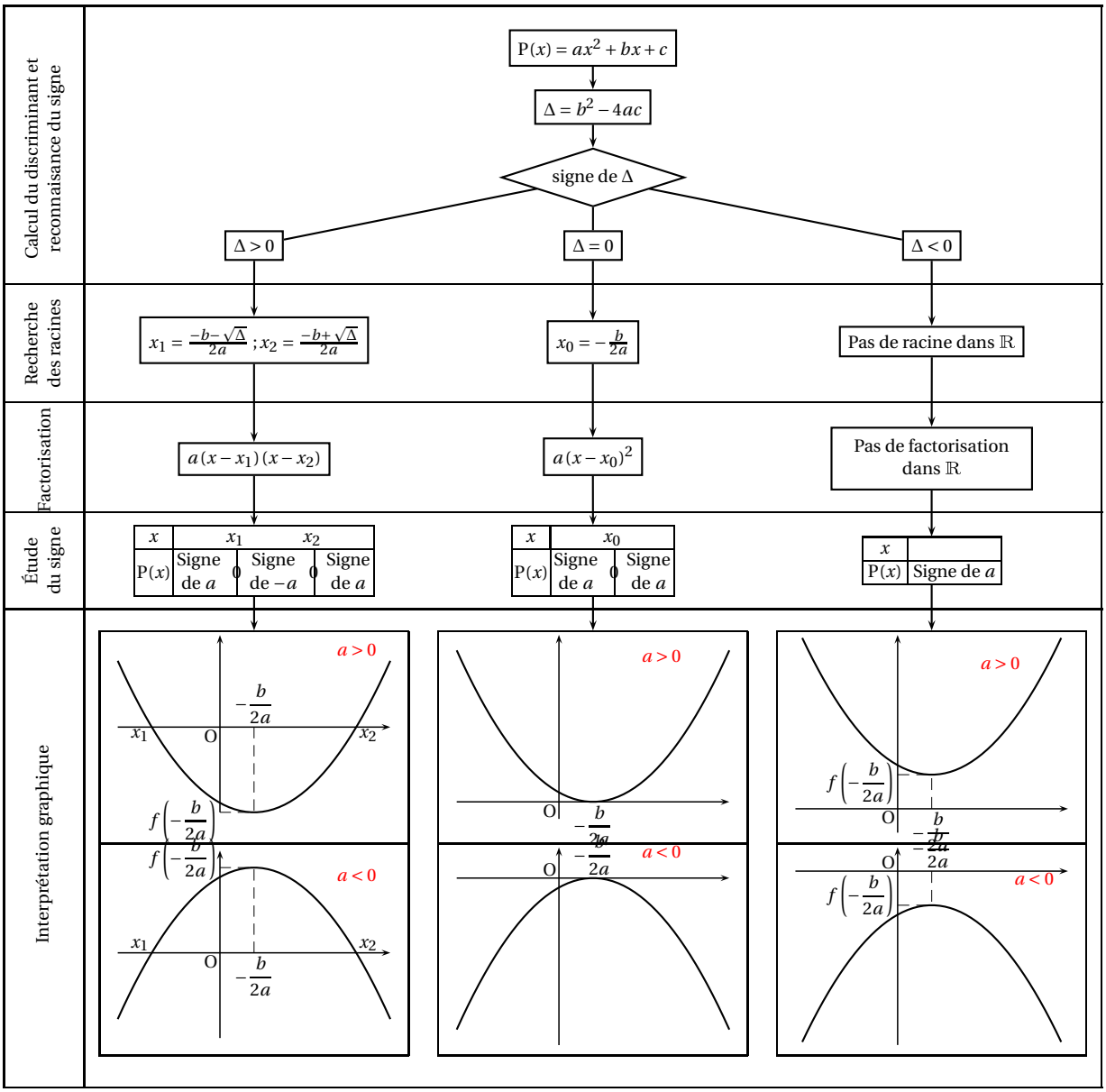
c. *On a :* $\Delta = 4 - 4 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P_3 *a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$P_2 \geqslant 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* P_2 *est s'annule seulement en* $\frac{2}{5}$.

□

II.5.5 Tableau récapitulatif



II.5.6 Compléments

THÉORÈME II.5.5 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Soit $ax^2 + bx + c$ un triôme du second degré qui a deux racines : x_1 et x_2. On a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

THÉORÈME II.5.6 ÉQUATIONS EN SOMME ET PRODUIT

Soit deux nombres dont on connaît le produit P et somme S. Ces deux nombres sont les racines du trinôme :

$$x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}.$$

II.5.7 Travaux dirigés

II.5.7.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme P : $x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

Partie A – avec le discriminant

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $X = x^2$).

1. $P_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.
2. $P_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.
3. $P_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.
4. $P_4 : x \mapsto x^4 + 16$.
5. $P_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.
6. $P_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

Partie B – sans le discriminant

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

II.5.7.b Équations en somme et produit

1. Soit P : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de a, b et c la somme et produit des racines.
2. Soit α et β deux nombres dont on connaît la somme, s et le produit, p.
Démontrer que α et β sont les racines du polynôme : P : $x \mapsto x^2 - sx + p$.
3. Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

II.5.8 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
II.5.a. Écrire P : $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.b. Écrire Q : $x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.c. Écrire R : $x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.
II.5.d. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.
II.5.e. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

II.6 Exercices résolus

Exercice II.6.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Solution *L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{D}_f$:

$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

On en déduit que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, est l'image de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = -\dfrac{1}{x}$; par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. On en déduit le graphique de la figure II.16. □

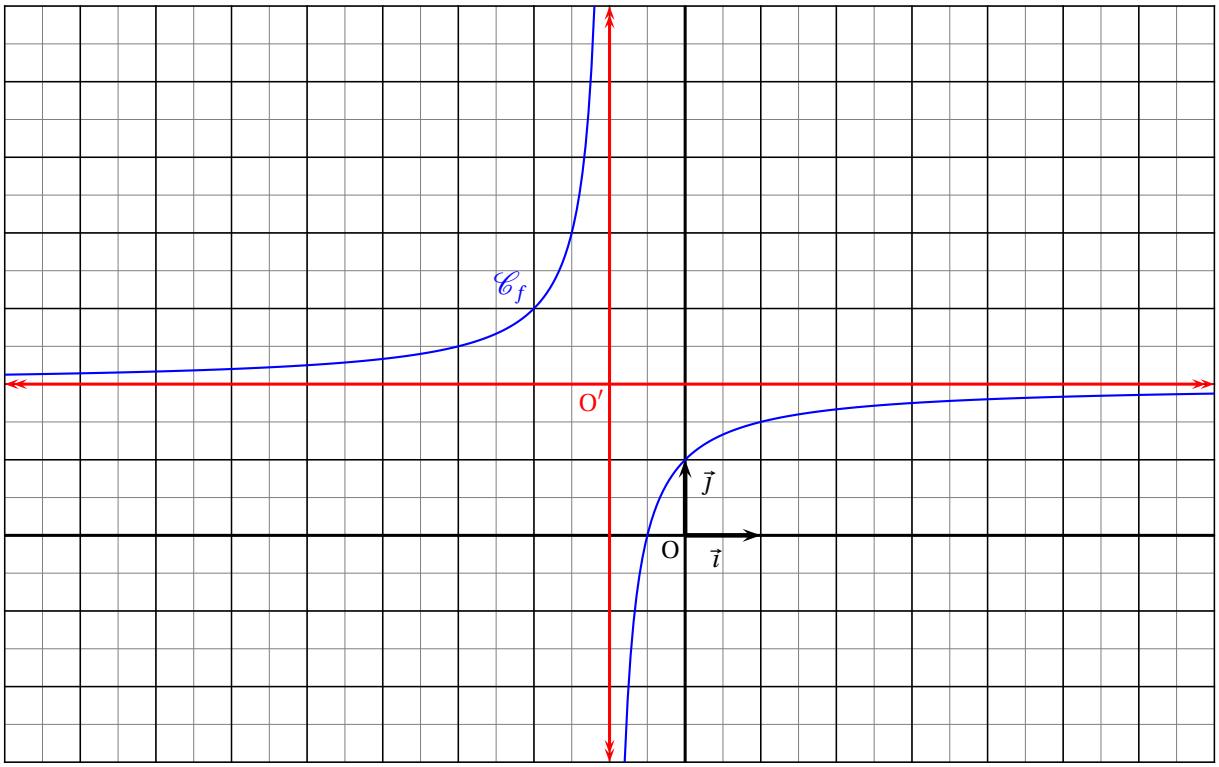


FIGURE II.16 – Représentation graphique de f.

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

Exercice II.6.2. ***m désigne un nombre réel. On considère les fonctions $f_m : x \mapsto mx+5m+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{-x-2}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.

2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$.

Solution ***1.*** *Pour tout réel m, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x) = h(x) \qquad (\mathrm{E}_m)$$

dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Les courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ ont autant de points d'intersection que (E_m) a de solutions.

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_m) &\iff mx+5m+3 = \frac{-x-2}{x+3}\\ &\iff mx^2+3mx+5mx+15m+3x+9 = -x-2\\ &\iff mx^2+(8m+4)x+15m+11 = 0.\end{aligned}$$

(E_0) *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(\mathrm{E}_0) \iff 4x+11=0 \iff x = -\frac{11}{4}.$$

Donc, pour $m=0$, (E_m) n'a qu'une solution et donc $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_0$ n'ont qu'un point d'intersection.
Pour $m\neq 0$, (E_m) est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :

$$\Delta_m=(8m+4)^2-4m(15m+11)=4\left((4m+2)^2-15m^2-11m\right)=4\left(m^2+5m+4\right).$$

Δ_m est du signe de $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta=25-4\times 4=9$, donc Δ_m a deux racines : $m_1=\dfrac{-5-3}{2}=-4$ et $m_1=\dfrac{-5+3}{2}=-1$.
On en déduit le signe de Δ_m suivant les valeurs de m :

m	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$		

D'où l'on tire que :

- ***pour $m\in\{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour $m\in]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour $m\in]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont deux points d'intersection.***

Un point $A(x,y)$ appartient à toutes les droites $\mathscr{D}_m$ si, et seulement si pour tout $m\in\mathbb{R}$: $y=mx+5m+3$. Or :

$$y=mx+5m+3 \iff (x+5)m+3-y=0.$$

On cherche donc x et y pour que le polynôme en m : $(x+5)m+3-y$; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :

$$\begin{cases} x+5=0\\ 3-y=0\end{cases}$$

C'est-à-dire lorsque : $(x;y)=(-5;3)$.

Les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en $A(-5;3)$

2. *$\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$ sont les droites d'équations respectives : $y=-4x-17$, $y=-x-2$ et $y=3$.*
De plus, pour tout $x\in D_h$, on a : $h(x)=\dfrac{-x-2}{x+3}=\dfrac{-x-3+1}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+3}$. Donc $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On déduit de cette étude la figure II.17. □

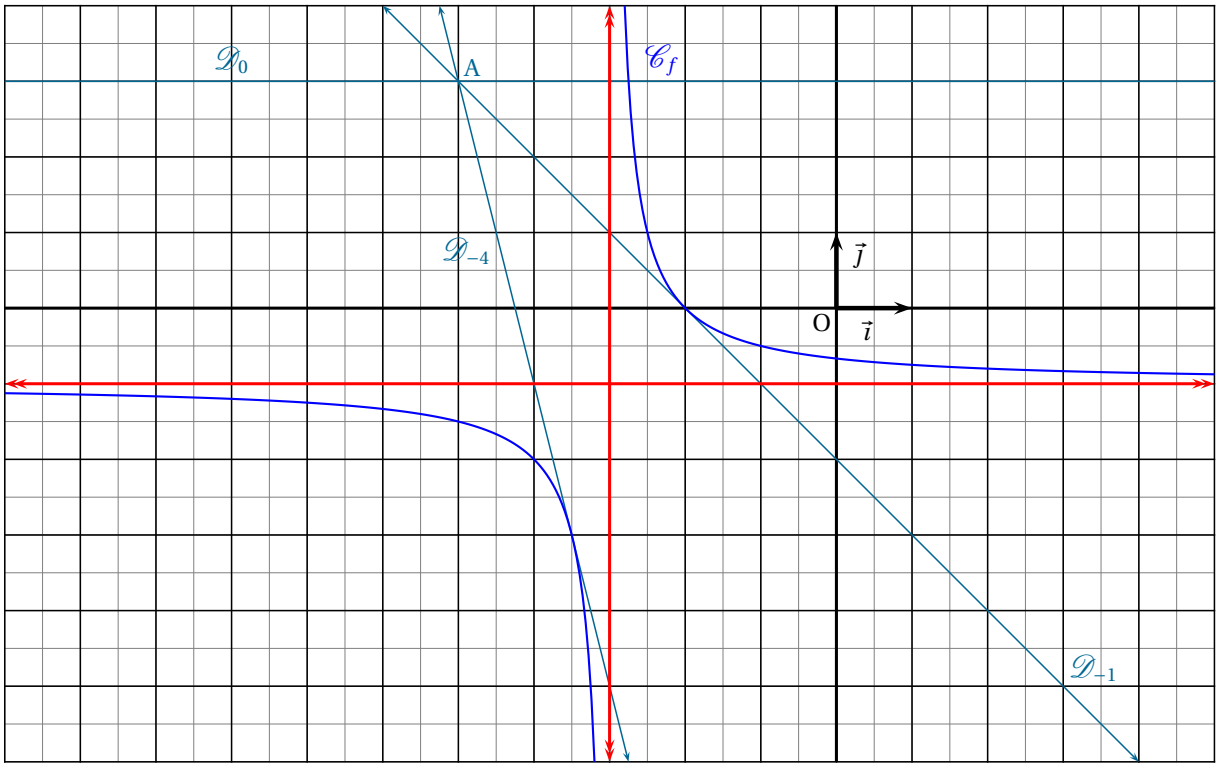


FIGURE II.17 – Représentation graphique de f.

Exercice II.6.3. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$.

Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ puis tracer ces deux courbes.

Solution *La position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ est déterminée par le signe de la fonction $f-h$ dont l'ensemble de définition est : $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Pour tout réel x :*

$$(f-h)(x) = 2x+3-\frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 81-4\times 16 = 17$.
Donc le numérateur a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

On en déduit le signe de $f-h$:

x		$\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$		-3		$\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2+9x+8$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(f-h)(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

D'où l'on tire que :

- ***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}$.***
- ***pour $x \in \left]\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4};-3\right[\cup \left]\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;***
- ***pour $x \in \left]-\infty;\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]-3;\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.***

De plus $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$. On déduit de cette étude la figure II.18. □

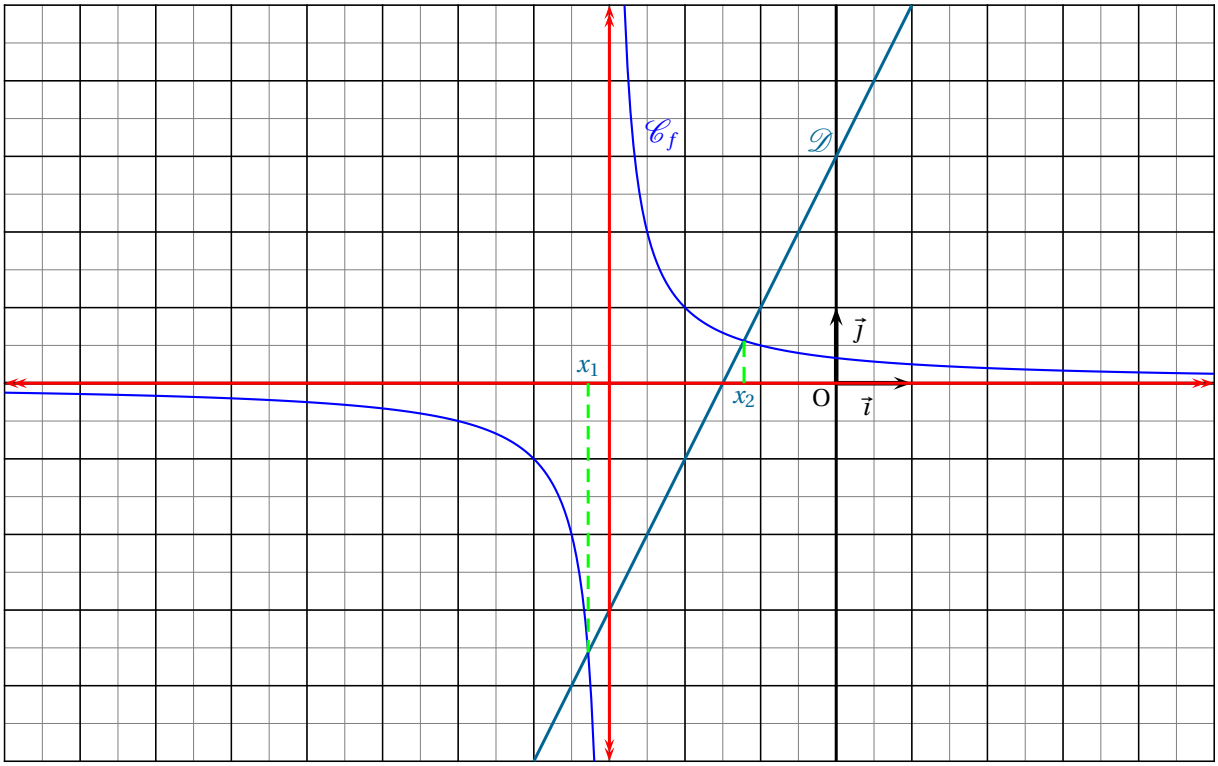


FIGURE II.18 – Représentation graphique de f.

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$

III.1.1 Majorants, minorants ...

Considérons une partie E de $\mathbb{R}$, par exemple : $E =]-3;0] \cup \{2\}$;
On a pour tout $x \in E$: $2,5 \geqslant x$; on dit que 2,5 est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que 2,5 est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in E$: $-4 \leqslant x$; on dit que -4 est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que -4 est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est -3.

THÉORÈME III.1.1

Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de A : $|x| \leqslant A$

Démonstration Pour tous nombres réels x et A :

$$|x| \leqslant A \iff -A \leqslant x \leqslant A.$$

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

S'il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$; alors $-A$ est minorant de E et A est un majorant de E ; on en déduit que E est borné.

Réciproquement, si E est borné. Soit m un minorant de E et M un majorant de E. Posons : $A = \max\{-m, M\}$.

On a : $-m \leqslant A$ et $M \leqslant A$; donc : $-A \leqslant m$ et $M \leqslant A$; or pour tout élément x de E : $m \leqslant x \leqslant M$; donc par transitivité : $-A \leqslant x \leqslant A$.

Soit finalement, pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$. □

III.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément)

Ce paragraphe est hors programme, il peut ne pas être lu et est destiné aux élèves désireux d'en savoir plus.
Soit maintenant une partie majorée non vide E quelconque. Les considérations envisagées ci-dessus laissent supposer que l'ensemble des majorants de E est un intervalle qui serait donc de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Mais si a n'était pas un majorant de E, alors il existerait un élément x de E tel que : $a < x$.
On se trouverait alors dans la situation contradictoire suivante :
$\frac{a+x}{2}$ est un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} \in]a;+\infty[$) et $\frac{a+x}{2}$ n'est pas un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} < x$).
On en déduit que a est le plus petit des majorants de E et donc la borne supérieure de E.

Cette étude nous conduit à énoncer le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME III.1.2 THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Toute partie majorée (respectivement minorée) non vide de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque *Ce théorème est faux dans* $\mathbb{Q}$.

Exemple *Dans* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble*

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$$

est majoré par $\frac{3}{2}$ *mais n'a pas de borne supérieure ; alors que dans* $\mathbb{R}$ *il a une borne supérieure :* $\sqrt{2}$.

III.2 Définitions

III.2.1 Introduction

DÉFINITION III.2.1 SUITE NUMÉRIQUE

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

Exemples

1. *On peut considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $u_n = n^2$.
On a alors : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16$ ...
Pour chaque terme u_n on a : $u_n = f(n)$; *où f est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (u_n) ***est définie explicitement***.
On peut calculer directement des termes de « grands indices » ($u_{100} = 10\,000$).

2. *On peut considérer la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :* $\begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{cases}$.

On a alors : $v_2 = \dfrac{1}{2}$; $v_3 = \dfrac{1}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{16}$ ...
v_0 et v_1 ne sont pas définis.
Pour chaque terme on a : $v_{n+1} = f(v_n)$; *où f est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (v_n) ***est définie par récurrence*** .
Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.
La suite (v_n) peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.

3. *On peut également considérer la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{cases}$.

Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Remarque *Toutes les suites étudiées en classe de Première et de Terminale seront définies sur $\mathbb{N}$ ou à partir d'un certain indice.*

III.2.2 Composée d'une suite par une fonction

DÉFINITION III.2.2

Soit f une fonction et (v_n) une suite d'éléments de l'ensemble de définition de f.
La composée de (v_n) par f est la suite (u_n) de terme général : $u_n = f(v_n)$.

Exemple *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont définies par :* $v_n = n^2$ *et* $f(x) = 2x - 3$; *alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :* $u_n = 2n^2 - 3$.

III.2.3 Exercices

III.2.a. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 4n^2 - n + 1$.

III.2.b. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_n = u_{n-1}^2 + 1$.

III.2.c. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, composée de la suite (u_n) de l'exercice précédent par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

III.3 Représentation graphique d'une suite

III.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction f sur la partie positive de son ensemble de définition.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par :* $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$ *; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$ *; pour chaque indice* n, u_n *est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse* n.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure III.1).

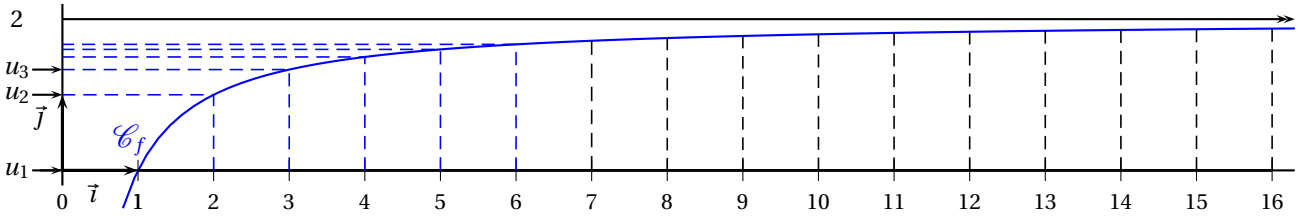


FIGURE III.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

III.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction f sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice [1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

Méthode pour placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses lorsque u_n est placé

- On place sur la courbe le point A_n d'abscisse u_n. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}.
- On place sur la première bissectrice le point B_n de même ordonnée que A_n. B_n est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, B_n a donc pour abscisse u_{n+1}.
- Il ne reste plus qu'à placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$;

on trace sur $[0;+\infty[$ *la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ *et la droite* Δ *d'équation :* $y = x$.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure III.2).

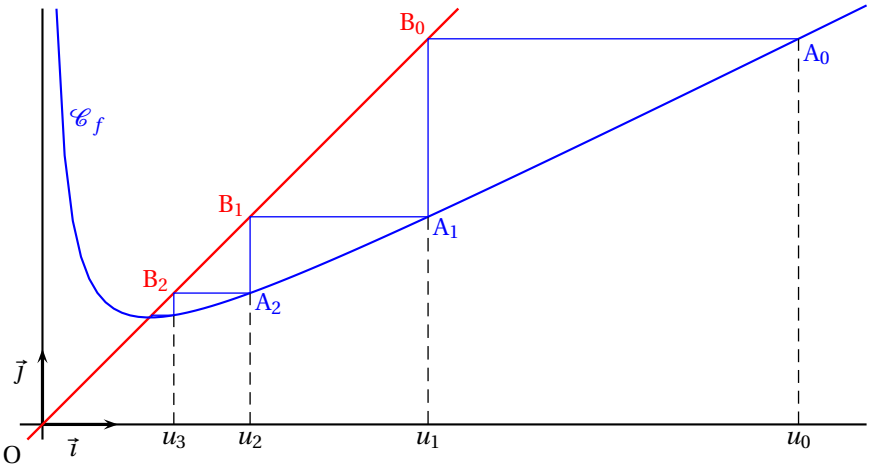


FIGURE III.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

III.3.3 Exercices

III.3.a. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_n = f(n)$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) et déterminer sa limite.

III.3.b. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel non nul, n, $u_n = f(u_{n-1})$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) (unité graphique : 20 cm) et conjecturer sa limite.

III.3.c. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

(unité graphique : 2cm). f est la fonction : $x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x}$. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f. (u_n) est la suite vérifiant, $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer les points fixes[2] de f.

3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite éventuelle.

III.4 Suites bornées

III.4.1 Généralités

DÉFINITIONS III.4.1 **SUITE BORNÉE**

(1) Dire qu'une suite est *majorée* (respectivement *minorée*) signifie que l'ensemble des termes de cette suite est majoré (respectivement minoré).

(2) Une suite à la fois majorée et minoré est dite *bornée*.

Exemple *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2\sin n + 1$.*
Soit n un entier naturel. La fonction $f : x \mapsto 2x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient dominant positif) et on sait que : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$; donc : $f(-1) \leqslant f(\sin n) \leqslant f(1)$; c'est-à-dire : $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$. La suite (u_n) est donc majorée par 3 et minorée par -1

Notations et vocabulaire
1. *Lorsqu'une suite (u_n) est majorée, par abus de langage nous appellerons borne supérieure de (u_n) la borne supérieure de l'ensemble de ces termes.*
2. *On défini de même la borne inférieure d'une suite minorée.*

Exercice III.4.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :***

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et majorée par 1.

Solution ***1.*** *On a :*

$$u_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} \qquad u_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3+i} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{37}{60}$$

2. *Soit n un entier naturel non nul. u_n est une somme de n termes, elle donc minorée par n fois le plus petit et majorée par n fois le plus grand. Donc :*

$$n \times \frac{1}{n+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{1}{n+1}.$$

Or : $n \times \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{2}$ et $n \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; donc : $n \times \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ (car $\dfrac{n}{n+1}$ est un quotient de deux nombres réels strictement positifs et numérateur est inférieur au dénominateur). Donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

La suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et majorée par 1.

□

III.4.2 Exercices

III.4.a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \dfrac{1}{2+\sin n}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.4.b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \sin n\right)^2$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$.

III.4.c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$, de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.5 Suites monotones

III.5.1 Définitions

DÉFINITIONS III.5.1 SUITE MONOTONE

(1) Dire qu'une suite est croissante (respectivement décroissante) signifie que cette suite est une fonction croissante (respectivement décroissante).
(2) Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Dire que (u_n) est croissante signifie que pour tous entiers p et q supérieurs ou égaux à n_0 :

$$p \leqslant q \quad \Longrightarrow \quad u_p \leqslant u_q.$$

Remarques
1. *On définit de même les suites* strictement *monotones.*
2. *Toute suite croissante est minorée par son premier terme*
3. *Toute suite décroissante est majorée par son premier terme*

DÉFINITIONS III.5.2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
(1) La suite (u_n) est dite constante lorsque pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à n_0 : $u_n = u_{n_0}$.
(2) La suite (u_n) est dite stationnaire lorsqu'il existe un nombre entier, p, tel que pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à p : $u_n = u_p$.

Remarques
1. *Les suites constantes sont les suites à la fois croissantes et décroissantes.*
2. *Les suites stationnaires sont les suites constantes à partir d'un certain indice.*
3. *Les suites constantes sont des cas particuliers de suites stationnaires.*

III.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

III.5.2.a Cas général

THÉORÈME III.5.1
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique.
(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$; alors la suite (u_n) est croissante.
(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Démontrons **(1)**. Soit p et q deux entiers tels que : $n_o \leqslant p \leqslant q$. On a :

$$u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \cdots \leqslant u_{q-1} \leqslant u_q$$

donc la suite (u_n) est croissante. On démontre de même **(2)**. □

Exercice III.5.1. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$.***

Solution *Soit n un entier naturel non nul. On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

or n et $n+1$ sont tous deux strictement positifs donc pour tout entier naturel non nul n on a : $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$;
c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante. □

III.5.2.b Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs

THÉORÈME III.5.2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dont tous les termes sont *strictement positifs*.

(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; alors la suite (u_n) est croissante.

(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème se déduit du précédent car les termes de la suite étant strictement positifs, on a :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$. □

Exercice III.5.2. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *Tous les termes de cette suite sont strictement positifs. Soit n un entier naturel non nul.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. La suite (u_n) est décroissante. □

III.5.2.c Lorsque la suite est définie explicitement, $u_n = f(n)$

THÉORÈME III.5.3

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie par une relation du type : $u_n = f(n)$.

(1) Si la fonction f est croissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est croissante.

(2) Si la fonction f est décroissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème est une conséquence immédiate de la DÉFINITION III.5.1 □

Exercice III.5.3. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *On sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.* □

Remarque *La réciproque de ce théorème est fausse, la suite (u_n) peut être croissante sans que la fonction f le soit. Pour s'en convaincre il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.*

La fonction f n'est pas monotone car sa dérivée, la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \cos(2\pi x)$, est strictement positive sur les intervalles $\left]k - \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{5}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et strictement négative sur les intervalles $\left]k + \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{7}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$; et pourtant la suite (u_n), définie par $u_n = f(n) = \dfrac{n}{2}$, est strictement croissante (voir figure III.3).

III.5.2.d Composée d'une suite monotone par une fonction monotone

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème **??**.

THÉORÈME III.5.4

Si u_n est une suite monotone d'éléments d'un intervalle I et si f est une fonction monotone sur I, alors $f(u_n)$ est une suite monotone ; plus précisément, le sens de variation de $f(u_n)$ est donné dans le tableau ci-dessous.

	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
(u_n) est croissante	$(f(u_n))$ est croissante	$(f(u_n))$ est décroissante
(u_n) est décroissante	$(f(u_n))$ est décroissante	$(f(u_n))$ est croissante

Exemple *Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général : $v_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.*

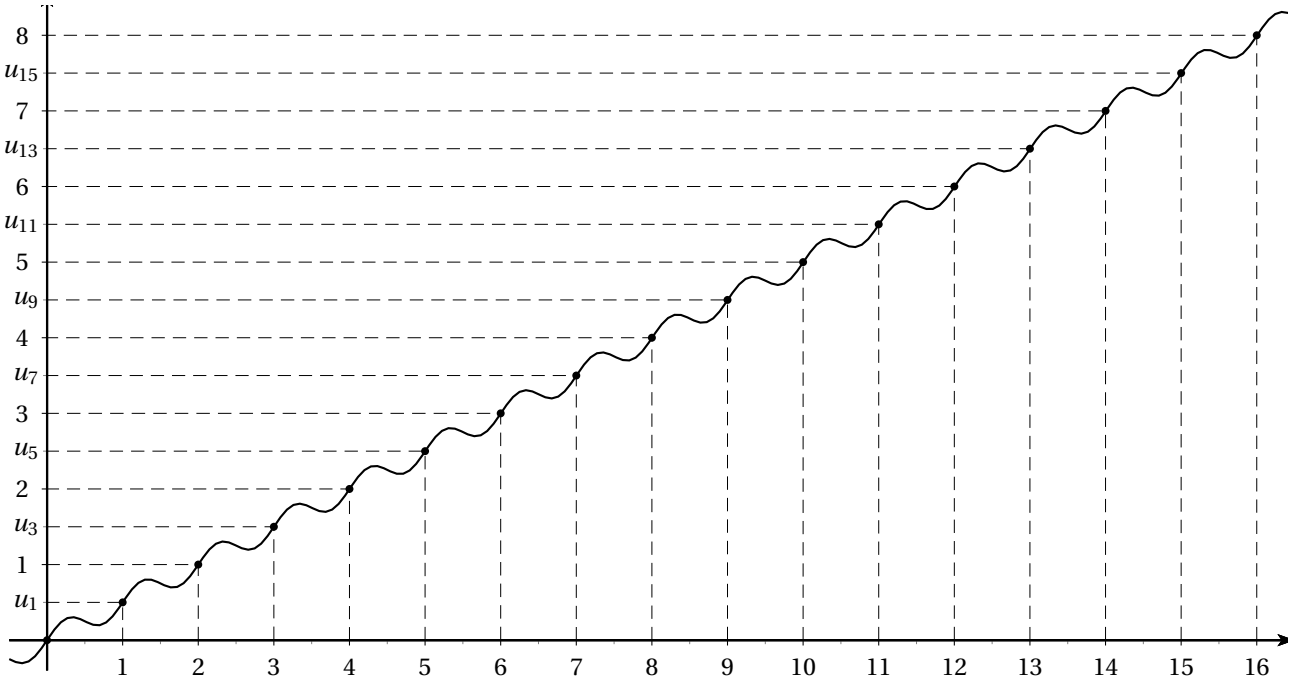


FIGURE III.3 – Suite croissante définie explicitement, sans que le fonction soit croissante.

(v_n) est la composée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. (u_n) est strictement positive (comme somme de nombres strictement positifs) et croissante ($\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} > 0$) de plus la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$; donc la suite (v_n) est décroissante.

III.5.3 Exercices

III.5.a. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

III.5.b. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

III.5.c. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = n^2 + 4n - 7$.

III.5.d. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = \frac{n^2+3}{n+4}$.

III.5.e. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

III.6 Suites arithmétiques - suites géométriques

III.6.1 Suites arithmétiques

III.6.1.a Définition

DÉFINITION III.6.1
Une suite *arithmétique* de *raison r* est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

Exemple *Pour la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_3 = 5$, on a : $u_4 = 3$; $u_5 = 1$; $u_6 = -1$ ...*

La figure III.4 suggère que pour une suite arithmétique de raison r : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p + 4$; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

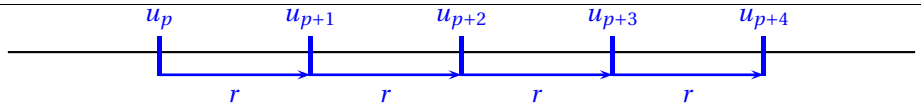


FIGURE III.4 – Suite arithmétique.

THÉORÈME III.6.1

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p + r$; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant r. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois r, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et si $u_{13} = 52$ alors : $u_{121} = u_{13} - 5(121-13) = -488$.*

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.6.2

Si (u_n) est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n-n_0) + u_{n_0}.$$

Exemple *La suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.*

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

2. *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré 1 est la raison.*

III.6.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.1.

THÉORÈME III.6.3

(1) Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.

(2) Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

DÉFINITION III.6.2

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

THÉORÈME III.6.4

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite arithmétique, r sa raison et k l'indice de b.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

III.6.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite arithmétique et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & + & (u_m + r) & + & \cdots & + & (u_m + (p-m)r) \\ S = & (u_m + (p-m)r) & + & (u_m + (p-m-1)r) & + & \cdots & + & u_m \end{cases}$

puis par somme : $2S = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

THÉORÈME III.6.5

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique et m et p des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

Exercice III.6.1. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels non nuls sont les n premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice III.6.2. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour k variant de 1 à n ; ce sont donc les n premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$.* □

III.6.2 Suites géométriques

III.6.2.a Définition

DÉFINITION III.6.3

Une suite *géométrique* de *raison q* est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples *Considérons les suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n), définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives 2, -3, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs 3, 2, -4. Les cinq premiers termes de chaque suite sont représentés dans la tableau III.1.*

n	0	1	2	3	4
u_n	3	6	12	24	48
v_n	2	-6	18	-54	162
w_n	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

TABLE III.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n).

Remarques

1. *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
2. *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
3. *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
4. *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
5. *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

THÉORÈME III.6.6

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.

Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p q$; $u_{p+2} = u_{p+1} q$; $u_{p+3} = u_{p+2} q$;…
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par q, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème III.6.6 le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.6.7

Si (u_n) est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*
2. *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k\,q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

Exemples

1. *La suite géométrique, (u_n), de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\frac{1}{9} \times 3^n$.*
2. *La suite géométrique, (v_n), de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\frac{1024}{(-2)^n}$.*

III.6.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.3.

THÉORÈME III.6.8

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Le sens de variation de (u_n) est donné dans le tableau ci-dessous.

(u_n)	$q \in]1;+\infty[$	$q \in]0;1[$	$q \in]-\infty;0[$	$q = 0$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	croissante	décroissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} < 0$	décroissante	croissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} = 0$	constante				

DÉFINITION III.6.4

La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre : $\sqrt{ab}$.

THÉORÈME III.6.9

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors b est la moyenne géométrique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite géométrique, q sa raison et k l'indice de b.

La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = q u_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = q u_k = qb \end{cases}$; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

Représentation graphique d'une suite géométrique

Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison q, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §III.3.2 page 33.

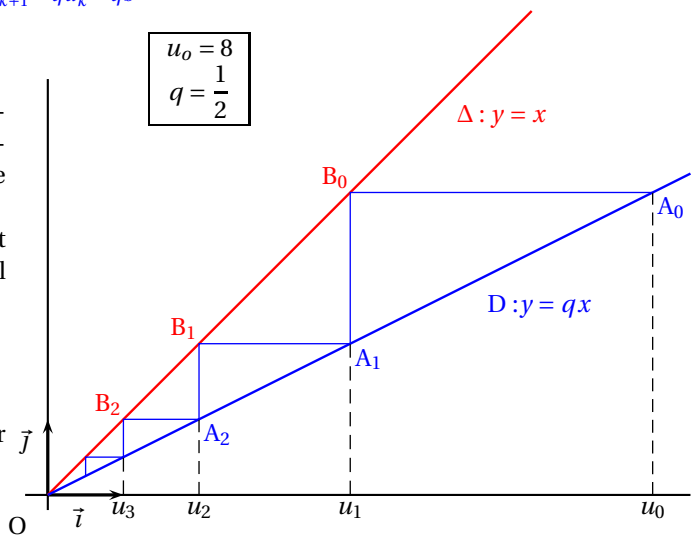
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport q. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel n :

$\overrightarrow{\text{OB}}_{n+1} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{\text{OB}}_{n+1} = q\,\overrightarrow{\text{OB}}_n$.

Donc B_{n+1} est l'image de B_n par h.

On démontre de même que A_{n+1} est l'image de A_n par h.



III.6.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison q (avec $q\neq 1$) et m et p deux entiers tels que : $n_0\leqslant m\leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S=\underbrace{u_m+u_{m+1}+\cdots+u_p}_{p-m+1 \text{ termes}}=\sum_{n=m}^{p}u_n$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{lccccccc} S= & u_m & +qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & \\ qS= & & qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & +u_mq^{p-m+1}\end{array}\right.$

puis par différence : $qS-S=u_mq^{p-m+1}-u_m$; d'où finalement :

$$u_m+u_{m+1}+\cdots+u_p=\frac{u_m-u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme}-\text{suivant du dernier}}{1-\text{raison}}$.

Remarque *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul n :* $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice III.6.3. ***Démontrer que pour tout $x\in[0;1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$; on a : $1+x+\cdots+x^n\leqslant\dfrac{1}{1-x}$***

Solution *$1+x+\cdots+x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, donc :*

$$1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Or $1-x$ est strictement positif et : $1-x^{n+1}\leqslant 1$ (car x est positif) ; donc par quotient :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\leqslant\frac{1}{1-x};$$

c'est-à-dire :

$$1+x+\cdots+x^n\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

□

COROLLAIRE III.6.10

Pour tous nombres réels a, b et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

Démonstration Pour $a=0$, l'égalité devient : $-b^n=-b\times b^{n-1}$; qui est vraie.

Pour $a=b$, l'égalité devient : $0=0\times na^{n-1}$; qui est vraie.

Lorsque $a\neq 0$ et $a\neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\dfrac{b}{a}$, on en déduit que :

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^{n-1}-\frac{b^n}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^n-b^n}{b-a}.$$

En multipliant les membres extrêmes par $b-a$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Lorsque $n=2$, on retrouve l'identité II.3 et lorsque $n=3$, on retrouve l'identité II.6.*
2. *Lorsque n est* impaire, *en remplaçant b par $-b$, on obtient :*

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right)$$

Lorsque $n=3$, on retrouve l'identité II.7.

III.6.3 Exercices résolus

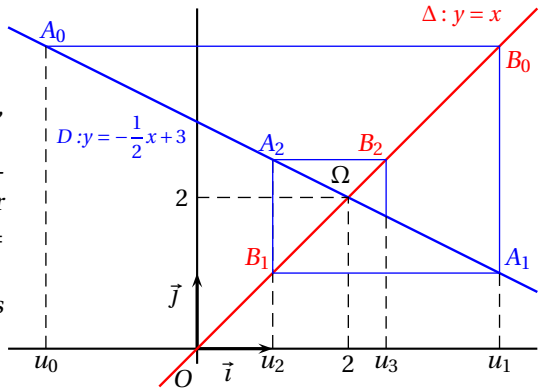
III.6.3.a Suite arithmético-géométrique

Exercice III.6.4. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l}u_0=-2\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3\end{array}\right.$.***

1. Déterminer un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-a$; soit géométrique.

2. Exprimer explicitement le terme général de la suite (v_n) ; en déduire celui de la suite (u_n).

Solution *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*



On trace les droites D et Δ d'équations respectives :
$y = -\frac{1}{2}x + 3$ *et* $y = x$.
Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ *vérifient les équations de D et Δ, donc Ω est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.*
Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie h, de centre Ω, transforme (pour tout n) A_n *en* A_{n+1}. *Ce qui suggère une relation du type :* $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1} = k\overrightarrow{\Omega A}_n$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ *et* $\overrightarrow{\Omega A}_n$ *ont respectivement pour abscisses* $u_{n+1} - 2$ *et* $u_n - 2$.

On aurait donc : $u_{n+1} - 2 = k(u_n - 2)$.
Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, *la suite* (v_n) *est géométrique.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$.
Donc, pour $a = 2$, *la suite* (v_n) *est la suite géométrique de raison* $-\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_0 = -4$.
Par conséquent la suite (v_n) *est définie par :* $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = v_n + 2$;
donc la suite (u_n) *est définie par :* $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$. □

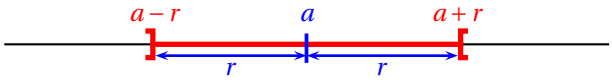
Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

III.7 Limites de suites

Soit a un réel et r un réel strictement positif. On appelle intervalle ouvert de centre a et de rayon r l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$. Cet intervalle sera noté $\mathrm{I}_{a,r}$. $\mathrm{I}_{a,r}$ est l'ensemble des réels dont la distance à a est strictement inférieure à r. Pour tout réel x on a donc :

$$x \in \mathrm{I}_{a,r} \iff |x - a| < r.$$



III.7.1 Limite finie, limite infinie

III.7.1.a Définitions

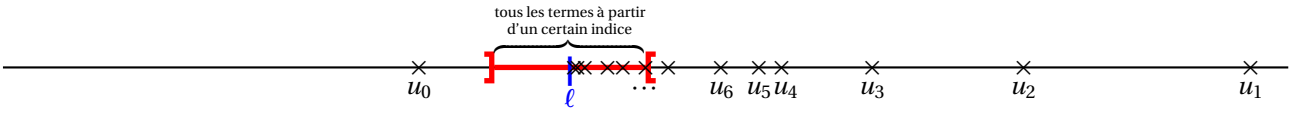
DÉFINITION III.7.1
Dire qu'un réel ℓ est la limite d'une suite (u_n) signifie que *tout* intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exemple *Démontrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *définie par :* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *; a pour limite 0.*
Soit $]-r\,;r[$ *(avec* $r > 0$*) un intervalle ouvert centré en* 0.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, *on ait :* $u_n \in]-r\,;r[$ *; c'est-à-dire :* $-r < u_n < r$.
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$.
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, *on a alors :* $n \geqslant \mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$ *; la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{+\star}$,

on en déduit que : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ *; la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{+\star}$*, on en déduit que :* $r < 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$.
D'où : $u_n \in]-r\,;r[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$.
Donc la suite (u_n) *a pour limite* 0.

La définition III.7.1 signifie que les termes de la suite sont à une distance aussi petite qu'on le souhaite dès que les indices sont suffisamment grands. On a donc une accumulation des termes de la suite (u_n) autour de ℓ.



D'après la définition III.7.1, pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite ℓ, il suffit de démontrer que pour tout $r > 0$, il existe un entier N tel que si $n > \mathrm{N}$, alors $|u_n - \ell| < r$.

DÉFINITIONS III.7.2

(1) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(2) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple *Démontrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = \sqrt{n}$ *; a pour limite* $+\infty$.
Soit A un un nombre réel.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on ait :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; c'est-à-dire :* $\mathrm{A} < u_n$.
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \mathrm{A}^2$.
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on a alors :* $n \geqslant \mathrm{N} > \mathrm{A}^2$ *; la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, on en déduit que :* $\sqrt{n} > |\mathrm{A}|$ *; d'où par transitivité :* $\sqrt{n} > \mathrm{A}$. *D'où :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$.
Donc la suite (u_n) *a pour limite* $+\infty$.

Remarques

1. *Une suite qui a une limite finie est dite* ***convergente****.*
2. *Une suite qui n'a pas de limite ou dont la limite n'est pas finie est dite* ***divergente****.*
3. *Dans les définitions de limites de suites, on peut remplacer l'expression « à partir d'un certain indice » par « sauf un nombre fini d'entre eux ».*
4. *Si une suite converge vers un nombre* ℓ*, alors tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. En effet : tout intervalle ouvert contenant* ℓ *inclut un intervalle ouvert de centre* ℓ.
5. *Dans la définition III.7.1 on pourrait donc remplacer « de centre* ℓ *» par « contenant* ℓ *».*

THÉORÈME III.7.1

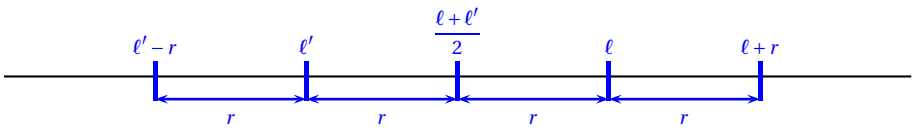
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente et ℓ sa limite. (u_n) converge ver ℓ, il existe donc un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$: $|u_n - \ell| < 1$. Posons alors : $\mathrm{M} = \max\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_{\mathrm{N}}, \ell+1\}$ et $m = \min\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_{\mathrm{N}}, \ell-1\}$.
La suite (u_n) est majorée par M et minorée par m, elle est donc bornée. □

THÉORÈME III.7.2 UNICITÉ DE LA LIMITE

Une suite ne peut pas avoir plusieurs limites.

Démonstration



Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Nous démontrerons ici que (u_n) ne peut pas avoir deux limites finies distinctes. Les autres cas se démontrent de la même façon.
Si la suite (u_n) avait deux limites distinctes ℓ et ℓ' en posant : $r = \dfrac{|\ell' - \ell|}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ') les intervalles $]\ell - r\,;\ell + r[$ et $]\ell' - r\,;\ell' + r[$ seraient disjoints. La suite (u_n) aurait pour limite ℓ, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell - r\,;\ell + r[$, elle aurait de même pour limite ℓ', donc à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell' - r\,;\ell' + r[$; en posant : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\}$; à partir de l'indice N'' tous les termes de la suite (u_n) seraient à la fois éléments de $]\ell - r\,;\ell + r[$ et de $]\ell' - r\,;\ell' + r[$, donc de leur intersection, c'est-à-dire de l'ensemble vide ; ce qui est impossible.
La suite (u_n) ne peut donc pas avoir deux limites finies distinctes. □
Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions de la limite d'une suite et d'une fonction.

THÉORÈME III.7.3

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie explicitement par une relation du type : $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{L}$ avec $\mathrm{L}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$

Remarques

1. *La réciproque de ce théorème est fausse.*

2. *Ce théorème n'est pas applicable dans le cas d'une suite définie par récurrence.*

III.7.2 Théorèmes de comparaisons

THÉORÈME III.7.4 THÉORÈME DES GENDARMES 1RE FORME

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ trois suites.
Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration Soit r un réel strictement positif. il suffit donc de prouver qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert, $\mathrm{I}_{\ell,r}$ de centre ℓ et de rayon r.
La suite (v_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_v, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
La suite (w_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_w, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
Posons : $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_v;\mathrm{N}_w\}$. Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on a : $\ell - r < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ. □

Exercice III.7.1. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$; d'où : $0 \leqslant 1+(-1)^n \leqslant 2$.*

Pour tout entier $n > 0$, en divisant membre à membre par n, il vient : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.

Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; donc par produit par 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$;
d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Remarques

1. *Le théorème III.7.4 reste vrai même si la condition $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ n'est pas vérifiée pour tout n, mais seulement à partir d'un certain indice.*

2. *Plus généralement, tous les théorème de ce paragraphe reste vrai même si leur condition d'inégalité n'est pas vérifiée pour tout n, mais seulement à partir d'un certain indice.*

COROLLAIRE III.7.5 THÉORÈME DES GENDARMES 2E FORME

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
S'il existe une suite positive $(d_n)_{n\geqslant n_0}$ et un réel ℓ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell| \leqslant d_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

DémonstrationIl suffit d'appliquer le théorème III.7.4 avec les suites $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ de termes généraux : $v_n = \ell - d_n$ et $w_n = \ell + d_n$. □

Exercice III.7.2. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n}$.*

Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

THÉORÈME III.7.6

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites.
(1) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $v_n \leqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $v_n \geqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que dans les deux cas la suite (u_n) vérifie les conditions de la définition III.7.2.
(1) Soit $]\mathrm{A};+\infty[$ un intervalle. La suite v_n tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à N, $u_n \geqslant v_n \geqslant \mathrm{A}$; c'est-à-dire : $v_n \in]\mathrm{A};+\infty[$. La suite u_n diverge vers $+\infty$.

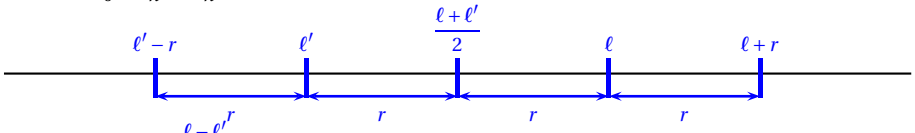
(2) se démontre de la même façon. □

Exercice III.7.3. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $u_n \geqslant n-1$.*
Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$; par comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

THÉORÈME III.7.7
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$

Démonstration



Supposons que : $\ell > \ell'$; posons alors : $r = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ').

On a donc : $\ell' + r = \dfrac{\ell + \ell'}{2} = \ell - r$. Les intervalles $]\ell - r\,;\ell + r[$ et $]\ell' - r\,;\ell' + r[$ sont donc disjoints. À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $]\ell - r\,;\ell + r[$ et à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (v_n) seraient dans $]\ell' - r\,;\ell' + r[$; en posant : $N'' = \max\{N;N'\}$; à partir de l'indice N'' on a : $\ell' - r < v_n < \dfrac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \ell + r$; ce qui contredit : $u_n \leqslant v_n$.
Donc : $\ell \leqslant \ell'$. □

Remarques

1. *En particulier, si M est majorant de (u_n), alors : $\ell \leqslant M$.*
2. *Si M est minorant de (u_n), alors : $m \leqslant \ell$.*
3. *Le théorème III.7.7 devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Pour s'en convaincre il suffit d'étudier les cas des suites de termes généraux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$*

III.7.2.a Suites de références

THÉORÈME III.7.8
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définies par : $u_n = \dfrac{1}{n}$; $v_n = \dfrac{1}{n^2}$; $w_n = \dfrac{1}{n^3}$; $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
ont pour limite 0.

Démonstration Soit $]-r\,;r[$ un intervalle contenant 0 et N un entier strictement plus grand que $\dfrac{1}{r^2}$.
Pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

- $w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n$, car : $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$;
- $n > \dfrac{1}{r^2}$; donc : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $t_n < r$;
- donc finalement : $-r < 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n < r$.

Pour tout $r > 0$, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]-r\,;r[$, elles convergent donc vers 0. □

THÉORÈME III.7.9
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par : $u_n = n$; $v_n = n^2$; $w_n = n^3$; $t_n = \sqrt{n}$;
ont pour limite $+\infty$.

Démonstration Soit A un réel et N un entier strictement plus grand que A^2 et que 1.
Pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

- $t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, car : $1 < n$;
- $n > A^2$; donc : $\sqrt{n} > |A| \geqslant A$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; c'est-à-dire : $A < t_n$;
- donc finalement : $A < t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Pour tout réel A, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$, elles divergent donc vers $+\infty$. □

Remarque *Les théorèmes III.7.8 et III.7.9 peuvent également se déduire du théorème III.7.3.*

III.7.3 Calcul algébrique de limites

III.7.3.a Somme de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N}; \mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| < r$$

Donc la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général $u_n + k$ converge vers $\ell + k$.

III.7.3.b Produit de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes donc, d'après le théorème III.7.1 elle sont bornées. En appliquant le théorème III.1.1 on en déduit l'existence des nombres réels M et M′ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ et $|v_n| \leqslant \mathrm{M}'$.
Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2\mathrm{M}'}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2\mathrm{M}}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N}; \mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \left|u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)\right| \leqslant |u_n| \times \left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right| \times |u_n - \ell| \leqslant |u_n| \times \frac{r}{2\mathrm{M}} + \left|\ell'\right| \times \frac{r}{2\mathrm{M}'}$$

D'où :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2}$$

Or, par définition des nombres M et M′ et d'après la remarque consécutive au THÉORÈME III.7.7, $\dfrac{|u_n|}{\mathrm{M}} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ell'}{\mathrm{M}'} \leqslant 1$.
Donc par somme et par produit par $\dfrac{r}{2}$ qui est positif :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$ il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n \times v_n)$ sont dans l'intervalle de centre $\ell\ell'$ et de rayon r.
Donc la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général ku_n converge vers $k\ell$.

III.7.3.c Inverse d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite convergeant vers une limite non-nulle ℓ.
Démontrons que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

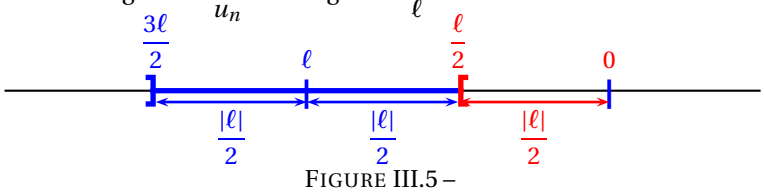


FIGURE III.5 –

À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite sont compris entre $\frac{\ell}{2}$ et $\frac{3\ell}{2}$.

On a alors : $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$; d'où :

$$\frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{2}{|\ell|}.$$

À partir de l'indice N, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell|.$$

Soit $r > 0$. À partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle de centre ℓ et de rayon $\frac{\ell^2}{2}r$, on a alors : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell^2}{2}r$. D'où, par produit par $\frac{2}{\ell^2}$:

$$\frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell| \leqslant r.$$

Posons : $N'' = \max\{N, N'\}$. À partir de l'indice N'', on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$, à partir d'un certain indice tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ sont dans l'interlvalle de centre $\frac{1}{\ell}$ et de rayon r, donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

III.7.3.d Quotient de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives (avec $\ell' \neq 0$).

Démontrons que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

D'après III.7.3.c, la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Donc daprès III.7.3.b, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

III.7.3.e Cas général

Plus généralement nous admettons les résultats suivants concernant la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites, ils se démontrent en utilisant des techniques semblables à celles utilisée ci-dessus. Le symbole « fi » signifie : forme indéterminée ; cela signifie que lers règles usuelles liant les opérations et le calcul de limites ne permettent pas de déterminer la limite éventuelle dans la configuration étudiée.

Limite de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	fi

Limite du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	fi	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite de l'inverse d'une suite

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ $(\ell \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement positive à partir d'un certain indice} \\ -\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement négative à partir d'un certain indice} \end{cases}$

Limite du quotient de deux suites

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie.

Pour calculer la limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$, il suffit de remarquer que pour tout nombre entier, n, ou elle est définie : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

Le résultat désiré se déduit alors des considérations sur les limites de somme et d'inverse de suites.

III.7.4 Limites de suites géométriques

LEMME III.7.10

Soit λ un réel strictement positif.

(1) Si $\lambda > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.

(2) Si $\lambda < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.

Démonstration Démontrons **(1)** .

Posons : $x = \lambda - 1$. On a : $x > 0$; donc, d'après l'inégalité de Bernoulli (voir exercice résolu **??** page **??**), pour tout nombre entier supérieur à 2 : $(1+x)^n > 1 + nx$; c'est-à-dire : $\lambda^n > n(\lambda - 1) + 1$.

Or, d'après le théorème III.7.3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(\lambda-1)+1) = +\infty$; donc par comparaison (théorème III.7.6) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.

Démontrons **(2)** .

Soit $\lambda \in]0;1[$. Posons : $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. On a : $\lambda' > 1$; donc d'après **(1)** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda'^n = +\infty$; d'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda'^n} = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. □

THÉORÈME III.7.11

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme a. La limite de (u_n) est donnée par le tableau suivant.

	$q \leqslant -1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$a > 0$	pas de limite	0	a	$+\infty$
$a = 0$				
$a < 0$	pas de limite		a	$-\infty$

Démonstration

1er cas : $a = 0$ ou $q = 1$ Le résultat est immédiat car la suite est constante.

2e cas : $a > 0$ et $q \neq 1$

si $\lvert q\rvert < 1$ On a vu (§ III.7.1.a) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n - 0\rvert = 0$.

Or pour tout indice n : $\lvert u_n - 0\rvert = a\lvert q\rvert^n$; de plus, d'après le lemme III.7.10 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert q\rvert^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = 0$.

si $1 < q$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = +\infty$ or (u_n) est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

si $q \leqslant -1$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = 1$; or les termes u_n changent de signe avec la parité de n, donc (u_n) n'a pas de limite.

3e cas : $a < 0$ et $q \neq 1$ On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par -1.

□

III.7.5 Exercices

III.7.a. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{n-3}{n+3}$.

III.7.b. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{n^2-3}{n+3}$.

III.7.c. Donner un contre exemple illustrant la remarque **1** succédant au théorème III.7.3.

III.7.d. Donner un exemple de suite divergente et bornée.

III.7.e. Donner un exemple de suite dont la limite est $+\infty$ et qui n'est pas croissante à partir d'un certain indice.

III.7.f. Donner un exemple de suite non majorée qui ne diverge pas vers $+\infty$.

III.7.g. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pi$.

e. $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.

III.7.h. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pi$.

e. $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

III.8 Suites monotones bornées

III.8.1 Théorème de convergence d'une suite monotone

THÉORÈME III.8.1

(1) Toute suite croissante et majorée est convergente et sa limite est sa borne supérieure.

(2) Toute suite décroissante et minorée est convergente et sa limite est sa borne inférieure.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et majorée. La suite (u_n) est majorée, d'après le théorème III.1.2, il a donc une borne supérieure ℓ.
On veut donc démontrer que (u_n) converge vers ℓ.
Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant \ell$.

Soit r un réel strictement positif, démontrons qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite (u_n) vérifie : $\ell - r < u_n < \ell + r$.
ℓ est le plus petit des majorants et : $\ell - r < \ell$; donc $\ell - r$ n'est pas un majorant, on en déduit qu'il existe un indice N tel que : $\ell - r < u_N$.
Mais la suite (u_n) est croissante et majorée par ℓ, donc pour tout entier $n \geqslant N$: $\ell - r < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ.
On démontre **(2)** de la même façon. □

Ce théorème s'applique dans le cas d'une suite monotone dont on connaît un majorant M (dans le cas où la suite est croissante) ou un minorant m (dans le cas où la suite est décroissante) mais dont on ne sait pas calculer algébriquement la limite.
On obtient ainsi l'existence d'une limite mais on ne connaît pas sa valeur. On a toutefois une information partielle sur la localisation de la limite : $u_{n_0} \leqslant \ell \leqslant M$ ou $m \leqslant \ell \leqslant u_{n_0}$.
Nous verrons ultérieurement des méthodes permettant d'exploiter ces informations pour déterminer la limite.

Remarque *Dans le théorème III.8.1, si la suite n'est monotone qu'à partir d'un certain indice, elle reste encore convergente.*

Exercice III.8.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$u_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

3. Justifier que (u_n) est convergente et préciser un intervalle dans le quel se trouve sa limite.

Solution

1. $u_0 = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{0!} = 2$

$u_1 = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} = 3$

$u_2 = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} = 3$

$u_3 = \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} = \dfrac{17}{6} = 2,83333\cdots$

$u_4 = \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{11}{4} = 2,75$

2. *Soit n un entier tel que : $n \geqslant 1$. On a :* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{n+1}{(n+1)!} = -\dfrac{n-1}{(n+1)!}$.

On a : $-\dfrac{n-1}{(n+1)!} \leqslant 0$ *dès que $n \geqslant 1$; donc la suite (u_n) est donc décroissante à partir de l'indice 1.*

3. *Les termes de la suite sont des sommes de nombres positifs, 0 est donc un minorant de la suite. La suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1 et minorée par 0, elle est donc convergente et sa limite vérifie : $0 \leqslant \ell$.*
Le plus grand des termes de la suite est u_1, c'est-à-dire 3, donc : $\ell \leqslant 3$, d'où :

$$\ell \in [0;3].$$

□

COROLLAIRE III.8.2 **THÉORÈME DE DIVERGENCE D'UNE SUITE MONOTONE**

(1) Toute suite croissante et non convergente diverge vers $+\infty$.

(2) Toute suite décroissante et non convergente diverge vers $-\infty$.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et non convergente.

Il suffit de démontrer que pour tout réel A, les termes de la suite sont tous plus grand que A à partir d'un certain indice.

D'après le théorème III.8.1, si (u_n) était majorée elle serait convergente, mais ce n'est pas le cas donc elle n'est pas majorée.

Soit A un nombre réel ; A n'est pas un majorant de la suite, il existe donc un indice N tel que : $u_N > A$. La suite est croissante, donc pour tout entier $n > N$: $u_n > A$. la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

On démontre **(2)** de la même façon. □

COROLLAIRE III.8.3

(1) Toute suite croissante et convergente a pour borne supérieure sa limite.

(2) Toute suite décroissante et convergente a pour borne inférieure sa limite.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et convergente. D'après le théorème III.7.1 (u_n) est bornée et le résultat se déduit alors des théorèmes III.8.1 et III.7.2.

On démontre **(2)** de la même façon. □

III.8.2 Suites adjacentes

DÉFINITION III.8.1

Deux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont dites adjacentes lorsqu'elles vérifient les trois propriétés suivantes.

(1) L'une est croissante.

(2) L'autre est décroissante.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$.

THÉORÈME III.8.4

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites adjacentes. Quitte à les intervertir on peut supposer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

Considérons la suite (w_n) définie par : $w_n = v_n - u_n$; pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$w_{n+1}-w_n=(v_{n+1}-u_{n+1})-(v_n-u_n)=\underbrace{\left(v_{n+1}-v_n\right)}_{\text{négatif}}-\underbrace{\left(u_{n+1}-u_n\right)}_{\text{positif}};$$

donc la suite (w_n) est décroissante, de plus elle converge vers 0 donc d'après le corollaire III.8.3 la suite (w_n) est positive ; la monotonie des suites (u_n) et (v_n) nous permet alors d'en déduire que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$u_{n_0}\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_{n_0}.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ sa limite.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ' sa limite.

On a : $\ell'-\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$; les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite. □

III.8.3 Exercices résolus

Exercice III.8.2. ***1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 3-\dfrac{2}{x}$.***

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 3$, et pour tout nombre entier naturel, n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que tous les termes de la suite (u_n) sont éléments de l'intervalle $[1,3]$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Solution *1. L'ensemble de définition de f est : $\mathbb{R}^\star$.*

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction, f', définie par :

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}.$$

Un carré est toujours positif, donc : $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

2. a. *Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».*

On a : $u_0 = 3$; donc P_0 est vraie.

Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
D'après ***1.****, la fonction f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$, *elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle* $[1,3]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant 3$;
donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que :

tous les termes de la suite (u_n) sont éléments de l'intervalle $[1,3]$

b. *Nous avons :* $u_0 = 3$ *et* $u_1 = 3 - \dfrac{2}{3}$; *donc :* $u_1 \leqslant u_0$. *Ce premier résultat préfigure peut-être une décroissance.*
Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

D'après le calcul ci-dessus et le résultat obtenu à la question précédente, P_0 *est vraie.*
Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.
D'après ***1.****, la fonction f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$, *elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle* $[1,3]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; *donc :* $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que pour tout nombre entier naturel, n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; *en particulier :*

la suite (u_n) est décroissante.

3. *D'après* ***2.a.*** *et* ***2.b.*** *la suite u_n est décroissante et minorée par 1 :*

La suite (u_n) est convergente et sa limite est supérieur ou égale à 1.

□

III.8.4 Exercices

III.8.a. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

III.8.b. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $w_n = v_n - u_n$; est une suite géométrique.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. a. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $t_n = 2u_n + 3v_n$; est une suite constante.
b. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

4. Exprimer explicitement, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.

III.9 Exercices

III.1. **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-6}{x-1}$.
a. Préciser l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout élément, x, de D_f :

$$\frac{4x-6}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

c. Étudier les variations de f.
d. Déterminer les points fixes de f.
e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
f. Tracer $\mathscr{C}_f$.

2. Représenter sur le graphique établi en **1.f.** les quatre premiers termes de la suite (u_n) vérifiant, $u_0 = 7$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.
Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

III.2. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

1. Donner les dix premiers termes de la suite.

2. (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0 = b_0 = 1$. La raison de (a_n) est positive et celle de (b_n) est négative. Elles vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

a. Démontrer que les raisons des suites (a_n) et (b_n) sont les solutions de l'équation :

$$q^2 = q + 1 \qquad \text{(E)}$$

b. En déduire les expressions explicites des suites (a_n) et (b_n).

3. Déterminer le couple (α,β) de nombres réels solution du système : $\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = u_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = u_1 \end{cases}$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$

5. Conclure.

Sujets de Baccalauréat

III.3. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \ \text{ et } \ w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

D'après France juin 2009

Chapitre IV

Limites de fonctions, continuité

IV.1 Limite finie (ou réelle)

IV.1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Dans toute la suite de ce chapitre, lorsqu'une fonction f sera envisagée $\mathscr{D}_f$ désignera son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

DÉFINITION IV.1.1

Dire qu'un réel l est limite d'une fonction f en $+\infty$ signifie que *tout* intervalle *ouvert* contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est plus grand qu'un certain réel A.

Remarques

1. *On écrit alors :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = l$.

2. *Cette définition signifie que la distance entre* $f(x)$ *et* l *est aussi petite qu'on le souhaite dès que* x *est suffisamment grand.*

3. *On définit de même la limite de* f *en* $-\infty$ *en remplaçant « dès que* x *est plus grand qu'un certain réel* A *» par « dès que* x *est plus petit qu'un certain réel* A *».*

THÉORÈME IV.1.1

Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

ont pour limite 0 en $+\infty$.

Démonstration Soit $]a;b[$ un intervalle contenant 0 et A un réel strictement plus grand que $\dfrac{1}{b^2}$ et que 1.

Pour tout réel $x \geqslant$A, on a :

- $\dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, car : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$;
- $x > \dfrac{1}{b^2}$; donc : $\sqrt{x} > \dfrac{1}{b}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < b$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $k(x) < b$;
- donc finalement : $a < 0 < h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant k(x) < b$.

Dès que x est plus grand que A, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$ sont dans l'intervalle $]a;b[$; donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

Remarque *De même :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

Interprétation graphique

IV.1.2 Limite d'une fonction en un réel *a*

IV.2 Notion de continuité

IV.3 Utilisation de la continuité

IV.3.1 Continuité et bijection

Dans cette partie le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé.

IV.3.1.a Définition

DÉFINITION IV.3.1 BIJECTION

Soit f est une fonction et I, J deux intervalles. On dit que f réalise une bijection de I vers J lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

1. Pour tout x élément de I : $f(x) \in$ J.
2. Pour tout y élément de J, il existe un unique x élément de I tel que : $y = f(x)$.

Exemple *La fonction $x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, elle réalise également une bijection de $]-\infty;0]$ vers $[0,+\infty[$, mais elle ne réalise pas de bijection de $\mathbb{R}$ vers $[0,+\infty[$.*

IV.3.1.b Bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

- On appelle bijection réciproque l'application de J vers I, parfois notée f^{-1}, qui à tout élément de J associe son unique antécédent dans I.
- f^{-1} est une bijection.
- Pour tout élément x de I et tout élément y de J, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
- Deux bijections réciproques ont des représentations symétriques par rapport à la première bissectrice [1].

Exercice IV.3.1. ***Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 2x+1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$.* $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ *est donc l'unique antécédent de y dans $\mathbb{R}$; par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est la fonction* $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. □

IV.3.1.c Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé

THÉORÈME IV.3.1 THÉORÈME DE LA BIJECTION

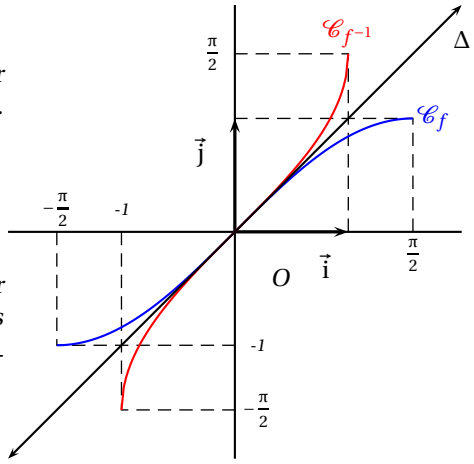
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé [a ; b]. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a;b]$ alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $\left[f(a);f(b)\right]$ (resp. $\left[f(b);f(a)\right]$) et la bijection réciproque est également strictement monotone et a le même sens de variation que f.

Exemples

1. *La fonction sinus est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. L'image de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par cette fonction est l'intervalle $[-1;1]$. La fonction sinus réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1;1]$.*

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$.

f est une bijection ; on désigne par f^{-1} sa bijection réciproque. Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ désignent les courbes représentatives respectives des fonctions f et f^{-1}. On sait que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ.



2. *résolution d'équation*

Remarque *Plus généralement, une fonction f strictement monotone et dérivable sur un intervalle I réalise une bijec-*

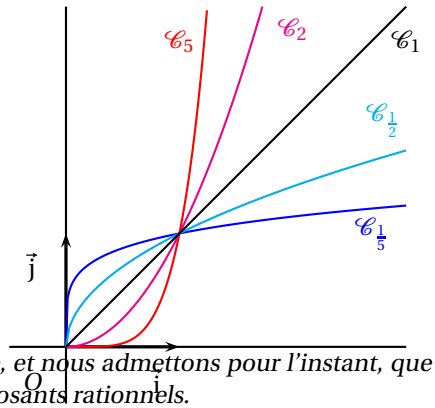
1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

tion de I vers $f(I)$, mais ce théorème est hors programme.

Exemple *Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ définie par : $f_n(x) = x^n$.*
La fonction f_n est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a : $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc, f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$; elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

- *Cette bijection réciproque est appelée **fonction racine n-ième**.*
- *L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.*

- *On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$.*
- *On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
- *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne respectivement par $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$. Les courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*



Remarque *Plus généralement, on démontrera dans un prochain chapitre, et nous admettons pour l'instant, que les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels.*

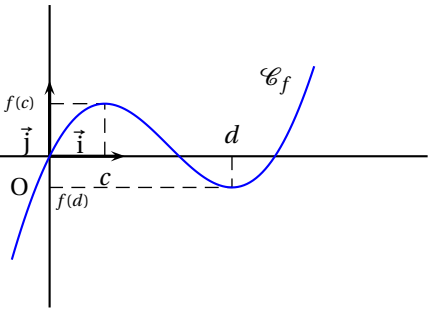
Exemple *Pour x positif, on a : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4 = x^{\frac{4}{3}}$ et $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{17}{12}}$.*

IV.3.1.d Applications à la résolution d'équations

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de la bijection.

THÉORÈME IV.3.2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé $[a;b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires $\big(f(a) \times f(b) < 0\big)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a;b]$.



Chapitre V

Exponentielles et équations différentielles

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la fonction exponentielle, d'établir les principales propriétés de cette fonction et les théorèmes de résolutions d'équations différentielles.

V.1 La fonction exponentielle de base e

V.1.1 Propriété fondamentale

L'activité sur la méthode d'Euler nous conduit à conjecturer et nous admettons momentanément l'existence d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les contraintes suivantes (l'existence d'une telle fonction sera établie § **??**).

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \tag{V.1}$$

Nous désignerons par exp cette fonction. Le principal objectif de ce paragraphe est d'établir la propriété fondamental de la fonction exp (elle transforme les sommes en produit) et de démontrer que la fonction exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1). La fonction exp est une fonction usuelle, elle est disponible dans toutes les calculatrices scientifiques. Pour tout nombre réel x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $\exp(x)$ peut aussi être noté : $\exp x$.

Remarque *Le nombre* e, *défini par :* $\mathrm{e} = \exp 1$ *; est une constante mathématique fondamentale.*

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\exp 0 = 1$ *et* $\mathrm{e} = 2,7182818\cdots$.

THÉORÈME V.1.1

(1) Pour tout nombre réel x : $\exp -x = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour tous nombres réels a et b : $\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f_a : x \mapsto \exp(a+x)\exp(-x)$. f_a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a'(x) = \exp(a+x)\exp(-x) - \exp(a+x)\exp(-x) = 0$;
donc la fonction f_a est constante ; or : $f_a(0) = \exp a$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(a+x)\exp(-x) = \exp a \tag{V.2}$$

(1) En particulier pour $a = 0$, on obtient : $\exp(x)\exp(-x) = 1$; donc pour tout réel x : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour $x = b$ dans (V.2), il vient : $\exp(a+b)\exp(-b) = \exp a$, en multipliant membre par $\exp b$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Ce théorème signifie que* exp *transforme les sommes en produits.*

2. *Plus généralement, on démontre par récurrence que pour tous nombres réels* $a_1, \cdots, a_n$ *on a :*
$\exp(a_1 + \cdots + a_n) = (\exp a_1) \times (\exp a_2) \times \cdots \times (\exp a_n)$.

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On déduit de* ***(1)*** *que :* $\exp x \neq 0$. *On déduit de* ***(2)*** *que :* $\exp x = \left(\exp \dfrac{x}{2}\right)^2$ *; donc :* $\exp x \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout réel x *:* $\exp x > 0$.

COROLLAIRE V.1.2

La fonction exp est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration Soit f une fonction, solution de problème. Démontrons que : $f = \exp$.
Considérons la fonction g définie par : $g = \dfrac{f}{\exp}$. La fonction g, quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur est toujours non nul, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par :

$$g' = \frac{\exp' \times f - f' \times \exp}{\exp^2} = \frac{\exp \times f - f \times \exp}{\exp^2} = 0.$$

Par conséquent la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus : $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp 0} = 1$; donc pour tout réel x : $g(x) = 1$. D'où il vient : $f = \exp$. □

V.1.2 Sens de variation

La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.1.3

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE V.1.4

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $a < b$ équivaut à $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$;

(2) $a \leqslant b$ équivaut à $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$;

(3) $a = b$ équivaut à $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$;

Démonstration Soit a et b deux réels.

(1) D'après le théorème V.1.3, on a : $a < b \implies \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ et $b \leqslant a \implies \mathrm{e}^b \leqslant \mathrm{e}^a$.

La dernière implication a pour contraposée : $a < b \impliedby \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$; on a donc : $a < b \iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.

(2) D'après **(1)** : $b < a \iff \mathrm{e}^b < \mathrm{e}^a$. Donc, par contraposée : $a \leqslant b \iff \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$.

(3) On en déduit que : $a = b \iff \begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \\ \mathrm{e}^b \leqslant \mathrm{e}^a \end{cases} \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$. □

V.1.3 Autres propriétés algébriques de l'exponentielle

Nous savons que fonction exp transforme les sommes en produits. Dans ce paragraphe nous allons établir les implications algébriques de cette propriété.

THÉORÈME V.1.5

Pour tous réels a et b, tout entier m, tout entier naturel non nul n et tout nombre rationnel r.

(1) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) $\exp(ma) = \exp^m a$

(3) $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) $\exp(ra) = \exp^r a$

Démonstration Soit a et b deux réels, m un entier, n un entier naturel non nul et r un nombre rationnel.

(1) $\exp(a-b) = \exp a \times \exp(-b) = \exp a \times \dfrac{1}{\exp b} = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) Si $m = 0$ ou $m = 1$, la propriété est immédiate.

Pour $m \geqslant 2$: $\exp(ma) = \exp(\underbrace{a + \cdots + a}_{m \text{ termes}}) = \underbrace{\exp a \times \cdots \times \exp a}_{m \text{ facteurs}} = \exp^m a$.

Pour $m \leqslant -1$: on a $-m \geqslant 1$ et donc : $\exp(ma) = \exp(-m(-a)) = \exp^{-m}(-a) = \left(\dfrac{1}{\exp a}\right)^{-m} = \exp^m a$.

(3) On a : $\left(\exp \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\dfrac{a}{n}\right) = \exp a$; donc : $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $r = \dfrac{p}{q}$.

Donc : $\exp(ra) = \exp\left(\dfrac{p}{q}a\right) = \left(\exp(pa)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\exp a\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \exp^r a$ □

Remarque *Les propriétés* ***(1)*** *(pour $r = 1$),* ***(3)*** *(pour $r \in \mathbb{Z}$) et* ***(4)*** *(pour $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{N}^*$) sont des cas particuliers de la propriété* ***(5)****.*

Convention

Étant donné un nombre réel a, on décide d'étendre par continuité la fonction $x \mapsto \exp^x a$, initialement définie sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout réel x : $\exp^x a = \exp(xa)$.

En particulier, lorsque $a = 1$, pour tout réel x : $\exp x = \mathrm{e}^x$.

Désormais, $\exp x$ sera de préférence noté : e^x.

V.1.4 Quelques limites

V.1.4.a Limites aux bornes

THÉORÈME V.1.6

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Démonstration La suite (u_n) de terme général : $u_n = e^n$; est la suite géométrique de raison e (exp est strictement croissante donc : $e^0 < e^1$; c'est-à-dire : $e > 1$) et de premier terme 1 ($1 > 0$) donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A\in\mathbb{R}$. Il existe un entier naturel N tel que : $u_N > A$; donc pour tout $x > N$, on a : $e^x > e^N > A$.
Ce qui signifie, par définition, que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Posons : $u = -x$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{e^u} = 0$;
donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. □

V.1.4.b Nombre dérivé en 0

La fonction exp est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est e^0. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.1.7

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

V.1.4.c Croissance comparée de x et exp

Le théorème suivant signifie que e^x tend plus vite que x vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que e^x tend plus vite vers 0 que x vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

THÉORÈME V.1.8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0.$$

Démonstration Introduisons la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto e^x - x$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'' : x \mapsto e^x - 1$.
La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel positif x, on a : $e^x \geqslant e^0$; c'est-à-dire : $e^x \geqslant 1$.
La fonction f'' est donc positive sur $[0;+\infty[$ on en déduit que la fonction f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc pour tout réel positif x : $f'(x) \geqslant f'(0)$; c'est-à-dire : $f'(x) \geqslant 1$.
La fonction f' est donc positive sur $[0;+\infty[$ on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc pour tout réel strictement positif x : $f(x) \geqslant f(0)$; c'est-à-dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$; d'où : $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + 1 \geqslant \dfrac{x^2}{2}$; puis : $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$ (car $x > 0$).
On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$; donc par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Posons $u = -x$. Il vient : $x e^x = -u e^{-u} = -\dfrac{u}{e^u}$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et par quotient $\lim\limits_{u\to+\infty} -\dfrac{u}{e^u} = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$. □

Exercice V.1.1. ***Étudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$.***

Solution *Pour tout réel $x > 0$:* $\dfrac{e^x}{x+1} = \dfrac{e^x}{x}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{1}{1+u} = 1$ *; donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ *;*
de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *; donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = +\infty$. □

V.2 La fonction logarithme népérien

V.2.1 Introduction

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; donc exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

DÉFINITION V.2.1

La fonction *logarithme népérien*[1], notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exp.

Sur la figure V.1 sont tracées les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = \ln x$; ainsi que la tangente

1. John NEPER, baron de Merchiston, mathématicien écossais 1550-1617

D_J à $\mathscr{C}_{\exp}$ en J (cette droite passant par J(0;1) et ayant pour coefficient directeur $e^0 = 1$, a pour équation : $y = x+1$) et la tangente D_I à $\mathscr{C}_{\ln}$ au point I(1;0).

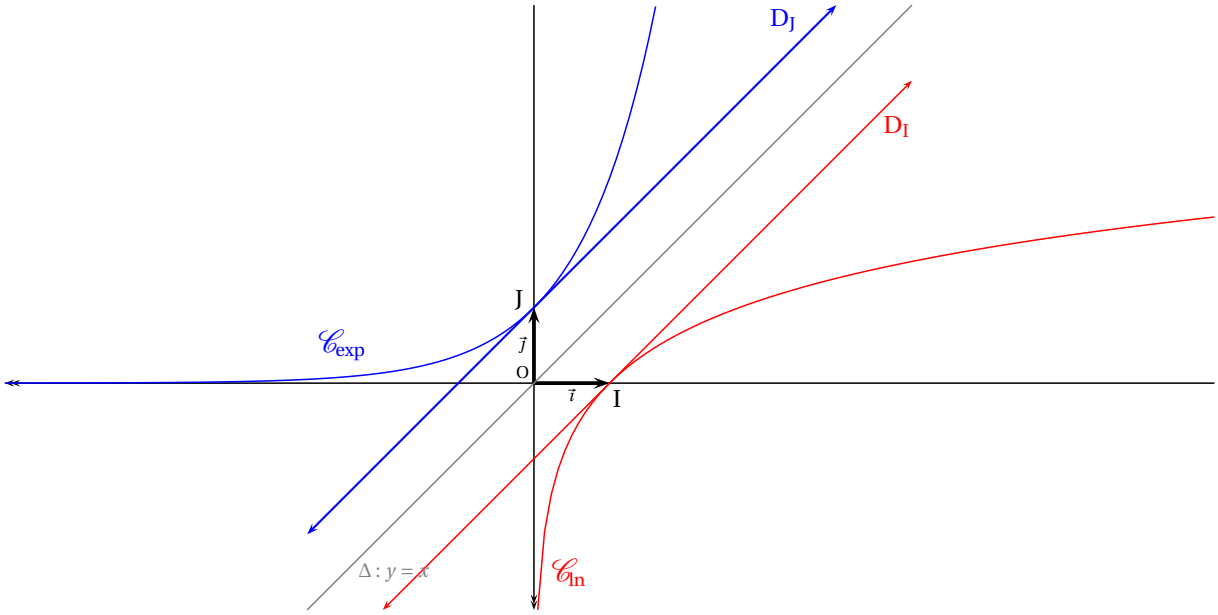


FIGURE V.1 – Courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \ln x$

Remarque *La définition V.2.1 et l'analyse de la figure V.1 amènent les propriétés suivantes qui seront éventuellement confirmées par des théorèmes ultérieures.*

1. *La fonction* ln *est une bijection de* $]0;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

2. *Pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$ *:* $\quad y = \ln x \iff x = e^y$.

En particulier : $e^{\ln x} = e^y = x$ *et* $\ln\left(e^y\right) = \ln x = y$.

3. *La fonction* ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$ *;*

En effet, la fonction exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$, *donc* $\mathscr{C}_{\exp}$ *présente en chacun de ses points une tangente sécante à* Ox *et à* Oy. *La réflexion d'axe* Δ *est isométrie, elle conserve donc le contact ; on en déduit qu'en chacun de ses points la courbe* $\mathscr{C}_{\ln}$ *présente une tangente sécante à* Oy *(et à* Ox*).*

4. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :* $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

En effet exp *transforme les sommes en produits donc* ln *transforme les produits en sommes.*

5. *Plus généralement pour tous réels* $x_1, \ldots, x_n$ *strictement positifs :*

$$\ln(x_1 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n).$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

7. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *;*

8. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :*

$$\begin{aligned} a = b &\iff \ln a = \ln b \\ a < b &\iff \ln a < \ln b \\ a \leqslant b &\iff \ln a \leqslant \ln b \end{aligned}$$

On déduit de même du théorème et de la convention énoncés au paragraphe V.1.3 le théorème suivant.

THÉORÈME V.2.1

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout nombre rationnel r.

(1) $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

(2) $\quad \ln(a^r) = r \ln a$.

Remarques

1. *En particulier, lorsque* $r = -1$ *:* $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

2. *On déduit de* ***(2)*** *que :* $a^r = \exp(\ln(a^r)) = \mathrm{e}^{r\ln a}$

V.2.2 Dérivabilité

Le théorème suivant exprime que la fonction ln est dérivable en 1 et que son nombre dérivé en 1 et 1.

THÉORÈME V.2.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.$$

Démonstration D'après le résultat obtenu dans l'exercice VIII.6.1., pour, $x=y$ et $x=-y$, on a pour tout réel, y : $\mathrm{e}^y \geqslant y+1$ et $\mathrm{e}^{-y}\geqslant -y+1$. On en déduit que pour $y\in\mathbb{R}$,

$$1-\frac{1}{\mathrm{e}^y}\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^y-1.$$

En posant, $x=\mathrm{e}^y$ (on a donc $y=\ln x$), on en déduit que pour tout nombre réel, x, strictement positif, $1-\dfrac{1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1$, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1.$$

En divisant membre à membre par, $x-1$, dont le signe est déterminé par la position de x par rapport à 1, on en déduit que :

- si $x<1$ alors : $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{\ln x}{x-1}\geqslant 1$;
- si $x>1$ alors : $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant 1$.

Par continuité de la fonction inverse, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, donc par comparaison des limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

Posons : $h=x-1$. On a donc : $x=h+1$; $\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln(h+1)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0}(h+1)=1$. Par composition des limites, on en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. □

Remarque *Ce théorème se lit sur la figure V.1, il exprime que la tangente à* $\mathscr{C}_{\ln}$ *en I,* $\mathrm{D_I}$*, a pour coefficient directeur 1.*

THÉORÈME V.2.3

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

Démonstration Soit, a, un nombre réel strictement positif. Déterminons le nombre dérivé de ln en a. Désignons, pour tout nombre réel x strictement positif et distinct de a, par θ_x le taux de variation de ln et a et x. On a : $\theta_x=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}$.

Posons : $u=\dfrac{x}{a}$. On a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{a}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}=1$. Puis par quotient par a : $\lim\limits_{x\to a}\theta_x=\dfrac{1}{a}$.
Ainsi la fonction est continue et dérivable en a et son nombre dérivé en a est 1. On en déduit le théorème. □

Remarques

1. *On pouvait aller plus vite en utilisant la dérivabilité de* ln*. En dérivant membre à membre l'identité,* $\mathrm{e}^{\ln x}=x$*, il vient :* $(\ln x)'\,\mathrm{e}^{\ln x}=1$*. D'où l'on tire :* $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

2. *La dérivabilité de* ln *sur* $]0;+\infty[$ *établit la continuité de* ln *sur ce même intervalle.*

V.2.3 Dérivée de ln *u*

THÉORÈME V.2.4

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $\dfrac{u'}{u}$.

Exemple *La dérivée sur* $\mathbb{R}$ *de* $x\mapsto\ln\left(x^2+1\right)$ *est* $x\mapsto\dfrac{2x}{x^2+1}$.

V.2.4 Logarithme népérien et calcul intégral

THÉORÈME V.2.5
Pour tout nombre réel strictement positif, x :

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}\,t}{t}.$$

THÉORÈME V.2.6
Soit u une fonction continûment dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive sur I : $\ln|u|$.

V.3 Des exponentielles et des logarithmes

V.3.1 Notation a^b, pour a, b réels et $a > 0$

DÉFINITION V.3.1
Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, on note a^b le nombre $\mathrm{e}^{b\ln a}$

Remarques

1. *On en déduit que :* $\ln\left(a^b\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{b\ln a}\right) = b\ln a$.
2. *Cette définition est en accord avec les précédentes définitions de* a^b *lorsque* $a > 0$.

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\pi^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\pi}$.

THÉORÈME V.3.1
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous nombres réels b et b' :

(1) $1^b = 1$;

(2) $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$;

(3) $(aa')^b = a^b a'^b$; $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$.

Démonstration Soit a, a', b, b' quatre réels tels que : $a > 0$ et $a' > 0$; on a :
(1) On a : $1^b = \mathrm{e}^{b\ln 1} = \mathrm{e}^0 = 1$;
(2) On a : $a^b a^{b'} = \mathrm{e}^{b\ln a}\mathrm{e}^{b'\ln a} = \mathrm{e}^{(b+b')\ln a} = a^{b+b'}$.
On démontre de même les autres identités. □

V.3.2 Fonctions exponentielles de base a (avec $a > 0$)

V.3.2.a Définition

DÉFINITIONS V.3.2
(1) Une fonction exponentielle est une fonction continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$ qui vérifie pour tous réels x et x' :

$$f(x+x') = f(x) \times f(x'). \tag{V.3}$$

(2) Le nombre strictement positif, $f(1)$, est appelé *base* de l'exponentielle.

Exemple *La fonction* exp *est une exponentielle de base* e.

THÉORÈME V.3.2
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$). Il existe une unique fonction exponentielle de base a.

Démonstration

Existence

Considérons la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln a}.$$

La fonction exp est strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a(x) > 0$. On a : $f_a(1) = \mathrm{e}^{\ln a} = a$;
de plus pour tous réels x et x' : $f_a(x+x') = \mathrm{e}^{(x+x')\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\,\mathrm{e}^{x'\ln a} = f_a(x)f_a(x')$. Donc f_a est une fonction exponentielle de base a.

Unicité

Soit f une fonction exponentielle de base a. Démontrons que $f = f_a$.
Pour $x = x' = 0$ dans V.3, on obtient : $f(0) = f^2(0)$; or : $f(0) \neq 0$ (car $f(0) > 0$) ; donc : $f(0) = 1$.
Pour $x = -x'$ dans V.3, on obtient : $f(x)f(-x) = 1$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
On en déduit comme dans le théorème V.1.5 que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = f(r\times 1) = f^r(1) = a^r$.
Introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - f_a(x)$.
g est la différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout nombre rationnel r, on a : $g(r) = a^r - \mathrm{e}^{r\ln a} = a^r - a^r = 0$.
Soit x un nombre irrationnel et $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ [2] une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Par continuité de g : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(x)$; mais pour tout entier naturel n : $g(u_n) = 0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = 0$; d'où : $g(x) = 0$. On en déduit que g est nulle sur $\mathbb{R}$ puis que : $f = f_a$. □

Remarques

1. *La fonction exponentielle de base a est donc la fonction : $x \mapsto a^x$.*
2. *Les deux exponentielles les plus utilisées sont $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 10^x$.*

V.3.2.b Sens de variation

L'exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$. On considérera désormais des exponentielles de base a avec $a \neq 1$. L'exponentielle de base a est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$ par la fonction exp. On sait que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'exponentielle de base a a le même sens de variation que la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$.

Pour $a > 1$ On a : $\ln a > \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Pour $0 < a < 1$ On a : $\ln a < \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

On en déduit les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x		↗	1	↗	a	↗	$+\infty$
	0						

TABLE V.1 – avec $a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

TABLE V.2 – avec $0 < a < 1$

V.3.3 Fonctions logarithmes de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)

On sait que si $a > 0$ et $a \neq 1$, l'exponentielle de base a est strictement monotone et transforme $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit alors que l'exponentielle de base a est un bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

DÉFINITION V.3.3
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).
La fonction *logarithme de base a* est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a.

Notations et vocabulaire

1. *La fonction logarithme de base a est notée* $\log_a$.
2. *La fonction* $\log_{\mathrm{e}}$ *est également notée* ln *ou parfois* Log.
3. *La fonction* $\log_{10}$, *appelée* logarithme décimal *est également notée* log.

Ainsi, pour tout entier relatif n : $\log 10^n = n$.

2. Il suffit de prendre la suite définie par : $u_n = [x\times 10^n]\times 10^{-n}$ où $x \mapsto [x]$ désigne la fonction partie entière.
En effet, pour tout entier naturel n : $[x\times 10^n] \leqslant x\times 10^n < [x\times 10^n]+1$; d'où : $0 \leqslant x\times 10^n - [x\times 10^n] < 1$; puis par produit par 10^{-n} (qui est strictement positif) : $0 \leqslant x - u_n < 10^{-n}$. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$; donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

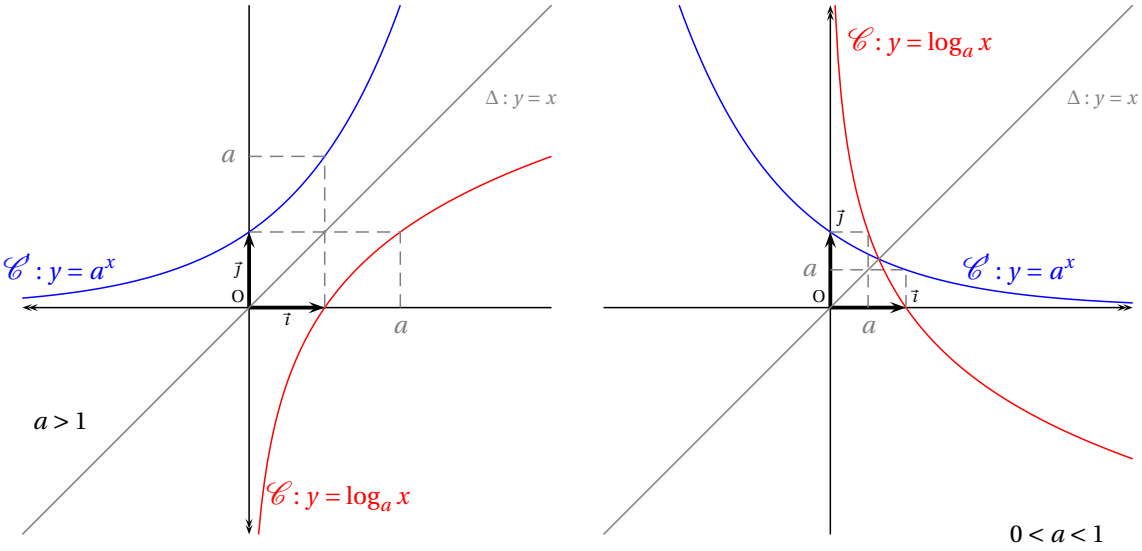


FIGURE V.2 – Courbes d'équations $y = a^x$ et $y = \log_a x$ avec $a = 2$ puis $a = \dfrac{1}{2}$.

C'est tout l'intérêt de cette fonction log très utilisée en physique. c'est-à-dire Si x a pour écriture scientifique $x = d \times 10^n$ où d est un nombre décimal compris entre 1 et 10 et $n \in \mathbb{Z}$, alors :
$\log x = \log(d \times 10^n) = \log d + \log 10^n = n + \log d$.
$1 \leqslant d < 10$ implique que $0 \leqslant \log d < 1$. Donc, n est la partie entière de $\log x$ et $\log d$ sa partie fractionnaire. Le nombre n est appelé caractéristique de $\log x$, $\log d$ est appelé *mantisse* de $\log x$.

Exemples

1. $\log 150 = 2,176\cdots$.
On a : $\log 150 = \log(10^2 \times 1,5) = 2 + \log(1,5) = 2,176\cdots$.
La caractéristique de $\log 150$ *est* 2 *et sa mantisse est* $0,176\cdots$.

2. *On aimerait savoir combien il y a de chiffres dans* 13^{128}.
On a : $\log\left(13^{128}\right) = 128 \log 13 = 142,584\cdots$ *; donc* 13^{128} *est constitué de* 143 *chiffres.*

Remarque *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$, *on a :* $\quad y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$.

THÉORÈME V.3.3

Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).

Pour tout réel x strictement positif : $\quad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Démonstration Posons : $y = \log_a x$; on a donc : $x = a^y = \mathrm{e}^{y \ln a}$; d'où : $\ln x = y \ln a$; puis : $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. □

Exemple *Calculer :* $\log_2 65536$ *;* $\log 1000000$ *;* $\log_3 729$ *et* $\log_7 343$.

V.4 Équations différentielles

V.4.1 Introduction

Considérons les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$; $g : x \mapsto \sin \omega x$ avec $\omega \in \mathbb{R}^\star$ et $\mathrm{P} : x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$.

- Calculer la dérivée de f et démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) - 2f(x) = 0$.
- Calculer la dérivée seconde g'' de g et démontrer que pour tout réel x, on a : $g''(x) + \omega^2 g(x) = 0$.
- Calculer la dérivée de P et démontrer que pour tout réel x, on a : $\mathrm{P}'(x) - \mathrm{P}(x) = -\dfrac{x^4}{24}$

On a sur $\mathbb{R}$: $f' - 2f = 0$. on dit que f est une solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$.
De même g est solution de l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.
P est solution de l'équation différentielle : $y' - y = -\dfrac{x^4}{24}$.

Notations et vocabulaire
1. *Une* équation différentielle *est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.*
La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', ...
Le plus souvent, la variable sera notée x ou t.
2. *L'*ordre *d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée intervenant dans cette équation. Par exemple :* $5y'' - 4y' - y = 0$ *; est une équation différentielle d'ordre* 2.
3. *Une* solution sur un intervalle ouvert *I d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'équation sur l'intervalle. Par exemple,* exp *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $5y'' - 4y' - y = 0$.
4. Résoudre ou intégrer *une équation différentielle sur un intervalle ouvert I c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cet intervalle.*
5. *Une* courbe intégrale *d'une équation différentielle est la courbe représentative d'une solution.*

V.4.2 Équations du type $y' - ay = 0$

Soit a un nombre réel. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = 0 \tag{V.4}$$

À toute fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction z dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par : $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
On a donc : $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ et $y'(x) = \big(z'(x) + az(x)\big)\,\mathrm{e}^{ax}$.
On en déduit que, pour tout nombre réel x : $(y' - ay)(x) = z'(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.
Par conséquent y est solution de (V.4) si et seulement si z' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si z est une fonction constante. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.4.1
Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = 0$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$$

où k est un nombre réel.

Exemple *Les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $y' - 2y = 0$ *; sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{2x}$ *où k est un nombre réel. Les fonctions* $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto 5\,\mathrm{e}^{2x}$ *et* $x \mapsto 0$ *sont donc des solutions sur* $\mathbb{R}$.

THÉORÈME V.4.2
Soit a un nombre réel et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = 0$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration Les solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
$f_k(x_0) = y_0 \iff k\,\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \iff k = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$.
La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \mapsto y_0\,\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$. □

Exercice V.4.1. ***1. Résoudre sur*** $\mathbb{R}$ ***:*** $y' = 3y$.
2. Déterminer la solution dont la courbe intégrale passe par le point $A(-2;-4)$
Solution 1. *Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{3x}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.
2. *La solution dont la courbe intégrale passe par le point* $A(-2;-4)$ *est donc la fonction :* $x \mapsto -4\,\mathrm{e}^{3(x+2)}$. □

Interprétation géométrique

Le théorème V.4.2 signifie que les courbes intégrales de l'équation forment une partition [3] du plan : par tout point $A(x_0, y_0)$, il passe une courbe intégrale et une seule (cf. figure V.3). Les solutions de l'équation : $y' = y$; sont les fonctions $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3. Une *partition* d'un ensemble E est une famille de sous ensembles non vides de E, deux à deux disjoints, dont l'union est E

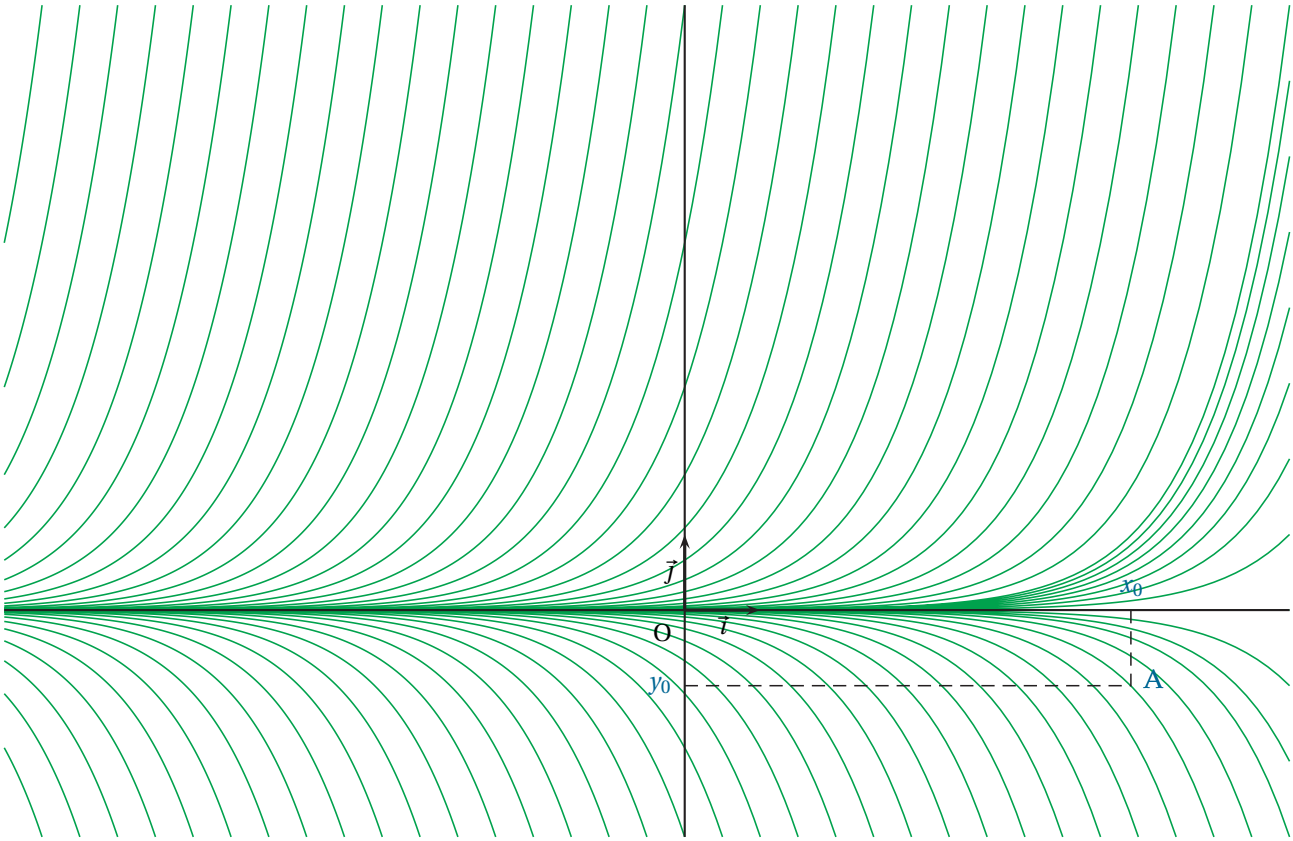


FIGURE V.3 – Courbes intégrales de l'équation : $y' = y$

V.4.3 Équations du type $y' - ay = b$

Soit a et b deux nombres réels. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = b \tag{V.5}$$

Remarques
1. *Cette équation sera équation sera appelée « équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre » alors que l'équation : $y - ax = 0$; sera appelée « équation sans second membre » associée à cette équation.*
2. *Lorque $a = 0$, les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $x \mapsto bx + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
3. *Lorque $a \neq 0$, la fonction constante $y = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de (V.5)*

THÉORÈME V.4.3
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = b$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

où k est un nombre réel.

Démonstration Posons $z = y + \dfrac{b}{a}$. On a donc : $y = z - \dfrac{b}{a}$ et $y' = z'$; d'où :

$$y' - ay = b \quad \Longleftrightarrow \quad z' - a\left(z - \frac{b}{a}\right) = b \quad \Longleftrightarrow \quad z' - az = 0$$

D'après le théoréme V.4.1, les solutions de la dernière équation sont de la forme $z : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$ □

Remarque *On peut retenir ce théorème sous la forme suivante : La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.*
On retrouve cette formulation arithmétique avec les équation diophantiennes du type : $ax + by = c$.

Exemple *Les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $y' - 2y = 5$ *; sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$ *où* k *est un nombre réel. Les fonctions* $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$, $x \mapsto 5\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$ *et* $x \mapsto -\dfrac{5}{2}$ *sont donc des solutions sur* $\mathbb{R}$.

THÉORÈME V.4.4

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = b$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration Les solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$f_k(x_0) = y_0 \iff k\mathrm{e}^{ax_0} - \dfrac{b}{a} = y_0 \iff k = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax_0}$.

La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \mapsto \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$. □

Remarque *Lorsque* $a = 0$ *l'unique courbe intégrale de* $y' - ay = b$ *passant par* $\mathrm{A}(x_0\,;y_0)$ *est la droite d'équation* $y = b(x - x_0) + y_0$.

Exercice V.4.2. ***1. Résoudre sur*** $\mathbb{R}$ ***l'équation*** $y' = 3y - 7$.

2. Déterminer la solution, f***, vérifiant*** $f(2) = 5$.

Solution ***1.*** *On remarque que* $y = \dfrac{7}{3}$ *est une solution paticulière, les solutions de l'équation sont donc les fonctions :* $x \mapsto k\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{7}{3}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.

2. *On a :* $f(2) = 5 \iff k\mathrm{e}^{6} + \dfrac{7}{3} = 5 \iff k = \dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{-6}$.

On en déduit que f *est la fonction :* $x \mapsto \dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{3(x-2)} + \dfrac{7}{3}$. □

V.4.3.a Temps caractéristique

En physique on utilise parfois le temps caractéristique lorsqu'on est confronté à la solution d'une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $a < 0$ vérifiant $y(0) = 0$.

La solution générale de l'équation est : $t \mapsto k\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ et la solution particulière vérifie $k = \dfrac{b}{a}$. On en déduit qu'a chaque instant : $y(t) = -\dfrac{b}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{at}\right)$.

Le *temps caractéristique* (ou *constante de temps* en électricité) est l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote et de la tangente à l'origine à la courbe représentative de la fonction y.

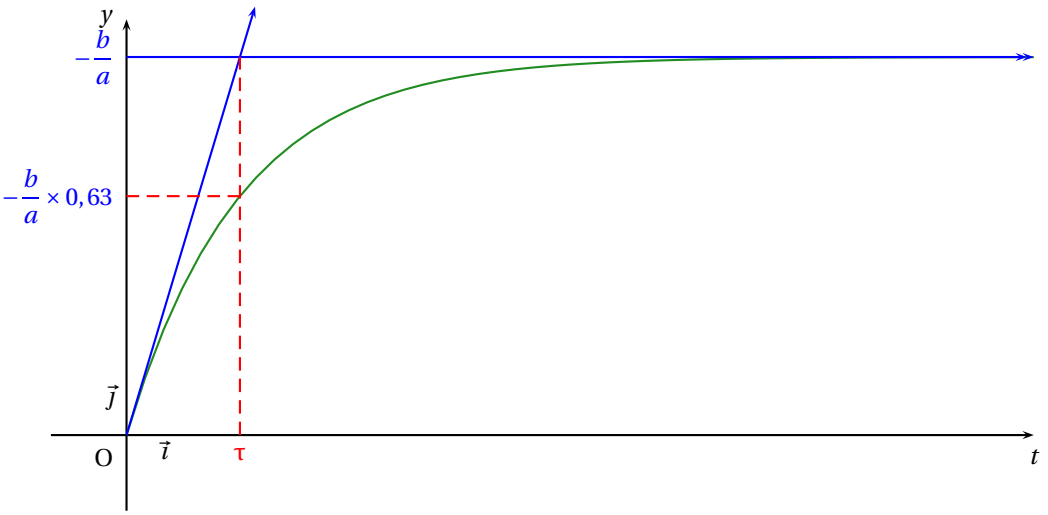


FIGURE V.4 – Courbe de y, asymptote et tangente à l'origine.

Remarques

1. $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = b$ *donc l'équation réduite de la tangente, T, à la courbe représentative de y, à l'origine est* $y = bx$.

2. *On a : $a<0$; donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\dfrac{b}{a}$; la droite D d'équation, $y = -\dfrac{b}{a}$, est asymptote à la courbe en $+\infty$.*

3. *le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de T et D, donc la solution de l'équation $bx = -\dfrac{b}{a}$ soit $\tau = -\dfrac{1}{a}$.*

Interprétation

- On a : $y(\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -1\right)$; or : $1-\exp -1 = 0{,}63\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 63% de sa valeur limite.
- On a : $y(5\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -5\right)$; or : $1-\exp -5 = 0{,}99\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 99% de sa valeur limite.

V.4.4 Exercices

V.4.a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a. $y' = y$.

b. $y' = -y$.

c. $y' = -3y$.

d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)y$.

V.4.b. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale.

a. $y' = 2y$ et $y(0) = 1$.

b. $y' = -y$ et $y(3) = 1$.

c. $y' - 3y = 0$ et $y(4) = \mathrm{e}^2$.

V.4.c. **1.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' = 3y'$.

2. Déterminer la solution vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

V.4.d. Une population de microbes se développe dans une culture suivant une loi où à chaque instant le taux d'accroissement est proportionnel à l'effectif. Sachant qu'au bout d'une heure il y a 10^4 microbes et que deux heures plus tard il y en 4×10^4, quelle est l'effectif initial de cette culture ?

Chapitre VI

Dérivabilité

VI.1 Fonctions dérivables

VI.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

La notion de dérivée a été vue en classe de Première.

THÉORÈME VI.1.1 NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes elles expriment que le réel $f'(a)$ est le *nombre dérivé* de f en a.

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$;
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$;
3. Pour tout réel h tel que $a+h$ soit dans I :
   $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$;
4. Pour tout élément x de I :
   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = 0$.

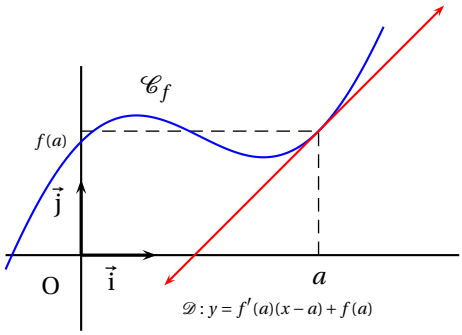
Vocabulaire et notations

- Lorsque f admet un nombre dérivé en a, on dit que f est dérivable en a ;
- Le nombre dérivé en a est noté $f'(a)$;
- Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I $\left(\text{I} \subset \text{D}_f\right)$, on dit que f est dérivable sur I.
- La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Dire que f est dérivable en a signifie que $\mathscr{C}_f$ admet au point $\text{A}\left(a; f(a)\right)$ une tangente (ou une demi-tangente lorsque a est une borne de D_f) non parallèle à l'axe des ordonnées. Cette tangente à pour équation :

$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$



Exemple *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. En particulier, f est dérivable en 3, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc au point d'abscisse 3 une tangente $\mathscr{D}$. De plus : $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$; $\mathscr{D}$ a donc pour équation : $y = 6(x-3)+9$; c'est-à-dire : $y = 6x-9$*

Remarque *Lorsque : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_2$; où l_1 et l_2 sont deux réels distincts, la fonction f n'est pas dérivable en a, mais l_1 est le nombre dérivé à gauche en a et l_2 est le nombre dérivé à droite en a ; la courbe $\mathscr{C}_f$ présente alors au point d'abscisse a une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche.*

VI.1.2 Dérivabilité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. (Elle n'est pas dérivable en 0)
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

VI.1.3 Principaux résultats

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{Z}^\star\right)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^\star$ si $n<0$ $\mathbb{R}$ si $n>0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

TABLE VI.1 – Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n (n \in \mathbb{Z}^\star)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

TABLE VI.2 – Dérivées et opérations sur les fonctions

VI.2 Dérivation d'une fonction composée

VI.2.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée

THÉORÈME VI.2.1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a : $\left(f \circ u\right)' = u' \times \left(f' \circ u\right)$.

Cette démonstration est hors programme, elle n'est donnée ici qu'à titre indicatif.

Démonstration Soit a un élément de I. Démontrons que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$.

- u est dérivable en a, donc pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a :
  $u(a+h) = u(a) + u'(a)\,h + h\varphi(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
- f est dérivable en $u(a)$, donc pour tout réel t tel que $u(a)+t$ appartienne à J, on a :
  $f(u(a)+t) = f(u(a)) + f'(u(a))\,t + t\phi(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \phi(t) = 0$.
- En particulier, lorsque $a+h \in$ I, pour $t = u'(a)\,h + h\varphi(h)$; on obtient :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + f'(u(a))\left[u'(a)\,h + h\varphi(h)\right] + \left[u'(a)\,h + h\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)$;
  c'est-à-dire :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)\,f'(u(a))\,h + h\underbrace{\left[f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)\right]}_{\varepsilon(h)}$.
  Posons : $\varepsilon(h) = f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)$.
- Pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a : $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)\,f'(u(a))\,h + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Cette dernière égalité signifie que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$;

□

Exemple *Étudier la dérivabilité de la fonction* $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ *et* $f : x \mapsto \cos x$ *; on a :* $g = f \circ u$.
La fonction u *est dérivable sur* $]-\infty;1[$ *et* $u(]-\infty;1[) =]0;+\infty]$ *; la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *qui contient* $]0;+\infty[$.
Donc, g *est dérivable sur* $]-\infty;1[$. *On démontre de même que* f *est dérivable sur* $]1;+\infty[$.
Pour tout x *élément de* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, *on a donc :* $g'(x) = u'(x) \times f'[u(x)] = -\dfrac{1}{(1-x)^2}\sin\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Remarque *Soit g une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point. Si g est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, alors g est dérivable sur son ensemble de définition.*

VI.2.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$

THÉORÈME VI.2.2

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I et $u(\mathrm{I}) \subset]0;+\infty]$ car u est strictement positive sur I. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$. □

Exemple ***Exercice VI.2.1.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.***

Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$; on a : $g = \sqrt{u}$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$; donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que g' est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

VI.2.3 Dérivée de la fonction u^n ($n \in \mathbb{Z}$)

1er cas $n > 1$

THÉORÈME VI.2.3

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction :

$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I. De plus, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x) \times n \times u^n(x)$. □

Exemple ***Exercice VI.2.2.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin^6 x$***

La fonction sin *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction* cos*, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 6\cos x \sin^5 x$.*

2e cas $n < 0$

THÉORÈME VI.2.4

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I, et n un entier ($n < 0$). La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction

$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $v = \dfrac{1}{u}$.

Exemple ***Exercice VI.2.3.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^6}$***

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ne s'anulle pas sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -6\dfrac{2x}{(x^2+1)^7}$.

Remarque *Comme précédemment, les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels. Nous admettons momentanément le théorème suivant.*

THÉORÈME VI.2.5

Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

1. La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r x^{r-1}$.
2. La fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $r u' u^{r-1}$.

La seconde partie se déduit de la première à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemple *Exercice VI.2.4.* ***Déterminer la dérivée de la fonction*** $f : x \mapsto \left(2x^2+1\right)^3 \sqrt{2x^2+1}$.

On a $f = u^{\frac{7}{2}}$, *où u est la fonction* $x \mapsto 2x^2+1$; *la fonction u est dérivable et strictement positive sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est la fonction* $u' : x \mapsto 4x$; *la fonction f est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* f' *définie par :*
$f'(x) = \dfrac{7}{2} \times 4x\left(2x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} = 14x\left(2x^2+1\right)^2 \sqrt{2x^2+1}$.

VI.3 Dérivation et études de fonctions

VI.3.1 Sens de variation

THÉORÈME VI.3.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– Si $f' > 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I ;
– si $f' < 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I ;
– si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

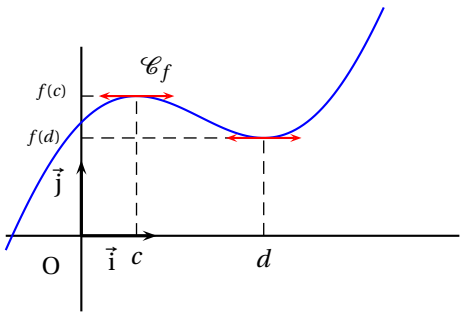
Remarque *De même si* $f' \geqslant 0$ *(resp.* $f' \leqslant 0$*) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Exemple *La fonction* $f : x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et sa dérivée est strictement positive sur* $]0;+\infty]$ *; donc f est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$.

Remarque *La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *a une dérivée strictement négative sur son ensemble de définition et pourtant la fonction f n'est pas décroissante. L'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.*

VI.3.2 Extremum local

D'après la figure ci-contre :
– $f(c)$ est maximum local de f ;
– $f(d)$ est minimum local de f.
On dit également que f admet un maximum en c et un minimum en d.



THÉORÈME VI.3.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I. f admet un extremum local en a si et seulement si f' s'annule et change de signe en a.

Ce théorème est connu depuis la classe de Première.

VI.4 Dérivées successives d'une fonction

DÉFINITIONS VI.4.1 DÉRIVÉE n-IÈME D'UNE FONCTION

Soit f une fonction et I un intervalle.
(1) Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
(2) Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
(3) De proche en proche, la fonction dérivée n-ième de f sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction dérivée $(n+1)$-ième de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f. On utilise également, notamment en sciences physiques, la notation de Leibniz : f', f'', …, $f^{(n)}$; sont notées respectivement $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, …, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Exemples

1. ***Exercice VI.4.1.*** ***Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.***

On a : $f'(x) = x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 2x - 4$; $f^{(3)}(x) = 2$; $f^{(4)}(x) = 0$.

Donc, pour tout nombre entier n tel que $n \geqslant 4$, on a : $f^{(n)}(x) = 0$.

2. ***Exercice VI.4.2.*** ***Calculer la dérivée n-ième de la fonction $g : x \mapsto \sin x$.***

On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ g''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ g^{(3)}(x) &= \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Démontrons cette égalité par récurrence.

1. *L'égalité est vraie pour $n = 1$.*
2. *Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire :*
   $g^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$;
   on en déduit que : $g^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$;
   donc, l'égalité est vraie pour $k+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

VI.5 Exercices résolus

Exercice VI.5.1. ***Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.*
Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow 2(y-x) = \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \left(2(y-x)\right)^2 = x^2 + 1 \text{ et } 2(y-x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 8yx + 4y^2 - 1 = 0 \text{ et } x - y \leqslant 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré d'inconnue x dont le discriminant est :
$\Delta = (-8y)^2 - 4 \times 3(4y^2 - 1) = 16y^2 + 12$.
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{8y - \sqrt{16y^2+12}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{8y + \sqrt{16y^2+12}}{6}$;
c'est-à-dire : $x_1 = \dfrac{4y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.
D'où il vient : $x_1 - y = \dfrac{y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ et $x_2 - y = \dfrac{y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.

Or : $4y^2+3>4y^2$ *; donc :* $\sqrt{4y^2+3}>|2y|$ *;*
D'où : $x_1-y<\dfrac{y-2|y|}{3}\leqslant 0$ *et* $x_2-y>\dfrac{y+2|y|}{3}\geqslant 0$.
x_1 *est la seule solution vérifiant la contrainte* $x-y\leqslant 0$ *,* x_1 *est donc l'unique antécédent de* y *dans* $\mathbb{R}$ *et on a :* $y=f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{4y-\sqrt{4y^2+3}}{3}$.
Par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *et sa bijection réciproque est la fonction* $f^{-1}:x\mapsto\dfrac{4x-\sqrt{4x^2+3}}{3}$. □

Exercice VI.5.2. ***On se propose de déterminer la dérivée de la fonction*** $f:x\mapsto\sqrt{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}$.

1. a. Étudier le signe de la fonction $u:x\mapsto\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ ***(on pourra utiliser*** u''***).***

b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f***.***

2. Étudier la dérivabilité de f ***en 0 (on pourra poser :*** $t=\dfrac{x}{2}$***).***

3. Déterminer la dérivée de la fonction f***.***

Solution

1. a. *La fonction* u *est la somme de la fonction* cos *et d'une fonction polynôme, elle est donc deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*. Sa dérivée première est la fonction* $u':x\mapsto x-\sin x$ *; et sa dérivée seconde est la fonction* $u'':x\mapsto 1-\cos x$*. La fonction* u'' *étant positive on en déduit que la fonction* u' *est strictement*[1] *croissante sur* $\mathbb{R}$*. De plus* $u'(0)=0$ *donc* u' *est strictement positive sur* $]0;+\infty[$ *et strictement négative sur* $]-\infty;0[$ *et par conséquent* u *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *et strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$ *or* $u(0)=0$ *donc la fonction est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$ *et s'annule en 0.*

On a $f=\sqrt{u}$*. La fonction* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$*,* f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}^\star$ *et sa dérivée sur* $\mathbb{R}^\star$ *est* $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$*, pour savoir si elle dérivable en 0, on doit calculer la limite en 0 de la fonction* θ *définie par :* $\theta(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$.
Posons : $t=\dfrac{x}{2}$*. Pour tout réel non nul* x*, on a :*

$$u(x)=\cos 2t-1+\frac{(2t)^2}{2}=1-2\sin^2 t-1+2t^2=2t^2\left(1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right).$$

Donc pour tout réel non nul x *:* $\theta(x)=\dfrac{\sqrt{u(x)}}{x}=\dfrac{\sqrt{2t^2\left(1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right)}}{2t}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{|t|}{t}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}$.

Donc : $\theta(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t<0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t>0\end{cases}$

On sait que : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ *; donc par composition par la fonction* $x\mapsto\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x^2}$ *:*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0\,;$$

on a de même : $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0.$

Pour $x>0$*, on a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{2}=0$ *avec* $\dfrac{x}{2}>0$ *et* $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0$*; Donc par composition :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\theta(x)=0$*; de même :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\theta(x)=0$*. Donc la fonction* f *est dérivable en 0 et* $f'(0)=0$.
La fonction f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* f' *définie par :*

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{x-\sin x}{2\sqrt{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}}\text{ lorsque } x\neq 0 \text{ et } f'(0)=0.\ \square$$

1. on peut admettre ici cette justification peu rigoureuse, un argumentation correcte serait la suivante. Soit a et b deux réels tels que $a<b$. La fonction u'' est dérivable et strictement positive (sauf en nombre fini de points) sur $[a;b]$, u' est donc strictement croissante sur $[a;b]$; d'où : $u'(a)<u'(b)$; cette inégalité étant vérifiée pour tous réels a et b tels que $a<b$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice VI.5.3. ***On se propose d'étudier la fonction*** $f : x \mapsto \dfrac{|x-1|\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, D_f, ***de*** f.

2. Étudier la limite de f ***en*** $-\infty$

3. Étudier la dérivabilité de f ***en 1.***

4. Étudier la dérivabilité de f ***en 3.***

5. On considère la fonction u ***définie sur*** $]-\infty;3[$ ***par*** $u(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{4-x}}$ ***;***
calculer $u'(x)$.

6. Déterminer la dérivée de f, ***étudier le sens de variation de*** f ***et dresser son tableau de variation.***

7. a. Étudier la limite en $-\infty$ ***de*** $x \mapsto f(x)+x-1$ ***(on pourra poser*** $t = x-1$***).***

b. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ ***d'équation*** $y = -x + \dfrac{1}{2}$ ***est asymptote à la courbe représentative,*** $\mathscr{C}_f$, ***de*** f.

8. Représenter graphiquement la fonction f.

Solution

1. *Pour tout nombre réel* x, f *est définie en* x *si et seulement si* $3-x \geqslant 0$ *et* $4-x>0$, *donc* $D_f =]-\infty;3]$

2. *Pour tout* $x<0$, *on a :* $f(x) = (1-x)\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}}$.

De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x} = 0$;
donc par différences, quotient puis composition par la fonction racine carrée :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}} = 1$;

or : $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$; *donc par produit :* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. *On a :* $f(1) = 0$; *donc pour étudier la dérivabilité de* f *en 1, il faut étudier la limite de* $\dfrac{f(1+h)}{h}$ *lorsque* h *tend vers 0.*

Pour $h \leqslant 2$ *et* $h \neq 0$, *on a :* $\dfrac{f(1+h)}{h} = \dfrac{|h|}{h} \times \dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}}$,

avec : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\dfrac{|h|}{h} = -1$ *lorsque h<0 et* $\dfrac{|h|}{h} = 1$ *lorsque h>0.*

Donc par produit : $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(1+h)}{h} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ *et* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(1+h)}{h} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc f *n'est pas dérivable en 1, mais la courbe* $\mathscr{C}_f$ *présente au point d'abscisse 1 une demi-tangente à droite de coefficient directeur* $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ *et une demi-tangente à gauche de coefficient directeur* $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. *La fonction* f *n'est pas définie à droite de 3 et* $f(3) = 0$, *donc pour étudier la dérivabilité de* f *en 3, il faut étudier la limite de* $\dfrac{f(3+h)}{h}$ *lorsque* h *tend vers 0 par valeurs inférieures. Pour* $h<0$, *on a :* $\dfrac{f(3+h)}{h} = \dfrac{\sqrt{-h}}{h} \times \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}} \times \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}}$. *On a :* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} -\dfrac{1}{\sqrt{-h}} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}} = 2$; *donc par produit :* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(3+h)}{h} = -\infty$.

Donc f *n'est pas dérivable en 3, mais la courbe* $\mathscr{C}_f$ *présente au point d'abscisse 3 une demi-tangente verticale (vers le haut).*

5. *La fonction* $v : x \mapsto \dfrac{3-x}{4-x}$ *est une fonction homographique, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition,* $\setminus\{4\}$, *de plus pour* $x<3$, $3-x>0$ *et* $4-x>0$ *donc* v *est strictement positive sur* $]-\infty;3[$ *par* $u = \sqrt{v}$ *est dérivable sur* $]-\infty;3[$ *et sa dérivée est* $u' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$. *La dérivée de* v *est la fonction* $v' : x \mapsto -\dfrac{1}{(4-x)^2}$, *donc la dérivée de* u *est la fonction est la fonction* u' *définie sur* $]-\infty;3[$ *par :* $u'(x) = \dfrac{-1}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}}$.

C'est-à-dire : $\boxed{u'(x) = \dfrac{-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}}}$.

6. *Sur* $]-\infty;1[\cup]1;3[$ f *est le produit de deux fonctions dérivables donc* f *est dérivable.*
pour $x \in]1;3[$ *:* $f(x) = (x-1)\,u(x)$; *donc :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)+(x-1)\,u'(x) \\ &= \sqrt{\frac{3-x}{4-x}}-\frac{x-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{(3-x)(4-x)-(x-1)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{2x^2-15x+25}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \end{aligned}$$

Dans cette fraction le dénominateur (produit de quantité positives) est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2-15x+25$. Le discriminant est $\Delta = 15^2-4\times 2\times 25 = 25$, donc le trinôme admet deux racines : $x_1=\dfrac{15-5}{4}=\dfrac{5}{2}$ et $x_1=\dfrac{15+5}{4}=5$. Le trinôme est du signe de 2 à l'extérieur des racines et du signe de -2 à l'intérieur, donc f' est strictement positive sur $]1;\dfrac{5}{2}[$ et strictement négative sur $]\dfrac{5}{2};3[$; donc f est strictement croissante sur $[1;\dfrac{5}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\dfrac{5}{2};3]$.
Pour $x\in]-\infty;1[$: $f(x)=(1-x)\,u(x)$; donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -u(x)+(1-x)\,u'(x) \\ &= -\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}+\frac{x-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{-(3-x)(4-x)+(x-1)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{-\left(2x^2-15x+25\right)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, f' est strictement négative sur $]-\infty;1[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$. Donc finalement f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et sur $[\dfrac{5}{2};3]$ et strictement croissante sur $[1;\dfrac{5}{2}]$. On en déduit le tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

7. a. *Posons : $t=x-1$. Pour $x<1$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x)+x-1 &= \frac{|t|\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}+t \\ &= t\left(1-\frac{\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}\right) \\ &= t\frac{\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}} \\ &= t\frac{(3-t)-(2-t)}{\sqrt{3-t}\left(\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}\right)} \\ &= t\frac{1}{\left(\sqrt{-t}\right)^2\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)} \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{3}{t}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2}{t}=0$;
donc par différences, composition par la fonction racine carrée, somme, produit et quotient :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-1\right)=-\dfrac{1}{2}$. D'où il vient par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)\right)=0$.
Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. □

Chapitre VII

Nombres complexes

VII.1 Introduction

VII.1.1 Des équations et des ensembles

Dans les classes précédentes, on a vu l'ensemble $\mathbb{N}$, dans cette ensemble on peut résoudre des équations telles que : $x+3=7$; où la solution est 4. Cependant, dans $\mathbb{N}$, des équations telles que : $x+7=3$; n'ont pas de solution. C'est alors qu'on a eu l'idée d'étendre l'ensemble des nombres ; on a ainsi obtenu un nouvel ensemble appelé $\mathbb{Z}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : -4. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $3x=-15$; ont une solution alors que d'autres équations, pourtant semblables, telles que : $3x=-7$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{Q}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : $-\dfrac{7}{3}$. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=4$; ont deux solutions (2 et -2) alors que des équations assez proches telles que : $x^2=3$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation précédente a deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Mais cela n'est pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=-4$; assez proches des deux équations précédentes, n'ont pas de solution. Si on veut qu'une telle équation ait, comme les autres, deux solutions il faut étendre l'ensemble des nombres.

On part du principe qu'il existe un nombre i (i comme imaginaire) tel que : $i^2=-1$; et notre objectif est de trouver un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{C}$, qui sera le plus petit ensemble de nombres (qui seront appelés nombres complexes) vérifiant les contraintes suivantes.

1. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$;
2. $i\in\mathbb{C}$;
3. Les lois algébriques concernant l'addition et la multiplication des nombres sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.

La somme ou le produit de deux nombres réels est un nombre réel, la dernière condition impose donc que la somme ou le produit de deux nombres complexes soit un nombre complexe. En particulier $2i$ et $-2i$ sont deux nombres complexes et on a :
$(2i)^2=2^2\times i^2=4\times(-1)=-4$ et $(-2i)^2=(-2)^2\times i^2=4\times(-1)=-4$;
donc la dernière équation envisagée à maintenant, elle aussi, deux solutions.

Pour les raisons que nous venons d'évoquer, tout nombre de la forme (dite *algébrique*) $a+ib$, où a et b sont des nombres réels, sont des nombres complexes. Peut-on par additions ou par multiplications obtenir des nombres complexes qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme ? Pour se faire une idée, prenons quelques exemples.

VII.1.2 Activités

Mettre sous forme algébrique les nombre complexes suivants.

$z_1=(2+5i)+(3-7i)$; $z_2=(2+5i)-(3-7i)$; $z_3=(2+5i)(3-7i)$

$z_4=(2+5i)(2-5i)$; $z_5=\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}}$; $z_6=\dfrac{3-7i}{2+5i}$

$z_7=i^4$; $z_8=(1+i)^2$; $z_9=(1+i)^{17}$

Plus généralement, pour $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ (où a, a', b, b' sont des réels), mettre sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'$, zz',$z-z'$ et lorsque $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, $\dfrac{1}{z}$.

VII.1.3 Définitions

L'activité précédente suggère la définition suivante.

DÉFINITIONS VII.1.1 NOMBRE COMPLEXE, $\mathbb{C}$

(1) Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels et $i^2=-1$.

(2) L'ensemble des nombres complexes est appelé $\mathbb{C}$.

Remarque *On a :* $0\times 2i=(0\times 2)i=0\times i$ *; donc :* $0=0\times 2i-0\times i=0(2i-i)=0\times i$ *; d'où :* $0\times i=0$.

Notations et vocabulaire

1. *lorsqu'un nombre complexe z est écrit sous la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels, on dit qu'il est écrit sous* forme algébrique *;*

2. *le nombre réel a est appelé* partie réelle *de z et est noté $\Re\mathrm{e}(z)$;*

3. *le nombre réel b est appelé* partie imaginaire *de z et est noté $\Im\mathrm{m}(z)$; en particulier $\Im\mathrm{m}(z)$ est un nombre réel ;*

4. *si $b=0$, alors $z=a$ (car on a : $i\times 0=0$) ; z est un nombre réel ; tout nombre réel est bien un nombre complexe ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$) ;*

5. *Si $a=0$, alors $z=ib$; z est dit* imaginaire pur.

Exemple *Si :* $z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *; alors :* $\Re\mathrm{e}(z)=\dfrac{1}{2}$ *et* $\Im\mathrm{m}(z)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$

VII.1.4.a Addition, soustraction, multiplication

Comme on l'a vu en activités, l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies de la façon suivante.

DÉFINITIONS VII.1.2

Soit a, a', b, b' des nombres réels.

(1) $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$;

(2) $(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$;

(3) $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

Remarques

1. *Lorsque :* $b=b'=0$ *; on retrouve l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

2. $(a+ib)+(-a-ib)=0$ *; tout nombre complexe, $z=a+ib$, a un opposé :* $-z=-a-ib$.

Le théorème suivant signifie que, comme nous l'avions désiré, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$; sa démonstration, fastidieuse et sans surprise, est laissée au soin du lecteur courageux.

THÉORÈME VII.1.1

Pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

(1)	$z+z'\in\mathbb{C}$	$+$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(2)	$z+z'=z'+z$	$+$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(3)	$z+(z'+z'')=(z+z')+z''$	$+$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(4)	$z+0=0+z=z$	dans $\mathbb{C}$, 0 est élément neutre pour $+$;
(5)	$z\times z'\in\mathbb{C}$	$\times$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(6)	$z\times z'=z'\times z$	$\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(7)	$z\times(z'\times z'')=(z\times z')\times z''$	$\times$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(8)	$z\times 1=1\times z=z$	dans $\mathbb{C}$, 1 est élément neutre pour $\times$;
(9)	$z\times(z'+z'')=z\times z'+z\times z''$	$\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{C}$;

VII.1.4.b Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.1.3 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z=a+ib$.

On appelle *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par : $\overline{z}=a-ib$.

Exemple *Si* $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *alors* $\overline{z}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4.c Égalité de deux nombres complexes

THÉORÈME VII.1.2

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.
(1) $z=0$ si et seulement si $a=0$ et $b=0$;
(2) $z=z'$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$

0 est appelé *nombre complexe nul.*

Démonstration

(1) On sait que si $a=0$ et $b=0$, alors $z=0$.
Réciproquement si $z=0$, alors : $z\overline{z}=0$; c'est-à-dire : $a^2+b^2=0$;
a et b sont réels et on sait que dans $\mathbb{R}$ la somme des carrés de deux nombres est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls. On en déduit **(1)**.

(2) On a : $z-z'=(a-a')+i(b-b')$; donc : $z=z'\iff z-z'=0\iff\left\{\begin{array}{l}a-a'=0\\b-b'=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a=a'\\b=b'\end{array}\right.$. □

VII.1.4.d Inverse d'un nombre complexe non nul, division

THÉORÈME VII.1.3

Tout nombre complexe non nul a un *inverse.*

Démonstration Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z=a+ib$.
On a donc : $a^2+b^2\neq 0$; et d'après les définitions VII.1.2 :

$$\left(a+ib\right)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=1.$$

L'inverse de z s'obtient par la formule : $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$. □

Exemple *Pour* $z=3+5i$, *on obtient :* $\frac{1}{z}=\frac{1}{3+5i}=\frac{3-5i}{3^2+5^2}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$.

Remarque *La formule introduite dans la démonstration du théorème VII.1.3 peut s'écrire :* $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

THÉORÈME VII.1.4

Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux au moins est nul.

Démonstration Soit z et z' deux nombres complexes. D'après les définitions VII.1.2, le théorème VII.1.2 et la remarque §VII.1.3, si $z=0$ ou $z'=0$ alors $zz'=0$.
Réciproquement, si $zz'=0$ alors $z=0$ ou $z'=0$. En effet si $z\neq 0$, alors $\frac{1}{z}\times zz'=\frac{1}{z}\times 0$; c'est-à-dire : $z'=0$. □

La *division* se définit par : $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$ (pour $z\neq 0$).

Exemple $\frac{2+3i}{2-i}=\frac{(2+3i)(2+i)}{2^2+1^2}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$.

VII.1.4.e Groupes et corps

Ce paragraphe peut être omis par les élèves ne suivant l'enseignement de spécialité mathématique.
On a vu que dans $\mathbb{C}$, + est une loi de composition interne, commutative, associative dans laquelle 0 est élément neutre et pour laquelle tout élément a un opposé ; ces cinq propriétés étant réunies, on dit que $(\mathbb{C},+)$, c'est-à-dire $\mathbb{C}$ muni de l'addition, est un groupe commutatif.

De même $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, muni de la multiplication est groupe commutatif.

$(\mathbb{C},+)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe et $\times$ est distributive par rapport à + ; on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps.

De plus × est commutative dans $\mathbb{C}$, on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Remarques

1. *$(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{Q},+,\times)$ sont des corps commutatifs.*

2. *$(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est un corps car certains entiers non nuls n'ont pas d'inverse entier.*

3. *Désignons par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries du plan ; $(\mathscr{I},\circ)$ est un groupe, non commutatif.*

VII.1.4.f Identités remarquables

Les formules suivantes, établies dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME VII.1.5

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n, on a :

$(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2$; $(z-z')^2 = z^2-2zz'+z'^2$

$(z+z')(z-z') = z^2-z'^2$; $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k z'^{n-k}$ (formule du binôme de NEWTON)

$z^n-z'^n = (z-z')\left(z^{n-1}+z^{n-2}z'+z^{n-3}z'^2+\cdots+zz'^{n-2}+z'^{n-1}\right) = (z-z')\sum_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}z'^k$

VII.2 Interprétations géométriques

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

VII.2.1 Affixe, point image, vecteur image

– L'application qui à tout nombre complexe de forme algébrique $a+ib$ associe le point $M(a;b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathscr{P}$.
$M(a;b)$ est appelé *point image* du nombre complexe $a+ib$; $a+ib$ est appelé *affixe* du point $M(a;b)$

– L'application qui à tout nombre complexe $a+ib$ associe le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.
$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $a+ib$; $a+ib$ est appelé *affixe* du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

– Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé *plan complexe*. Un point M d'affixe z est souvent noté $M(z)$.

– Les droites de repères $(O;\vec{\imath})$ et $(O;\vec{\jmath})$ sont respectivement appelée *axe réel* et *axe imaginaire*.

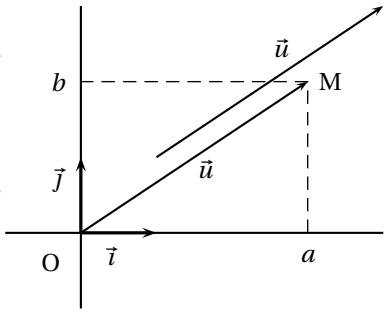


FIGURE VII.1 – Interprétation géométrique

Exemples

1. *O est le point d'affixe 0.*

2. *$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs d'affixes respectives* 1 *et* i.

Remarques

1. *Deux points sont confondus si et seulement si ils ont la même affixe.*

2. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.*

VII.2.2 $\vec{u}+\vec{u'}$, $k\vec{u}$, $\overrightarrow{MM'}$

Le tableau VII.1 donne les interprétations géométriques de certaines opérations dans $\mathbb{C}$.

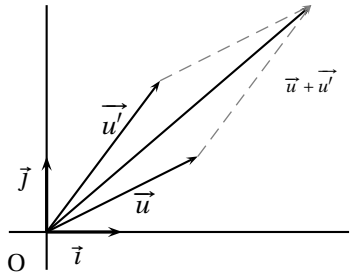
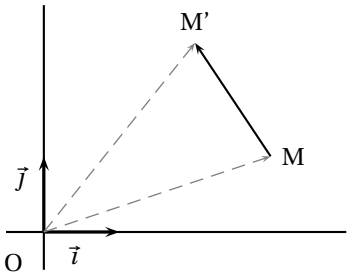
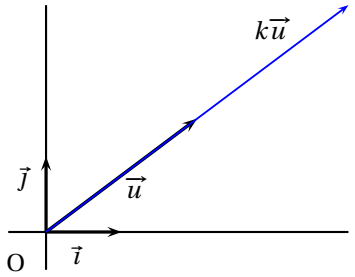
Somme	Différence	Produit par un nombre réel
		
$z_{\vec{u}}+z_{\vec{u'}}=z_{\vec{u}+\vec{u'}}$	$z_{M'}-z_M=z_{\overrightarrow{MM'}}$	$kz_{\vec{u}}=z_{k\vec{u}}$

TABLE VII.1 – Opérations sur les vecteurs

Exercice VII.2.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm)***

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+2i$; $z_B=4-2i$; $z_c=5$ et $z_D=\frac{7}{2}+2i$. 2. Démontrer que le quadrilatère AOBC est un parallélogramme. 3. Démontrer que les droites (AB) (CD) sont parallèles.

Solution

1. *Voir figure VII.2.*

2. *Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=1+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=5-(4-2i)=1+2i$ *; on a :* $z_{\overrightarrow{OA}}=z_{\overrightarrow{BC}}$ *; donc :* $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ *. Le quadrilatère AOBC est donc un parallélogramme.*

3. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=\frac{7}{2}+2i-5=-\frac{3}{2}+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(4-2i)-(1+2i)=3-4i=-2\left(-\frac{3}{2}+2i\right)$ *;*

On a : $z_{\overrightarrow{CD}}=-2z_{\overrightarrow{CD}}$ *; donc :* $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$ *.*

Les droites (AB) (CD) ont des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont donc sont parallèles. □

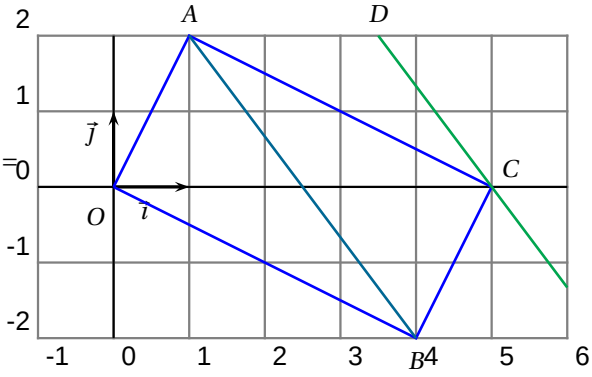


FIGURE VII.2 –

VII.2.3 Écriture complexe de certaines symétries

La symétrie par rapport à l'axe réel est la transformation qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\overline{z}$.

De même la transformation complexe $z\mapsto -z$ est associée à la symétrie par rapport à l'origine et la transformation complexe $z\mapsto -\overline{z}$ est associée à la symétrie par rapport à l'axe imaginaire.

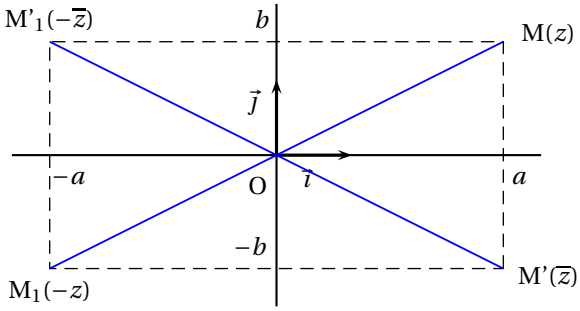


FIGURE VII.3 – Nombres complexes et symétries

VII.2.4 Coordonnées polaires

Un point M, distinct de l'origine peut-être repéré par ses coordonnées rectangulaires (a,b) ou par ces coordonnés polaires (r,θ).

Dire que M a pour coordonnées rectangulaires (a,b) signifie que $\overrightarrow{OM}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$.

Dire que M a pour coordonnées polaires (r,θ) signifie que $OM=r$ et $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta\,(\text{mod}\,2\pi)$. Le schéma ci-dessous résume les règles de passage d'un système de coordonnées à l'autre.

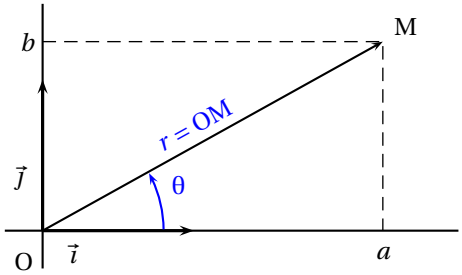


FIGURE VII.4 – Coordonnées polaires

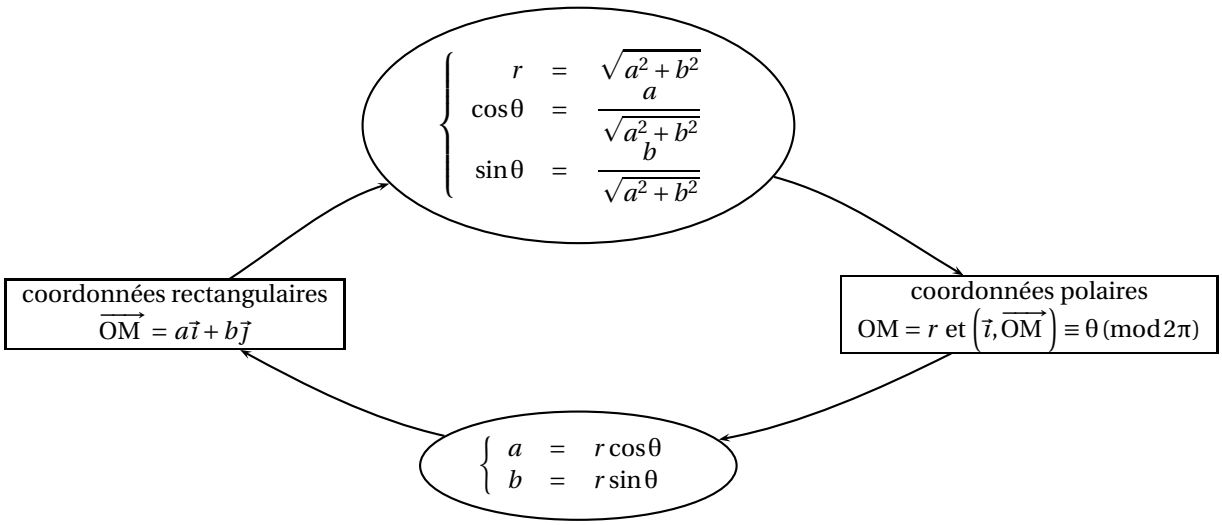


FIGURE VII.5 – Formules de conversions coordonnées polaires ⟷ coordonnées rectangulaires

VII.2.5 Module et arguments

VII.2.5.a Module d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.2.1 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + ib$.

On appelle *module* de z le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarques

1. *Pour tout nombre complexe z, on a : $|z|^2 = z\overline{z}$.*

2. *Pour $b = 0$, on a : $z = a$ et $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$; le module étend à $\mathbb{C}$ la fonction valeur absolue.*

Exemple *Pour $z = 2+3i$, on a : $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ et $z\overline{z} = (2+3i)(2-3i) = 2^2+3^2 = 13$*

THÉORÈME VII.2.1

Pour tout nombre complexe z, on a : $|z| = 0 \iff z = 0$

Démonstration $|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff z\overline{z} = 0 \iff (z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0) \iff z = 0$. □

VII.2.5.b Arguments d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION VII.2.2 ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle *argument* de z toute mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques

1. *Si θ et θ' sont deux arguments de z alors $\theta' = \theta + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

2. *On note :* $\arg(z) = \theta + k2\pi$ *(avec $k \in \mathbb{Z}$) ou* $\arg(z) \equiv \theta \,(\text{mod}\, 2\pi)$.

3. *Dire qu'un nombre complexe z a pour module r et pour argument θ signifie que l'image de z dans le plan complexe a pour coordonnées polaires (r, θ).*

VII.2.5.c Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + ib$; de module r, d'argument θ et M son image dans le plan complexe. On sait que : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
Donc : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

DÉFINITION VII.2.3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle *forme trigonométrique* de z l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemples $1+i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ *et* $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

Remarques

1. *On passe de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul de la même façon qu'on transforme des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires (cf. figure §VII.5 page 82) ;*

2. *Soit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *;*

- *si* $r > 0$ *alors la forme trigonométrique de* z *est* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ *;*
- *si* $r < 0$ *alors la forme trigonométrique de* z *est* $z = -r\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Exemple *La forme trigonométrique de* $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ *est :* $2\left(\cos -\dfrac{5\pi}{6} + i\sin -\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

On déduit de l'étude menée §VII.2.4 que deux nombres complexes non nuls ont même argument (modulo 2π) et même module si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Le théorème VII.1.2 permet alors d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.

VII.3 Propriétés algébriques

VII.3.1 Propriétés du conjugué

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition VII.1.3 p. 78.

THÉORÈME VII.3.1

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$.

(1) $\overline{\overline{z}} = z$; **(2)** $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$;
(3) $z + \overline{z} = 2\Re\mathrm{e}(z)$; **(4)** $z - \overline{z} = 2i\Im\mathrm{m}(z)$;
(5) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$; **(6)** z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$;

Exemples

1. $\overline{\overline{3+2i}} = \overline{3-2i} = 3+2i$
2. $(-3+2i) + (-3-2i) = -6$
3. $(-3+2i)\overline{(-3-2i)} = (-3)^2 - (-4) = 13$
4. $(-3+2i) - (-3-2i) = 4i$

THÉORÈME VII.3.2

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$;
(3) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
(4) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}\ (z \neq 0)$;
(5) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}\ (z \neq 0)$;
(6) $\overline{z^n} = \overline{z}^n\ (z \neq 0)$;

Démonstration Introduisons les formes algébriques de z et z' : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
On en déduit immédiatement **(1)** et **(2)**.
(3) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$;
donc : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
(4) Pour $z \neq 0$, on a : $z \times \dfrac{1}{z} = 1 \iff \overline{z \times \dfrac{1}{z}} = 1 \iff \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1 \iff \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = 1 \iff \overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
donc : $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
(5) Pour $z \neq 0$, on a : $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \times \dfrac{1}{z}} = \overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;
(6) Pour $n > 0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(3)**.
Pour $n < 0$ on a $-n > 0$ et donc : $\overline{z^n} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{-n}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{-n}}} = \dfrac{1^{-n}}{\overline{z}^{-n}} = \left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^{-n} = \overline{z}^n$ □

VII.3.2 Propriétés du module et des arguments

THÉORÈME VII.3.3

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire)*

(2) $|zz'| = |z|\times|z'|$ *et* $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z') \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ *et* $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(4) $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ *et* $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z')-\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(5) $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

Démonstration

(1) L'inégalité triangulaire se déduit de l'interprétation géométrique de $|z+z'|$.

Introduisons les formes trigonométriques de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

(2) On a : $\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\cos\theta'-\sin\theta)\right] \\ &= rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)\end{aligned}$

On en déduit la propriété.

(3) On a : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{r}{r^2}(\cos\theta - i\sin\theta) = \dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)$.

On en déduit la propriété.

(4) On a : $\begin{aligned} \dfrac{z'}{z} &= z'\times\dfrac{1}{z} = r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right) \\ &= \dfrac{r'}{r}\left[\left(\cos\theta'\cos(-\theta)-\sin\theta'\sin(-\theta)\right)+i\left(\cos\theta'\sin(-\theta)+\sin\theta'\cos(-\theta)\right)\right] \\ &= \dfrac{r'}{r}\left(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta)\right).\end{aligned}$

On en déduit la propriété.

(5) Pour $n=0$, la propriété est immédiate.

Pour $n>0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(2)**.

Pour $n<0$ on a $-n>0$ et donc, d'après **(3)** : $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} = \dfrac{1}{r^{-n}\left(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right)} = r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$.

On en déduit la propriété. □

Remarques

1. *Le module est utilisé pour définir la distance entre deux nombres complexes. La distance entre z et z' est $|z'-z|$.*

2. *On dira qu'une suite (z_n) de nombres complexes converge vers un nombre complexe ℓ si la distance entre z_n et l tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; c'est-à-dire si la suite réelle de terme général $|z_n-\ell|$ converge vers 0.*

3. *En particulier une suite géométrique de terme général : $z_n = w\times q^n$ ($w\in\mathbb{C}$ et $q\in\mathbb{C}$) converge vers 0 si et seulement si $|q|<1$, en effet : $|z_n| = |w|\times|q|^n$.*

On démontre, comme dans $\mathbb{R}$, que pour $|q|<1$, la suite de terme général : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(wq^k\right)$; converge vers : $\dfrac{w}{1-q}$.

VII.3.3 Formule de MOIVRE (complément)

Pour $r=1$ dans l'identité (5) du théorème VII.3.3, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.3.4 **FORMULE DE MOIVRE** [1]

Pour tout nombre réel θ et tout nombre entier relatif n, on a :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Exercice VII.3.1. ***Déterminer la forme algébrique de : $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003}$.***

Solution *On a :* $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2003} = \cos\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Or : $\dfrac{2003}{3}\pi = \dfrac{2004-1}{3}\pi = \dfrac{6\times334-1}{3}\pi = 334\times2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

Donc : $z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

1. MOIVRE (ABRAHAM DE) *Vitry-le-François 1667 - Londres 1754,* mathématicien britannique d'origine française. Il précisa les principes du calcul des probabilités et introduisit la trigonométrie des quantités imaginaires, énonçant implicitement la formule qui porte son nom.

Remarque *Depuis la rentrée de septembre 2001, la formule de* MOIVRE *n'est plus au programme de Terminale S.*

VII.4 Notation exponentielle

VII.4.1 Une équation différentielle

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(t)+i\sin(t). \end{array}$$

Soit t un nombre réel. Les fonctions cos et sin sont dérivables en t et ont respectivement pour nombre dérivés $-\sin(t)$ et $\cos(t)$; il existe donc deux fonctions ε_r et ε_i telles que : $\lim\limits_0 \varepsilon_r = \lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$; et pour tout réel h :

$$\cos(t+h) = \cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h); \tag{VII.1}$$
$$\sin(t+h) = \sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h). \tag{VII.2}$$

Introduisons la fonction ε de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$. On a : $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2}$; donc par produit et somme des limites puis par composition par la fonction racine carrée : $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$. De plus, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \cos(t+h) + i\sin(t+h) \\ &= (\cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h)) + i\,(\sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h)) \\ &= f(t) + h\big(-sin(t) + i\cos(t)\big) + h\big(\varepsilon_r(h) + i\varepsilon_i(h)\big) \\ &= f(t) + hif(t) + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction : if. On a donc :

$$f' = if \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale dont la solution formelle est la fonction,

$$f : t \longmapsto \mathrm{e}^{it}.$$

Notation Pour tout nombre réel θ, on convient de noté $\mathrm{e}^{i\theta}$, le nombre complexe d'argument θ et de module 1. On a donc : $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

VII.4.2 Définitions et propriétés

DÉFINITION VII.4.1 FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle *forme exponentielle* de z l'écriture : $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Exemples

1. $1 = e^{i0}$;
2. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;
3. $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;
4. $-1 = e^{i\pi}$;
5. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;
6. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

Remarque *Pour tous nombres réels r et θ :* $\left|re^{i\theta}\right| = |r| \times \left|e^{i\theta}\right| = |r|$.

Sous forme exponentielle, le théorème VII.3.3 s'écrit de la façon suivante.

THÉORÈME VII.4.1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls de forme exponentielle : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$; et n un entier relatif, on a :

(1) $\left|z+z'\right| \leqslant r+r'$;
(2) $zz' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$;
(3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$;
(4) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}\mathrm{e}^{i(\theta'-\theta')}$;
(5) $z^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$.

VII.4.3 Forme exponentielle et symétries usuelles

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de l'étude menée §VII.2.3. p. 81

THÉORÈME VII.4.2

Soit z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$.
Les formes exponentielles de $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ sont :
$\overline{z} = re^{-i\theta}$; $-z = re^{i(\theta+\pi)}$; $-\overline{z} = re^{i(\pi-\theta)}$.

Exemple *Pour $z = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on obtient : $\overline{z} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$; $-z = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et $-\overline{z} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.*

VII.4.4 Formules d'EULER

D'après les formules (2) et (5) théorème VII.3.1, on a pour tout nombre complexe z :
$\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
En particulier pour $z = e^{i\theta}$, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.4.3 FORMULES D'EULER [2]

Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

VII.4.5 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carrée d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.
Par exemple 2 a deux racines carrées : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; -1 a également deux racines carrées : i et $-i$.
L'écriture $\sqrt{Z}$ n'a de sens que si Z est un *réel positif*.

THÉORÈME VII.4.4

Soit Z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $Z = re^{i\theta}$.
z a exactement deux racines complexes : $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Démonstration Les racines carrées de Z, sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^2 = Z$.
On remarque que le nombre $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ est solution de (E), en effet : $z_1^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{i\theta} = Z$; donc :
(E) $\iff z^2 = z_1^2 \iff z^2 - z_1^2 = 0 \iff (z-z_1)(z+z_1) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ; Z a donc exactement deux racines carrées : z_1 et $z_2 = -z_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$. □

Remarques

1. *0 n'a qu'une racine carrée : 0.*

2. *Les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposées.*

3. *Le théorème VII.4.4 permet d'obtenir les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme exponentielle ; une méthode permettant de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique est proposée §VII.6.4.*

VII.5 Nombres complexes et polynômes (compléments)

Dans cette partie l'étude des démonstrations est facultative.

2. EULER (LEONHARD) *Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783,* mathématicien suisse. Il fut, au XVIIIe siècle, le principal artisan de l'essor de l'analyse, qu'il réorganisa autour du concept fondamental de fonction. Il exerça son inventivité dans de nombreux domaines de la physique mathématique.

VII.5.1 Théorème fondamental de l'algèbre

THÉORÈME VII.5.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit P un polynôme à coefficients complexes et α un nombre complexe.
α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z).$$

Démonstration Si, pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; alors, pour $z = \alpha$, on obtient : $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$; et donc α est racine de P.
Réciproquement, démontrons que si α est racine de P alors il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
Si P est le polynôme nul, l'implication est immédiate car n'importe quel polynôme Q convient ; nous supposons désormais le polynôme P non nul.
P est alors défini par une expression du type : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ (avec $a_n \neq 0$).
On introduit donc le polynôme T défini par : $T(z) = P(z+\alpha)$. T est la composée d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré n, T est donc un polynôme de degré n. Il est par conséquent défini par une expression du type : $T(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$.
Or : $T(0) = P(0+\alpha) = 0$; donc : $b_0 = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \quad T(z) = z\left(b_n z^{n-1} + \ldots + b_1\right)$.
On en déduit que pour tout nombre complexe z : $P(z) = T(z-\alpha) = (z-\alpha)\underbrace{\left(b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1\right)}_{Q(z)}$.
la propriété est alors démontrée est introduisant le polynôme Q défini par : $Q(z) = b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1$. □

Le lemme suivant est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

LEMME VII.5.2

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n a au plus n racines distinctes.

Démonstration Raisonnons par récurrence sur le degré de P.
Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 0 est un polynôme constant non nul, il n'a donc pas de racine et la propriété est démontrée pour $n = 0$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que si pour un certain entier naturel k, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à k a au plus k racines distinctes, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $k+1$ a au plus $k+1$ racines distinctes.
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$ ayant plus de $k+1$ racines distinctes et soit α l'une d'elle. On aura pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. P ayant plus de $k+1$ racines distinctes, Q a plus k racines distinctes et d'après l'hypothèse de récurrence, Q est donc le polynôme nul ; d'où, par produit, P est le polynôme nul.
Donc, par récurrence, un polynôme non nul de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines distinctes. □

THÉORÈME VII.5.3

(1) Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
(2) Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes sont égaux.

Démonstration (1) est une conséquence immédiate de lemme précédent.
(2) Si P et T sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes alors P-T est un polynôme degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines distinctes ; donc d'après le lemme, P – T est le polynôme nul ; d'où : P = T. □

VII.5.2 Résolution des équations du second degré

VII.5.2.a Factorisation d'un trinôme du second degré

On se propose de factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = az^2 + bz + c$
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
Procédons, comme en classe de Première dans la cas réel, en utilisant la forme canonique. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) && \text{, car } a \neq 0 \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

On introduit le nombre Δ, appelé *discriminant* de l'équation ou du trinôme, défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta = 0$, alors : $P(z) = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$.
Si $\Delta \neq 0$ et on introduit δ une racine carrée complexe de Δ. On a alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{(2a)^2}\right] \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) \\ &= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

On déduit de cette étude le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.4

(1) Tout trinôme du second degré à coefficients complexes peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

(2) Les racines du polynôme d'indéterminée z : az^2+bz+c ;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a\neq 0$, sont :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est l'une des deux racines carrées complexes du discriminant : $\Delta=b^2-4ac$.
On a alors la factorisation :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

Remarques

1. *Les racines carrées de Δ sont δ et $-\delta$, donc remplacer δ par $-\delta$ ne fait qu'échanger z_1 et z_2.*

2. *Lorsque $\Delta=0$ les racines carrées du discriminant sont égales et on a : $z_1=z_2$.*

3. *Lorsque $\Delta\neq 0$, on a : $z_1\neq z_2$.*

Exercice VII.5.1. ***1. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $2i$.***

2. Factoriser le trinôme : $P(z)=(1-i)z^2-\sqrt{2}z+\frac{1}{2}$.

Solution 1. *On a :* $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=(1+i)^2$;

Les racines carrées complexes de $2i$ sont donc : $1+i$ et $-1-i$.

2. *Le discriminant du trinôme est :* $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(1-i)\times\frac{1}{2}=2i=(1+i)^2$;

il admet donc deux racines : $z_1=\frac{\sqrt{2}+(1+i)}{2(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)+(1+i)^2}{2(1^2+1^2)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)+2i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et $z_2=\frac{\sqrt{2}-(1+i)}{2(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)-2i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{-2+\sqrt{2}}{4}$.

Donc : $P(z)=(1-i)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{-2+\sqrt{2}}{4}\right)$ □

VII.5.2.b Résolution d'équations du second degré

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z, (E) : $az^2+bz+c=0$;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a\neq 0$.
Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; on a :
$az^2+bz+c=0\iff a(z-z_1)(z-z_2)=0\iff(z=z_1 \quad \text{ou} \quad z=z_2)$.
On en déduit que lorsque $\Delta=0$, l'équation admet une solution double : $z=-\frac{b}{2a}$.
Lorsque $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.

Exemples

1. ***Exercice VII.5.2.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z+3=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times 2\times 3=-15=\left(i\sqrt{15}\right)^2$ *; donc :* $S=\left\{\frac{-3-i\sqrt{15}}{4};\frac{-3+i\sqrt{15}}{4}\right\}$.

2. ***Exercice VII.5.3.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z-1=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times 2\times(-1)=17=\left(\sqrt{17}\right)^2$ *; donc :* $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

VII.5.2.c Somme et produit de racines

Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; pour tout nombre complexe z on a :

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2) = az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2$$

On en déduit, par identifications, que : $b=-a(z_1+z_2)$ et $c=az_1z_2$.
D'où l'on tire le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.5

Soit az^2+bz+c un trinôme du second degré ($a\neq 0$), S la somme et P le produit des racines. On a :

$$\mathrm{S}=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}=\frac{c}{a}$$

Exemple *Exercice VII.5.4.* ***Résoudre : $3z^2+4z-1=0$.***

On remarque que 1 est solution évidente, on sait que le produit des solutions dans $\mathbb{C}$ est $-\frac{1}{3}$ donc l'autre solution est : $-\frac{1}{3}$; d'où : $S=\left\{1;-\frac{1}{3}\right\}$

VII.6 Utilisation des nombres complexes (compléments)

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel tel que : $n\geqslant 2$.

VII.6.1 Racines n-ièmes de l'unité

On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant : $z^n=1$.
Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les racines du polynôme de degré n : z^n-1 ;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de l'unité distinctes.
Pour tout entier k le nombre $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$ est racine n-ième de l'unité ; en effet : $\left(\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{ik2\pi}=1$.
De plus deux entiers k et k' génèrent la même racine si et seulement si $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}=\mathrm{e}^{k'i\frac{2\pi}{n}}$; c'est-à-dire : $\mathrm{e}^{i2\pi\frac{k-k'}{n}}=1$;
ce qui signifie que $k-k'$ est multiple de n c'est-à-dire que k et k' ont le même reste par la division par n. Or les restes possibles par la division par n sont les entiers compris entre 0 et $n-1$; on obtient donc toute les racines n-ièmes de l'unité en faisant varié k de 0 à $n-1$.
Sur la figure ci-contre, pour tout k, M_k est le point d'affixe $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$.
Si z est une racine n-ième de l'unité, alors $\overline{z}^n=\overline{z^n}=\overline{1}=1$; donc $\overline{z}$ est également une racine n-ième de l'unité. On en déduit qu'à part 1 et éventuellement -1 (lorsque n est pair) les racines n-ièmes de l'unité sont deux à deux conjuguées.
Lorsqu'on effectue la somme des racines n-ièmes de l'unité, on obtient : $\mathrm{S}=1+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3+\cdots+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc :
$\mathrm{S}=\dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}=0$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

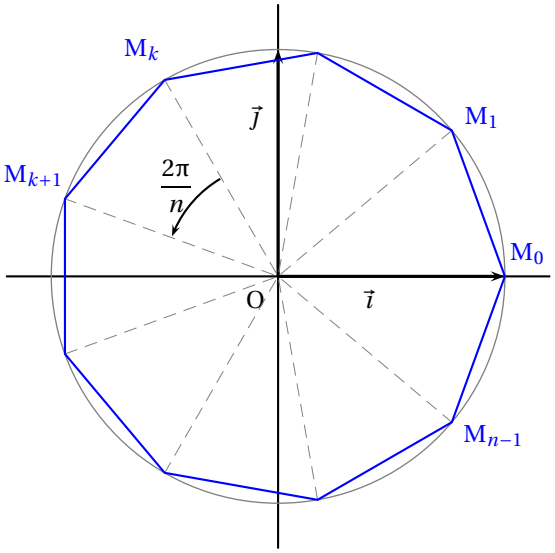


FIGURE VII.6 – Racines n-ièmes de l'unité

VII.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soit Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^n=\mathrm{Z}$.
Les racines n-ièmes de Z sont donc les racines du polynôme de degré n : $z^n-\mathrm{Z}$;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de Z distinctes.
Soit r le module et θ un argument de Z. Posons : $w=\dfrac{z}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}}$. On a donc : $z=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}w$. On en déduit que : $z^n=\mathrm{Z} \iff \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n w^n=\mathrm{Z} \iff \mathrm{Z}w^n=\mathrm{Z} \iff w^n=1$ (car $\mathrm{Z}\neq 0$.
z est donc racine n-ième de Z si et seulement si w est racine n-ième de l'unité. On sait qu'il y a n racines n-ième de

l'unité distinctes, il y donc également n racines n-ième de Z distinctes, ce sont les nombres de la forme : $\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\,w$ où w est une racine n-ième de l'unité. Les racines n-ième de Z sont donc les nombres de la forme :

$$\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \qquad (\text{avec } k\in\mathbb{Z}).$$

On établi de la même façon qu'en VII.6.1 que la somme des racines n-ièmes de Z est nulles.

Exercice VII.6.1. ***Déterminer les racines quatrièmes de*** $1+i$.

Solution *On a :* $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *; donc :* $\left(\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}\right)^4=1+i$. *On sait que les racines quatrièmes de l'unité sont :* 1 *;* i *;* -1 *et* $-i$ *; les racines quatrièmes de* $1+i$ *sont donc :* $\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $i\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $-\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *et* $-i\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *; c'est-à-dire :*

$$\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}\,.$$

□

VII.6.3 Polynômes

VII.6.3.a Factorisation de polynômes symétriques

Considérons le polynôme : $2z^3+3z^2+3z+2$;
on observe une symétrie dans les coefficients : 2 ; 3 ; 3 ; 2.
On dit que le polynôme est symétrique.

Plus généralement un polynôme de degré n : $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$;
est dit symétrique lorsque pour tout entier naturel k ($k\leqslant n$), on a : $a_k=a_{n-k}$.

Exercice VII.6.2. ***On se propose de factoriser, dans*** $\mathbb{C}$ ***puis dans*** $\mathbb{R}$***, le polynôme P défini par :***

$$P(z)=4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4.$$

1. a. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son conjugué*** $\overline{\alpha}$ ***est également racine de P.***

b. 0 est-il racine de P ?

c. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son inverse*** $\frac{1}{\alpha}$ ***est également racine de P.***

2. a. Calculer $P(2i)$.

b. En déduire trois autres racines de P.

c. Décomposer P en produit d'un facteur de degré 4 par un facteur de degré 2.

3. a. Factoriser le polynôme : $Q(z)=z^2+z+1$.

b. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de six facteurs de degré 1 à coefficients complexes.***

c. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de trois facteurs de degré 2 à coefficients réels.***

Solution 1. a. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; on a donc :* $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $\overline{P(\alpha)}=0$.

$$\begin{aligned}\text{Or : }\overline{P(\alpha)} &= \overline{4\alpha^6+4\alpha^5+21\alpha^4+17\alpha^3+21\alpha^2+4\alpha+4}\\ &= 4\overline{\alpha^6}+4\overline{\alpha^5}+21\overline{\alpha^4}+17\overline{\alpha^3}+21\overline{\alpha^2}+4\overline{\alpha}+4\\ &= 4\overline{\alpha}^6+4\overline{\alpha}^5+21\overline{\alpha}^4+17\overline{\alpha}^3+21\overline{\alpha}^2+4\overline{\alpha}+4\\ &= P\left(\overline{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son conjugué* $\overline{\alpha}$ *est également racine de P.*

b. $P(0)=4$ *et* $4\neq 0$ *; donc 0 n'est pas racine de P.*

c. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; d'après* ***1.a.****, on a donc :* $\alpha\neq 0$ *; et donc* $\frac{1}{\alpha}$ *est défini.*

$$\begin{aligned}\text{De plus : } P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+17\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)+4\\ &= 4\frac{1}{\alpha^6}+4\frac{1}{\alpha^5}+21\frac{1}{\alpha^4}+17\frac{1}{\alpha^3}+21\frac{1}{\alpha^2}+4\frac{1}{\alpha}+4\\ &= \frac{1}{\alpha^6}\left(4+4\alpha+21\alpha^2+17\alpha^3+21\alpha^4+4\alpha^5+4\alpha^6\right)\\ &= \frac{P(\alpha)}{\alpha^6}\end{aligned}$$

Or : $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son inverse* $\frac{1}{\alpha}$ *est également racine de P.*

2. a. *Calculons* $P(2i)$.

$$\begin{aligned} P(2i) &= 4(2i)^6+4(2i)^5+21(2i)^4+17(2i)^3+21(2i)^2+4(2i)+4 \\ &= 4\times 64\times(-1)+4\times 32\times i+21\times 16\times 1+17\times 8\times(-i)+21\times 4\times(-1)+4\times 2i+4 \\ &= -256+128i+336-136i-84+8i+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{2i}$ ***est racine de P.***

b. $2i$ *est racine de P, donc son conjugué,* $-2i$ *et son inverse,* $-\dfrac{i}{2}$ *sont également racines de P ;* $-\dfrac{i}{2}$ *est racine de P, donc son conjugué,* $\dfrac{i}{2}$ *est également racine de P.*

Les nombres $\mathbf{2i}$, $\mathbf{-2i}$, $\dfrac{i}{2}$ ***et*** $-\dfrac{i}{2}$ ***sont racines de P.***

c. *P est un polynôme de degré 6 admettant* $2i$ *pour racine, donc d'après le théorème fondamental de l'algèbre, il existe un polynôme* Q_1*, de degré 5, tel que pour tout nombre complexe z :* $P(z)=(z-2i)Q_1(z)$.
On sait que : $P(-2i)=0$ *et* $-2i$ *n'est pas racine de* $(z-2i)$ *donc* $-2i$ *est racine* Q_1*. Il existe donc un polynôme* Q_2*, de degré 4, tel que pour tout nombre complexe z :* $Q_1(z)=(z+2i)Q_2(z)$ *; soit :* $P(z)=(z-2i)(z+2i)Q_2(z)$.

En réitérant le procédé pour $\dfrac{i}{2}$ *et* $-\dfrac{i}{2}$*, on en déduit qu'il existe un polynôme* Q_4*, de degré 2, tel que pour tout nombre complexe z :* $P(z)=(z-2i)(z+2i)(z-\dfrac{i}{2})(z+\dfrac{i}{2})Q_4(z)$.

Posons : $Q=\dfrac{1}{4}Q_4$.

On a alors pour tout z de $\mathbb{C}$ *:*
$$\begin{aligned} P(z) &= 4(z-2i)(z+2i)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})Q(z) \\ &= (z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)Q(z) \\ &= (z^2+4)(4z^2+1)Q(z) \\ &= (4z^4+17z^2+4)Q(z) \end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $Q(z)$ *deux méthode s'offrent à nous, on peut procéder par identification ou effectuer la division euclidienne de* $4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4$ *par* $4z^4+17z^2+4$.

1re méthode

Q est un polynôme de degré 2, il a donc une expression de la forme : $Q(z)=az^2+bz+c$.
On a donc pour tout z de $\mathbb{C}$ *:*
$$\begin{aligned} 4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4 &= \left(4z^4+17z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= 4az^6+4bz^5+(4c+17a)z^4+17bz^3+(17c+4b)z^2+4bz+4c \end{aligned}$$

Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs, ils sont donc égaux et par conséquent ils ont les mêmes coefficients ; a, b et c sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 4a & & & = & 4 \\ & 4b & & = & 4 \\ 17a & & +4c & = & 21 \\ & 17b & & = & 17 \\ & 4b & +17c & = & 21 \\ & 4b & & = & 4 \\ & & 4c & = & 4 \end{cases}$$

Le sous-système constitué de la 1re, la 2e, la 4e, la 6e et la 7e équation a pour unique solution : $a=b=c=1$ *; et cette solution est également solution des deux équations restantes, donc Q est le polynôme défini par :* $Q(z)=z^2+z+1$.
Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$ *:* $\mathbf{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

2e méthode

Effectuons la division euclidienne de $P(z)$ *par* $4z^4+17z^2+4$.

$4z^6$	$+4z^5$	$+21z^4$	$+17z^3$	$+21z^2$	$+4z$	$+4$	$4z^4+17z^2+4$
	$4z^5$	$+4z^4$	$+17z^3$	$+17z^2$	$4z$	$+4$	z^2+z+1
		$4z^4$		$+17z^2$		$+4$	
						0	

Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$ *:* $\mathbf{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

3. a. *Le discriminant de Q est :* $\Delta=1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ *;*
les racines de Q sont donc : $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\overline{j}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, le coefficient de degré 2 de Q est 1, on en déduit que pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$Q(z)=\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b. *D'après **2.c.** et **3.a.**, on a donc pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z)=(z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

c. *En effectuant le produit des facteurs dont les coefficients sont conjugués, on obtient alors pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z)=(z^2+4)(4z^2+1)\left(z^2+z+1\right).$$

□

On remarque que 0 n'est jamais racine d'un polynôme symétrique de degré n : $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$;
car : P(0) = $a_0 = a_n$ et $a_n \neq 0$.

Pour déterminer les racines d'un polynôme symétrique à coefficients réels, on peut combiner deux propriétés :

1. Si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie que l'image de l'ensemble des racines de P est symétrique par rapport à l'axe réel.
2. Si α est racine de P, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie, en utilisant la propriété précédente, que l'ensemble des racines de P est invariant par la transformation du plan complexe privé de l'origine qui à tout point M d'affixe d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{1}{\overline{z}}$.
   Cette transformation est une inversion de pôle O et de puissance 1, on la rencontrera peut-être dans un exercice de géométrie.

On déduit de ces deux propriétés que si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ sont également racines de P. Ce qui permet, lorsque $\Im m(\alpha)\neq 1$ et $|\alpha|\neq 1$, de faire apparaître dans P quatre facteurs de degré 1.

VII.6.3.b factorisation de $x^n - y^n$

EN PROJET

VII.6.4 Forme algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe non nul de forme algébrique : Z = A + iB ; on se propose de déterminer la forme algébrique des racines carrées complexes de Z. On cherche donc les nombres z de forme algébrique : $z = a + ib$; tels que : $z^2 = Z$.

On remarque que : $|z|^2 = |Z|$; les couples $(a;b)$ cherchés sont donc les solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & |Z| \\ a^2-b^2 & = & \Re e(Z) \\ 2ab & = & \Im m(Z) \end{array}\right.$

Pour résoudre ce système on utilise les deux premières équations pour déterminer a^2 et b^2, puis on se sert de la dernière pour déterminer les signes relatifs de a et b.

Exemples

1. *Exercice VII.6.3.* ***Déterminer les racines carrées complexes de $2+3i$.***

On a : $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a+ib$; on a : $z^2 = (a^2-b^2)+i(2ab)$ *et* $|z|^2 = a^2+b^2$.

z est racine carrée de $2+3i$ si et seulement si $(a;b)$ est solution du système : (Σ) $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & \sqrt{13} \\ a^2-b^2 & = & 2 \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right.$.

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & \sqrt{13}+2 \\ 2b^2 & = & \sqrt{13}-2 \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}+2}{2} \\ b^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}-2}{2} \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. .$$

On a donc : $\left(a=\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\ ou\ a=-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\right)$ *et* $\left(b=\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\ ou\ b=-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$ *et a et b sont de même signe.*

Les racines carrées de $2+3i$ sont donc : $z=\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$;

et son opposé : $-z = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$.

2. ***Exercice VII.6.4.*** ***Déterminer*** $\cos\dfrac{\pi}{8}$ ***et*** $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

$e^{i\frac{\pi}{8}}$ *est une racine carrée de* $e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et :* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *; donc :*

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8} &= 1 \\ \cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \text{soit } 2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } 2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

d'où : $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

On sait de plus que : $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *; donc :* $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ *;*

d'où : $\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ *et* $\boldsymbol{\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

VII.6.5 Trigonométrie

L'exponentielle complexe permet de retrouver assez rapidement beaucoup de formules de trigonométrie. Cette partie du cours donne quelques exemples de façons de procéder.

VII.6.5.a Détermination de lignes trigonométriques particulières

Exercice VII.6.5. ***Déterminer les lignes trigonométriques de*** $\dfrac{\pi}{12}$.

Solution *On a :* $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ *; donc :*

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ ; on en déduit que :}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \Re e\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \Im m\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} ;$$

d'où :
$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}. \square$$

VII.6.5.b Formules usuelles de trigonométrie

Dérivées

D'un point de vue formel la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{it}$ est la fonction $t \mapsto ie^{it}$, or pour tout nombre réel t, on a : $ie^{it} = -\sin(t) + i\cos(t)$. On retrouve ainsi facilement que la dérivée de cos est $-\sin$ et que la dérivée de sin est cos.

Transformation de produit en somme

Les formules transformations de produit en somme sont très faciles à retrouver.
Soit a et b deux nombres réels, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \cos a\cos b &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\cdot\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right). \end{aligned}$$

On retrouve donc :

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

Transformation de somme en produit

Les formules transformations de somme en produit sont également très faciles à retrouver. Soit p et q deux nombres réels, on a d'une part : $e^{ip}+e^{iq} = (\cos p+\cos q)+i(\sin p+\sin q)$; d'autre part en remarquant que :

$p=\dfrac{p+q}{2}+\dfrac{p-q}{2}$ et $q=\dfrac{p+q}{2}-\dfrac{p-q}{2}$; il vient :
$\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}=\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=2\left(\cos\dfrac{p+q}{2}+i\sin\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\dfrac{p-q}{2}$.
En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

VII.6.5.c Linéarisation de polynômes en cos x et en sin x

VII.6.5.d Exercices divers

Exercice VII.6.6. ***Soit α un nombre réel. On considère la suite $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$\mathrm{C}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)}{2^k}.$$

Exprimer C_n, pour $n\in\mathbb{N}$, sans signe somme. En déduire la limite de la suite (C_n).

Solution *Il suffit d'introduire la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\sin(k\alpha)}{2^k}$.*

On a alors, pour $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)+i\sin(k\alpha)}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ik\alpha}}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}\right)^k.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc :

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\frac{1-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}}{1-\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}}=\frac{\left(1-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)}=\frac{1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}+\frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{2^{n+2}}}{1-\cos\alpha+\frac{1}{4}};$$

d'où :

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\frac{\left[4-2\cos\alpha-\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right]+i\left[2\sin\alpha-\frac{\sin\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\sin\left(n\alpha\right)}{2^n}\right]}{5-4\cos\alpha}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{C}_n=\Re\mathrm{e}\left(\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n\right)=\frac{4-2\cos\alpha-\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}}{5-4\cos\alpha}.$$

On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\text{et}\qquad\left|\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n};$$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ *; donc par comparaison :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}=0.$$

Par somme puis par quotient on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{C}_n=\frac{4-2\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}.$$

□

VII.7 Géométrie et nombres complexes

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

VII.7.1 Propriétés générales

THÉORÈME VII.7.1

Soit A, B, C, D (A ≠ B et C ≠ D) quatre points d'affixes respectives : z_A ; z_B ; z_C ; z_D ; θ un réel et r un réel strictement positif. les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) $CD = r\,AB$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \theta \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(2) $z_D - z_C = r\,e^{i\theta}(z_B - z_A)$

(3) $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\,e^{i\theta}$

Démonstration On sait que A ≠ B, donc : **(2)** ⟺ **(3)**.

Démontrons que : **(3)** ⟺ **1**. $z_D - z_C$ et $z_B - z_A$ sont les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$; donc : $CD = |z_D - z_C|$ et $AB = |z_B - z_A|$.

De plus, d'après la relation de CHASLES sur les angles de vecteur : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{i},\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$;

d'où : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)\,(\text{mod}\, 2\pi)$. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et mêmes arguments, donc :

$$\textbf{(3)} \iff \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = r \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \theta\,(\text{mod}\, 2\pi).$$

En utilisant la propriété **(4)** du théorème VII.3.3 page 84, on en déduit que :

$$\textbf{(3)} \iff \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = r \quad \text{et} \quad \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_)) \equiv \theta\,(\text{mod}\, 2\pi).$$

D'où il vient : **(3)** ⟺ **(1)**. □

VII.7.2 Écriture complexe de quelques transformations usuelles

Dans le tableau VII.2, pour chaque transformation, M désigne un point d'affixe z et M' désigne l'image de M. L'écriture complexe exprime l'affixe de M' en fonction de celle de M.

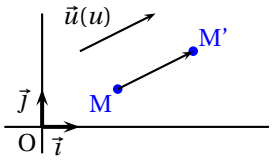
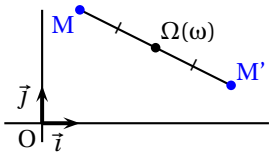
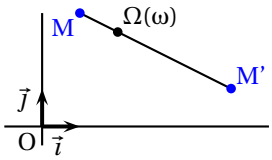
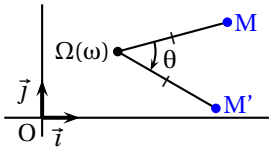
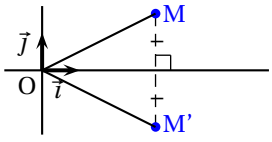
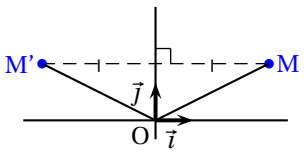
Transformation	M a pour image M'	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(u)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$ $u \in \mathbb{C}$
Symétrie de centre Ω(ω)		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = -z + 2\omega$ $\omega \in \mathbb{C}$
Homothétie de centre Ω(ω) et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$
Rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
Réflexion par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = \overline{z}$
Réflexion par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{j},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{j},\overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = -\overline{z}$

TABLE VII.2 – Écriture complexe de quelques transformations

VII.7.3 Affixe du barycentre d'un système de points pondérés

On déduit de la définition du barycentre et des propriétés des affixes de vecteurs le théorème suivant.

THÉORÈME VII.7.2

Soit $A_1, A_1, \ldots, A_n$, n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \ldots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme n'est pas nulle.
L'affixe, z_G, du barycentre G du système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Exemples

1. *L'affixe du milieu de [AB] est :* $\dfrac{z_A + z_B}{2}$;
2. *L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est :* $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Chapitre VIII

Intégration

VIII.1 Primitives d'une fonction

VIII.1.1 Introduction

Les intervalles considérés dans cette partie ne sont jamais réduits à un réel.

DÉFINITION VIII.1.1
Soit f une fonction et I un intervalle sur lequel f est définie.
Les primitives de f sur I (s'il en existe) sont les fonctions F définies et dérivables sur I vérifiant pour tout $x \in$ I :

$$F'(x) = f(x).$$

Exemples

1. *Considérons la fonction* $f : x \mapsto x^2$. *Les fonctions* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ *et* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 7$ *sont deux primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction* ln *est une primitive sur* $]0, +\infty[$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.1.1
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

On sait que la dérivée d'une fonction constante définie sur un intervalle est la fonction nulle définie sur cet intervalle.
On sait également que si une fonction définie sur un intervalle a une dérivée nulle alors cette fonction est constante.
On en déduit le lemme suivant.

LEMME VIII.1.2
Soit I un intervalle.
Les primitives sur I de la fonction nulle sont les fonctions constantes définies sur I.

THÉORÈME VIII.1.3
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Démonstration Soit $k \in \mathbb{R}$ et G la fonction définie par : $G(x) = F(x) + k$. G est la somme de deux fonction dérivables sur I, elle donc dérivable sur I et pour tout $x \in$ I, on a : $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$; donc G est une primitive de f sur I.
Réciproquement, soir G une primitive de f sur I, démontrons qu'elle ne diffèrent de F que d'une constante.
Pour tout $x \in$ I, on a : $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$; donc G – F est une primitive sur I de la fonction nulle, on en déduit que G – F est une fonction constante $x \mapsto k$ définie sur I ; d'où : $G = F + k$. □

Exemple *Les primitives sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto x^2$ *sont les fonctions de la forme* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + k$ *(avec* $k \in \mathbb{R}$*).*

Remarque *On déduit du théorème VIII.1.3 que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.*

THÉORÈME VIII.1.4
Soit f un fonction continue sur un intervalle I, $a \in$ I et $b \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur b en a.

Démonstration

Existence Soit G une primitive de f sur I et F la fonction définie par : $F(x) = G(x) - G(a) + b$.
F est une primitive de f sur I et $F(a) = G(a) - G(a) + b = b$.

Unicité Soit H une primitive de f sur I prenant la valeur b en a, démontrons que H = F.
Les fonctions F et H ont le même ensemble de définition : I. De plus ce sont deux primitives sur I de f, elle ne diffèrent donc que d'une constante, k. On a : $k = H(a) - F(a) = b - b = 0$; donc : H = F.

□

Exemple *L'unique primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *prenant la valeur* 7 *en* 10 *est la fonction* $x \mapsto \ln(x) - \ln(10) + 7$.

VIII.1.2 Détermination pratique

En pratique pour déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle, on utilise les tableaux suivants qui sont essentiellement déduits des tableaux du paragraphe VI.1.3.

fonction	primitive	Intervalle
$x \mapsto k \quad (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n < -1$ $\mathbb{R}$ si $n > 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+\tan^2 x$ ou $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$

TABLE VIII.1 – Primitives des fonctions élémentaires

fonction	primitive	remarque
$u+v$	$U+V$	
ku	kU	
$u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < -1$ alors $u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	
$v' \times (u' \circ v)$	$u \circ v$	

TABLE VIII.2 – Primitives et opérations sur les fonctions

Exercice VIII.1.1. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}^\star$ ***de*** $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + \dfrac{5}{x^3}$.

Solution *La fonction* $x \mapsto 2x^3 + 3x^2$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + x^3$ *et la fonction* $x \mapsto x^{-3}$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}^\star$ *la fonction* $x \mapsto -2x^{-2}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}^\star$ *de* $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + \dfrac{5}{x^3}$ *est donc* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 - \dfrac{5}{2x^2}$. □

Exercice VIII.1.2. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}$ ***de*** $x \mapsto \cos(2\pi x) + 5e^{3x}$.

Solution *Une primitive de* cos *est* sin, $x \mapsto \cos(2\pi x)$ *est de la forme* $x \mapsto \cos(ax+b)$ *avec* $a = 2\pi$ *et* $b = 0$; *donc* $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto \cos(2\pi x)$. *De même,* $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x}$ *une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto e^{3x}$; *donc une des primitives sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto \cos(2\pi x) + 5e^{3x}$ *est* $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + \dfrac{5}{3}e^{3x}$. □

Exercice VIII.1.3. ***Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (3x^2-2x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$.***

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^3-2x^2+3x+1$. On a : $f = u'u^{10}$ donc la fonction $\dfrac{u^{11}}{11}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*
Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2-4x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{11}(x^3-2x^2+3x+1)^{11}$. □

Exercice VIII.1.4. ***Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.***

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$. On a : $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ donc la fonction $\dfrac{1}{2}\ln|u|$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\ln u$ (car la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$), est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*
Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. □

VIII.1.3 Exercices

VIII.1.a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^5-\pi x^5+\sqrt{2}x^3-2x^2+3x-\ln 2$.

VIII.1.b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

VIII.1.c. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ de $x \mapsto \dfrac{5}{3x+2}$.

VIII.1.d. Déterminer une primitive sur $\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{5}{3x+2}$.

VIII.1.e. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 100\cos(2x+3)$.

VIII.1.f. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 50\sin(3x+2)$.

VIII.1.g. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5x^2+3x-1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{7}{x^4}$.

VIII.1.h. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{5x^7-2x^4+8x^3-5x^2+6x-1}{x^4}$.

VIII.1.i. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de tan.

VIII.1.j. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin x \cdot \cos x$.

VIII.1.k. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \tan x+\tan^3 x$.

VIII.2 Premiers calculs

VIII.2.1 Introduction

Dans tous ce chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle d'inéquations : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$.

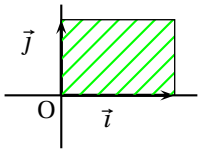


FIGURE VIII.1 –

On se propose d'aborder une théorie qui nous permette de calculer pour une fonction positive, f, définie sur un intervalle $[a,b]$ l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Cette aire sera notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de f de x dé x » ou « somme de a à b de f de x dé x ».
Nous verrons que, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a un sens même si $a>b$ ou si la fonction f n'est pas positive sur entre a et b.

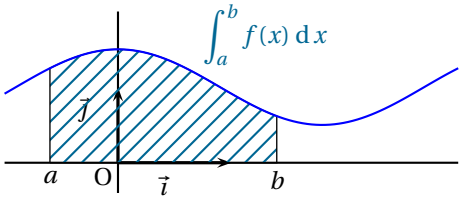


FIGURE VIII.2 –

À travers l'histoire les calculs d'aires ont longtemps occupés les hommes de sciences. LEIBNIZ[1] et NEWTON ont construits, de façons indépendantes et presque simultanées, une théorie de détermination d'aires et de volumes par le calcul intégral.

La construction rigoureuse du calcul intégral dans le cas des fonctions continues fut établie dans la première moitié du XIXe siècle par CAUCHY[2].

1. LEIBNIZ Gottfried Wilhelm savant Allemand 1645-1766.
2. CAUCHY Louis Augustin mathématicien Français 1789-1857.

Au milieu du XIXe siècle RIEMANN [3] généralisa cette théorie à une classe plus grande de fonctions. L'idée de cette théorie consiste à découper la région dont on cherche l'aire en rectangles verticaux et l'aire de la région est alors la limite des sommes des aires des rectangles quand leurs bases tend vers 0. La théorie de l'intégrale actuellement

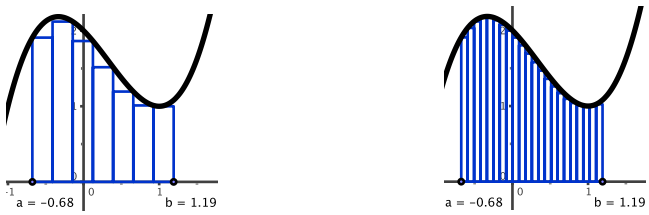
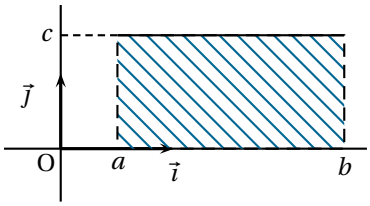


FIGURE VIII.3 – Integrale de Riemann.

utilisée par les mathématiciens est la théorie présentée par LEBESGUE [4] dans la thèse qu'il soutint en 1902. L'exposé de cette théorie requiert généralement un niveau licence. En simplifiant, on peut dire que Lebesgue découpa la région dont on cherche l'aire en tranches horizontales et non verticales, comme l'avait fait Riemann. Là encore, la théorie de Lebesgue étend celle de Riemann à une classe plus grande de fonctions et la communauté mathématique considère cette théorie comme satisfaisante.

VIII.2.2 Intégrale d'une fonction constante



L'intégrale de a à b de la fonction $x \mapsto c$, où a, b, c sont des réels tels que : $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$; est l'aire de la région d'inéquations : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant c \end{cases}$.

Ce nombre est noté : $\int_a^b c \, \mathrm{d}x$.

On a donc :

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a) \tag{VIII.1}$$

Nous étendons la formule (VIII.1) aux cas où c est négatif ou $b < a$.

Exemples

1. *Calculer les intégrales suivantes, puis les illustrer graphiquement.*

$\int_2^7 3 \, \mathrm{d}x$; $\int_7^2 3 \, \mathrm{d}x$; $\int_{-1}^7 -2 \, \mathrm{d}x$; $\int_7^{-1} -2 \, \mathrm{d}x$.

2. *Calculer les intégrales suivantes :* $\int_2^5 \lambda \, \mathrm{d}x$; $\int_2^5 \mathrm{d}x$ *et* $\int_1^t 3 \, \mathrm{d}x$.

Remarque *La variable d'intégration est muette.*

Exemple *Calculer :* $\int_2^7 3 \, \mathrm{d}t$.

VIII.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $[a\,;b]$ un intervalle non réduit à un point. Une subdivision, σ, de $[a\,;b]$ est une suite finie et strictement croissante $x_0 = a$, x_1, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n = b$. Le pas de cette subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$

Exemple

- 1 ; 1,5 ; 2.
- 1 ; 1,3 ; 1,6 ; 2.
- 1 ; 1,3 ; 1,5 ; 1,6 ; 2.

sont des subdivisions de $[1\,;2]$ *de pas respectifs :* 0,5 *;* 0,4 *et* 0,4.

Tout élément de la première subdivision est élément de la troisième, on dit que la troisième est plus fine que la première.

Plus généralemant si σ et σ' sont deux subdivisions d'un intervalle $[a\,;b]$ la subdivision que l'on notera $\sigma \cup \sigma'$, constituée des éléments des deux subdivisions, est une subdivision plus fine que σ et σ'.

3. RIEMANN Bernhard mathématicien Allemand 1826-1866.
4. LEBESGUE Henri Léon mathématicien Français 1875-1941.

DÉFINITION VIII.2.1
Une fonction en escalier sur $[a;b]$, f, est une fonction à laquelle on peut associer une subdivision σ de $[a;b]$ telle que f soit une fonction constante sur chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1},x_i[$.

Remarques
1. *Si σ' est une subdivision de $[a;b]$ plus fine que σ, alors σ' peut également être associer à f.*
2. *En pratique, on introduit les nombres $c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_n$ tels que sur chaque intervalle $]x_{i-1},x_i[$ la fonction f est constante et vaut : c_i.*

Soit f une fonction, positive et en escalier sur $[a;b]$, σ est une subdivision de $[a;b]$ associée à f et $c_1,\cdots,c_n$ les nombres tels que pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$: $f=c_i$ sur $[x_{i-1};x_i]$. L'intégrale de f de a à b sera l'aire de la région $\mathscr{R}$ délimitée par les droites d'équations : $x=a$; $x=b$; l'axe des abscisses et la représentation graphique de f ; c'est-à-dire la région constituée des points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b\\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$$

$\mathscr{R}$ est constituée de n rectangles. Pour i variant de 1 à n, le i-ème rectangle a pour base x_i-x_{i-1} et pour hauteur c_i il a donc pour aire : $(x_i-x_{i-1})c_i$. On en déduit que :

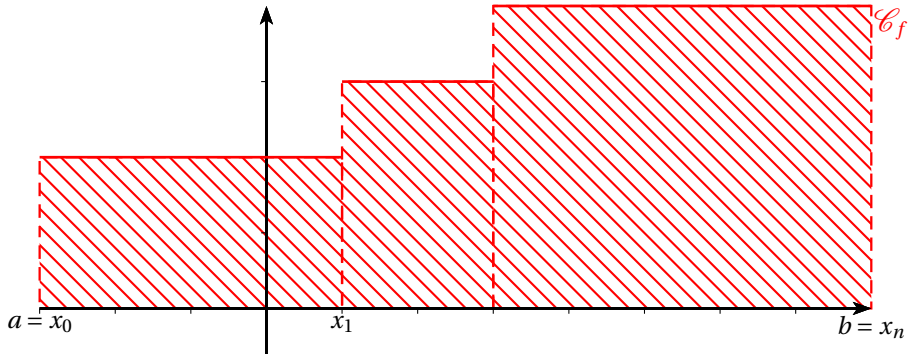


FIGURE VIII.4 – Intégrale d'une fonction en escalier positive.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\text{aire}\left(\mathscr{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i.$$

Nous admettons que cette aire est indépendante de la subdivision choisie. Ce qui justifie les définitions suivantes. Si on avait pris une subdivision plus fine $(y_j)_{j\leqslant m}$ en notant d_j la valeur de f sur $]y_{j_1},x_j[$, on obtenait :

$$\text{aire}\left(\mathscr{A}\right)=\sum_{j=1}^{m}d_j(x_j-x_{j-1}).$$

Plus généralement on a la définition suivante.

DÉFINITIONS VIII.2.2
Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ (f n'est plus nécessairement positive sur $[a;b]$).

(1) L'*intégrale* de f entre a et b est le nombre noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i$$

où (x_i) est une subdivision de $[a;b]$ associée à f.

(2)

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque *Les valeurs des $f(x_i)$ sont sans importance dans le calcul de cette intégrale.*

Soit α et β deux nombres, nous désignerons par $\max(\alpha;\beta)$ le plus grand des deux et par $\min(\alpha;\beta)$ le plus petit. Nous

étendons ces définitions au cas des fonctions.
Considérons par exemple sur l'intervalle $[-1;3]$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \mapsto -x+4$. Sur $[-1;2]$: $g \geqslant f$; alors

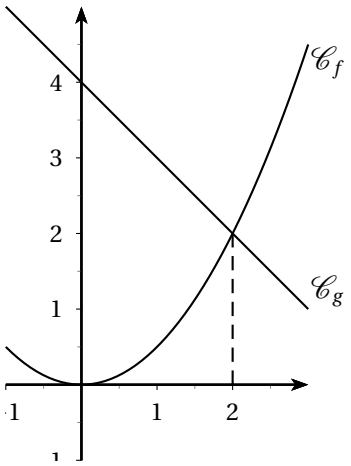


FIGURE VIII.5 – min et max de deux fonctions.

que sur $[-1;2]$: $f \geqslant g$; nous en déduisons que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont définies par :

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ f(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases} \qquad \min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ g(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases}$$

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.2.1
Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ respectivement associées à des subdivisions σ_f et σ_g.
Les fonctions $f+g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont des fonctions en escalier sur $[a;b]$ associées à la subdivision $\sigma_f \cup \sigma_g$

VIII.2.4 Activité

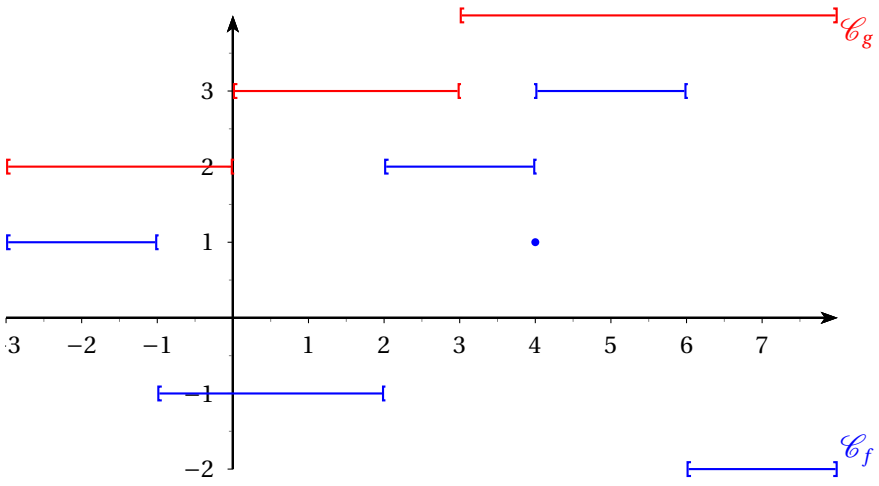


FIGURE VIII.6 – Représentations graphiques de deux fonctions en escalier.

1. Calculer : $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$; $\int_{-3}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on en termes de majorations ?
2. Calculer : $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comparer d'une part : $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$;

d'autre part : $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{8}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Tracer la représentation graphique de $2f$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} 2f(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

4. Tracer la représentation graphique de $f+g$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

VIII.2.5 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

L'activité ci-dessus suggère les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME VIII.2.2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ et α un nombre réel.

(1)
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2)
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques

1. *Plus généralement :* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2. *L'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions est la conbinaison linéaire des intégrales. On dit que l'intégrales des fonctions en escalier est linéaire.*

THÉORÈME VIII.2.3 COMPARAISON DES INTÉGRALES

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$.

Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque *Le théorème n'est pas établi dans le cas d'une inégalité stricte.*

THÉORÈME VIII.2.4 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction en escalier sur un intervalle I et a, b et c trois éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

VIII.3 Intégrale de Riemann

VIII.3.1 Définition

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction quelconque comme une limite comune d'intégrales de fonctions en escalier.

DÉFINITION VIII.3.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

Nous dirons que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ s'il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $f_n \leqslant f \leqslant g_n$.

(2) Les suites (I_n) et (J_n) définies par : $\mathrm{I}_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.

La limite commune de ces deux suites est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour justifier cette définition, nous devons établir que la limite commune des suites (I_n) et (J_n) est indépendantes des suites (f_n) et (g_n).
Soit deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant :

- Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $k_n \leqslant f \leqslant l_n$.
- Les suites (K_n) et (L_n) définies par : $K_n = \int_a^b k_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $L_n = \int_a^b l_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.
  Désignons par ℓ leur limite commune.

Nous devons démontrer que : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On a, sur $[a;b]$, pour tout entier naturel n : $f_n \leqslant f \leqslant l_n$;
donc par comparaison des intégrales, pour tout entier naturel n : $I_n \leqslant L_n$.
Par comparaisons des limites (théorème III.7.7), nous en déduisons que : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ell$.
En comparant k_n et g_n on démontre de même que : $\ell \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Il serait maintenant intéressant connaître quelques fonctions intégrables au sens de Riemann. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.1
Les fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ ou monotones sur $[a,b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

VIII.3.2 Sommes de Riemann

VIII.3.2.a Introduction

Pour démontrer le théorème VIII.3.1, il faut considérer une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ puis construire les suites adjacentes (I_n) et (J_n). Pour construire ces suite qui convergent vers l'intégrale de f et donc sont des approximations de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; on utilise les sommes de Riemann.

Soit f une fonction définie entre autre sur $[a;b]$, $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a;b]$ et $\xi_1,\cdots,\xi_n$ des nombres tels que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$: $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. La somme de Riemman de f sur $[a,b]$ associée à (x_i) et à (ξ_i) est l'intégrale de la fonction en escalier, f_e, définie par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\qquad c_i = f(\xi_i)$$

On a alors :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

On devine que cette dernière intégrale sera une appriximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ d'autant meilleure que la subdivision associée sera fine et que les ξ_i auront été choisis judicieusement.

En pratique on choisit le nombre, n, d'intervalles de la subdivision, puis on prend la subdivision à pas constant : $h = \dfrac{b-a}{n}$. La subdivision, σ_n, est alors définie par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n} = a + kh$.
Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.2
Soit f une fonction continue ou montone sur $[a\,b]$ et (I_n) une suite de sommes de Riemann de f sur $[a,b]$, associées à σ_n.

La suite (I_n) est convergente et sa limite est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque *Ce théorème peut servir à démontrer le théorème VIII.3.1*

Nous allons maintenant examiner des exemples communs de sommes de Riemann. Le premier a un intérêt théorique, les suivants permettent de calculer des valeurs approchées d'une intégrale. Nous supposerons dans tous ces exemples que la fonction f est continue sur $[a,b]$ et nous calculerons une somme de Riemann de f sur $[a,b]$ associée à σ_n. Nous aurons ainsi :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

VIII.3.2.b Sommes de Darboux

Nous admettons le théorème suivant : par une fonction continue, l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.
Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, posons :

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

D'après ce théorème, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$: $f([x_{i-1},x_1]) = [m_i,\mathrm{M}_i]$.
Il existe donc deux nombres ξ_i et ξ_i' éléments de $[x_{i-1},x_1]$ tels que : $f(\xi_i) = m_i$ et $f(\xi_i') = \mathrm{M}_i$.
Nous appellerons respectivement somme de Darboux[5] inférieure et somme de Darboux supérieure de f relativement à σ_n les nombres $s_{\sigma_n}(f)$ et $\mathrm{S}_{\sigma_n}(f)$ définis par :

$$s_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i(x_i - x_{i-1}).$$

On peut visualiser les sommes de Darboux en utilisant Geogebra.

Exemple *On se propose d'encadrer* $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *entre deux sommes de Darboux dans le cas de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{3} + 1 + \sin x$.
On entre successivement les instructions suivantes dans la ligne de commandes :

- `f(x) = 1 + x / 3 + sin(x)`
- `n=6`
- `SommeInférieure[f, 1, 7, n]`
- `SommeSupérieure[f, 1, 7, n]`

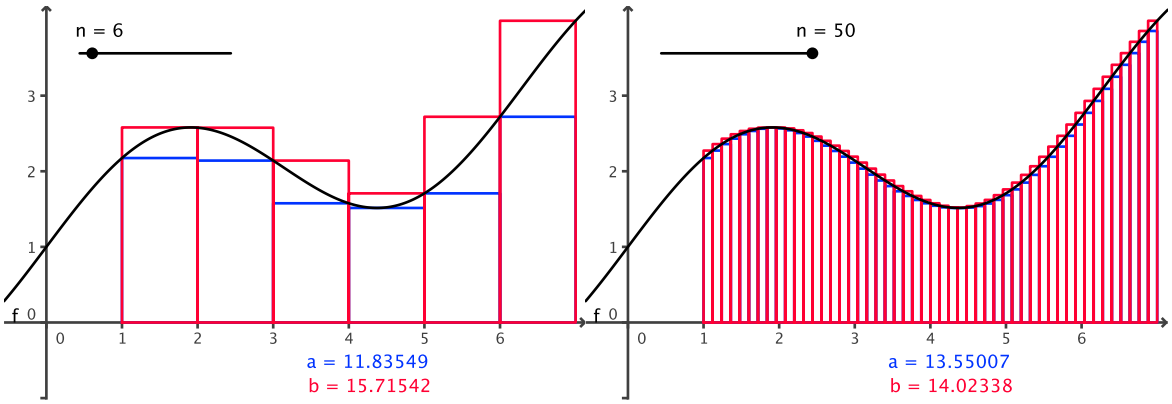


FIGURE VIII.7 – Sommes de Darboux.

D'après la figure VIII.7 : $s_{\sigma_6}(f) = 11,83\cdots$ *et* $\mathrm{S}_{\sigma_6}(f) = 15,71\cdots$

VIII.3.2.c Méthode des rectangles

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\xi_i = x_{i-1}$ ou $\xi_i = x_i$

Remarques

1. *Lorsque la fonction f est monotone, ces valeurs approchées coïncident avec les sommes de Darboux.*

2. *Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.d Méthode du point médian

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

5. DARBOUX Jean-Gaston mathématicien Français 1842-1917.

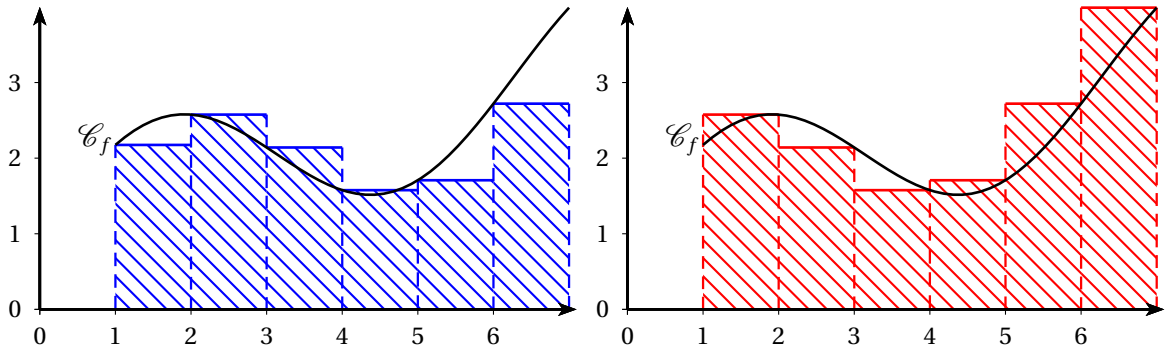


FIGURE VIII.8 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

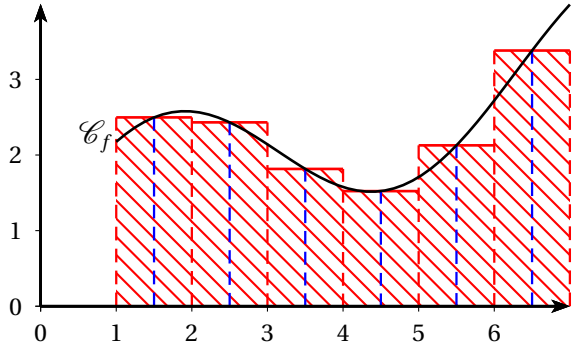


FIGURE VIII.9 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des points médians.

Remarque *Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{M}{4n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.e Méthode des trapèzes

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, xi_i tel que : $f(\xi_i) = \dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$.
Les ξ_i sont bien définis grâce à la continuité de f et au théorème des valeurs intermédiaires.

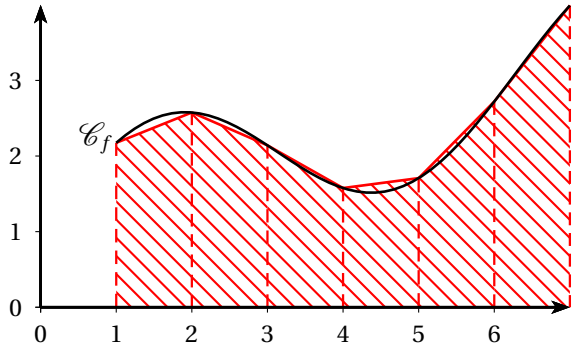


FIGURE VIII.10 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Remarque *Si f est deux fois dérivable sur $[a,b]$ et si $|f''|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{12n^2}(b-a)^3.$$

VIII.3.3 Exemple d'intégrale d'une fonction usuelle

On rappelle que la partie entière d'un nombre réel, x, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. La partie entière de x sera ici notée $\lfloor x \rfloor$. Pour tout nombre réel, x, $\lfloor x \rfloor$ est l'entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On définit de même la fonction plafond par :

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

$\lceil x \rceil$ est donc le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. Pour tout nombre réel, x, $\lceil x \rceil$ est l'entier vérifiant :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $n = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$. Ces fonctions permettent d'encadrer n'importe quel réel entre deux entiers consécutifs (ou égaux si le réel considéré est un entier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil.$$

On rapelle que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dans cette activité, f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ (on rappelle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$) et α désigne un nombre réel strictement positif. On se propose de démontrer que la fonction f est intégrable sur $[0;\alpha]$ et d'exprimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction α.
Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0;\alpha]$ les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lfloor\frac{nx}{\alpha}\right\rfloor\right) \qquad g_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lceil\frac{nx}{\alpha}\right\rceil\right)$$

1. Dans cette question, $\alpha = 3$ et $n = 6$.

a. Représenter sur un même graphique les fonctions : f, f_6 et g_6.

b. Déterminer I_6 et J_6.

2. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul fixé.

a. On veut subdiviser l'intervalle $[0;\alpha]$ en n intervalles de même amplitude.
Donner les éléments et le pas de la subdivision.

b. Démontrer que pour tout élément k de $[\![0;n]\!]$: $f_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = g_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = f\left(k\frac{\alpha}{n}\right)$.

c. Démontrer que pour tout élément k de $[\![1;n]\!]$, les fonctions f_n et g_n sont constantes sur l'intervalle $\left]\,(k-1)\frac{\alpha}{n}\,;k\frac{\alpha}{n}\right[$.
En déduire que f_n et g_n sont des fonctions en escalier associées à une subdivision qu'il conviendra de préciser.

d. Déduire de l'étude menée en **2.c** que :

$$\mathrm{I}_n = \frac{\alpha^3}{6}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \frac{\alpha^3}{6}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

3. a. Après avoit préciser le signe des suites (I_n) et (J_n), étudier leur monotonie (*on pourra calculer le quotient de deux termes consécutifs*).

b. Démontrer que les suites (I_n) et (J_n) sont adjacentes.

4. Déterminer la limite commune des suites (I_n) et (J_n). Puis dériver cette limite par rapport à α.

VIII.4 Théorème fondamental de l'analyse

VIII.4.1 Problème ouvert

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite éventuelle et sens de variation) définie par, $u_0 = \mathrm{e}-1$, et pour tout nombre entier naturel, n : $u_{n+1} = -1+(n+1)u_n$.
Tous les théorèmes, toutes les calculatrices et tous les logiciels sont utilisables à volonté.

VIII.4.2 Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle I, α un élément de I et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

À tout élément, t, de I tel que $t \geqslant a$, on associe le nombre $\mathrm{F}(t)$ défini comme l'aire, en unités d'aires, de la région délimitée par l'axes des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = t$ (voir fig. VIII.11).

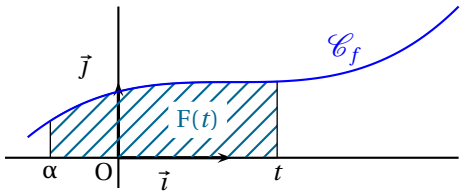


FIGURE VIII.11 –

Soit t_0 un nombre réel où la fonction F est définie. On aimerait savoir la fonction F est dérivable en t_0. Soit h un réel strictement positif suffisamment petit pour que $\mathrm{F}(t_0+h)$ soit défini(voir fig. VIII.11).

Désignons $\mathscr{R}$ la région hachurée dont l'aire est : $\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)$. $\mathscr{R}$ est incluse dans un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0+h)$ et inclus un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0)$. On en déduit que :

$$h\times f(t_0) \leqslant \mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0) \leqslant h\times f(t_0+h).$$

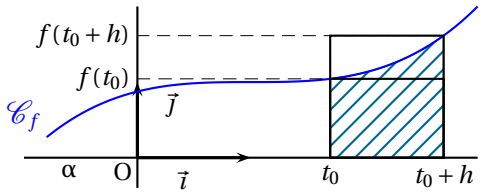


FIGURE VIII.12 –

En divisant membre à membre par h qui est positif, il vient :

$$f(t_0) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0+h). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Pour h négatif, on a :

$$-h\times f(t_0+h) \leqslant \mathrm{F}(t_0)-\mathrm{F}(t_0+h) \leqslant -h\times f(t_0).$$

En divisant membre à membre par $-h$ qui est positif, il vient :

$$f(t_0+h) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0). \qquad \text{(VIII.3)}$$

La fonction f est continue en t_0, donc : $\lim\limits_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$.
Par comparaison des limites dans (VIII.2) et (VIII.3) il vient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} = f(t_0)$$

Ainsi F est dérivable en t_0 et son nombre dérivé en t_0 est $f(t_0)$. Plus généralement, pour tout élément, t, ou F est définie : $\mathrm{F}'(t) = f(t)$. Donc F est une primitive de f.
Soit a et b deux éléments de I tels que : $\alpha \geqslant a \geqslant b$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

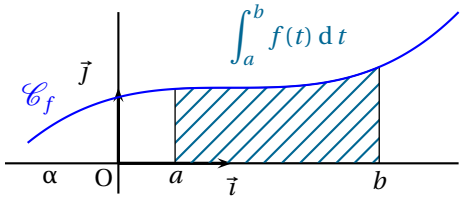


FIGURE VIII.13 –

Soit G une autre primitive de f. Il existe une constante, k, tel que :
$\mathrm{G} = \mathrm{F}+k$. On a donc :

$$\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \big(\mathrm{F}(b)+k\big)-\big(\mathrm{F}(a)+k\big) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Cette étude suggère le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME VIII.4.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Remarques

1. *En reprenant le dernier argument de l'étude précédente, on démontre que l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*

2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle, I, dont la dérivée, f', est continue sur I et a et b deux éléments de I. La fonction f est une primitive sur I de la fonction f' continue sur cet intervalle, donc :*

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Notations et vocabulaire

1. *On écrit :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

2. *L'expression « $[\mathrm{F}(t)]_a^b$ » se lit : « $\mathrm{F}(t)$ pris entre a et b »*

3. *a et b sont les bornes de l'intégrale.*

Exemples

1. *La fonction* sin *est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $-\cos$; donc :*

$$\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}\,t=[-\cos t]_0^{\pi}=\big(-\cos\pi\big)-\big(-\cos 0\big)=2.$$

2. *La fonction, $f:x\mapsto 3x^2-6x$, est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $\mathrm{F}:x\mapsto x^3-3x^2$; donc :*

$$\int_{-1}^{3}f(t)\,\mathrm{d}\,t=\left[t^3-3t^2\right]_{-1}^{5}=\big(3^3-3\times 3\big)-\big((-1)^3-3(-1)^2\big)=18+4=22.$$

COROLLAIRE VIII.4.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

(1) On a : $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0.$

(2) On a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$

Démonstration Soit, F, une primitive de f sur I. On a :

(1) $$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(a)=0.$$

(2) $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(b)=-\big(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\big)=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$ □

COROLLAIRE VIII.4.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un élément de I.

La fonction, $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$, est la primitive de f sur I nulle en a.

Démonstration L'existence et l'unicité d'une telle primitive sont garanties par le théorème VIII.1.4.

Considérons une primitive, F, de f sur I et désignons par G la fonction : $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

On a : $\mathrm{G}(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$. De plus, pour tout élément, x, de I, on a :

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a).$$

En dérivant membre à membre cette identité par rapport à x, il vient : $\mathrm{G}'(x)=f(x)$.

Donc G est la primitive de f sur I nulle en a. □

Exemple *La fonction* ln *est la primitive sur $]0;+\infty[$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ nulle en 1. Donc, pour tout nombre réel strictement positif, x :*

$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}\,t}{t}=[\ln t]_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x.$$

La fonction ln *peut être définie comme l'intégrale de la fonction inverse.*

Interprétation graphique

Soit f une fonction continue et *positive* sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec : $a<b$.

Le nombre, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$, est la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Voir figure VIII.13.

Exercice VIII.4.1. ***Calculer :*** $\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\mathrm{d}\,t$.

Solution $\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\mathrm{d}\,t=\left[5\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{3}=61,5-\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{188}{3}$ □

Exercice VIII.4.2. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *On a :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t=\left[3\frac{\sin 2t}{2}+2\frac{\cos 3t}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9\sqrt{3}-8}{12}.$$

□

Exercice VIII.4.3. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\mathrm{d}\,t$.

Solution *Introduisons la fonction,* $u:t\mapsto\cos t$, *et la fonction polynôme,* $\mathrm{P}:t\mapsto\frac{1}{2}t^4-t^3$.
On a : $u'(t)=-\sin t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=2t^3-3t^2$. *Donc, pour* $t\in\mathbb{R}$ *:* $\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)=u'\times\mathrm{P}'(u)(t)$. *Ainsi :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\mathrm{d}\,t=\left[\frac{1}{2}\cos^4 t-\cos^3 t\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{9}{32}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25-12\sqrt{3}}{32}.$$

□

Exercice VIII.4.4. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Pour* $t\in\mathbb{R}$, *on a :* $\cos^5 t=\cos t\left(\cos^2 t\right)^2=\cos t\left(1-\sin^2 t\right)^2=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right)$.

Introduisons les fonctions : $u:t\mapsto\sin t$ *et* $\mathrm{P}:t\mapsto\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)=\cos t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=t^4-2t^2+1$.

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)\times\mathrm{P}(u(t))=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right)=\cos^5 t$.

D'où il vient :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t=\left[\mathrm{P}(u(t))\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\left[\frac{\sin^5 t}{5}-\frac{2}{3}\sin^3 t+\sin t\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{160}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{160}.$$

□

VIII.4.3 Exercices

VIII.4.a. Calculer : $\int_{1}^{4}5x^3+4x^2+3x-5\,\mathrm{d}\,x$.

VIII.4.b. calculer : $\int_{0}^{5}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t$; $\int_{0}^{x}(2t-3)\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_{0}^{x}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.c. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5\cos 6t-3\sin 9t)\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.d. calculer : $\int_{2}^{5}\left(5\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{5t}\right)\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.e. calculer : $\int_{0}^{3}t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.f. calculer : $\int_{0}^{9}\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.g. calculer : $\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{t}}$.

VIII.4.h. calculer : $\int_{4}^{12}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{2t+1}}$.

VIII.4.i. calculer : $\int_{0}^{3}(2t+3)\sqrt{2t+3}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.j. calculer : $\int_{-1}^{3}\frac{t\,\mathrm{d}\,t}{t^2+1}$.

VIII.4.k. calculer : $\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{e}^{2t}-1}$.

VIII.4.l. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.m. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.n. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5 Proptiétés algébriques

VIII.5.1 Relation de Chasles

THÉORÈME VIII.5.1 **RELATION DE CHASLES**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I.
On a : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) + (\mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(b)) = \mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

□

Interprétation graphique

Si f est positive sur I et si, $a \leqslant b \leqslant c$, désignons par D la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = c$. Le théorème VIII.5.1 signifie que :

$$\text{aire}(\mathrm{D}) = \text{aire}(\mathrm{D}_1) + \text{aire}(\mathrm{D}_2)$$

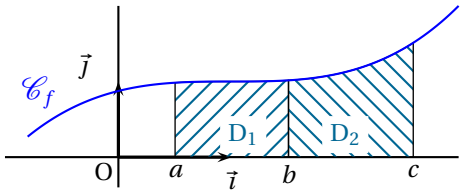


FIGURE VIII.14 –

Exercice VIII.5.1. ***Calculer :*** $\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Éliminons la valeur absolue. L'expression sans valeur absolue de $||t-1||$ est donnée par le tableau ci-dessous.*

x		1	
$\lvert t-1\rvert$	$1-t$	0	$t-1$

D'après la relation de Chasles, on a donc :

$$\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 |t-1|\,\mathrm{d} + \int_1^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 1-t\,\mathrm{d} + \int_1^3 t-1\,\mathrm{d} = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^3 = \frac{5}{2}.$$

□

VIII.5.2 Linéarité

THÉORÈME VIII.5.2 **LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE**
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.
(1) On a :
$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$
(2) On a :
$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F et G deux primitives sur I de f et g.
(1) F + G est une primitive sur I de, $f+g$, donc :

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}+\mathrm{G})(b)-(\mathrm{F}+\mathrm{G})(a) = \mathrm{F}(b)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{F}(a)-\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) αF est une primitive sur I de, αf, donc :

$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha\mathrm{F}(b)-\alpha\mathrm{F}(a) = \alpha(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

□

On dit que l'intégrale est linéaire. Cela signifie que l'intégrale d"une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des intégrales.

Remarque *En particulier :* $$\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Exemple

$$3\int_2^7 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}\,t - 2\int_2^7 \left(3t^2+4\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 \left(3\left(2t^2-1\right)-2\left(3t^2+4\right)\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 -11\,\mathrm{d}\,t = -55.$$

Exercice VIII.5.2. ***On rappelle l'identité :*** $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^4b^2+6ab^5+b^6$.

Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Pour tout nombre réel, t, on a :*

$$\cos^6 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{i6t}+6\mathrm{e}^{i4t}+15\mathrm{e}^{i2t}+20+15\mathrm{e}^{-i2t}+6\mathrm{e}^{-i4t}+\mathrm{e}^{-i6t}\right) = \frac{1}{2^5}(\cos 6t+6\cos 4t+15\cos 2t+10).$$

On en déduit que :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2^5}\left[\frac{\sin 6t}{6}+3\frac{\sin 4t}{2}+15\frac{\sin 2t}{2}+10t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10\pi}{32} = \frac{5\pi}{16}.$$

□

Remarque *Pour intégrer la fonction $t \mapsto \cos^6 t$, nous l'avons exprimée comme combinaison linéaire des fonctions : $t \mapsto \cos 6t$; $t \mapsto \cos 4t$; $t \mapsto \cos 2t$ et $t \mapsto 1$.*

Plus généralement, une fonction qui se présente comme un polynôme où les indéterminées sont les fonctions cos et sin est appelé polynôme trigonométrique.

Pour intégrer un polynôme trigonométrique on peut le linéariser ; c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto \cos nt$ et $t \mapsto \sin bt$ ou n désigne un entier naturel.

VIII.5.3 Exercices

VIII.5.a. Calculer : $\displaystyle\int_0^5 |t+2| \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5.b. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t| \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5.c. Calculer : $\displaystyle\int_0^5 \left|(x-1)^2-4\right| \mathrm{d}\,t$.

VIII.5.d. On pose : $\mathrm{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}\,t$ et $\mathrm{B} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}\,t$.

1. En ne calculer ni A ni B, calculer : A + B et A − B.

2. En déduire A et B.

VIII.5.e. En linéarisant $\cos^2$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.f. En linéarisant $\sin^2$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.g. En linéarisant $\cos^3$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.h. En linéarisant $\sin^3$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.6 Propriétés de comparaison

Afin d'illustrer les théorèmes par des exemples les plus proches possible des questions d'examen, on introduit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{U}_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$ et pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{U}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.6.1 Signe de l'intégrale

THÉORÈME VIII.6.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si f est positive sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \geqslant 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. La fonction f est positive sur $[a;b]$, donc F est croissante sur cet intervalle. Ainsi : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \geqslant 0$; c'est-à-dire : $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \geqslant 0$. □

Exemple *La fonction* exp *est positive sur* $[0;1]$, *donc :* $\mathrm{U}_0 \geqslant 0$.

THÉORÈME VIII.6.2

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_a^b g(t) \,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F et G des primitives respectives de f sur I. On a : $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, c'est-à-dire $g-f \geqslant 0$ sur $[a;b]$; d'après le théorème VIII.6.1 :

$\int_a^b (g-f)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. On en déduit le résultat désiré par linéarité. □

Exemples

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1-t \leqslant 1$ et $(1-t)^n \mathrm{e}^t$ est positif; donc par produit : $(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t$.*
Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$: $\mathrm{U}_{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n$.
La suite est ainsi décroissante et minorée par 0 (voir exemple précédent) elle donc convergente.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ et $(1-t)^n$ est positif; donc par produit : $(1-t)^n \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}$.*

Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$ et par linéarité : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

Or : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
Par comparaison des limites, (U_n) converge vers 0.

COROLLAIRE VIII.6.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que : $a \leqslant b$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Démonstration On a : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a;b]$; donc par comparaison des intégrales : $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.6.1. ***Démontrer que pour tout nombre réel, x : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.***

Solution

Si $x = 0$ *alors $\mathrm{e}^x = 1$ et $x+1 = 1$, donc : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.*

Si $x > 0$ *alors pour $t \in [0;x]$, $\mathrm{e}^t \geqslant 1$, car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

Si $x < 0$ *alors pour $t \in [x;0]$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $1 - \mathrm{e}^x \leqslant -x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

□

Pour démontrer une inégalité du type, $f < g$, sur un intervalle du type, $[a;b]$ ou $[a;\infty[$, il suffit parfois de vérifier que, $f(a) < f(b)$, de démontrer que , $f' < g'$, sur cet intervalle puis de comparer les intégrales.

VIII.6.2 Inégalité de la moyenne

THÉORÈME VIII.6.4 INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I tels que, $a \leqslant b$, et m, M deux nombres réels tels que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$.

$$m(b-a) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Démonstration On a : $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a;b]$; donc, par comparaison des intégrales : $\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^f f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$m(b-a) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

□

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est encadrée entre les aires des rectangles de base, $b-a$, et de hauteurs m et M.

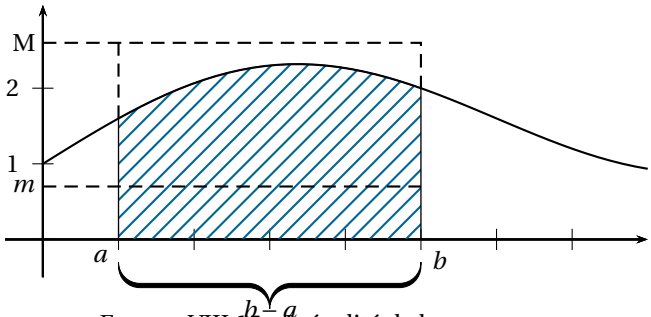


FIGURE VIII.15 – Inégalité de la moyenne.

Remarque *$b-a$ n'est autre que l'amplitude de l'intervalle $[a;b]$.*

Exemple *La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour $t \in [3;5]$: $\dfrac{1}{25} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{9}$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[3;5]$:

$$\frac{2}{25} \leqslant \int_3^5 \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \frac{2}{9}.$$

Exercice VIII.6.2. ***Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*** [6].

Solution *La fonction, $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ sur $[k;k+1]$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[k;k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

En additionnant membre à membre les n inégalités ainsi obtenues pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant u_n.$$

Or : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \ln(n+1)$; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant \ln(n+1) \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Par comparaison des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Voir figure VIII.16. □

L'inégalité de la moyenne peut aussi s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME VIII.6.5 INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I, et M un nombre réel tel que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $\left|f(t)\right| \leqslant \mathrm{M}$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|.$$

Démonstration $\left|f(t)\right| \leqslant \mathrm{M}$, signifie : $-\mathrm{M} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème VIII.6.4 avec $m = -\mathrm{M}$. **Si $a \leqslant b$,** on a : $-\mathrm{M}(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(b-a)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$.
Si $b \leqslant a$, on a : $-\mathrm{M}(a-b) \leqslant \int_b^a f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(a-b)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$. □

6. Cette suite est appelée série harmonique.

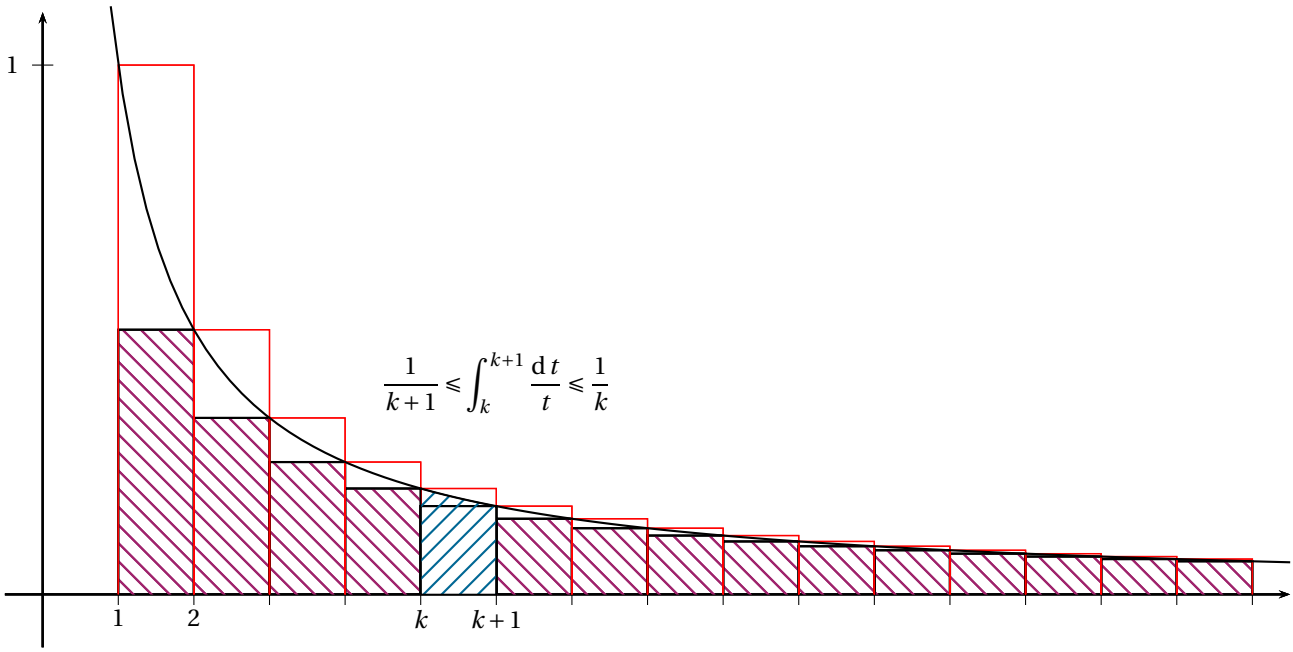


FIGURE VIII.16 – Limite de la série harmonique.

Exercice VIII.6.3. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définie par : $u_n = \frac{1}{n}\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t$.***

Solution *On sait que :* $|\sin| \leqslant 1$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donc, d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à* sin *entre* n *et* $n-2(-1)^n$ *:* $\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant 2$.

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, *en divisant membre à membre l'inégalité ci-dessus par* n *qui est strictement positif :*

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ *; donc, par comparaison des limites, la suite* (u_n) *converge vers* 0. □

VIII.6.3 Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION VIII.6.1

Soit f une fonction continue sur une intervalle I et $[a\,;b]$ un intervalle non réduit à un point inclus dans I.

La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a\,;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle de base, $b-a$, et de hauteur μ. Voir figure VIII.17.

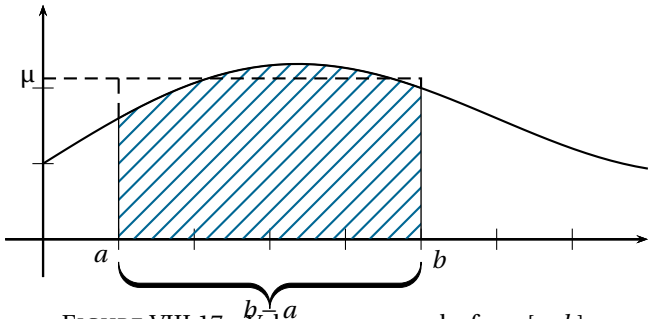


FIGURE VIII.17 – Valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

Interprétation cinématique Une droite (AB) est graduée et orientée de A vers B. Un point mobile sur l'axe par de A à l'instant t_0 pour arriver en B à l'instant, t_1. La vitesse moyenne du trajet est le quotient de la distance parcourue par le mis pour la parcourir, c'est-à-dire :

$$v_{moy} = \frac{\text{AB}}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Désignons respectivement par $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ l'abscisse et la vitesse du point mobile à l'instant t. La valeur moyenne, μ, de la vitesse sur l'intervalle $[t_0\,;t_1]$ vérifie :

$$\mu = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{t_1 - t_0}\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = v_{moy}.$$

On en déduit que la vitesse moyenne est la valeur moyenne de la vitesse.

Remarque *On déduit de l'inégalité de la moyenne, que si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur $[a\,;b]$, alors : $m \leqslant \mu \leqslant \text{M}$.*

Exemples

1. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0\,;\pi]$ *est :*

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\,[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{-(-1)-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

2. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0\,;2\pi]$ *est :*

$$\mu_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\,[-\cos t]_0^{2\pi} = \frac{-(-1)-(-(-1))}{2\pi} = 0.$$

VIII.6.4 Exercices

VIII.6.a. Peut-on, sans calcul, déterminer le signes des intégrales suivantes ?

a. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1}$. **b.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

c. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\cos t}$. **d.** $\displaystyle\int_{0,2}^{0,8} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

VIII.6.b. **1.** Justifier que pour tout $t \in [0\,;1]$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x + 1.$$

VIII.6.c. **1.** Démontrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$:

$$\ln x \leqslant x - 1$$

2. Démontrer que pour tout $x \in]0\,;1]$:

$$\ln x \leqslant x - 1$$

VIII.6.d. **1.** Justifier que pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\sin t} \leqslant 2.$$

2. En déduire que :

$$\frac{3}{\pi} \leqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sin t} \leqslant \frac{6}{\pi}.$$

VIII.6.e. Démontrer que : $105 \leqslant \displaystyle\int_9^{16} \sqrt{x^2+144}\,\mathrm{d}\,x \leqslant 140$.

VIII.6.f. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[1\,;4]$.

VIII.6.g. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[-1\,;1]$.

VIII.6.h. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$; m, μ et M sont respectivement un minorant, la valeur moyenne et un majorant de f sur $[a\,;b]$.
Démontrer que : $m \leqslant \mu \leqslant \text{M}$.

VIII.7 Autres techniques de calcul

VIII.7.1 Intégration par parties

THÉORÈME VIII.7.1

Soit u et v deux fonctions continûment dérivables[7] sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration On a : $(uv)' = u'v + uv'$; donc : $u'v = (uv)' - uv'$. Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur I, donc les fonctions, $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues sur I. En intégrant terme à terme la dernière identité, il vient :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.7.1. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t$ *et* $u'(t) = \sin t$. *On a,* $v'(t) = 1$, *et on peut prendre :* $u(t) = -\cos t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t\,\mathrm{d}t = \pi + [\sin t]_0^\pi = \pi.$$

□

Exercice VIII.7.2. ***Déterminer une primitive sur*** $]0;+\infty[$ ***de la fonction*** ln.

Solution *D'après le corollaire VIII.4.3, La primitive de fonction* ln *nulle en* 1 *est la fonction,* F, *définie par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Posons : $v(t) = \ln t$ *et* $u'(t) = 1$. *On a,* $v'(t) = \dfrac{1}{t}$, *et on peut prendre :* $u(t) = t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $]0;+\infty[$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{F}(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

□

On peut être amener à enchaîner plusieurs intégrations par parties pour obtenir un résultat.

Exercice VIII.7.3. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t^2$ *et* $u'(t) = \cos t$. *On a,* $v'(t) = 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \sin t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi t^2\cos t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

□

Exercice VIII.7.4. ***Calculer :*** $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = \cos 2t$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^{3t}$. *On a,* $v'(t) = -2\sin 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{I} = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\cos 2t\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2}{3}\sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\pi} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons : $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$.

Posons : $v(t) = \sin 2t$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^{3t}$. *On a,* $v'(t) = 2\cos 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{3}\cos 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\mathrm{I}.$$

7. Une fonction continûment dérivable sur un intervalle, I, est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée est continue sur I.

Ainsi : $3\mathrm{I} = \mathrm{e}^{3\pi} - 1 - \dfrac{4}{3}\mathrm{I}$. *On en déduit que :*

$$\mathrm{I} = \frac{3}{13}\left(\mathrm{e}^{3\pi} - 1\right)$$

□

Exercice VIII.7.5. ***1.*** (U_n) ***est la suite introduite à la deuxième ligne de section VIII.6.***
Déterminer une expression de U_{n+1} ***en fonction de*** U_n***, valable pour tout entier naturel,*** n***.***

2. En déduire la résolution du problème ouvert énoncé à la sous-section VIII.4.1

Solution ***1.*** *Soit* n *un entier naturel. On a :*

$$\mathrm{U}_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t$$

Posons : $v(t) = (1-t)^{n+1}$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^t$. *On a,* $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, *et on peut prendre :* $u(t) = \mathrm{e}^t$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{U}_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

Donc, pour tout entier naturel, n *:*

$$\mathrm{U}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

2. *Ainsi la suite*(U_n) *a la même relation de récurrence que la suite* (u_n) *introduite à la sous-section VIII.4.1. Si de plus ces deux suites avaient le même premier termes, elles seraient alors égales.*
On sait que : $u_0 = \mathrm{e} - 1$. *Calculons* U_0. *On a :*

$$\mathrm{U}_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

Les suites (U_n) *et* (u_n) *sont égales, donc la suite*(u_n) *est décroissante et converge vers* 0. □

Pour établir la relation de récurrence d'une suite définie par une intégrale, on utilise souvent une (ou plusieurs) intégration par parties.

VIII.7.2 Intégration et invariance géométrique

VIII.7.2.a Intégration de fonctions paires ou impaires

THÉORÈME VIII.7.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, symétrique par rapport à 0.

(1) Si f est paire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) Si f est impaire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

Si f est paire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)) - (\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x))\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(-x) - 2\mathrm{F}(0)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) - f(-x) = 0$ (car f est paire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = 0$; d'où : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Si f est impaire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) + f(-x) = 0$ (car f est impaire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

□

Remarques

1. *Lorsque* f *est paire, l'égalité est équivalente à :* $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

2. *Lorsque f est impaire, l'égalité est équivalente à :* $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.18.

Dans le cas où la f est paire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit que :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Dans le cas où la f est impaire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que :

$$-\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

FIGURE VIII.18 – Intégrales de fonctions paires ou impaires.

Exemples

1. *La fonction $x \mapsto x^2$ est paire, donc :* $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 2\int_{0}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 18$.

2. *La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, donc :* $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 0$.

VIII.7.2.b Intégration de fonctions périodiques

THÉORÈME VIII.7.3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Pour tous nombres réels a et b.

(1) $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$. **(2)** $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

(1) On introduit la fonction, G, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(x+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(x)$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc G l'est aussi et pour tout élément, x, de $\mathbb{R}$: $\mathrm{G}'(x) = f(x+\mathrm{T}) - f(x) = 0$ (car f est T-périodique).

La fonction G est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et pour tout élément, a, de I : $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

(2) On déduit de **(1)** : $\displaystyle\int_{b}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$; c'est-à-dire : $\mathrm{F}(b+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(a+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(a)$.

D'où : $\mathrm{F}(b+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(a+\mathrm{T}) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$; c'est-à-dire : $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t$. □

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.19.

(1) Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils peuvent être coupés en deux morceaux tels que le premier de D_2 est l'image du second de D_1 par la translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$ et le second de D_2 est l'image du premier de D_1 par la translation de vecteur $2\mathrm{T}\vec{\imath}$.

On en déduit que :

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) Les domaines D_3 et D_4 ont la même aire parce que D_4 est l'image de D_3 par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
On en déduit que :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

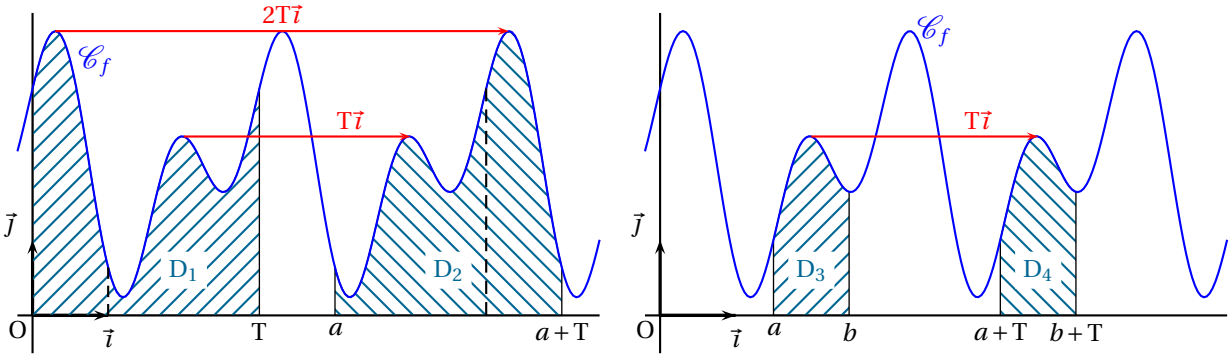


FIGURE VIII.19 – Intégrale de fonction périodique.

Remarques

1. *Plus généralement, pour tout entier relatif, n :* $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$

2. *La propriété **(1)** du théorème signifie que l'intégrale de f sur un intervalle d'amplitude* T *est indépendante de cet intervalle.*

3. *En particulier la valeur moyenne d'une fonction, f, T-périodique est la valeur moyenne de f sur un intervalle d'amplitude* T.

VIII.7.3 Exercices

VIII.7.a. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt.$

VIII.7.b. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t\,e^t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^2 t^2 e^t\,dt.$

VIII.7.c. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t^2 e^{2t}\,dt.$

VIII.7.d. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t\,dt.$

Chapitre IX

Dénombrement

IX.1 Notions Préliminaires

IX.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles

Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble fini.

- Le *cardinal* de E, noté $\mathrm{card}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{card}\,\mathrm{E}$, est le nombre d'éléments de E.
  Par exemple, pour $\mathrm{E} = \{a,b,c,d\}$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = 4$.
- *L'ensemble des parties* de E est noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$
  Par exemple, pour $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = 3$.
  $\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$.
  On a : $\mathrm{card}\big(\mathscr{P}(\mathrm{E})\big) = 8$.
- Une *partition* de E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont l'union est E.
  Par exemple $\big\{\{a\}, \{b\}, \{c,d\}\big\}$ est une partition de $\{a,b,c,d\}$.

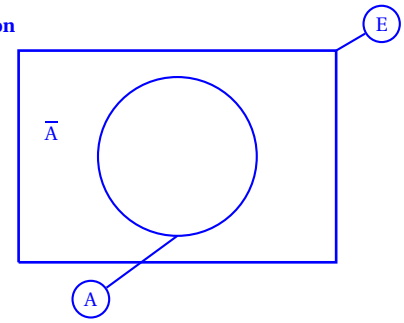
THÉORÈME IX.1.1 PRINCIPE D'ADDITIVITÉ
Si $\{\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n\}$ est une partition de E, alors : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = \mathrm{card}(\mathrm{E}_1) + \cdots + \mathrm{card}(\mathrm{E}_n)$.

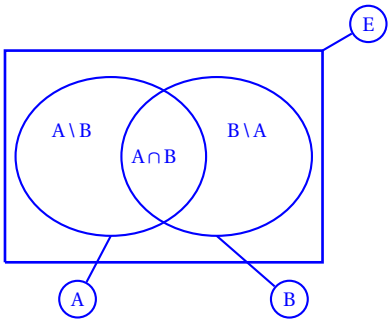
THÉORÈME IX.1.2
Pour toute parties A et B d'un ensemble E, on a :

(1) $\mathrm{card}\big(\overline{\mathrm{A}}\big) = \mathrm{card}(\mathrm{E}) - \mathrm{card}(\mathrm{A})$.

(2) $\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{B}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Démonstration





(1) $\{\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\}$ est une partition de E ; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}\big(\overline{\mathrm{A}}\big) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$$

On en déduit la propriété.

(2) $\{\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}\}$ est une partition de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \big(\mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big) + \big(\mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big) - \mathrm{card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})$$

Or $\{\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$ et $\{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}\}$ sont respectivement des partitions de A et B ; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{B}).$$

On en déduit la propriété. □

Exercice IX.1.1. ***Dans un groupe d'individus.***

(1) **200** ***pratiquent le football, parmi eux*** **80** ***pratiquent le rugby et*** **30** ***le tennis de table ;***

(2) **160 *pratiquent le rugby et parmi eux 25 pratiquent le tennis de table ;***

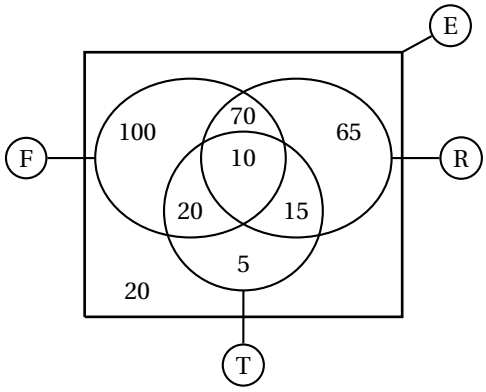
(3) **50 *pratiquent le tennis de table ;***

(4) **10 *pratiquent les trois sports ;***

(5) **20 *ne pratiquent aucun des sports cités.***

Combien y a-t-il de d'individus dans ce groupe ?

Pour résoudre le problème, on peut construire le diagramme ci-contre.



F désigne l'ensemble des footballeurs etc. On peut répartir les individus en huit classes :
$F\cap T\cap R$; $F\cap T\cap\overline{R}$; $F\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap T\cap R$; $F\cap\overline{T}\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap T\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}$;
qui forment une partition de E. On en déduit la construction du diagramme :

- D'après **(5)** : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=20$;
- D'après **(4)** : $\text{card}\left(F\cap T\cap R\right)=10$;
- D'après **(1)** 80 individus pratiquent le football et le rugby et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 70 pratiquent uniquement le football et le rugby : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap R\right)=70$;
- De même : $\text{card}\left(F\cap T\cap\overline{R}\right)=20$;
- Parmi les 200 footballeurs 100 (10+70+20) pratiquent donc au moins un des deux autres sports, d'où : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=100$;
- D'après **(2)** 25 individus pratiquent le rugby et le tennis de table et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 15 pratiquent uniquement le rugby et le tennis de table : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap R\right)=15$;
- Parmi les 160 rugbymen 10+70+15 c'est-à-dire 85 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap R\right)=75$;
- Parmi les 50 pongistes 10+20+15 c'est-à-dire 45 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap\overline{R}\right)=5$;

On en déduit le nombre d'individu : 305.

Pour dénombrer un ensemble, on peut en faire apparaître une partition.

IX.1.2 Produit cartésien d'ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble, noté $E\times F$, des couples (x,y) où $x\in E$ et $y\in F$. L'écriture $E\times F$ se lit « E croix F ».

Exemple

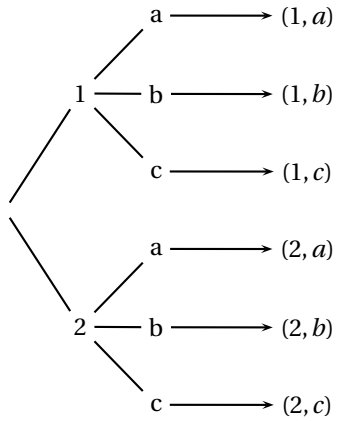
Pour $E=\{1;2\}$ *et* $F=\{a;b;c\}$*, on a :*

$E\times F=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$E\times F$	a	b	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$

THÉORÈME IX.1.3

Lorsque E et F sont des ensembles finis : $\text{card}\left(E\times F\right)=\text{card}\left(E\right)\times\text{card}\left(F\right)$.



Lorsqu'un ensemble E peut être construit par un arbre où on a :
- 1re étape : n_1 cas ;
- 2e étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_2 cas ;
- ...
- p^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_p cas.

On a alors : $\text{card}\left(E\right)=n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$.

Remarques

1. *Plus généralement, on définit le produit cartésien de p ensembles :* $E_1\times E_2\times\cdots\times E_p$

2. *Lorsque $E_1, \ldots, E_p$ sont finis, on a :* $\text{card}\left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\right) = \text{card}\left(E_1\right) \times \cdots \times \text{card}\left(E_p\right)$.
3. *En particulier, l'ensemble* $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ *est noté* E^p. *Les éléments de* E^p *sont les p-uplets, ou p-listes, d'éléments de E. Et on a :* $\text{card}\left(E^p\right) = \text{card}\left(E\right)^p$.

Exercice IX.1.2. ***Combien y a-t-il de codes possibles dans un cadenas présentant quatre molettes de dix chiffres chacune.***
Solution *Considérons l'ensemble :* $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $\text{card}\left(E\right) = 10$. *L'ensemble des codes est l'ensemble des quadruplets* $(c_1;c_2;c_3;c_4)$ *d'éléments de E. Il y a donc* $\text{card}\left(E^4\right)$, *c'est-à-dire 10 000, codes possibles.* □

IX.2 Factorielle

DÉFINITION IX.2.1
Soit n un entier naturel, on appelle $n!$ (lire : « factorielle n ») l'entier naturel non nul défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{, si } n \neq 0 ; \\ \\ 1 & \text{, si } n = 0. \end{cases}$$

Exemples
1. $0! = 1$; $1! = 1$.
2. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$; *ou encore :* $5! = 3! \times 4 \times 5$.
3. $\dfrac{6!}{4!} = 5 \times 6$; $\dfrac{12!}{4! \times 8!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 445$.
Plus généralement, pour $0 \leqslant p \leqslant n$: $\dfrac{n!}{p!} = (p+1) \times \cdots \times n$.
4. ***Exercice IX.2.1.*** ***Une mère a quatre petits garçons, elle a acheté quatre voitures de couleurs différentes. De combien de façons peut-elle attribuer une voiture à chacun ?***
Elle a :
- ▷ 4 *choix possibles pour attribuer la première voiture ;*
- ▷ 3 *choix possibles pour attribuer la deuxième voiture ;*
- ▷ 2 *choix possibles pour attribuer la troisième voiture ;*
- ▷ 1 *choix possible pour attribuer la dernière voiture.*

Soit en tout $4! = 24$.
5. *Plus généralement pour construire une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n. On a :*
- ▷ n *choix possibles pour attribuer l'image du premier élément ;*
- ▷ $n-1$ *choix possibles pour attribuer l'image du deuxième élément ;*

$\vdots$

- ▷ $n-k+1$ *choix possibles pour attribuer l'image du* k^e *élément ;*

$\vdots$

- ▷ 1 *choix possible pour attribuer l'image du dernier élément.*

Soit en tout $n!$.

On en déduit le théorème suivant.
THÉORÈME IX.2.1
Le nombre de bijections d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n, est $n!$.

Exercice IX.2.2. ***Un groupe de six personnes décide de s'asseoir autour d'une table à six places. De combien de façons les individus peuvent ils se répartir autour de la table ?***
Solution *Chaque répartition est une bijection entre l'ensemble des individus et l'ensemble des places, il y a donc* $6!$ *répartitions possibles, c'est-à-dire :* 720. □

Remarque *Deux ensembles images l'un de l'autre par une bijection ont même cardinal.*

DÉFINITION IX.2.2
Une *permutation* d'un ensemble E est une bijection de E vers E.

Remarque *Si* $\text{card}(\text{E}) = n$*, alors il y a* $n!$ *permutations de E.*

IX.3 Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments

IX.3.1 Tirages successifs avec remise

Exercice IX.3.1. ***Une urne contient*** n ***billes, numérotés de*** 1 ***à*** n***.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
$\vdots$
On choisit une p***-ième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.***
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution

1re *méthode* *L'ensemble des choix possibles est* E^p*, il y en a donc :* $\text{card}\left(\text{E}^p\right) = n^p$.

2e *méthode* *On a* n *possibilités pour le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le deuxième tirage.*
$\vdots$
On a n *possibilités pour le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le* p*-ième tirage.*
Soit au total : n^p *choix possibles.* □

THÉORÈME IX.3.1

Lorsqu'on pratique le tirage *successif avec remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\text{card}\left(\text{E}^p\right) = n^p$.

Remarque *On peut avoir :* $p > n$.

Exercice IX.3.2. ***Dans une classe de*** 17 ***élèves on doit choisir un responsable du cahier de texte par semaine et ceci pour les*** 33 ***semaines de cours. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des élèves de la classe. Les répartitions possibles sont les* 33*-uplets d'éléments de E (l'ensembles des répartitions possibles est donc* E^{33}*) ; il y a donc :* 17^{33} *; répartitions possibles, c'est-à-dire :* 40 254 497 110 927 943 179 349 807 054 456 171 205 137. □

IX.3.2 Tirages successifs sans remise

Exercice IX.3.3. ***Une urne contient*** n ***billes, numérotés de*** 1 ***à*** n***.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
$\vdots$
On choisit une p***-ième bille*** $(p \leqslant n)$***, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.***
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution *On a* n *possibilités le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-1$ *possibilités le deuxième tirage.*
$\vdots$
On a $n-p+1$ *possibilités le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-p$ *possibilités le* p*-ième tirage.*
Soit au total : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *choix possibles.* □

THÉORÈME IX.3.2

Lorsqu'on pratique le tirage *successif sans remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque *On a nécessairement :* $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice IX.3.4. ***Une course de chevaux, pour le tiercé, a 17 partants. Combien a t-on d'arrivées possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des chevaux. Les arrivées possibles sont les triplets d'éléments* distincts *de E ; il y a donc :* $\dfrac{17!}{(17-3)!}$ *; arrivées possibles, c'est-à-dire :* $17 \times 16 \times 15 = 4\,080$. □

Remarque *Lorsque $p = n$, un tirage est une bijection de E vers $\{1\,;2\,;\cdots\,;n\}$ et on obtient $n!$ tirages possibles.*

IX.3.3 Combinaisons - Tirages simultanés

IX.3.3.a Combinaisons

DÉFINITION IX.3.1

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

Exemple *Pour $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$.*
Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a, b\}$ *;* $\{a, c\}$ *;* $\{b, c\}$.

Remarques
1. *Dans un ensemble, les éléments sont deux à deux distincts.*
Ainsi $\{a, b, a\}$ n'est pas un ensemble car il contient deux fois a.
2. *Deux ensembles qui contiennent les mêmes éléments sont égaux.*
Ainsi : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Notation Le nombre de parties (i.e. de combinaisons) de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exemples

1. *De l'exemple ci-dessus, on déduit que :* $\binom{3}{2} = 3$ *;*

2. *E est un ensemble à n éléments. Il n'existe qu'une partie de E qui contient zéro élément, c'est l'ensemble vide, donc :* $\binom{n}{0} = 1$

3. *une seule partie de E contient n éléments, c'est E lui-même, donc :* $\binom{n}{n} = 1$ *;*

4. *il y a autant d'éléments que de singletons, donc :* $\binom{n}{1} = n$.

THÉORÈME IX.3.3

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration Soit A une combinaison de p éléments de E. Pour former avec les éléments de A un p-uplet d'éléments distincts on choisit quel élément sera le premier, quel élément (parmi les éléments restants) sera le deuxième et ainsi de suite. Choisir un p-uplet d'éléments distincts de A c'est donc se donner une bijection entre A et $\{1\,;\ldots\,;p\}$. On peut donc former $p!$ p-uplets d'éléments distincts de A. Plus généralement, avec chaque combinaison de p éléments de E on peut former $p!$ p-uplets d'éléments distincts. Or il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de E à p éléments, il y a donc en tout $p!\binom{n}{p}$ p-uplets d'éléments distincts de E. Donc, d'après le théorème IX.3.2 :

$$p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On en déduit que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

□

Exemples

1. $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!\times 6!} = \dfrac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3} = 3\times 4\times 7 = 84.$

2. $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{6!\times 43!} = \dfrac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} = 44\times 3\times 46\times 47\times 49 = 13\,983\,816.$

THÉORÈME IX.3.4

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

(1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

(2) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$

Démonstration Soit p et n deux entiers tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$;

(1) $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = \binom{n}{n-p}$;

(2)
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$
□

Exemples $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$; $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \binom{11}{7}$

Remarques *Les propriétés du théorème IX.3.4 se justifient également par des arguments intuitifs simples. Soit E un ensemble à n éléments.*

1. *Une combinaison de E a p éléments si et seulement si la combinaison complémentaire a $n-p$ éléments. Il y a donc autant de combinaisons de E à p éléments que de combinaisons de E à $n-p$ éléments.*

2. *Dans le cas où $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on choisit un élément fixé e. Les combinaisons de E à p éléments se répartissent en deux types ; celles qui contiennent e et celles qui ne contiennent pas e. Une combinaison contenant e est l'union de $\{e\}$ avec une combinaison de $\mathrm{E}\setminus\{e\}$ à $p-1$ éléments. Il y a donc $\binom{n-1}{p-1}$ combinaisons de E à p éléments contenant e.*

Une combinaison ne contenant pas e est une combinaison de $\mathrm{E}\setminus\{e\}$ à p éléments. Il y a donc $\binom{n-1}{p}$ combinaisons de E à p éléments ne contenant pas e ; d'où : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

IX.3.3.b Triangle de Pascal

On sait que pour $0 < p < n$, on a :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}.$$

Ce résultat permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche, en formant le triangle de Pascal [1] à l'aide du schéma suivant :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$
$$\shortparallel$$
$$\binom{n}{p}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	⋯
0	**1**						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮						⋱

IX.3.3.c Tirages simultanés

Choisir p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E c'est se donner une combinaison de E à p éléments ; il y a donc $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n.

Exercice IX.3.5. ***25 individus doivent choisir trois d'entre eux pour les représenter. De combien de façon peuvent-ils choisir leurs trois représentants ?***

Solution *Les choix possibles sont les combinaisons de trois individus parmi les* 25 *du groupe, il y a donc* $\binom{25}{3}$ *choix possibles ; c'est-à-dire :* 2300. □

IX.3.3.d La formule du binôme de NEWTON

THÉORÈME IX.3.5 **FORMULE DU BINÔME DE NEWTON** [2]

Soit a et b deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel ($n \neq 0$ si $a+b=0$). On a :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p.$$

Démonstration Raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n=0$, on a : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p\binom{0}{0}a^0b^0=1=(a+b)^0$;

L'égalité est donc vraie pour $n=0$.

Pour $n=1$, on a : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b=(a+b)^1$;

L'égalité est donc vraie également pour $n=1$.

Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire : $(a+b)^k=\sum_{p=0}^{k}\mathrm{C}_k^p a^{k-p}b^p$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k\\
&= (a+b)\left(\mathrm{C}_k^0a^k+\mathrm{C}_k^1a^{k-1}b+\mathrm{C}_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^k\right)\\
&= \left(\mathrm{C}_k^0a^{k+1}+\mathrm{C}_k^1a^kb+\mathrm{C}_k^2a^{k-1}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kab^k\right)+\left(\mathrm{C}_k^0a^kb+\mathrm{C}_k^1a^{k-1}b^2+\mathrm{C}_k^2a^{k-2}b^3+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^{k+1}\right)\\
&= \mathrm{C}_k^0a^{k+1}+\left(\mathrm{C}_k^0+\mathrm{C}_k^1\right)a^kb+\cdots+\left(\mathrm{C}_k^{p-1}+\mathrm{C}_k^p\right)a^{k-p+1}b^p+\cdots+\left(\mathrm{C}_k^{k-1}+\mathrm{C}_k^k\right)ab^k+\mathrm{C}_k^kb^{k+1}\\
&= \mathrm{C}_{k+1}^0a^{k+1}+\mathrm{C}_{k+1}^1a^kb+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^pa^{k-p+1}b^p+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^kab^k+\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}b^{k+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}^pa^{k+1-p}b^p
\end{aligned}$$

1. Blaise PASCAL (1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe français.
2. Isaac NEWTON (1642 - 1727), mathématicien, physicien et astronome anglais.

Ou encore : $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$$
\begin{aligned}
&= (a+b)\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p \\
&= a\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p + b\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p \\
&= \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + \sum_{p=1}^{k+1} C_k^{p-1}\, a^{k-p+1} b^p \\
&= C_k^0\, a^{k-0+1} b^0 + \sum_{p=1}^{k} \left(C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + C_k^{p-1}\, a^{k-p+1} b^p \right) + C_k^k\, a^{k-(k+1)+1} b^{k+1} \\
&= C_{k+1}^0\, a^{k+1-0} b^0 + \sum_{p=1}^{k} \left(C_{k+1}^p\, a^{k-p+1} b^p \right) + C_{k+1}^{k+1}\, a^{k+1-(k+1)} b^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p\, a^{k+1-p} b^p
\end{aligned}
$$

Donc, par récurrence, la formule du binôme de Newton est démontrée. □

Remarques

1. *Cette formule explique le nom de « coefficients binomiaux » donné aux nombres* $\binom{n}{p}$.

2. *La formule du binôme de Newton peut également être établie à partir de considérations plus intuitives. Fixons n, on a :*

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n \text{ facteurs}}. \tag{IX.1}$$

$a+b$ est une somme de monômes de degré 1 en a et b donc $(a+b)^n$ est une somme de monômes de degré n en a et b ; c'est-à-dire de monômes de la forme : $\alpha_p a^{n-p} b^p$; en observant la formule (IX.1) on remarque que α_p est le nombre de fois où apparaît $a^{n-p} b^p$ dans le développement. Or les monômes $a^{n-p} b^p$ apparaissent lorsqu'on prend a dans $n-p$ facteurs et b dans les p facteurs restants. Par conséquent, il y a autant de monômes $a^{n-p} b^p$ dans le développement qu'il y a de façons de choisir $n-p$ facteurs parmi n ; c'est-à-dire : $\binom{n}{n-p}$; ou encore : $\binom{n}{p}$; donc : $\alpha_p = \binom{n}{p}$; puis :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemples

1. $(2+i)^6 = \binom{6}{0}2^6 + \binom{6}{1}2^5 i + \binom{6}{2}2^4 i^2 + \binom{6}{3}2^3 i^3 + \binom{4}{2}2^2 i^4 + \binom{6}{5}2^1 i^5 + \binom{6}{6}2^0 i^6$

$= 1\times 64 + 6\times 32i + 15\times 16\times(-1) + 20\times 8\times(-i) + 15\times 4\times 1 + 6\times 2\times i + 1\times 1\times(-1)$

$= -117 + 44i$

2. $(1+\sqrt{2})^5 = 1 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5$

$= 1 + 5\sqrt{2} + 10\times 2 + 10\times 2\sqrt{2} + 5\times 4 + 4\sqrt{2}$

$= 41 + 29\sqrt{2}$

COROLLAIRE IX.3.6

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de parties de E est : 2^n

Démonstration Pour tout entier p tel que : $0 \leqslant p \leqslant n$; le nombre de parties de E à p éléments est : $\binom{n}{p}$. Donc :

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{0}1^n\times 1^0 + \binom{n}{1}1^1\times 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1}\times 1^1 + \binom{n}{n}1^0\times 1^n = (1+1)^n = 2^n$$ □

Remarque *On aurait pu obtenir cette propriété sans utiliser la formule du binôme du Newton. En effet, numérotons les éléments de E de 1 à n. Considérons une partie A de E, à chaque numéro associons $\in$ si l'élément correspondant appartient à A et $\notin$ sinon, on associe ainsi à A un n-uplet d'éléments de $\{\in, \notin\}$. En répétant le procédé pour toutes les parties de A de E, on met en bijection l'ensemble des parties de E avec l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{\in, \notin\}$; d'où :* $\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.

IX.3.4 Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous récapitule les façons de calculer le cardinal de l'univers dans les principaux cas.

	Tirages successifs de p éléments parmi n	Tirage simultané de p éléments parmi n
avec remise	n^p	$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
sans remise	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$	

TABLE IX.1 – Tableau récapitulatif

Chapitre X

Calcul des probabilités

X.1 Calculs de probabilités

X.1.1 Vocabulaire des événements

X.1.1.a Expérience aléatoire

- Lorsqu'on lance un dé, six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  On dit qu'on a réalisé une *expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant 6 *éventualités* ou *issues* et que l'*univers* associé a cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- Le lancer de deux pièces de monnaies distinctes est une expérience aléatoire comportant 4 éventualités. L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$.

Dans la première moitié de ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

X.1.1.b Événements liés à une expérience aléatoire

DÉFINITIONS X.1.1

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

(1) On appelle *événement* toute partie de Ω.

(2) On appelle *événement élémentaire* tout singleton de Ω.

Exemples *Dans le lancer d'un dé :*

1. *« obtenir un nombre pair » est l'événement* $\{2;4;6\}$ *;*

2. *« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire* $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient « 4 » lors d'un lancer de dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.

Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

Vocabulaire des événements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité ou issue	Élément de Ω	ω $(\omega \in \Omega)$
Événement	Partie de Ω	$A(A \subset \Omega)$
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}(\omega \in \Omega)$
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\varnothing$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \varnothing$
Événement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

Exemples *Dans le lancer d'un dé, on considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».*

1. *On a :* $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$ *;* $A \cup B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».*

2. *On a :* $A \cap B = \{2\}$ *;* $A \cap B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».*

3. *Les événements B et C sont incompatibles.*

4. *On a :* $\bar{A} = \{1;3;5\}$ *;* $\bar{A}$ *est l'événement : « obtenir un nombre impair ».*

X.1.2 Probabilité d'un événement

X.1.2.a Introduction

On lance un dé bien équilibré ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1;5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé, on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2;4;6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé ; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé ; sa probabilité est 0.

DÉFINITION X.1.2

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une *probabilité* sur l'univers Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarques

1. *La probabilité de l'événement élémentaire* $\{\omega\}$ *est notée* $P(\omega)$.
2. *Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.*

ω	ω_1	$\cdots$	ω_i	$\cdots$	ω_n
$P(\omega)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Exemples *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*
La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.
1. *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*
L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. *Soit p la probabilité d'apparition d'un nombre pair et q celle d'un nombre impair.*
On a : $p = 2q$.
Or : $P(\Omega) = 1$ *; donc :* $3p + 3q = 1$.
On en déduit que : $q = \frac{1}{9}$ *et* $p = \frac{2}{9}$.
Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P(\omega)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. *Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?*
La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1;2;3;4\}$.
On a : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{2}{3}$.

X.1.2.b Équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité*.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

THÉORÈME X.1.1

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Démonstration Les événements élémentaires ont tous la même probabilité, soit p cette probabilité. On a : $P(\Omega) = 1$; donc : $p\,\text{card}(\Omega) = 1$; d'où : $p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

On en déduit que pour tout événement A, on a : $P(A) = p\,\text{card}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. □

Remarque *Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de Ω, cas possibles.*
On écrit souvent : $P(A) = \dfrac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$.

Exercice X.1.1. ***On lance deux dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus.***
Quelle est la probabilité d'obtenir 10 ?

Solution *L'univers Ω est l'ensemble des couples d'éléments de :* $\{1;2;3;4;5;6\}$.
On a : $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$. *« Obtenir 10 » est l'événement :* $\{(4;6),(5;5),(6;4)\}$.
On est dans une situation d'équiprobabilité (dés parfaits), donc la probabilité cherchée est : $\dfrac{1}{12}$. □

Exercice X.1.2. ***On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.***
Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?

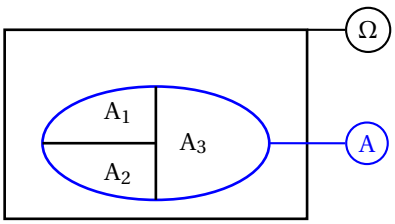
Solution *L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes d'un jeu de 32, donc :* $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = 201\,376$.
Les cartes sont tirées au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
Soit A l'événement : « tirer le roi de cœur ». Réaliser A c'est choisir le roi de cœur puis tirer 4 cartes parmi les 31 cartes restantes ; donc : $\text{card}(A) = \binom{31}{4} = 31\,465$.
La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{31\,465}{201\,376} = \dfrac{5}{32} = 0{,}156\,25$. □

X.1.2.c Propriétés

THÉORÈME X.1.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :
(1) si $A \cap B = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Démonstration
(1) Si l'un (au moins) des événements A ou B est impossible, alors la propriété est évidente. En effet si $A = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(\varnothing \cup B) = P(B)$ et $P(A) + P(B) = P(\varnothing) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$.
Si les deux événements sont possibles, alors quitte à numéroter à nouveau les éventualités on peut supposer que : $A = \{\omega_1;\ldots;\omega_p\}$ et $B = \{\omega_{p+1};\ldots;\omega_q\}$.
On a alors : $A \cup B = \{\omega_1;\ldots;\omega_q\}$;
d'où : $P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(\omega_i) + \sum_{i=p+1}^{q} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{q} P(\omega_i) = P(A \cup B)$.
(2) Pour $B = \bar{A}$, on obtient : $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. □

Remarque *Plus généralement, par récurrence, on déduit de* ***(1)*** *que si* A_1, …, A_n *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :* $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
Ce qui peut également s'écrire : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.



On en déduit le théorème suivant.

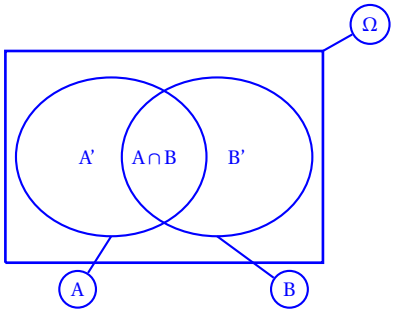
THÉORÈME X.1.3 **THÉORÈME FAIBLE DES PROBABILITÉS TOTALES**
Si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ est une partition [1] d'un événement A, alors :
$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

THÉORÈME X.1.4
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et A, B deux événements.
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration

Notons A' le complémentaire de $A\cap B$ dans A et B' le complémentaire de $A\cap B$ dans B.
On a : $A = (A\cap B)\cup A'$, avec $(A\cap B)\cap A' = \varnothing$;
donc : $P(A) = P(A\cap B) + P(A')$.
On a : $B = (A\cap B)\cup B'$, avec $(A\cap B)\cap B' = \varnothing$;
donc : $P(B) = P(A\cap B) + P(B')$.
Tout élément de $A\cup B$ est soit élément de A mais pas de B, soit élément de B mais pas de A soit élément des deux. $\{A', A\cap B, B'\}$ est donc une partition de $A\cup B$. On en déduit que : $P(A\cup B) = P(A') + P(B') + P(A\cap B)$.

$$P(A\cup B) = \big(P(A') + P(A\cap B)\big) + \big(P(B') + P(A\cap B)\big) - P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cup B)$$
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



□

Exercice X.1.3. ***Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on désigne par N son numéro. On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».***

1. Déterminer la probabilité des événements A, B et $A\cap B$.

2. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A\cup B$.

Solution ***1.*** *L'univers est :* $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$;
La boule est tirée au hasard on a donc équiprobabilité.
Pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, *on a donc :* $P(\omega) = \dfrac{1}{15}$;
d'où : $P(A) = P(\{2;4;6;8;10;12;14\}) = \dfrac{7}{15}$; $P(B) = P(\{3;6;9;12;15\}) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$
et $P(A\cap B) = P(\{6;12\}) = \dfrac{2}{15}$.
2. *On a :* $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{8}{15}$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$;
et $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{7}{15} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{3}$. □

X.1.2.d Événements indépendants

DÉFINITION X.1.3

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Deux événements A et B sont *indépendants* lorsque : $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

Dans le cas contraire, A et B sont dits dépendants.

Exemples

1. *Dans une classe de* 36 *élèves, on aimerait savoir si les élèves littéraires sont meilleurs en sport que les élèves non littéraires.*

Un élève est déclaré littéraire lorsqu'il a obtenu la moyenne en français, sportif lorsqu'il a obtenu la moyenne en éducation physique et sportive. Le tableau ci-joint récapitule les résultats de l'enquête menée dans cette classe.

	Littéraires	*Non littéraires*	*Total*
Sportifs	*18*	*6*	*24*
Non sportifs	*9*	*3*	*12*
Total	*27*	*9*	*36*

TABLE *X.1 – sportifs & littéraires*

On choisit au hasard un élève et on considère les événements suivants.

S : « l'élève est sportif »
L : « l'élève est littéraire »

On a : $P(S) = \dfrac{2}{3}$; $P(L) = \dfrac{3}{4}$ *et* $P(S\cap L) = \dfrac{1}{2}$; *donc :*

$$P(S\cap L) = P(S)\times P(L)$$

Les événements S et L sont indépendants.
Si on choisit un littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est : $\dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$.
Si on choisit un non littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est encore : $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
Dans cette classe, les littéraires ne sont ni plus ni moins sportifs que les non littéraires.

2. *Une classe comprend* 15 *filles et* 21 *garçons.*

On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte, on obtient les résultats ci-contre. On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements F : « l'élève est une fille » et V : « l'élève est volontaire » .

	Filles	*Garçons*	*Total*
Volontaires	8	16	24
Non volontaires	7	5	12
Total	15	21	36

TABLE *X.2 – Volontaires par genre*

On a : $P(F) = \frac{5}{12}$ *;* $P(V) = \frac{2}{3}$ *et* $P(V \cap F) = \frac{2}{9}$ *; donc :*

$$P(F \cap V) \neq P(F) \times P(V)$$

Les événements F et V sont dépendants.

Si on choisit une fille au hasard, la probabilité pour qu'elle soit volontaire est : $\frac{8}{15}$.

Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité pour qu'il soit volontaire est : $\frac{16}{21}$.

Plus généralement, on définit l'indépendance de n événements.

DÉFINITION X.1.4

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont *indépendants* lorsque pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\{1; \ldots; n\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} P(A_{i_k}).$$

Remarque *Les considérations précédentes permettent de calculer la probabilité de* $A \cap B$ *lorsque A et B sont des événements indépendants. Cette indépendance peut être signalée dans l'énoncé. Mais elle peut aussi découler des conditions de l'expérience ; ainsi, il y a indépendance entre les résultats :*

- *de tirages successifs avec remise ;*
- *de jets successifs d'un dé, ou d'une pièce de monnaie.*

Exercice X.1.4. ***On joue à pile ou face avec une pièce tordue où la probabilité d'obtenir face est*** $\frac{1}{3}$ ***et celle d'obtenir pile*** $\frac{2}{3}$***. On lance neuf fois cette pièce. On désigne par*** F_1 ***l'événement « obtenir face au*** 1er ***lancer » puis*** F_2 ***…***

Quelle est la probabilité de l'événement (F_1 ***et*** F_2 ***et*** F_9***) ?***

Solution *Les événements* F_1, F_2 *et* F_9 *sont indépendants donc :*

$$P(F_1 \text{ et } F_2 \text{ et } F_9) = P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_9) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$ □

Exercice X.1.5. ***Un joueur de fléchettes dispose d'une cible carrée d'un mètre de côté. Il lance une fléchette, on suppose qu'il plante la fléchette dans la cible, mais n'importe où dans la cible. Ainsi la probabilité que la fléchette se plante dans une région R est l'aire, en mètre carré de cette région. Par abus de langage nous identifierons la région et l'événement correspondant. On considère les événements suivants. A ; B ; C ; D .***

1. Démontrer que les événements A, B, C et D sont deux à deux indépendants.

2. Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

3. Les événements A, B, C, D sont-ils indépendants ?

Solution 1. *Les aires des régions A, B, C, D représentent chacune la moitié de l'aire de la cible, donc :*

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$P(A) \times P(B) = P(A) \times P(C) = P(A) \times P(D) = P(B) \times P(C) = P(B) \times P(D) = P(C) \times P(D) = \frac{1}{4}$$

Les intersections sont définies par : $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cap D$; $B \cap C$; $B \cap D$; $C \cap D$.

Les aires de ces intersections représentent chacune le quart de l'aire de la cible aire ; donc :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A \cap D) = P(B \cap C) = P(B \cap D) = P(C \cap D) = \frac{1}{4}$$

Les événements A, B, C et D sont donc deux à deux indépendants.

2. *On sait déjà que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a comparer* $P(A) \times P(B) \times P(C)$ *avec* $P(A \cap B \cap C)$*. On a :* $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$.

$A \cap B \cap C$ *est la région :* ; *donc :* $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$.

Par conséquent les événements A, B, C sont indépendants.

3. *On sait déjà que les événements A, B, C, D sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a savoir si, lorsqu'on en choisit trois ou lorsqu'on choisit les quatre, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.*

D'après l'étude menée en ***1.*** *:* $A \cap D = B \cap D$ *; donc :* $A \cap B \cap D = A \cap D$ *; d'où :* $P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4}$.

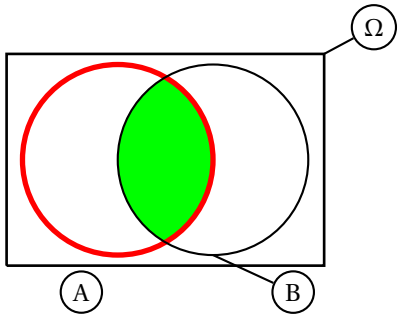
Or : $P(A) \times P(B) \times P(D) = \frac{1}{8}$.

Les événements A, B, C, D sont donc dépendants. □

X.1.3 Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, un univers Ω est muni d'une probabilité P.

X.1.3.a Introduction



Soit A et B deux événements $(P(A) \neq 0)$. On cherche à connaître la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On appellera *probabilité de B sachant A* cette probabilité et on la notera : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.
Pour répondre à cette question, il suffit en fait de prendre A comme nouvel univers. La probabilité sur ce nouvel univers est notée P_A. On doit avoir : $P_A(A) = 1$; on choisit donc de définir, pour tout événement B, $P_A(B)$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

DÉFINITION X.1.5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit A un événement de probabilité non nulle.

La probabilité sachant A, notée P_A, est la probabilité définie par : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Exemples *Reprenons les exemples de la définition X.1.3 (événements indépendants) page 134.*

1. *On choisit un élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'il soit sportif ?*

Solution

$$P_L(S) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

On remarque que : $P_L(S) = P(S)$.

2. *On choisit une élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'elle soit volontaire pour jouer au football ?*

Solution

$$P_F(V) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{2}{9} \times \frac{12}{5} = \frac{8}{15}.$$

□

On remarque que : $P_F(V) \neq P(V)$.

Remarque *Dans les exemples ci-dessus, les probabilités conditionnelles peuvent s'obtenir par lecture directs dans les tableaux X.1 et X.2 pages 134 et 135.*

THÉORÈME X.1.5

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) \neq 0$.

(1) A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.

(2) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

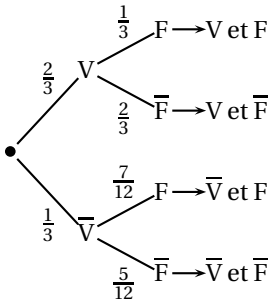
Démonstration

(1) $P_A(B) = P(B) \iff \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \iff P(A) \times P(B) = P(B \cap A)$.

(2) C'est une conséquence de la définition X.1.5. □

X.1.3.b Arbres pondérés

Pour schématiser une situation et effectuer rapidement les calculs demandés, on représente souvent la situation étudiée par un *arbre pondéré*.
L'arbre ci-contre représente le situation du tableau X.2 page 135.
D'après ce tableau :
$P(V) = \frac{2}{3}$; $P_{\overline{V}}(F) = \frac{7}{12}$; $P(\overline{V} \cap \overline{F}) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$.



Déterminer la probabilité des événements : $\overline{V} \cap \overline{F}$; $V \cap \overline{F}$; $V \cap F$ et $\overline{V} \cap F$.
Combien vaut la somme des probabilités des événements : $V \cap F$; $V \cap \overline{F}$; $\overline{V} \cap F$ et $\overline{V} \cap \overline{F}$.

Remarque *Un arbre pondéré est une représentation intuitive permettant une utilisation simplifiée du théorème X.1.5.*

X.1.3.c Théorème des probabilités totales

On se propose d'utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour déterminer P(F).
$\{V, \overline{V}\}$ est une partition de l'univers Ω, donc $\{V \cap F, \overline{V} \cap F\}$ est une partition de F. En utilisant le théorème faible des probabilités totales (théorème X.1.3 page 133) on en déduit que :

$$P(F) = P(V \cap F) + P(\overline{V} \cap F)$$

or :

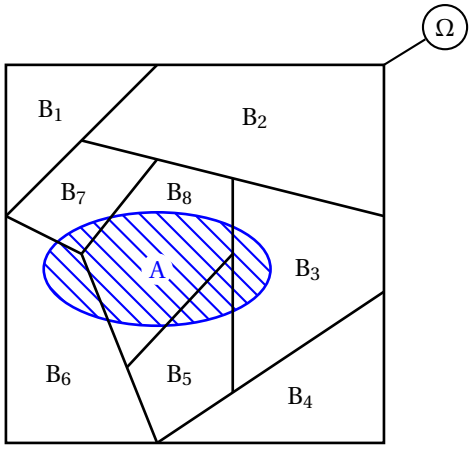
$$P(V \cap F) = P(V) \times P_V(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{36} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{V} \cap F) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(F) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

donc :

$$P(F) = \frac{5}{12}.$$

Plus généralement, si $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement A :
$\{B_1 \cap A, \ldots, B_n \cap A\}$; est une partition de A et on a :

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A).$$



On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME X.1.6 THÉORÈME DES PROBABILITÉS TOTALES

Si $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω telle que pour tout i : $P(B_i) \neq 0$;
alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{B_n}(A).$$

X.1.3.d Exercice résolu

Exercice X.1.6. ***Un sac contient 5 billes blanches et 8 billes noires, indiscernables au touché. On tire successivement et sans remise trois billes.***

1. Décrire l'univers.

2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au troisième tirage.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au deuxième tirage.

5. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille noire au deuxième tirage et une bille blanche au troisième tirage.

6. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu au deuxième tirage une bille noire, sachant que la bille obtenue au troisième tirage était blanche.

Solution 1. *À chaque tirage on peut obtenir soit une bille blanche (B) soit une bille noire (N). L'univers est donc l'ensemble des 3-listes d'éléments* {B, N} *où, par exemple,* (B, N, N) *représente l'éventualité : « tirer d'abord une bille blanche puis deux billes noires ».*

2. *Désignons par B_1 l'événement : « obtenir une bille blanche au 1er tirage » et définissons de même B_2, B_3, N_1, N_2 et*

N_3. Les billes sont indiscernables au touché, on a donc équiprobabilité à chaque tirage ; ce qui signifie qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une couleur est le quotient du nombre de billes de cette couleur par le nombre total de billes dans le sac.

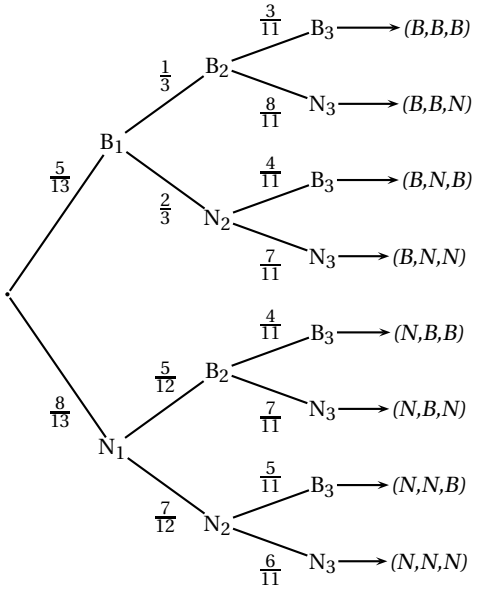
8 billes noires ; donc : $P(B_1) = \frac{5}{13}$ *et* $P(N_1) = \frac{8}{13}$.

Si B_1 est réalisé il reste alors 4 billes blanches et 8 billes noires dans le sac ; d'où : $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$ *et* $P_{B_1}(N_2) = \frac{2}{3}$.

En poursuivant ce raisonnement jusqu'à l'élimination de tous les cas possibles, on obtient l'arbre pondéré ci-contre dont on déduit par exemple que :

$P(B,N,N) = \frac{5}{13} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{11} = \frac{70}{429}$.

En procédant de même pour toutes les éventualités, on obtient l'arbre pondéré ci-contre d'où l'on tire le tableau ci-dessous.



Événement	(B,B,B)	(B,B,N)	(B,N,B)	(B,N,N)
Probabilité	$\frac{15}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$
Événement	(N,B,B)	(N,B,N)	(N,N,B)	(N,N,N)
Probabilité	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{84}{429}$

3. *On a :* $B_3 = \{(B,B,B),(B,N,B),(N,B,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(B_3) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

4. *On a :* $B_2 = \{(B,B,B),(B,B,N),(N,B,B),(N,B,N)\}$ *; donc :*

$$P(B_2) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

5. *On a :* $N_2 \cap B_3 = \{(B,N,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(N_2 \cap B_3) = \frac{40+70}{429} = \frac{10}{39};$$

6.

$$P_{B_3}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{10}{39} \times \frac{13}{5} = \frac{2}{3};$$

□

X.2 Variable aléatoire

X.2.1 Introduction

On lance deux dés bien équilibrés (un vert et un rouge) et on s'intéresse à la somme, X, obtenue.

L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de {1;2;3;4;5;6} donc : card (Ω) = 36 ; les dés étant bien équilibrés, chaque événement élémentaire a la même probabilité : $\frac{1}{36}$. L'ensemble des valeurs possible de X est : {2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12}. On désigne par : X = 2 ; l'événement : « la somme obtenue est 2 ». Afin de mieux connaître la « loi de probabilité de X », on dresse le tableau ci-contre. L'événement : X = 8 ; est réalisé 5 fois, donc : $P(X=8) = \frac{5}{36}$.

En procédant de même pour tout les valeurs possibles de X, on obtient le tableau ci-dessous.

r \ v	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

DÉFINITION X.2.1

On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

1. X(Ω) *est appelé* univers image *de* Ω *par X.*

2. *(*X = x_i*) désigne l'événement « X prend la valeur* x_i *».*

3. *(*X ⩽ *a) désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égal à a ».*

DÉFINITION X.2.2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe P(X = x_i).

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau

et il recommandé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	⋯	x_n
P(X = x_i)	p_1	p_2	⋯	p_n

X.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

DÉFINITION X.2.3

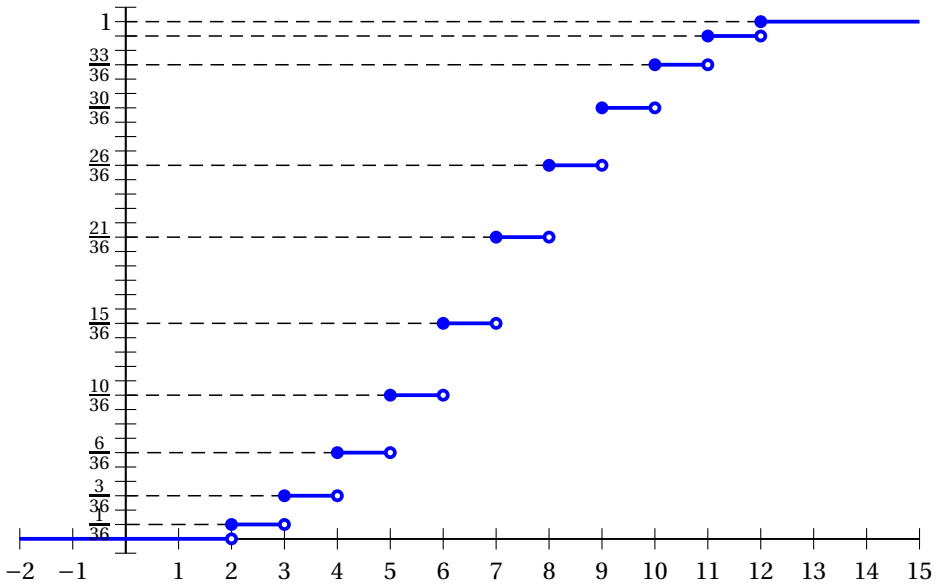
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.

La fonction de répartition de X est l'application F de ℝ vers [0,1] définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple *Reprenons l'exemple introductif ; F est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 2; \\ \frac{1}{36} & \text{, si } 2 \leqslant x < 3; \\ \frac{3}{36} & \text{, si } 3 \leqslant x < 4; \\ \frac{6}{36} & \text{, si } 4 \leqslant x < 5; \\ \frac{10}{36} & \text{, si } 5 \leqslant x < 6; \\ \frac{15}{36} & \text{, si } 6 \leqslant x < 7; \\ \frac{21}{36} & \text{, si } 7 \leqslant x < 8; \\ \frac{26}{36} & \text{, si } 8 \leqslant x < 9; \\ \frac{30}{36} & \text{, si } 9 \leqslant x < 10; \\ \frac{33}{36} & \text{, si } 10 \leqslant x < 11; \\ \frac{35}{36} & \text{, si } 11 \leqslant x < 12; \\ 1 & \text{, si } 12 \leqslant x. \end{cases}$$



Remarques

1. *F est une fonction en escalier, définie et croissante sur* ℝ.

2. *La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.*

X.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

X.2.3.a Espérance mathématique

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?

Désignons par X le gain, en euros, du joueur pour une partie. S'il obtient 6 on lui rembourse 36, il a donc gagné 20 euros.

L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5,\ 6\}$;
l'univers image est donc :
$X(\Omega) = \{-15;-12;-7;0;9;20\}$.
Le dé étant bien équilibré, on a équiprobabilité sur l'univers et donc, ici, sur l'univers image ; on en déduit la loi de probabilité de X.

x_i	-15	-12	-7	0	9	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sur un 600 parties un joueur réalisera en moyenne 100 fois chaque événement élémentaire. Le gain moyen par partie sera donc :

$$\frac{1}{600}\big(100\times(-15)+100\times(-12)+100\times(-7)+100\times 0+100\times 9+100\times 20\big) = -\frac{5}{6}$$

On peut donc espérer perdre en moyenne $\frac{5}{6}$ € par partie.
On remarque que : $\frac{5}{6} = -15\times\frac{1}{6} - 12\times\frac{1}{6} - 7\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 20\times\frac{1}{6}$.
Plus généralement, on a la définition suivante.

DÉFINITION X.2.4

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1,\dots,x_n$ avec les probabilités respectives $p_1,\dots,p_n$.
On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Remarques

1. *L'espérance mathématique est l'équivalent, en probabilité, de la moyenne en statistique.*
2. *L'espérance est donc une caractéristique de position.*
3. *Pour une variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$, ($x_1 = \cdots = x_n = \lambda$) on a :* $E(\lambda) = \lambda$.
4. *Pour calculer l'espérance d'un variable aléatoire, il peut-être commode de reprendre la tableau de la loi de probabilité de la façon suivante.*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	*Total*
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1
x_ip_i	x_1p_1	x_2	$\cdots$	x_np_n	*E(X)*

Exercice X.2.1. ***Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X = n)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = 7$

L'espérance mathématique de X est donc : 7. □

X.2.3.b Variance, écart type

La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. Dans une classe un devoir a été donné dans deux matières, on choisit un élève au hasard et on désigne par X sa note dans la première matière et par Y sa note dans la seconde matière. Les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-contre.

n	10
$P(X = n)$	1

n	0	20
$P(Y = n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans les deux cas l'espérance est 10 et pourtant les résultats de la classe dans les deux matières sont, en un certain sens, opposés : dans la première tous les élèves ont 10 et dans la seconde les notes sont réparties aux extrêmes.

DÉFINITIONS X.2.5

Soit X une variable aléatoire.

(1) On appelle *variance* de X le nombre réel, noté V(X), défini par : $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.

(2) On appelle *écart type* de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

1. *La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*
2. *La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.*

3. *La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.*

X.2.3.c Propriétés de l'espérance et de la variance

THÉORÈME X.2.1

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et λ un réel.

(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
(2) $E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$;
(3) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$;
(4) $E(X - E(X)) = 0$;
(5) $V(X+\lambda) = V(X)$;
(6) $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Démonstration Notons ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les éventualités et p_i les probabilités des événements élémentaires associés.

(1) On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i$ et $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i$.

De même : $E(X+Y) \sum_{i=1}^{n} (X+Y)(\omega_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} \big(X(\omega_i)p_i + Y(\omega_i)p_i\big) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i = E(X) + E(Y)$.

(2) On déduit **(2)** de **(1)** en prenant pour Y la variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$.

(3) $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda X(\omega_i)p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i = \lambda E(X)$.

(4) D'après **(2)** (avec $\lambda = -E(X)$) : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

(5) $V(X+\lambda) = E\Big(\big(X+\lambda - E(X+\lambda)\big)^2\Big) = E\Big(\big(X+\lambda - E(X) - \lambda\big)^2\Big) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = V(X)$.

(6) $V(\lambda X) = E\Big(\big(\lambda X - E(\lambda X)\big)^2\Big) = E\Big(\big(\lambda X - \lambda E(X)\big)^2\Big) = E\Big(\lambda^2\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \lambda^2 E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \lambda^2 V(X)$. □

Remarques

1. *En pratique toutes ces propriétés sont naturelles, afin de les illustrer prenons pour univers une classe où un devoir a été donné ; la moyenne de la classe est* 5 *et la variance* 3*. On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un élève et désigne par X sa note. X est une variable aléatoire et on a :* $E(X) = 5$ *et* $V(X) = 3$.

Si on décide d'ajouter 1 *point à chaque élève, alors la moyenne augmentera de* 1 *point :* $E(X+1) = E(X) + 1 = 6$.

En revanche le fait d'ajouter 1 point à chaque élève ne changera pas la façon dont les notes sont réparties autour de la moyenne, c'est-à-dire : $V(X+1) = V(X)$.

Si on décide de multiplier par 2 *la note de chaque élève, alors la moyenne sera multipliée par* 2 *elle aussi :* $E(2X) = 2E(X) = 10$. *De plus en multipliant par* 2 *les notes, on multiplie également par* 2 *les écarts à la moyenne et donc par 4 leur carré ; par conséquent :* $V(2X) = 4V(X)$.

2. *Pour donner un sens intuitif à la propriété* ***(1)*** *gardons l'exemple de la classe. Un devoir constitué d'un exercice sur* 7 *points et d'un problème sur* 13 *points à été donné. Cette fois-ci X désigne la note obtenue à l'exercice et Y la note obtenue au problème. La note obtenue au devoir est alors* $X+Y$*. La moyenne de la classe au devoir est la somme des moyennes de l'exercice et du problème :* $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

3. *On déduit des deux dernières propriétés que :* $\sigma(X+\lambda) = \sigma(X)$ *et* $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$.

4. *On déduit des propriétés* ***(1)*** *et* ***(3)*** *que pour tous réels* α, β *; on a :* $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

On dit que l'espérance est linéaire.

D'après le théorème X.2.1 l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances. Il est donc naturelle de se demander s'il n'en est pas de même pour le produit. Prenons un exemple.

On dispose de deux rectangles, les dimensions de l'un sont 2 par 3 et celles de l'autre sont 4 par 5.

On choisit un rectangle au hasard et on désigne par ℓ sa largeur et L son longueur. L'aire est donc la variable aléatoire $L\ell$.

La moyenne des largeurs est : $E(\ell) = 3$.

La moyenne des longueurs est : $E(L) = 4$.

Les aires sont 6 et 20 donc : $E(L\ell) = 13$.

On constate, ici, que : $E(L\ell) \neq E(L) \times E(\ell)$.

Nous avons précédemment remarqué que la définition de la variance ne conduisait pas à un calcul aisé. le théorème suivant remédie à cette carence.

THÉORÈME X.2.2 FORMULE DE KÖNIG [2]

Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E\big(X^2\big) - E^2(X)$.

2. KÖNIG, Johann Samuel (1712–1757)

Démonstration Par définition :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\alpha}X + \underbrace{E^2(X)}_{\beta}).$$

Donc par linéarité et d'après le propriété **(2)** du théorème X.2.1 :

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X);$$

d'où l'on tire : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$. □

Exercice X.2.2. ***Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X=n)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{21}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{18}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{6}{18}$	$E(X) = 7$
$n^2P(X=n)$	$\frac{2}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{50}{18}$	$\frac{90}{18}$	$\frac{147}{18}$	$\frac{160}{18}$	$\frac{162}{18}$	$\frac{150}{18}$	$\frac{121}{18}$	$\frac{72}{18}$	$E(X^2) = \frac{329}{6}$

La variance de X est donc : $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$.

On en déduit l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$. □

X.2.4 Variables aléatoires indépendantes

X.2.4.a Loi produit

DÉFINITION X.2.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.

La *loi couple* (X,Y) est l'application de $X \times Y$ vers $[0;1]$ qui à tout couple (x_i, y_j) associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$.

Exercice X.2.3. ***On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :***

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;} \\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{, si } \omega \text{ est un nombre premier;} \\ 10 & \text{, si } \omega \text{ n'est pas premier.} \end{cases}$$

Déterminer la loi couple (X, Y).

Solution *Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.3. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi couple (X, Y) est donc déterminée par le tableau X.4. Pour construire ce dernier, on utilise le tableau X.3 :* $(X = 1 \text{ et } Y = 5) = \{3;5\}$ *; donc :* $P(1;5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	10	5	5	10	5	10
(X,Y)(ω)	(1;10)	(0;5)	(1;5)	(0;10)	(1;5)	(0;10)

TABLE *X.3 – Images de Ω par X, Y et (X, Y).*

X \ Y	5	10
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABLE *X.4 – Loi couple de (X, Y).*

□

Remarques

1. *La loi couple est aussi appelée* loi de probabilité conjointe *ou* loi de probabilité simultanée *ou encore* loi de probabilité produit *; les probabilités contenues dans le tableau X.4 sont alors appelées* probabilités conjointes *ou* probabilités simultanées.

2. *Dans le tableau X.4 si on ajoute une ligne et une colonne « Total », on obtient le tableau X.5 où les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y apparaissent dans les marges. Ces lois sont alors appelées* lois marginales

X \ Y	5	10	Total
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{2}$	$P(Y=10)=\frac{1}{2}$	1

TABLE X.5 – Lois marginales.

X.2.4.b Variables aléatoires indépendantes

Exemples

1. *Reprenons l'exemple du § X.2.4.a. D'après le tableau X.5 on constate que les événements* $(X=0)$ *et* $(Y=5)$ *sont dépendants ; en effet :* $P(X=0 \text{ et } Y=5)=\frac{1}{6}$ *et* $P(X=0)\times P(Y=5)=\frac{1}{4}$.
On dit alors que les variables X et Y sont dépendantes.

2. *On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :*

$$X(\omega)=\begin{cases}0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;}\\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.}\end{cases}$$

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	5	5	10	10	10	10
(X,Y)(ω)	(1;5)	(0;5)	(1;10)	(0;10)	(1;10)	(0;10)

TABLE *X.6 – Images de Ω par X, Y et (X, Y)*

$$Y(\omega)=\begin{cases}5 & \text{, si } \omega \leqslant 2;\\ 10 & \text{, si } 2<\omega.\end{cases}$$

Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.6. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi conjointe et les lois marginales sont déterminée par le tableau X.7.

X \ Y	5	10	*Total*
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=1)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{3}$	$P(Y=10)=\frac{2}{3}$	1

TABLE *X.7 – Loi couple de (X, Y).*

On constate que chaque probabilités conjointe est le produit des probabilités marginales associées ; par exemple : $P(X=0 \text{ et } Y=10)=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=P(X=0)\times P(Y=10)$.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION X.2.7

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $Y(\Omega)=\{y_1,\cdots,y_q\}$ leurs univers images respectifs.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$ et tout $y\in Y(\Omega)$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants.

Remarques

1. *La condition d'indépendance peut s'écrire également, pour tout* $x\in X(\Omega)$ *et tout* $y\in Y(\Omega)$ *:*

$$P\big(X=x \text{ et } Y=y\big)=P(X=x)\times P\big(Y=y\big)$$

ou encore, pour tout $\omega\in\Omega$ *:*

$$P(X=X(\omega) \text{ et } Y=Y(\omega))=P(X=X(\omega))\times P(Y=Y(\omega))$$

2. *Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si le tableau de leur loi conjointe est un tableau de proportionnalité.*

THÉORÈME X.2.3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.

(1) $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

(2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration Le formalisme utilisé dans cette démonstration n'est pas au programme de terminale, c'est démonstration peut donc être omise en première lecture et est de toute façon réservée à des lecteurs motivés.

(1)
$$\begin{aligned} E(X) \times E(Y) &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x) \right) \times E(Y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times E(Y) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[x\,P(X=x) \times \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,P(Y=y) \right] \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times y\,P(Y=y) \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \left[xy\,P(X=x \text{ et } Y=y) \right] \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

(2) **(2)** se déduit de **(1)** en utilisant la linéarité de l'espérance et la formule de König.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 && \text{(formule de König)} \\ &= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E(X)+E(Y)\right)^2 \\ &= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E^2(X)+E^2(Y)+2E(X)E(Y)\right)^2 \\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) && \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) && \text{(d'après 1)} \\ &= V(X) + V(Y) && \text{(formule de König)} \end{aligned}$$

□

X.3 Lois de probabilités discrètes

X.3.1 Loi binomiale

X.3.1.a Schéma de Bernoulli

DÉFINITION X.3.1

On appelle *épreuve de Bernoulli* une épreuve à deux issues possibles.

Exemple *On lance un dé bien équilibré et on cherche à faire un* 1. *Désignont par S l'événement : « obtenir* 1 *» ; et par* $\overline{S}$ *l'événement contraire. On a ici :* $P(S) = \frac{1}{6}$ *et* $P\left(\overline{S}\right) = \frac{5}{6}$.

Remarque *Il est d'usage d'appeler succès l'issue recherchée et de la noter S.*

DÉFINITION X.3.2

On appelle *expérience* ou *schéma de Bernoulli* la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

X.3.1.b Loi binomiale

DÉFINITION X.3.3

On appelle *loi binomiale* de paramètres n et p la loi de probabilité de la variable aléatoire désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'épreuve de Bernoulli a été répétée n fois et où la p désigne la probabilité de succès à une épreuve.

Notations et vocabulaire *Cette loi de probabilité est notée :* $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple *Reprenons le jeu de dés où il faut faire un as. On lance quatre fois le dé et on et on désigne par X le nombre de succès. la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres* 4 *et* $\frac{1}{6}$. *Déterminons la probabilité de l'événement* $(X=2)$.
On a : $(X=2) = \left\{(S,S,\bar{S},\bar{S}), (S,\bar{S},\bar{S},S), (S,\bar{S},S,\bar{S}), (\bar{S},S,S,\bar{S}), (\bar{S},S,\bar{S},S), (\bar{S},\bar{S},S,S)\right\}$.
Considérons les événements S_1, $\bar{S}_1$, …, S_4, $\bar{S}_4$ *où, par exemple,* S_3 *désigne l'événement : « obtenir un succès au troisième lancé ». On a alors :* $\left\{(S,S,\bar{S},\bar{S})\right\} = S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4$. *Les résultats des différents lancés sont indépendants donc :*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\mathrm{S},\mathrm{S},\bar{\mathrm{S}},\bar{\mathrm{S}}\right) &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\cap\mathrm{S}_2\cap\bar{\mathrm{S}}_3\cap\bar{\mathrm{S}}_4\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)\times\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{S}}_3\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{S}}_4\right)\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\\ &= \frac{25}{6^4}\end{aligned}$$

On démontre de même que les quatre événements élémentaires qui constituent l'événement (X = 2) *ont tous pour probabilité* $\frac{25}{6^4}$ *; on déduit que :* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = 4\times\frac{25}{6^4} = \frac{25}{324}$.

plus généralement, dans la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, la probabilité d'échec à une épreuve est : $q = 1-p$. Considérons l'événement (X = k) où $0 \leqslant k \leqslant n$. pour réaliser un tel événement, il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs. On peut donc choisir les k épreuves parmi n où on aura un succès et pour les $n-k$ épreuves restantes on aura un échec. Il y a donc $\binom{n}{k}$ éventualités qui réalisent l'événement. De plus chaque événement élémentaire inclus dans l'événement (X = k) a pour probabilité : $p^k q^{n-k}$; on en déduit que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

THÉORÈME X.3.1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

(1) Pour tout entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$; on a :$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

(2) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$.

(3) $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = npq$.

Démonstration **(1)** La propriété **(1)** a été démontrée dans l'étude ci-dessus.

(2) Calculons E(X). Par définition :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, car pour } k=0 \text{ le terme est nul}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left(n-1-(k-1)\right)!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} && \text{, posons : } i=k-1\\ &= np\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\left((n-1)-i\right)!}p^i q^{(n-1)-i}\\ &= np(p+q)^{n-1} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= np\end{aligned}$$

(3) Calculons V(X). On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}^2(\mathrm{X}) && \text{, par le formule de König}\\ &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}^2(\mathrm{X}) && \text{, par linéarité de l'espérance}\\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\right)+np-n^2p^2 && \text{, d'après } \textbf{(2)}\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\right) &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, par définition de } \mathscr{B}(n,p)\\ &= \sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, car les deux premiers termes de la somme sont nuls.}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\left((n-2)-(k-2)\right)!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)} && \text{,posons : } i=k-2\\ &= (n^2-n)p^2\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{i!\left((n-2)-i\right)!}p^i q^{(n-2)-i}\\ &= (n^2-n)p^2(p+q)^{n-2} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= n^2p^2-np^2\end{aligned}$$

On en déduit que : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = n^2p^2-np^2+np-n^2p^2 = np(1-p) = npq$. □

Remarque *En utilisant la formule du binôme de Newton, on vérifie que la somme des probabilités de la loi binomiale est 1.*

X.3.2 Loi de Poisson [3] (complément)

La loi de Poisson n'est pas au programme ; cette étude est donc réservée à des lecteurs motivés et permet de donner plus de sens à la loi exponentielle.

X.3.2.a Calculs préliminaires

Exercice X.3.1. *Soit λ un réel.*

1. On se propose de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = 0$.

a. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n_0 > |\lambda|$, vérifier que pour tout entier $n > n_0$:

$$\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right| \leqslant \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^n \left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^{-n_0}.$$

(On pourra remarquer que : $\dfrac{\lambda^n}{n!} = \dfrac{\lambda^{n_0}}{n_0!} \times \dfrac{\lambda}{n_0+1} \times \dfrac{\lambda}{n_0+2} \times \cdots \times \dfrac{\lambda}{n}$*)*

b. Conclure.

2. Désormais λ est strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère l'intégrale :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda (\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

a. Calculer I_1.

(On pourra utiliser une intégration par parties.)

b. Démontrer que pour tout $t \in [0;\lambda]$, on a :

$$\left|(\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^t\right| \leqslant (\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^\lambda.$$

c. En déduire que :

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \mathrm{e}^\lambda \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n+1} + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}.$$

a. Démontrer que la suite $(u_n + \mathrm{I}_n)$ est constante.

b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \mathrm{e}^\lambda. \tag{X.1}$$

X.3.2.b Introduction

1re situation

Dans un petit port de pêche, il y a vingt pêcheurs ; chaque pêcheur a un bateau. Une étude statistique a montré que chaque soir entre 17 heure et 20 heure il rentre au port, en moyenne, trois bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 18 h 30 et 19 h 30 il rentre quatre bateaux au port ?

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On suppose que les heures de retour au port des différents bateaux sont indépendantes. On désigne par p la probabilité pour qu'un bateau donné rentre au port entre 18 h 30 et 19 h 30. On désigne par X le nombre de bateaux qui rentrent port entre 18 h 30 et 19 h 30. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres 20 et p. L'espérance de X est alors $20p$ mais on sait que cette espérance est trois. Par conséquent : $p = \dfrac{3}{20}$.
On en déduit que : $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = \binom{20}{4} p^4 (1-p)^{16} = 0,182\cdots$.

2e situation

Dans un complexe portuaire, une étude statistique a montré que chaque matin entre 8 heure et 12 heure il entre, en moyenne, λ bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 9 h 30 et 10 h 30 il entre k bateaux dans le complexe ?

3. Poisson, Siméon-Denis (1781–1840)

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On désigne par n le nombre de bateaux à travers le monde qui pourraient un jour entré dans le complexe portuaire ; par p la probabilité pour que l'un donné d'entre eux entre dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30 et par X le nombre de bateaux qui entrent dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30. On suppose que les heures d'entrée des n bateaux qui pourraient, un jour, entrer dans le port sont indépendantes. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres n et p ; c'est-à-dire : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. L'espérance de X est alors np mais on sait que cette espérance est λ. Par conséquent : $p = \dfrac{\lambda}{n}$.

On en déduit que : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Malheureusement, en pratique, on ne connaît pas n. On sait seulement qu'il est grand et que k est petit devant lui ; c'est la raison pour laquelle on décide de définir la nouvelle loi de probabilité, si cela a un sens : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k)$.

On a donc : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n-1} \times \cdots \times \frac{n}{n+k-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Pour tous entiers n et j tels que : $0 \leqslant j < n$, on a : $\dfrac{n}{n-j} = \dfrac{1}{1-\frac{j}{n}}$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-j} = 1$.

Par produit de $k-1$ facteurs, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{n}{n+k-1} = 1$.

Par construction de la fonction exp, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$;

de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{u\to 1} u^{-k} = 1$; donc par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$.

Donc par produit des limites :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On doit maintenant vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Or, d'après (X.1) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda}$; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 1$.

DÉFINITION X.3.4

On dit qu'une loi de probabilité a pour loi de probabilité la *loi de Poisson* lorsque son univers image est $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exemples

1. *Dans l'exemple du complexe portuaire, s'il arrive* 53,8 *bateaux à l'heure, la probabilité pour qu'il arrive* 65 *bateaux entre 9 h 30 et 10 h 30 est :* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=65) = \mathrm{e}^{-53,8}\dfrac{53,8^{65}}{65!} = 0,16\cdots$

Remarque *La loi de poisson est généralement utilisée pour modéliser le comptage d'événements rares dans le temps, comme par exemple : le nombre de particules émises par une substance radioactive ou le nombre d'erreurs enregistrées par un central téléphonique ; ou dans l'espace, comme par exemple : le nombre de bactéries dans une préparation microscopique.*

X.3.2.c Espérance et Variance

D'après la construction utilisée il semblerait cohérent que, dans la loi de Poisson, l'espérance soit λ.

THÉORÈME X.3.2

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi de Poisson de paramètre λ.

(1) $E(X) = \lambda$.

(2) $V(X) = \lambda$.

Démonstration

(1) Par définition l'espérance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a : $\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!}$.

On sait que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$; donc : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$. Donc : $E(X) = \lambda$.

(2) Par définition la variance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n}(k-\lambda)^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus : $\sum_{k=0}^{n}(k-\lambda)^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) - 2\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2\,e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$.

D'après les calculs précédents, on a par produit et par somme : $\lim_{n\to+\infty}\left[-2\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2\,e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\right)\right] = -2\lambda^2 + \lambda^2 = -\lambda^2$.

On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

On sait que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$; donc : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2+\lambda$. Donc : $V(X) = \lambda$.□

X.4 Lois de probabilités continues

X.4.1 Intégrales généralisées

X.4.1.a Activité

Exercice X.4.1. ***On considère la fonction,*** $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2-1}$, ***définie sur*** $]1;+\infty[$ ***et la fonction*** $F : x \longmapsto \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ? Que représente F pour f ?

2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x > 1$: $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

3. Calculer $F(x)$ ***en fonction de*** x.

4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

X.4.1.b Définition

Habituellement, lorsqu'on calcul, $\int_a^b f(t)\,dt$, a et b sont des nombres réels et f est une fonction continue sur $[a;b]$. On se propose d'étendre, par passage à la limite, la définition de l'intégrale au cas (lorsque cela est possible) où l'une au moins des bornes est infinie ou la limite en l'une au moins des bornes est infinie. De telles intégrales sont dites impropres.

DÉFINITION X.4.1

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Si f est continue sur $[a;+\infty[$ (sauf peut-être en nombre finis de réels où elle admet une limite à droite et une limite à gauche) et si la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$; admet une limite finie, ℓ, en $+\infty$; alors on écrit : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \ell$.

Remarques

1. *Lorsque l'intégrale a une limite finie, elle est dite convergente.*

2. *Lorsque l'intégrale n'a pas de limite ou que sa limite est infinie, elle est dite divergente.*

3. *On définit de même, lorsqu'elle existe,* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice X.4.2. ***Démontrer que*** $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ***est définie et calculer sa valeur.***

Solution *La fonction* $f : x \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*), paire et positive sur* $\mathbb{R}$*. Considérons la fonction F définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f *est paire, donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{F}(-x) = \int_0^{-x} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{F}(x).$$

La Fonction F est impaire.
Pour $x > 0$*, les éléments de* $[0\,;x]$ *sont positif, et on a alors :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x -2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{e}^{-x^2} = 0$ *; donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

La fonction F est impaire, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} = \mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}$ *; c'est-à-dire :* $\int_0^{-\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}$ *; d'où il vient :*

$$\int_{-\infty}^0 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Par somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

X.4.2 Généralités sur lois de probabilités continues

X.4.2.a Densité de probabilité

DÉFINITION X.4.2
Une *densité de probabilité* sur un intervalle I est une fonction f continue sur I (sauf peut-être en nombre fini d'éléments où elle admet une limite à droite et une limite à gauche), positive sur I et telle que : $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Exemples

1. *D'après l'étude menée en activité à l'exercice X.4.1., la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ *est continue et positive sur* $[2\,;+\infty[$*, de plus :* $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\ln 3}\int_2^{+\infty} \dfrac{2\mathrm{d}t}{t^2-1} = 1$ *; donc* f *est une densité de probabilité sur* $[2\,;+\infty[$.

2. *D'après l'étude menée à l'exercice X.4.2., la fonction* $g : x \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue et positive sur* $\mathbb{R}$*, de plus :* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ *; donc g est une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}$.

X.4.2.b Loi de probabilité continue

DÉFINITION X.4.3
Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I. La loi de probabilité associée à f est la loi définie pour tout intervalle, J, inclus dans I par : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque *Si X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité f alors l'univers image de X est I.*

Exemple *Considérons la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$. Si une variable aléatoire X a pour loi de probabilité la loi associée à g, alors :*

$$\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2) = \int_1^2 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-4}}{2}$$

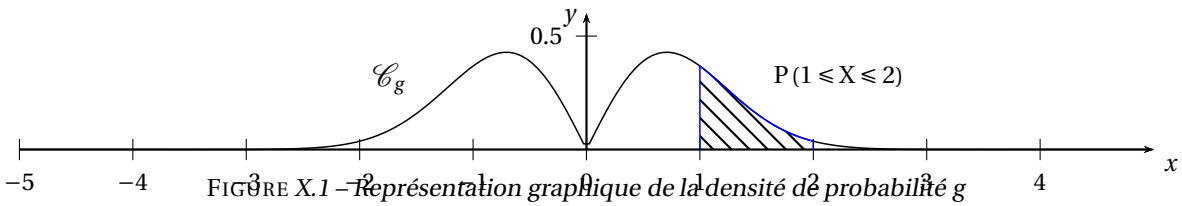


FIGURE *X.1 – Représentation graphique de la densité de probabilité g*

Exercice X.4.3. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \frac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$.***

Calculer la probabilité de l'événement $3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4$.

Solution *On a :* $\mathrm{P}(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4) = \displaystyle\int_3^4 \frac{2\mathrm{d}t}{(\ln 3)(t^2-1)} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_3^4 = \frac{\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{2}{4}}{\ln 3} = 1+\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 3}$ □

X.4.2.c Espérance et variance d'une loi de probabilité continue

L'étude menée dans ce paragraphe n'est pas au programme mais peut aider de bons élèves à mieux comprendre les théorèmes…

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	x_1	x_2	⋯	x_n
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	p_1	p_2	⋯	p_n

On sait que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Lorsque cela est possible, on étend au cas d'une variable aléatoire continue de densité de probabilité, f, définie sur un intervalle, I, ces définition par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} t f(t)\,\mathrm{d}\,t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Remarques

1. *Si l'intégrale définissant l'espérance est divergente, alors l'espérance n'est pas définie.*

2. *Si l'intégrale définissant la variance est divergente, alors la variance n'est pas définie.*

3. *Si l'espérance de X n'est pas définie, alors la variance de X n'est pas définie non plus.*

Exercice X.4.4. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \frac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$. L'espérance et la variance de X sont-elles définies ?***

Solution *Pour $x > 2$, on a :* $\displaystyle\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\ln 3}\int_2^x \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(t^2-1\right)\right]_2^x$.

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}\,t = +\infty$.

Ni l'espérance ni la variance de X ne sont définies. □

Exercice X.4.5. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$.***

Déterminer l'espérance et la variance de X (on pourra utiliser wxMaxima).

Solution *La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout nombre réel t : $g(-t) = |-t|\mathrm{e}^{-(-t)^2}) = |t|\mathrm{e}^{-t^2} = g(t)$. La fonction g est donc paire et la fonction, $t \longmapsto tg(t)$, est impaire comme produit d'une fonction impaire par une fonction paire. On en déduit que l'intégrale, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} tg(t)\,\mathrm{d}\,t$, est nulle si elle est convergente.*

```
Maxima 5.16.3 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp CLISP 2.44.1 (2008-02-23)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1)    g(t):=abs(t)*exp(-t^2);
```
(%o1) $$g(t) := |t| \exp\left(-t^2\right)$$
```
(%i2)    assume(x>0);
```
(%o2) $$[x > 0]$$
```
(%i3)    integrate(t*g(t),t,0,x);
```
(%o3) $$\frac{e^{-x^2}\left(\sqrt{\pi}\, e^{x^2} \operatorname{erf}(x) - 2x\right)}{4}$$
```
(%i4)    limit(%,x,inf);
```
(%o4) $$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Donc l'intégrale est convergente et l'espérance est nulle.

Si la variance est définie, on a : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t$, *par parité.*

```
(%i5)    integrate(t^2*g(t),t,0,x);
```
(%o5) $$\frac{1}{2} - \frac{\left(x^2+1\right) e^{-x^2}}{2}$$
```
(%i6)    limit(%,x,inf);
```
(%o6) $$\frac{1}{2}$$

La variance de X est donc définie et vaut 1. □

X.4.3 Loi uniforme

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité est constante sur $[a\,;b]$ et nulle à l'extérieur de cet intervalle. Désignons par k la valeur de cette constante. On a :

$$1 = \int_{[a\,;b]} k\,\mathrm{d}\,t = k(b-a).$$

On en déduit que : $k = \dfrac{1}{b-a}$.

DÉFINITION X.4.4

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité de probabilité, f, est définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [a;b] \end{cases}$

X.4.4 Loi exponentielle

X.5 Adéquation à la loi équirépartie

On lance un dé usuel 100 fois. On obtient les résultats suivants :

chiffres	1	2	3	4	5	6
effectifs	20	17	12	19	11	21

On aimerait savoir en quel sens on peut considérer ce dé équilibré ou non. Le test à mettre en place ne doit pas être destructeur, il est donc forcément un test statistique. Il ne pourra donc pas être fiable à cent pour cent ; en effet, même avec un dé parfaitement équilibré la probabilité d'obtenir 100 fois le chiffre 1, bien qu'infime, n'est pas nulle. Ainsi rejeter un dé, c'est prendre le risque de rejeter un dé équilibré et accepter un dé, c'est prendre le risque d'accepter un dé déséquilibré. Examinons le tableau des fréquences.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	20%	17%	12%	19%	11%	21%

On constate qu'il y a un écart certain avec le tableau des fréquences idéal.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Doit-on imputer cet écart à un déséquilibre du dé ou à une fluctuation d'échantillonage ? Pour ce faire une idée on aimerait calculer une « distance », d, entre la répartition des fréquences obtenues et la répartition des fréquences idéale. Mais en utilisant le théorème de Pythagore, on sait que les carrés de distances sont plus faciles à calculer que les distances elles-mêmes, on décide donc de calculer le nombre, d^2, défini par :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(f_i - \frac{1}{6} \right)^2$$

où f_i désigne la fréquence observée du chiffre i. Effectuons les premiers calculs avec *wxMaxima*. Désignons par `fo` la liste des fréquences observées.

```
(%i7)    fo:[20,17,12,19,11,21];
```
$$[20,17,12,19,11,21]$$
```
(%i8)    fo:fo/100;
```
$$[\frac{1}{5},\frac{17}{100},\frac{3}{25},\frac{19}{100},\frac{11}{100},\frac{21}{100}]$$
```
(%i9)    d2:apply("+",(fo-1/6)^2);
```
$$\frac{67}{7500}$$
```
(%i10)    float(d2);
```
$$0.0089333333333333$$

Nous avons maintenant une valeur pour d^2, mais cette valeur est pour l'instant inutilisable car nous n'avons aucune valeur de référence.

On fixe donc un seuil d'erreur, par exemple 10%. Ce seuil représente le risque de rejeter à tort l'hypothèse d'équiprobabilité dans 10% des cas les plus rares. L'idéal serait de prendre comme univers l'ensemble de tous les échantillons de 100 lancers de dé possibles, de munir cet univers de la loi équirépartie, de calculer d^2 pour chaque échantillon, de classer tous ces d^2 par ordre croissant et de rejeté les 10% ayant les plus grande valeur. Ont déterminerait donc le 9e décile, D_9, de la série des d^2 et là deux cas seraient envisageables. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est inférieure à D_9 alors *les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de* 10%. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est supérieure à D_9 alors *on rejette l'hypothèse de la compatibilité des données observées avec un modèle équiréparti au seuil de risque de* 10%.

En pratique, $\omega = [\![1;6]\!]^{100}$, donc, $\text{card}(\Omega) = 6^{100} = 6,5\cdots \times 10^{77}$.

Il n'est pas envisageable d'effectuer les calculs nécessaires en un temps raisonnable avec les ordinateurs dont nous disposons pour déterminer D9.

Pour déterminer D9 nous allons simuler sur un tableur un nombre suffisant de séries aléatoires (suivant la loi équirépartie) de cent lancers de dé, pour chaque série on calculera d^2, puis on calculera le 9e décile de la série des d^2. Nous obtenons les résultats suivants.

nombre de séries	300	500	1000	2000
Minimum	0,000733	0,000533	0,000533	0,000333
Q1	0,004333	0,004533	0,004533	0,004533
Médiane	0,007133	0,007533	0,007333	0,007133
Q3	0,010533	0,011133	0,010733	0,010533
D9	0,014733	0,014933	0,014733	0,014733
C95	0,017733	0,017733	0,017333	0,017333
Maximum	0,0299333	0,0337333	0,0351333	0,0351333

Nous constatons que D_9 semble se stabiliser dès mille séries de cents lancers sur la valeur : 0,014 733. Nous prendrons donc cette valeur comme référence. On a, $0,00893\cdots < 0,014733$, on peut donc affirmer : « les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de 10% ».

Chapitre XI

Barycentre

XI.1 Barycentre

Les considérations envisagées dans cette partie sont valables dans le plan et dans l'espace. L'ensemble $\mathscr{W}$ désignera, suivant les besoins du lecteur, le plan $\mathscr{P}$ ou l'espace $\mathscr{E}$.

XI.1.1 Introduction

DÉFINITIONS XI.1.1

(1) Un *point pondéré* est un couple (A, α) où A est un point et α un nombre, appelé coefficient ou masse.

(2) Un *système de points pondérés* est une collection de points pondérés dans laquelle un même point pondéré peut apparaître plusieurs fois.

(3) La *masse* d'un système de points pondérés est la somme des coefficients.

Remarque *La différence entre un système et un ensemble est que dans un ensemble, un même objet ne peut pas apparaître plusieurs fois.*

Exemple *Soit A, B, C trois points de $\mathscr{W}$,*

$$\big\{(A,1),(B,-2),(C,\pi),(B,-2)\big\}$$

est un système de points pondérés de masse $\pi-3$.

XI.1.2 Activités

M ou N désignent des points variables et A, B, C ... des points fixes.

Exercice XI.1.1. ***1. Simplifier :*** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

2. On considère le système de points pondérés $\{(A,2),(B,2)\}$. ***La fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est*** $\vec{f}: M \mapsto 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$.
I désigne le milieu du segment $[AB]$.

a. Simplifier $\vec{f}(M)$.

b. Soit $\vec{g}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée à*** $\{(I,4)\}$.
Que peut-on dire de $\vec{f}$ ***et*** $\vec{g}$ ***?***

Exercice XI.1.2. ***Deux systèmes de points pondérés sont dits équivalents lorsque leurs fonctions vectorielles de Leibniz sont égales. Soit ABC un triangle et*** $\vec{f}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée au système*** $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

1. Donner l'expression de $\vec{f}(M)$.

2. Démontrer que pour tous points M et N de $\mathscr{W}$ ***:***

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(N)+3\overrightarrow{MN}.$$

3. Résoudre l'équation $\vec{f}(M)=\vec{0}$.

4. Déterminer un système réduit à un seul point pondéré équivalent à $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

5. Quel lien existe-t-il entre $\vec{f}$ ***et la fonction vectorielle de Leibniz,*** $\vec{g}$***, associée à*** $\{(A,2),(B,2),(C,2)\}$.

Le point G, centre de gravité de ABC, est aussi appelé isobarycentre des points A, B, C.

Exercice XI.1.3. ***ABCD est parallélogramme de centre I. On considère le système S :*** $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$ ***; et*** $\vec{f}$ ***sa fonction vectorielle de Leibniz associée.***

Lorsqu'un système a une masse non nulle, l'unique solution de l'équation $\vec{f}(M)=\vec{0}$ est appelée barycentre du système.

1. Déterminer le barycentre de S.

2. Simplifier $\vec{f}(M)$.

3. Que peut-on dire des systèmes $\{(A,1),(C,1)\}$ et $\{(I,2)\}$

4. Que peut-on dire des systèmes S et S′ : $\{(I,2),(B,-1)\}$

5. Justifier que S et S′ ont le même barycentre.

6. Plus généralement énoncer un théorème.

Exercice XI.1.4. ***ABCD est un parallélogramme de centre I. On considère les systèmes $\{(A,-2),(B,1)(C,1)\}$ et S′ : $\{(A,1),(B,-1),(C,1),(D,-1)\}$; ainsi que leurs fonctions vectorielles de Leibniz respectives $\vec{f}$ et $\vec{f}'$.***

1. Préciser la masse des systèmes S et S′.

2. Démontrer que $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ sont des fonctions constantes.

3. Résoudre $\vec{f}(M)=\vec{0}$ puis $\vec{f}'(M)=\vec{0}$.

4. Énoncer un théorème sur les systèmes de points pondérés de masse nulle et les fonctions vectorielles de Leibniz constantes.

XI.1.3 Définition et propriétés

DÉFINITION XI.1.2

Soit $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérés. La fonction vectorielle de LEIBNIZ qui lui est associée est la fonction, $\vec{f}$, qui à tout point M de $\mathscr{W}$ associe le vecteur $\vec{f}(M)$ défini par :

$$\vec{f}(M)=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\,.$$

Exemple *Soit A et B deux points de $\mathscr{W}$, I le milieu du segment [AB] et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de* LEIBNIZ *associée au système* $\{(A,2),(B,2)\}$. *Pour tout point M de $\mathscr{W}$:*

$$\vec{f}(M)=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}=4\overrightarrow{MI} \tag{XI.1}$$

En particulier : $\vec{f}(I)=\vec{0}$; $\vec{f}(A)=4\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{f}(A)=4\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AB}$.

THÉORÈME XI.1.1

Soit $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse $m\left(m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$ et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.

(1) Si $m\neq 0$, il existe un unique point G de $\mathscr{W}$ vérifiant : $\vec{f}(G)=\vec{0}$.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(M)=m\overrightarrow{MG}$.

(2) Si $m=0$, alors $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante.

Démonstration Pour tous points M et N de $\mathscr{W}$, on a :
$\vec{f}(M)-\vec{f}(N)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MA_i}-\overrightarrow{NA_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{NM}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\right)\overrightarrow{NM}=m\overrightarrow{NM}$;
donc :

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(N)+m\overrightarrow{MN} \tag{XI.2}$$

Soit A un point fixé. En prenant : N = A, il vient pour tout point M de $\mathscr{W}$:

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(A)+m\overrightarrow{MA} \tag{XI.3}$$

Si $m\neq 0$

EXISTENCE DE G Introduisons le point G tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{m}\vec{f}(A)$.
En utilisant (XI.3) avec : M = G, il vient :

$$\vec{f}(G)=\vec{f}(A)+m\overrightarrow{GA}=\vec{f}(A)-\vec{f}(A)=\vec{0}.$$

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE Pour tous points M de $\mathscr{W}$, en utilisant (XI.2) avec : N = G, il vient :

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(G)+m\overrightarrow{MG}=\vec{0}+m\overrightarrow{MG}=m\overrightarrow{MG}\,.$$

UNICITÉ DE G D'après la formule précédente, puisque $m \neq 0$, pour tout point M du plan :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0} \iff m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \mathrm{M} = \mathrm{G}.$$

Si $m = 0$
Pour tous points M de $\mathscr{W}$, d'après (XI.3) :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{f}(\mathrm{A}).$$

Donc $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante. □

Le théorème XI.1.1 justifie la définition suivante.

DÉFINITION XI.1.3
Soit $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse non nulle.
L'unique point, G, vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{GA}_n};$$

est appelé *barycentre* du système.

Notations et vocabulaire *On peut alors écrire :*

$$\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$$

*Si de plus tous les coefficients sont égaux, ont dit que G est l'*isobarycentre *des points* $A_1, \cdots, A_n$.

Remarques
1. *Un système dont la somme des coefficients est nulle n'a pas de barycentre.*
2. *Lorsqu'on évoquera le barycentre d'un système, si cela n'est pas explicitement précisé, il sera sous-entendu que la masse, m, du système est non nulle.*
3. *Si $m \neq 0$, le système $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ est équivalent à $\{(\mathrm{G}, m)\}$.*
On en déduit que deux systèmes de masses non nulles sont équivalents si et seulement si ils ont le même barycentre et la même masse.
4. *Deux systèmes de masses nulles ne sont pas nécessairement équivalents.*

Exemple
Considérons le système composé de deux boules homogènes de même masse, m, reliées par une tige rigide et sans masse de longueur ℓ. Ce système est équivalent à une masse ponctuelle de masse $2m$ placé au centre, I, de la tige.

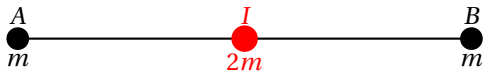


FIGURE XI.1 –

Exercice XI.1.5. ***A, B, C, D sont des points fixés de $\mathscr{W}$ et M est un point variable. Simplifier les écritures.***
a. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
b. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
c. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.
d. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

Solution
a. *Introduisons l'isobarycentre, G, des points A, B et C. Il vient par réduction, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.
b. *On reconnaît une fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de masse nulle. Cette fonction est donc constante, (en calculant l'image de C) pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.
En calculant l'image de A on aurait obtenu, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:* $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
c. *On reconnaît la fonction vectorielle de Leibniz associée au système* $\{(\mathrm{A}, 3), (\mathrm{B}, 5), (\mathrm{C}, -4), (\mathrm{D}, 6),\}$ *de masse* 10. *On a :* $10 \neq 0$ *; ce système a donc un barycentre que nous appellerons* G_1 *; il vient par réduction, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = 10\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$.
d. *De même qu'en* ***b.****, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BA}} - 4\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. □

Remarque *Les systèmes associés aux questions* ***b.*** *et* ***d.*** *ont une masse nulle, on ne peut donc pas introduire de barycentre.*

XI.1.4 Propriétés

THÉORÈME XI.1.2 HOMOGÉNÉITÉ

On ne change pas le barycentre d'un système en multipliant tous ces coefficients par une même constante non nulle.

Démonstration Soit G le barycentre d'un système $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle et λ un réel non nul.

On a : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$; donc : $\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\lambda\vec{0}=\vec{0}$. □

THÉORÈME XI.1.3

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et a, b, c, d quatre nombres réels tels que :
$a+b\neq 0$; $a+b+c\neq 0$; $a+b+c+d\neq 0$.

(1) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b)\}$ est le point d'abscisse $\dfrac{b}{a+b}$ sur la droite (AB) munie du repère (A, B).

(2) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c};\dfrac{c}{a+b+c}\right)$ sur le plan (ABC) muni du repère (A, B, C).

(3) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c+d};\dfrac{c}{a+b+c+d};\dfrac{d}{a+b+c+d}\right)$ dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D).

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit G le barycentre du système. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a par réduction de somme de Leibniz :

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}.$$

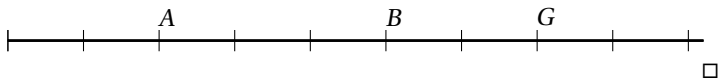
Pour M = A, on en déduit que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Exercice XI.1.6. ***A et B sont deux points tels que*** **AB = 3.** ***Placer le barycentre G du système*** **{(A, −2), (B, 5)}.**

Solution *G est le point d'abscisse* $\dfrac{5}{3}$ *sur la droite* (AB) *munie du repère* (A, B).



□

Exercice XI.1.7. ***Le plan est muni du repère*** $(O;\vec{i},\vec{j})$ ***. On considère les points*** **A(1 ; −1),** ***B(5 ;-1) et*** **C(2; 2).**
Placer le point, G, barycentre du système **{(A, −5), (B, 9), (C, 8)}**

Solution *La masse du système est* 12, *donc par homogénéité :* $G=\text{bar}\left\{\left(A;-\dfrac{5}{12}\right),\left(B;\dfrac{3}{4}\right),\left(C;\dfrac{2}{3}\right)\right\}$. *Nous en déduisons que G est le point de coordonnées* $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{2}{3}\right)$ *dans le repère* (A, B, C). □

THÉORÈME XI.1.4

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et x, y, z trois nombres réels.

(1) Sur la droite (AB) munie du repère (A, B), le point d'abscisse x est le barycentre du système $\{(A,1-x),(B,x)\}$.

(2) Dans le plan (ABC) muni du repère (A, B, C) le point de coordonnées $(x;y)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y),(B,x),(C,y)\}$.

(3) Dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D)le point de coordonnées $(x;y;z)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y-z),(B,x),(C,y)(D,z)\}$.

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit M$(x;y)$ dans le repère (A,B,C). On a :

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{MC}.$$

On en déduit que :

$$(1-x-y)\overrightarrow{MA}+x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes XI.1.3 et XI.1.4.

COROLLAIRE XI.1.5

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires

(1) L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

(2) L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

(3) L'ensemble des barycentres des points A, B, C et D est l'espace $\mathscr{E}$.

Démonstration Démontrons par exemple **(2)**.

D'après le théorème XI.1.3 tout barycentre de A, B, C est un point de (ABC).
D'après le théorème XI.1.4 tout point de (ABC) est un barycentre de A, B, C.
Donc, l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). □

THÉORÈME XI.1.6 ASSOCIATIVITÉ

Dans un système de points pondérés, lorsqu'on remplace un sous-système par un sous-système équivalent, on obtient un système équivalent.

Démonstration Soit un système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$, $\vec{f}$ la fonction vectorielle de LEIBNIZ associée et $\{(B_j,\beta_j) \mid j \in [\![1,p]\!]\}$ un système équivalent au système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,q]\!]\}$ (avec $0 < q < n$).
Nous devons démontrer que les systèmes $\{(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_q,\alpha_q),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ et $\{(B_1,\beta_1),\cdots,(B_p,\beta_p),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ ont la même fonction vectorielle de LEIBNIZ.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a : $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{MB_j}$.
Donc, pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{MB_j} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ □

Remarque *Le théorème XI.1.6 signifie, entre autre, qu'on ne change pas le barycentre d'un système en remplaçant un sous-système par un sous-système équivalent.*

Exercice XI.1.8. ***Soit ABC un triangle et a, b, c trois réels tels que : $a+b \neq 0$; $b+c \neq 0$; $c+a \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$. On considère les points A′, B′ et C′, barycentres respectifs des systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$.***

1. Justifier l'existence des points A′, B′ et C′.

2. Démontrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en un point qu'il conviendra de préciser.

Solution ***1.*** *Les systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$; sont chacun de masse non nulle, donc leurs barycentres existent.*

2. *Posons : $G = \text{bar}\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$.*
Par associativité, on a : $G = \text{bar}\{(A,a)(A',b+c)\} = \text{bar}\{(B,b),(B',a+c)\} = \text{bar}\{(C,c),(C',a+b)\}$.
Donc G appartient à la fois aux trois droites :
G est le point de concours des droites (AA′), (BB′) et (CC′). □

THÉORÈME XI.1.7

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Pour $i \in]\!]1;n[\!]$ on considère des points $A_i(x_i;y_i;z_i)$ et G le barycentre du système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse m non nulle.

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i \end{cases}$

Démonstration Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$m\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}.$$

Pour M = O, on en déduit que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Remarque *Dans le plan on a de même :* $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \end{cases}$

DÉFINITION XI.1.4

Soit f une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même.
On dira que f conserve les barycentres si pour tout système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle m et de barycentre G, le système $\{(f(A_i),\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ a pour barycentre $f(G)$.

Les isométries ont été vues en classe de Seconde, les homthéties seront vues à la fin de l'année scolaire et les similitudes seront vues en enseignement de spécialité en classe de Terminale. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME XI.1.8

(1) Les isométries (translations, rotations, réflexions …), les homothéties et plus généralement les similitudes conservent le barycentre.
(2) Les projections conservent le barycentre.

XI.1.5 Exercices

XI.1.a. ABC est un triangle. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.

Index

affixe, 80
arbre pondéré, 137

barycentre, 155
base
    d'une exponentielle, 62
binôme de NEWTON, 127
borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
borne inférieure d'une suite, 32
borne supérieur d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
borne supérieur d'une suite, 32

$\mathbb{C}$, 78
cardinal, 121
centre de symétrie d'une courbe, 11
composée
    d'une suite par une fonction, 32
coordonnées polaires, 81
courbe intégrale, 65

dérivée n-ième d'une fonction, 73
densité de probabilité, 149
discriminant, 20

écart type, 140
épreuve de Bernoulli, 144
équation
    différentielle, 65
espérance mathématique, 140
événement(s), 131
    élémentaire, 131
    certain, 131
    impossible, 131
    indépendants, 134
éventualité, 131

imaginaire
    pur, 78
inégalité
    de Bernoulli, 7
intégrale
    d'une fonction constante, 100
    d'une fonction continue, 108
    d'une fonction en escalier, 101
    impropre, 148
isobarycentre, 155
issue, voir éventualité

König(formule de), 141

logarithme
    décimal, 63
    de base a, 63
    népérien, 59
loi
    uniforme, 151
loi de probabilité, 139
    binomiale, 144
    conjointe, 143
    couple, 142
    marginale, 143
    simultanée, 143

majorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
mantisse, 64
minorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
MOIVRE (formule de), 84
moyenne
    arithmétique, 38
    géométrique, 40

nombres complexes
    arguments, 82
    conjugué, 78
    définition, 78
    forme algébrique, 78
    forme trigonométrique, 83
    inverse, 79
    point image, 80
    quotient, 79
    vecteur image, 80

ordre d'une équation différentielle, 65

partition, 65, 121
point pondéré, 153
première bissectrice, 33, 54
probabilité(s), 132
    conditionnelle, 136
    conjointes, 143
    simultanées, 143

racine n-ième (réelle), 55
racines carrées d'un nombre complexe
    forme algébrique, 92
    forme exponentielle, 86

schéma de Bernoulli, 144
solution d'une équation différentielle, 65
somme
    de Darboux, 105
    de Riemann, 104

suite
arithmético-géométrique, 41
arithmétique, 37
bornée, 34
constante, 35
convergente, 43
croissante, 35
décroissante, 35
divergente, 43
géométrique, 39
majorée, 34
minorée, 34
monotone, 35
numérique, 32
stationnaire, 35
suites adjacentes, 50
synonyme, 1
système de points pondérés, 153

temps caractéristique, 67
théorème
bijection (de la), 54
fondamental de l'algèbre, 87
fondamental de l'analyse, 108
probabilités totales (des), 137
faible, 133

univers, 131
univers image, 139

variable(s) aléatoire(s), 138
indépendantes, 143, 144
variance, 140

COURS DE MATHÉMATIQUES

Terminale S

Valère BONNET (valere.bonnet@gmail.com)

29 mai 2011

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

Table des matières

Table des matières iii

I Vocabulaire de la logique 1
- I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ? . . . 1
- I.2 Négation d'une proposition . . . 1
- I.3 Le « et » . . . 1
- I.4 Le « ou » . . . 2
- I.5 Propositions et parties d'un ensemble . . . 2
- I.6 Lois de MORGAN . . . 2
- I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 3
- I.8 Implications . . . 5
  - I.8.1 Introduction . . . 5
  - I.8.2 Réciproque d'une implication . . . 5
  - I.8.3 Contraposée d'une implication . . . 6
  - I.8.4 Implication contraire . . . 6
- I.9 Double implication ou équivalence . . . 6
- I.10 Formules récapitulatives . . . 7
- I.11 Raisonnement par récurrence . . . 7

II Révisions 9
- II.1 Identités remarquables . . . 9
- II.2 Éléments de symétries d'une courbe . . . 9
  - II.2.1 Symétries dans $\mathbb{R}$ . . . 9
  - II.2.2 Axe de symétrie d'une courbe . . . 10
  - II.2.3 Centre de symétrie d'une courbe . . . 11
- II.3 Trigonométrie . . . 12
  - II.3.1 Quelques valeurs remarquables . . . 12
  - II.3.2 Quelques formules . . . 13
  - II.3.3 Équations trigonométriques . . . 14
- II.4 Géométrie du triangle . . . 18
  - II.4.1 Aire d'un triangle . . . 18
  - II.4.2 Théorème des sinus . . . 18
  - II.4.3 Théorème d'AL KASHI . . . 19
  - II.4.4 Théorème de la médiane . . . 19
- II.5 Polynômes du second degré . . . 19
  - II.5.1 Forme canonique . . . 19
  - II.5.2 Représentation graphique et sens de variation . . . 20
  - II.5.3 Factorisation et résolution d'équations . . . 21
  - II.5.4 Signe d'un trinôme . . . 24
  - II.5.5 Tableau récapitulatif . . . 25
  - II.5.6 Compléments . . . 25
  - II.5.7 Travaux dirigés . . . 25
  - II.5.8 Exercices . . . 26
- II.6 Exercices résolus . . . 26

III Suites numériques **31**
III.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$ . . . 31
III.1.1 Majorants, minorants . . . 31
III.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément) . . . 31
III.2 Définitions . . . 32
III.2.1 Introduction . . . 32
III.2.2 Composée d'une suite par une fonction . . . 32
III.2.3 Exercices . . . 32
III.3 Représentation graphique d'une suite . . . 32
III.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement . . . 32
III.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence . . . 33
III.3.3 Exercices . . . 33
III.4 Suites bornées . . . 34
III.4.1 Généralités . . . 34
III.4.2 Exercices . . . 34
III.5 Suites monotones . . . 35
III.5.1 Définitions . . . 35
III.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite . . . 35
III.5.3 Exercices . . . 37
III.6 Suites arithmétiques - suites géométriques . . . 37
III.6.1 Suites arithmétiques . . . 37
III.6.2 Suites géométriques . . . 39
III.6.3 Exercices résolus . . . 41
III.7 Limites de suites . . . 42
III.7.1 Limite finie, limite infinie . . . 42
III.7.2 Théorèmes de comparaisons . . . 44
III.7.3 Calcul algébrique de limites . . . 45
III.7.4 Limites de suites géométriques . . . 48
III.7.5 Exercices . . . 48
III.8 Suites monotones bornées . . . 49
III.8.1 Théorème de convergence d'une suite monotone . . . 49
III.8.2 Suites adjacentes . . . 50
III.8.3 Exercices résolus . . . 50
III.8.4 Exercices . . . 51
III.9 Exercices . . . 51

IV Limites de fonctions, continuité **53**
IV.1 Limite finie (ou réelle) . . . 53
IV.1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$ . . . 53
IV.1.2 Limite d'une fonction en un réel a . . . 53
IV.2 Notion de continuité . . . 53
IV.3 Utilisation de la continuité . . . 53
IV.3.1 Continuité et bijection . . . 53

V Exponentielles et équations différentielles **57**
V.1 La fonction exponentielle de base e . . . 57
V.1.1 Propriété fondamentale . . . 57
V.1.2 Sens de variation . . . 58
V.1.3 Autres propriétés algébriques de l'exponentielle . . . 58
V.1.4 Quelques limites . . . 58
V.2 La fonction logarithme népérien . . . 59
V.2.1 Introduction . . . 59
V.2.2 Dérivabilité . . . 61
V.2.3 Dérivée de $\ln u$ . . . 61
V.2.4 Logarithme népérien et calcul intégral . . . 62
V.3 Des exponentielles et des logarithmes . . . 62
V.3.1 Notation a^b, pour a, b réels et $a > 0$ . . . 62
V.3.2 Fonctions exponentielles de base a (avec $a > 0$) . . . 62
V.3.3 Fonctions logarithmes de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) . . . 63
V.4 Équations différentielles . . . 64
V.4.1 Introduction . . . 64

V.4.2 Équations du type $y' - ay = 0$ . . . 65
V.4.3 Équations du type $y' - ay = b$ . . . 66
V.4.4 Exercices . . . 68

VI Dérivabilité **69**
VI.1 Fonctions dérivables . . . 69
VI.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée . . . 69
VI.1.2 Dérivabilité des fonctions usuelles . . . 70
VI.1.3 Principaux résultats . . . 70
VI.2 Dérivation d'une fonction composée . . . 70
VI.2.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée . . . 70
VI.2.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$ . . . 71
VI.2.3 Dérivée de la fonction u^n ($n \in \mathbb{Z}$) . . . 71
VI.3 Dérivation et études de fonctions . . . 72
VI.3.1 Sens de variation . . . 72
VI.3.2 Extremum local . . . 72
VI.4 Dérivées successives d'une fonction . . . 73
VI.5 Exercices résolus . . . 73

VII Nombres complexes **77**
VII.1 Introduction . . . 77
VII.1.1 Des équations et des ensembles . . . 77
VII.1.2 Activités . . . 77
VII.1.3 Définitions . . . 78
VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$ . . . 78
VII.2 Interprétations géométriques . . . 80
VII.2.1 Affixe, point image, vecteur image . . . 80
VII.2.2 $\vec{u} + \vec{u'}$, $k\vec{u}$, $\overrightarrow{MM'}$ . . . 81
VII.2.3 Écriture complexe de certaines symétries . . . 81
VII.2.4 Coordonnées polaires . . . 81
VII.2.5 Module et arguments . . . 82
VII.3 Propriétés algébriques . . . 83
VII.3.1 Propriétés du conjugué . . . 83
VII.3.2 Propriétés du module et des arguments . . . 84
VII.3.3 Formule de MOIVRE (complément) . . . 84
VII.4 Notation exponentielle . . . 85
VII.4.1 Une équation différentielle . . . 85
VII.4.2 Définitions et propriétés . . . 85
VII.4.3 Forme exponentielle et symétries usuelles . . . 86
VII.4.4 Formules d'EULER . . . 86
VII.4.5 Racines carrées d'un nombre complexe . . . 86
VII.5 Nombres complexes et polynômes (compléments) . . . 86
VII.5.1 Théorème fondamental de l'algèbre . . . 87
VII.5.2 Résolution des équations du second degré . . . 87
VII.6 Utilisation des nombres complexes (compléments) . . . 89
VII.6.1 Racines n-ièmes de l'unité . . . 89
VII.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul . . . 89
VII.6.3 Polynômes . . . 90
VII.6.4 Forme algébrique des racines carrées d'un nombre complexe . . . 92
VII.6.5 Trigonométrie . . . 93
VII.7 Géométrie et nombres complexes . . . 94
VII.7.1 Propriétés générales . . . 95
VII.7.2 Écriture complexe de quelques transformations usuelles . . . 95
VII.7.3 Affixe du barycentre d'un système de points pondérés . . . 96

VIII Intégration **97**
VIII.1 Primitives d'une fonction . . . 97
VIII.1.1 Introduction . . . 97
VIII.1.2 Détermination pratique . . . 98
VIII.1.3 Exercices . . . 99
VIII.2 Premiers calculs . . . 99
VIII.2.1 Introduction . . . 99
VIII.2.2 Intégrale d'une fonction constante . . . 100
VIII.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 100
VIII.2.4 Activité . . . 102
VIII.2.5 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier . . . 103
VIII.3 Intégrale de Riemann . . . 103
VIII.3.1 Définition . . . 103
VIII.3.2 Sommes de Riemann . . . 104
VIII.3.3 Exemple d'intégrale d'une fonction usuelle . . . 107
VIII.4 Théorème fondamental de l'analyse . . . 108
VIII.4.1 Problème ouvert . . . 108
VIII.4.2 Théorème fondamental de l'analyse . . . 108
VIII.4.3 Exercices . . . 110
VIII.5 Proptiétés algébriques . . . 110
VIII.5.1 Relation de Chasles . . . 110
VIII.5.2 Linéarité . . . 111
VIII.5.3 Exercices . . . 112
VIII.6 Propriétés de comparaison . . . 112
VIII.6.1 Signe de l'intégrale . . . 112
VIII.6.2 Inégalité de la moyenne . . . 113
VIII.6.3 Valeur moyenne d'une fonction . . . 115
VIII.6.4 Exercices . . . 116
VIII.7 Autres techniques de calcul . . . 117
VIII.7.1 Intégration par parties . . . 117
VIII.7.2 Intégration et invariance géométrique . . . 118
VIII.7.3 Exercices . . . 120

IX Dénombrement **121**
IX.1 Notions Préliminaires . . . 121
IX.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles . . . 121
IX.1.2 Produit cartésien d'ensembles . . . 122
IX.2 Factorielle . . . 123
IX.3 Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments . . . 124
IX.3.1 Tirages successifs avec remise . . . 124
IX.3.2 Tirages successifs sans remise . . . 124
IX.3.3 Combinaisons - Tirages simultanés . . . 125
IX.3.4 Tableau récapitulatif . . . 129

X Calcul des probabilités **131**
X.1 Calculs de probabilités . . . 131
X.1.1 Vocabulaire des événements . . . 131
X.1.2 Probabilité d'un événement . . . 132
X.1.3 Probabilités conditionnelles . . . 136
X.2 Variable aléatoire . . . 138
X.2.1 Introduction . . . 138
X.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . . 139
X.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire . . . 139
X.2.4 Variables aléatoires indépendantes . . . 142
X.3 Lois de probabilités discrètes . . . 144
X.3.1 Loi binomiale . . . 144
X.3.2 Loi de Poisson . . . 146
X.4 Lois de probabilités continues . . . 148
X.4.1 Intégrales généralisées . . . 148
X.4.2 Généralités sur lois de probabilités continues . . . 149
X.4.3 Loi uniforme . . . 151

X.4.4 Loi exponentielle 151
X.5 Adéquation à la loi équirépartie 151

XI Barycentre **153**
XI.1 Barycentre 153
XI.1.1 Introduction 153
XI.1.2 Activités 153
XI.1.3 Définition et propriétés 154
XI.1.4 Propriétés 156
XI.1.5 Exercices 158

Index **159**

Chapitre I

Vocabulaire de la logique

I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ?

DÉFINITION I.1.1 PROPOSITION

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan.*
On peut envisager les propositions, P : « ABCD est un carré » ;
Q : « ABCD est un parallélogramme ».
Suivant la nature du quadrilatère ABCD la proposition P, comme la proposition Q, est soit vraie, soit fausse.

I.2 Négation d'une proposition

DÉFINITION I.2.1

La négation d'une proposition P est la proposition, notée « non P » ou « $\overline{\text{P}}$ » ou encore « ¬P », qui est fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

Exemples
1. *Reprenons les propositions de l'exemple précédent.*
On a, $\overline{P}$: « ABCD n'est pas un carré » ; $\overline{Q}$: « ABCD n'est pas un parallélogramme ».
2. *Soit n un nombre entier.*
La négation de T : « n est pair » ; est $\overline{T}$: « n n'est pas pair » ;
c'est-à-dire : « n est impair ».
3. *Soit x un nombre réel.*
La négation de R : « $x > 2$ » ; est , $\overline{R}$: « $x \leqslant 2$ ».
4. *La négation de S : « pour tout réel x : $0 \leqslant x^2$ » ; est $\overline{S}$: « il existe un réel x (au moins) tel que : $0 > x^2$ ».*

Remarques
1. *La négation de la négation d'une proposition P, c'est-à-dire $\overline{\overline{P}}$, est* synonyme *de la proposition P elle même. On écrit : $\overline{\overline{P}} \equiv P$.*
2. *Désignons par K l'intervalle $]2;+\infty[$ et par $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$; $\overline{K}$ est donc l'intervalle $]-\infty;2]$.*
Les propositions R et $\overline{R}$ s'écrivent alors R : « $x \in K$ » ; et $\overline{R}$: « $x \in \overline{K}$ ».
En effet, les propositions « $x \notin K$ » et « $x \in \overline{K}$ » sont synonymes.

I.3 Le « et »

DÉFINITION I.3.1

Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P et Q) est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes deux vraies, et fausse dans le cas contraire.

Exemples
1. *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $1 < x$ » ; Q : « $x \leqslant 3$ ».*
P et Q est la proposition : « $1 < x$ et $x \leqslant 3$ » ; c'est-à-dire : « $1 < x \leqslant 3$ ».
2. *Considérons un quadrilatère ABCD et les propositions P : « ABCD a deux côtés perpendiculaires » ; Q : « ABCD est un parallélogramme ».*
On a, P et Q : « ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés perpendiculaires ».

Remarques
1. *Dans le premier exemple, si on désigne par I l'intervalle $]1;+\infty[$ et par J l'intervalle $]-\infty;3]$, P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in I$ » et « $x \in J$ ». La proposition (P et Q) s'écrit alors : « $x \in I \cap J$ ». En effet, les propositions « $x \in I$ et $x \in J$ » et « $x \in I \cap J$ » sont synonymes.*
2. *La proposition P et Q est parfois notée : $P \wedge Q$.*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in$ A » et Q : « $x \in$ B ». La proposition $P \wedge Q$: « $x \in$ A et $x \in$ B » est synonyme de :« $x \in$ A $\cup$ B »*

I.4 Le « ou »

Dans le langage courant, le mot « ou » a deux sens distincts : un sens exclusif comme dans l'affirmation « le menu propose fromage ou dessert », et un sens inclusif comme dans la phrase « Les Canadiens parlent l'anglais ou le français ». Dans le premier cas il signifie « soit fromage,soit dessert », dans le second cas il n'est pas exclu que certains Canadiens parlent les deux langues. C'est dans ce sens inclusif que « ou » est utilisé en mathématiques et en logique. Quand il est utilisé dans son sens exclusif, en général on le précise.

DÉFINITION I.4.1
Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P ou Q) est la proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions Q, P est vraie, et fausse dans le cas contraire.

Exemple *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $x \leqslant 1$ » ; Q : « $3 < x$ ».*
P ou Q est la proposition : « $x \leqslant 1$ ou $3 < x$ ».

Remarques
1. *Reprenons les intervalles I et J introduits dans la remarque précédente.*
Les propositions P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in \overline{I}$ » et « $x \in \overline{J}$ ».
La proposition (P ou Q) s'écrit alors : « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ ».
En effet, les propositions « $x \in \overline{I}$ ou $x \in \overline{J}$ » et « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ » sont synonymes.
2. *La proposition P ou Q est parfois notée : $P \vee Q$*

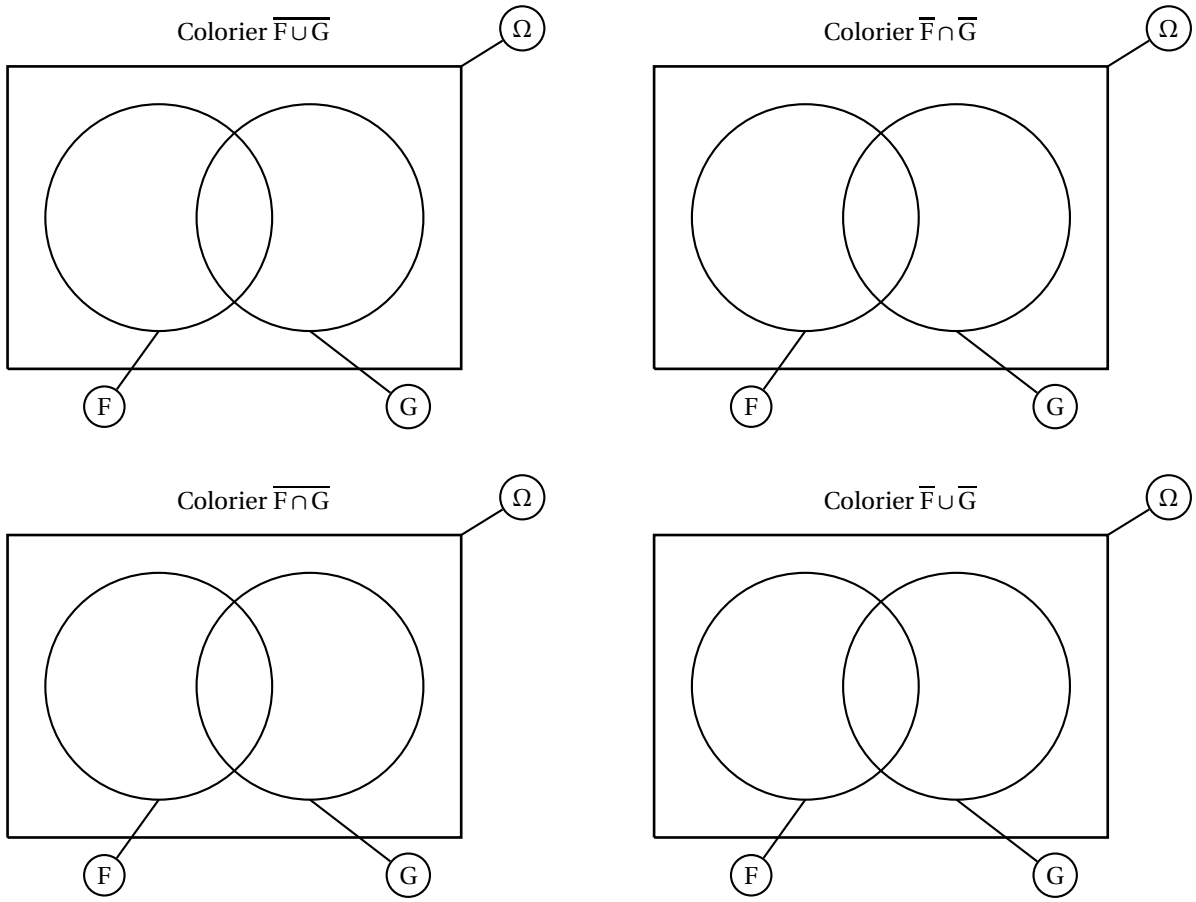
Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in$ A » et Q : « $x \in$ B ». La proposition $P \vee Q$: « $x \in$ A et $x \in$ B » est synonyme de :« $x \in$ A $\cup$ B »*

I.5 Propositions et parties d'un ensemble

Nous avons constaté à travers les remarques précédentes et nous admettons que de façon générale :
– la négation est aux propositions ce que le complémentaire est aux parties d'un ensemble ;
– la conjonction (le « et ») est aux propositions ce que l'intersection est aux parties d'un ensemble ;
– la disjonction (le « ou ») est aux propositions ce que l'union est aux parties d'un ensemble.

I.6 Lois de MORGAN

F et G désignent deux parties d'un ensemble Ω.



Soit Q, P deux propositions. Dire que la proposition (P ou Q) est fausse signifie que les propositions Q, P sont toutes deux fausses.
La proposition (non(P ou Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) et (non Q)).

$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

De même, dire que la proposition (P et Q) est fausse signifie que l'une au moins des propositions Q, P est fausse.
La proposition (non(P et Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) ou (non Q)).

$$\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$$

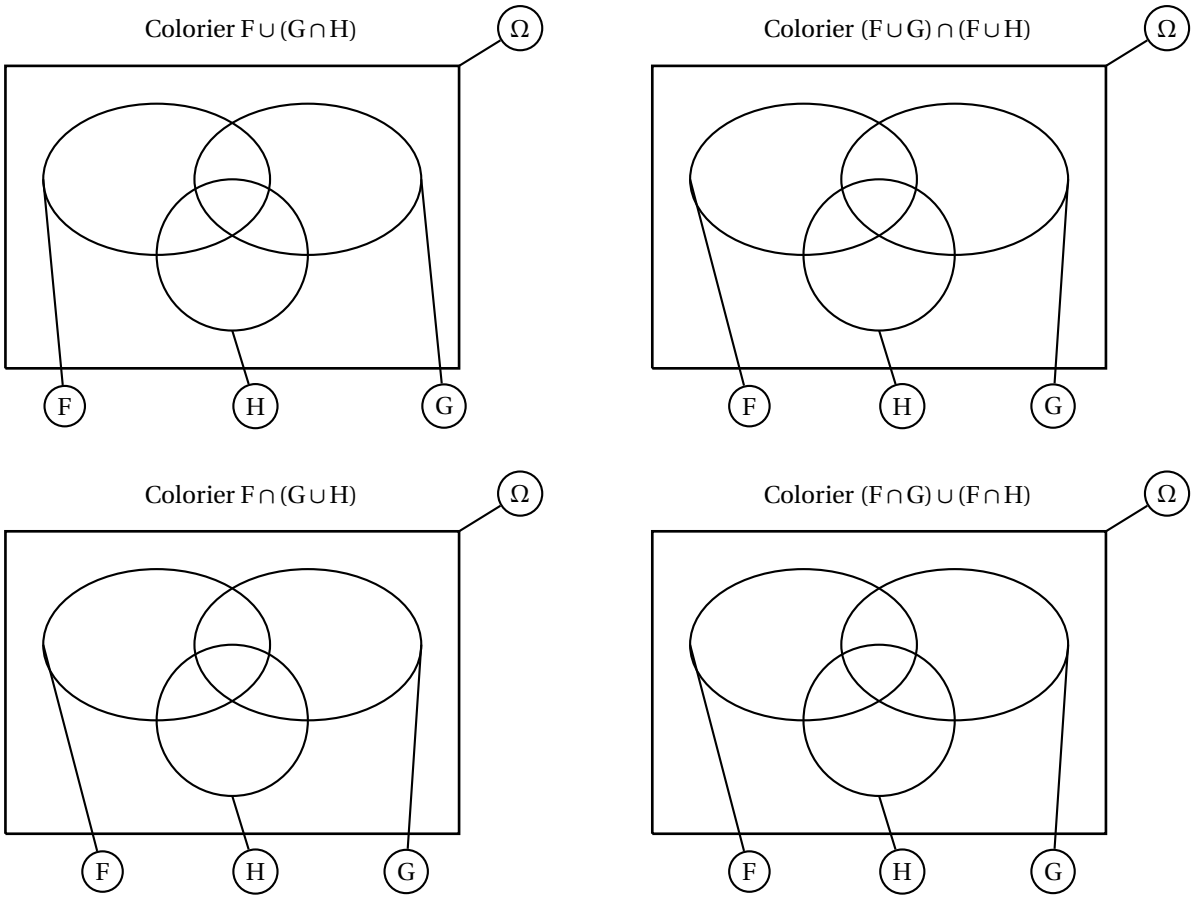
Exemples
1. *x désigne un nombre réel.*
La négation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ » est « $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».
La négation de « $0 < x$ ou $x \leqslant -1$ » est « $0 \geqslant x$ et $x > -1$ ».
2. *ABCD désigne un quadrilatère.*
La négation de « ABCD est un parallélogramme mais n'est pas un carré » est « ABCD est un carré ou n'est pas un parallélogramme».

Remarque *Les formules : $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$; $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$; $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$; sont appelées lois (ou formules) de Morgan*[1].

I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit Ω un ensemble. L'ensemble des parties de Ω est noté : $\mathscr{P}(\Omega)$.
F, G et H désignent trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.

1. MORGAN (AUGUSTUS DE) *Inde 1806 - Londres 1871,* mathématicien et logicien britannique.



THÉORÈME I.7.1

Soit Ω un ensemble. Pour tous éléments F, G, H de $\mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$F \cap G = G \cap F$	$\cap$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup G = G \cup F$	$\cup$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$	$\cap$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$	$\cup$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$;
$F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$;
$\Omega \cap F = F \cap \Omega = F$	Ω est élément neutre pour $\cap$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$\emptyset \cup F = F \cup \emptyset = F$	$\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarques

1. *Lorsque Ω est non vide, $(\mathscr{P}(\Omega), \cup)$ et $(\mathscr{P}(\Omega), \cap)$ ne sont pas des groupes car la plupart des éléments ne sont pas inversibles.*
Par exemple il n'existe pas d'élément Ω' dans $\mathscr{P}(\Omega)$ tel que : $\Omega \cup \Omega' = \emptyset$.

2. *L'associativité permet de légitimer des écritures telles que $F \cup G \cup H$ ou $F \cap G \cap H$.*

On peut réécrire le théorème précédent en remplaçant les parties de Ω par des propositions. On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME I.7.2

Soit P, Q, R trois propositions.
Les propositions (P et Q) et (Q et P) sont synonymes.
Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q et R)) et ((P et Q) et R) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q ou R)) et ((P ou Q) ou R) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q et R)) et ((P ou Q) et (P ou R)) sont synonymes.

Remarques

1. *Pour démontrer les propriétés du théorème ci-dessus, on peut utiliser un tableau de vérité. Par exemple le tableau ci-dessous envisage dans les trois premières colonnes tous les cas possibles et on constate qu'a chaque fois les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) ont la même valeur, ce qui prouve qu'elles sont synonymes.* ***2.*** *Pour démontrer les propriétés du théorème I.7.1, on peut utiliser également un tableau de vérité. Par exemple la propriété*

P	Q	R	P et (Q ou R)	(P et Q) ou (P et R)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.1 –

$F\cap(G\cup H)=(F\cap G)\cup(F\cap H)$ signifie que pour tout élément x, les propositions $x\in F\cap(G\cup H)$ et $x\in(F\cap G)\cup(F\cap H)$ sont synonymes ; ce qui est démontré par le tableau de vérité suivant.

$x\in$ F	$x\in$ G	$x\in$ H	$x\in$ F $\cap$ (G $\cup$ H)	$x\in$ (F $\cap$ G) $\cup$ (F $\cap$ H)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.2 –

I.8 Implications

I.8.1 Introduction

Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan, et les propositions P : « ABCD est un carré » et Q : « ABCD est un parallélogramme ». On sait que : « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme ». On dit que la proposition P implique la propositions Q ; on écrit : P $\Rightarrow$ Q.

Lorsque P $\Rightarrow$ Q, on dit que P est une condition suffisante de Q (pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que ABCD soit un carré) ou que Q est une condition nécessaire de P (pour que ABCD soit un carré, il faut que ABCD soit un parallélogramme).

En logique, on déduit d'une proposition fausse n'importe qu'elle autre proposition, vraie ou fausse. Donc si la proposition P est fausse alors la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie. Ainsi, P $\Rightarrow$ Q est synonyme de (Q ou non P).

Remarques

1. *Dans une argumentation une implication se reconnaît généralement à la structure « si ... alors ... », mais il arrive qu'elle soit moins reconnaissable. Ainsi on énonce parfois : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »*
Cette phrase signifie : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.»

2. *En mathématique, pour démontrer une proposition Q on démontre souvent une proposition du type : (P et (P $\Rightarrow$ Q)). En pratique, ce type d'argumentation (appelée* modus ponens*) se traduit par une structure « P donc Q » qui signifie que l'on sait d'une part que P est vrai et d'autre part que P $\Rightarrow$ Q.*

3. *Il existe une autre règle, appelée* modus tollens *qui permet de déduire $\overline{P}$ de $\left((P\Rightarrow Q)\text{ et }\overline{Q}\right)$.*
Le modus tollens *est à la base du raisonnement par l'absurde.*

I.8.2 Réciproque d'une implication

La réciproque de l'implication « P $\Rightarrow$ Q » est l' implication « Q $\Rightarrow$ P » (ou « P $\Leftarrow$ Q »).

Exemples

1. *Considérons un quadrilatère ABCD.*

L'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est vrai et pourtant son implication réciproque, « si ABCD est un parallélogramme, alors ABCD est un carré », est fausse.
2. *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB. Le théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si le triangle ABC est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2$ ».*
La réciproque du théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si $a^2 = b^2 + c^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ». Nous savons que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.

I.8.3 Contraposée d'une implication

La contraposée de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est l'implication « $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ » (ou « $\overline{P} \Leftarrow \overline{Q}$ »).
Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD.*
La contraposée de l'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est l'implication « si ABCD n'est pas un parallélogramme, alors ABCD n'est pas un carré ».

Nous constatons que ces deux dernières implications sont vraies. Plus généralement, on a la propriété suivante.

THÉORÈME I.8.1

Deux implications contraposées sont synonymes.

Démonstration En effet : $(P \Rightarrow Q) \equiv \left(Q \vee \overline{P}\right) \equiv \left(\overline{P} \vee \left(\overline{Q}\right)\right) \equiv \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$. □

Exercice I.8.1. ***Soit n un nombre entier, démontrer que si n^2 est impair, alors n est impair.***
Solution *On sait que le produit de deux entiers pairs est pair. Donc, en particulier, si n est pair alors n^2 est pair ; donc, par contraposition, si n^2 n'est pas pair alors n n'est pas pair ; c'est-à-dire si n^2 est impair, alors n est impair.* □

I.8.4 Implication contraire

L'implication contraire de « $P \Rightarrow Q$ » est l'implication « $P \Rightarrow \overline{Q}$ ».
Les propositions « $P \Rightarrow Q$ » et « $P \Rightarrow \overline{Q}$ » ne sont pas équivalentes et l'une n'est pas la négation de l'autre.

I.9 Double implication ou équivalence

Lorsqu'une implication « $P \Rightarrow Q$ » et sa réciproque « $P \Leftarrow Q$ » sont toutes les deux vraies, on dit qu'on a une double implication. Les propositions P et Q sont dites équivalentes, ce qui se note : $P \Leftrightarrow Q$.

Dans les propriétés et les raisonnements, les équivalences sont signalées par des expressions telles que « si et seulement si » ou « équivaut à ».
Exemple *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB.*
Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être regroupés dans l'énoncé suivant :
« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$. »

Remarques
1. *Lorsque la réciproque d'une implication est fausse, on n'a pas l'équivalence. Ainsi, en reprenant l'exemple du quadrilatère ABCD, l'énoncé « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme », en revanche l'énoncé « ABCD est un carré si et seulement si ABCD est un parallélogramme » est faux.*
2. *Si deux propositions sont équivalentes alors, par contraposition leurs négations sont équivalentes.*

Exemple *Soit x un nombre réel.*
On a : $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$;
donc, par contraposition : $|x| \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $2 \leqslant x$.

I.10 Formules récapitulatives

Les principales propriétés évoquées dans cet exposé sont résumées par les formules suivantes.

$$\overline{\overline{P}} \equiv P$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\overline{P \wedge Q} & \equiv & \overline{P} \vee \overline{Q} \\ \overline{P \vee Q} & \equiv & \overline{P} \wedge \overline{Q}\end{array}\right\} \quad \text{(lois de Morgan)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge Q & \equiv & Q \wedge P \\ P \vee Q & \equiv & Q \vee P\end{array}\right\} \quad \text{(commutativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge (Q \wedge R) & \equiv & (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) & \equiv & (P \vee Q) \vee R\end{array}\right\} \quad \text{(associativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}P \wedge (Q \vee R) & \equiv & (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) & \equiv & (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{array}\right\} \quad \text{(distributivité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}(P \Rightarrow Q) & \equiv & \left(\overline{P} \Leftarrow \overline{Q}\right) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & \left(\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}\right)\end{array}\right\} \quad \text{(contraposée)}$$

I.11 Raisonnement par récurrence

Considérons les premiers entiers naturels non nuls et comparons la somme de leurs cubes au carré de leur somme.

On a : $1^3 = 1$ et $1^2 = 1$

$1^3 + 2^3 = 9$ et $(1+2)^2 = 9$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ et $(1+2+3)^2 = 36$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ et $(1+2+3+4)^2 = 100$

Cette étude nous amène à conjecturer que pour tout entier naturel non nul n, la proposition

$$P_n : \text{« } 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 \text{ »}$$

est vraie. Il est malheureusement impossible d'examiner la véracité de chacune de ces propositions. Pour démontrer ces propositions, nous allons utiliser une nouvelle méthode de raisonnement appelée *raisonnement par récurrence* dont le principe est le suivant : on vérifie que la première proposition est vraie et on démontre que chacune des propositions implique la proposition suivante ; on prouve ainsi, de proche en proche, que toutes les propositions sont vraies.

- D'après l'étude menée, P_1 est vraie.
- Supposons la proposition P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ (*hypothèse de récurrence*) ; c'est-à-dire : $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1+2+\cdots+k)^2$; déduisons-en que la proposition P_{k+1} est vraie ; c'est-à-dire : $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(1+2+\cdots+k+(k+1)\right)^2$;

  On a :

$$\begin{array}{rcll}1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 & = & (1+2+\cdots+k)^2 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 & \text{(hypothèse de récurrence et développement)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2 + 2\dfrac{k(k+1)}{2}(k+1) + (k+1)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right]^2 & \text{(identité remarquable)} \\ & = & \left(1+2+\cdots+k+(k+1)\right)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)}\end{array}$$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel non nul n :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- on vérifie que la proposition P_{n_0} est vraie
- on démontre, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, que si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Exercice I.11.1. ***Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9.***

Solution *Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition P_n : « $10^n - 1$ est multiple de 9 ».*

$10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$ *donc P_0 est vraie.*

Soit k un entier naturel. Supposons que $10^k - 1$ soit multiple de 9, démontrons que $10^{k+1} - 1$ est multiple de 9.

$10^{k+1} - 1 = \underbrace{9 \times 10^k}_{\text{multiple de 9}} + \underbrace{10^k - 1}_{\substack{\text{multiple de 9 d'après} \\ \text{l'hypothèse de récurrence}}}$ *; donc $10^{k+1} - 1$, comme somme de multiples de 9, est multiple de 9.*

D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9. □

Exercice I.11.2. ***(Inégalité de BERNOULLI)***

Démontrer que pour tout réel α vérifiant $\alpha \geqslant -1$ et pour tout entier naturel non nul n, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Solution *Soit α un réel vérifiant $\alpha \geqslant -1$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition B_n : « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ ».*
Pour $n=1$, on a : $(1+\alpha)^n = 1+\alpha$ et $1+n\alpha = 1+\alpha$; donc B_1 est vraie.
Soit k un entier naturel. Supposons que : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$; démontrons que : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
On a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ et $1+\alpha$ est positif, donc par produit : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha)$.
Or : $(1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2$ et $n\alpha^2 \geqslant 0$; donc : $(1+n\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1+(n+1)\alpha$; puis par transitivité : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
Donc par récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$. □

Remarques
1. *La première étape du raisonnement (vérifier que la première proposition est vraie) est essentielle. En considérant les propositions Q_n : « 10^n est multiple de 9 » ; on démontre comme dans l'exercice I.11.1. que pour tout k : $Q_k \Rightarrow Q_{k+1}$; et pourtant aucune des propositions Q_n n'est vraie.*
2. *Lorsqu'un raisonnement par récurrence est entrepris, l'expression « donc par récurrence » doit apparaître dans l'argumentation. Si de plus l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée, le raisonnement est alors faux.*

Chapitre II

Révisions

II.1 Identités remarquables

On obtient les identités remarquables suivantes par simple développement. Elles servent à développer des expressions factorisées ou à factoriser des expressions développées.

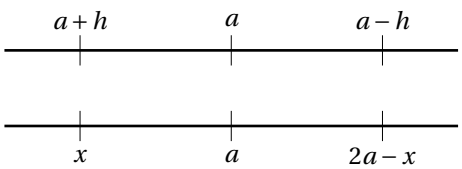
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{(II.1)}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad \text{(II.2)}$$
$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2 \quad \text{(II.3)}$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \text{(II.4)}$$
$$(a+b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \text{(II.5)}$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad \text{(II.6)}$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad \text{(II.7)}$$

II.2 Éléments de symétries d'une courbe

Dans toute cette partie f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II.2.1 Symétries dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel h, $a+h$ et $a-h$ sont symétriques par rapport à a ; en effet leur demi-somme vaut a. De même x et $2a-x$ sont symétriques par rapport à a.



Dans tout ce document f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple *Le symétrique de x par rapport à* 3 *est* $6-x$.

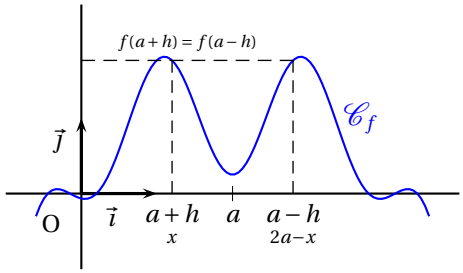
II.2.2 Axe de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME II.2.1

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si :

$\begin{cases} \textbf{(1)} & \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } a. \\ \textbf{(2)} & \text{Pour tout réel } h \text{ tel que } a+h \in \mathrm{D}_f : \\ & f(a+h) = f(a-h). \end{cases}$



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.1 peut également s'écrire :*
$\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.1. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *f est une fonction polynôme, son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 2.*
1re méthode *Soit h un réel, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^4 - 8(2+h)^3 + 22(2+h)^2 - 24(2+h) + 8 \\ &= (2+h)^3(2+h-8) + 22h^2 + 88h + 88 - 48 - 24h + 8 \\ &= (h^3 + 6h^2 + 12h + 8)(h-6) + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 - 64h - 48 + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-h) &= (2-h)^4 - 8(2-h)^3 + 22(2-h)^2 - 24(2-h) + 8 \\ &= (2-h)^3(2-h-8) + 22h^2 - 88h + 88 - 48 + 24h + 8 \\ &= (-h^3 + 6h^2 - 12h + 8)(-h-6) + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 + 64h - 48 + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2+h \in D_f$, on a : $f(2+h) = f(2-h)$;
donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2e méthode *Pour tout réel $x \in D_f$, on a :*

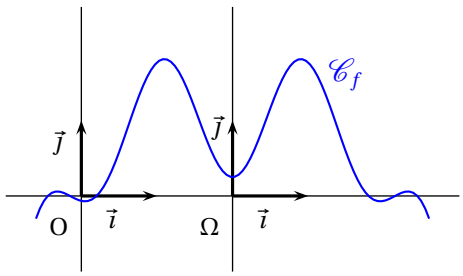
$$\begin{aligned} f(4-x) &= (4-x)^4 - 8(4-x)^3 + 22(4-x)^2 - 24(4-x) + 8 \\ &= (4-x)^3(4-x-8) + 22x^2 - 176x + 352 - 96 + 24x + 8 \\ &= -(x+4)\left(-x^3 + 12x^2 - 48x + 64\right) + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 128x - 256 + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &= f(x); \end{aligned}$$

donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.2

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et Ω le point de coordonnées $(a,0)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exercice II.2.2. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *Soit $\Omega(2,0)$, M un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ ; } \overrightarrow{\Omega M} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = 2\vec{\imath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &\iff Y = (X+2)^4 - 8(X+2)^3 + 22(X+2)^2 - 24(X+2) + 8 \\ &\vdots \\ &\iff Y = X^4 - 2X^2 \end{aligned}$$

La fonction polynôme $p : x \mapsto x^4 - 2x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$p(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = p(x).$$

Donc p est une fonction paire et par suite la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

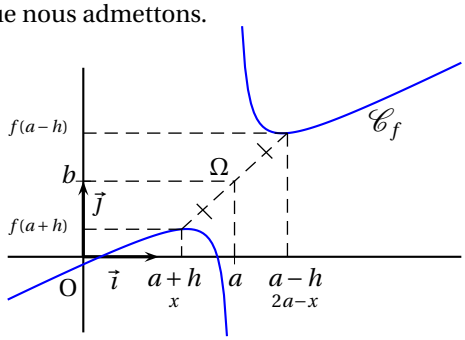
II.2.3 Centre de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME II.2.3

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$ si et seulement si :

- **(1)** D_f est symétrique par rapport à a.
- **(2)** Pour tout réel h tel que $h \in D_f$: $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.3 peut également s'écrire :*
$\forall x \in D_f,\ 2b - f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.3. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

Solution *f est une fonction rationnelle, son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et D_f est symétrique par rapport à 2.*

1re méthode *Soit h un réel tel que $2+h \in D_f$, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 3}{(2+h) - 2} \\ &= \frac{h^2 + 4h + 4 - 3h - 6 + 3}{h} \\ &= h + 1 + \frac{1}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2-h) &= \frac{(2-h)^2 - 3(2-h) + 3}{(2-h) - 2} \\ &= \frac{h^2 - 4h + 4 + 3h - 6 + 3}{-h} \\ &= -h + 1 - \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2+h \in D_f$, on a :

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{1}{2}\left(h + 1 + \frac{1}{h} - h + 1 - \frac{1}{h}\right) = 1$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2e méthode *Pour tout x de D_f, on a :*

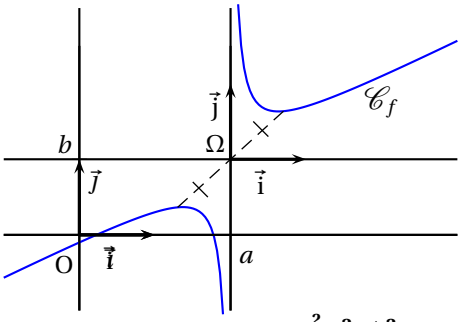
$$\begin{aligned} 2-f(4-x) &= 2-\frac{(4-x)^2-3(4-x)+3}{(4-x)-2} \\ &= \frac{2(2-x)-\left(x^2-8x+16+3x-12+3\right)}{2-x} \\ &= \frac{-x^2+3x-3}{2-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.4

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et Ω le point de coordonnées (a,b).
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction impaire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exercice II.2.4. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

Solution *Soit M un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{\imath}+Y\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = 2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff y = \frac{x^2-3x+3}{x-2} \\ &\iff Y+1 = \frac{(X+2)^2-3(X+2)+3}{(X+2)-2} \\ &\vdots \\ &\iff Y = X+\frac{1}{X} \end{aligned}$$

La fonction rationnelle $g : x \mapsto x+\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x :

$$g(-x) = (-x)+\frac{1}{-x} = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = -g(x).$$

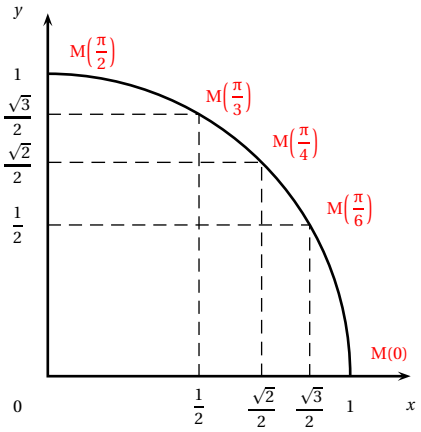
Donc g est une fonction impaire et par suite le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

II.3 Trigonométrie

II.3.1 Quelques valeurs remarquables

Le tableau ci-dessus a été vu en classe de 2e.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.



Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 ; \tag{II.8}$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \tag{II.9}$$

II.3.2 Quelques formules

II.3.2.a Formules de symétries

Les formules de ce paragraphe se déduisent des figures II.1 et II.2.
Pour tout réel x, on a :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \tag{II.10}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \tag{II.11}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \tag{II.12}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x \tag{II.13}$$

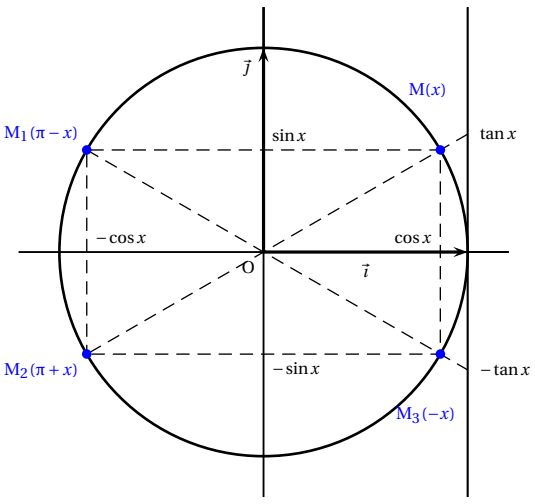


FIGURE II.1 – Images de x, $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$

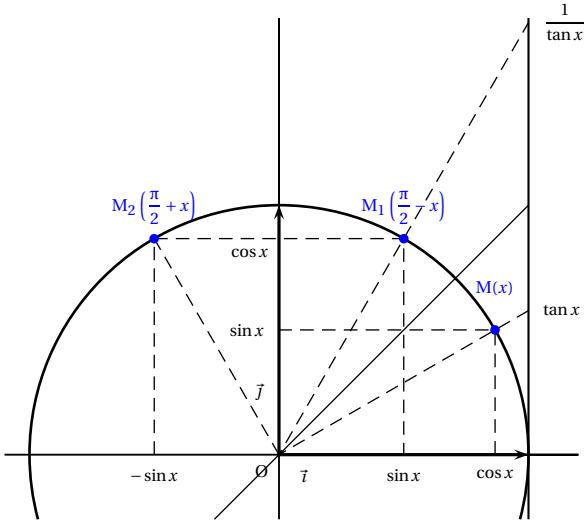


FIGURE II.2 – Images de x, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \tag{II.14}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x} \tag{II.15}$$

II.3.2.b Formules d'addition

Pour tous réel a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \tag{II.16}$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \tag{II.17}$$

Si de plus ni a ni b ni $a+b$ ne sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \tag{II.18}$$

II.3.2.c Formules de duplication

En prenant : $a = b = x$; dans les formules (II.16), (II.17) et (II.18), on obtient les formules suivantes.
Pour tout réel x, on a :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{II.19}$$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{4}$, on a :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{II.20}$$

En posant : $t = \tan\frac{x}{2}$; on déduit des formules (II.19) et (II.20), lorsque t et $\tan x$ son définis :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \tag{II.21}$$

II.3.2.d Sommes différences et produits de fonction circulaires

En posant $p = a+b$ et $q = a-b$ dans (II.16) et (II.17), on démontre que pour tous réels p et q, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.22}$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.23}$$

On déduit par addition ou soustraction dans les formules (II.16) et (II.17) que pour tous réels a et b :

$$\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \tag{II.24}$$
$$\sin a\sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b) \tag{II.25}$$
$$\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \tag{II.26}$$

II.3.3 Équations trigonométriques

II.3.3.a $\cos x = \cos\alpha$

THÉORÈME II.3.1

Soit α un nombre réel.

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array} \right.$$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x \equiv \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \\ ou \\ x \equiv -\alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{array} \right.$$

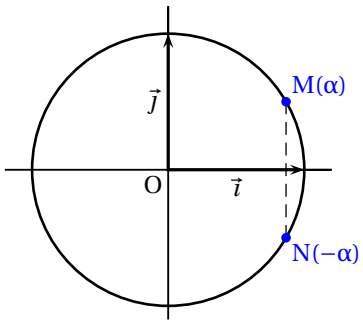


FIGURE II.3 – Équation $\cos x = \cos\alpha$

Exercice II.3.1. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm).***
a. $2\cos x = -1$.
b. $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solution a. *Résolvons l'équation :*

$$2\cos x = -1 \qquad (E_1)$$

On a :

$$(E_1) \iff \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$\iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.4.

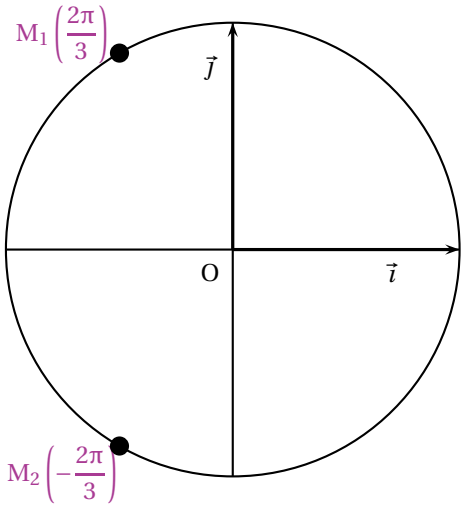


FIGURE II.4 – Images des solutions de (E_1)

b. *Résolvons l'équation :*

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (E_2)$$

On a :

$$(E_2) \iff \left| \begin{array}{l} 2x = x - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ 2x = -x + \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ 3x = \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad ou \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k'\dfrac{2\pi}{3} \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.5.□

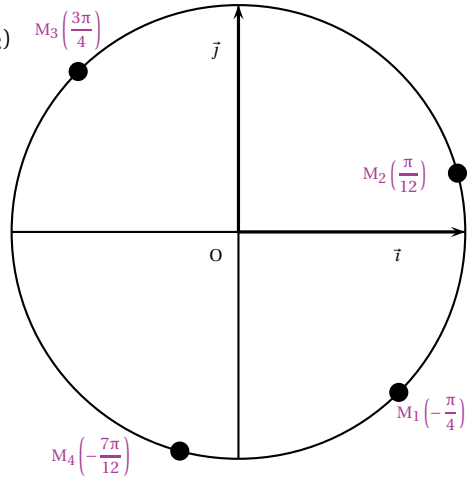


FIGURE II.5 – Images des solutions de (E_2)

II.3.3.b $\sin x = \sin\alpha$

THÉORÈME II.3.2

Soit α un nombre réel.

$$\sin x = \sin\alpha \iff \left|\begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

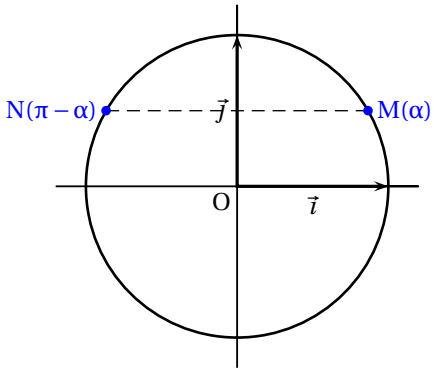


FIGURE II.6 – Équation $\sin x = \sin\alpha$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\sin x = \sin a \iff \left|\begin{array}{c} x \equiv \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \\ ou \\ x \equiv \pi - \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{array}\right.$$

Exercice II.3.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm) : $2\sin^2 x = 1$.***

Solution *Résolvons l'équation :*

$$2\sin^2 x = 1 \qquad (E_3)$$

$$\begin{aligned}
\textit{On a : } (E_3) &\iff \sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\
&\iff \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \; ou \; \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$(E_3) \iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 3\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 7\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = 5\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(E_3) \iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + (4k) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+1) \times \dfrac{\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+3) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{4} + (4k+2) \times \dfrac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

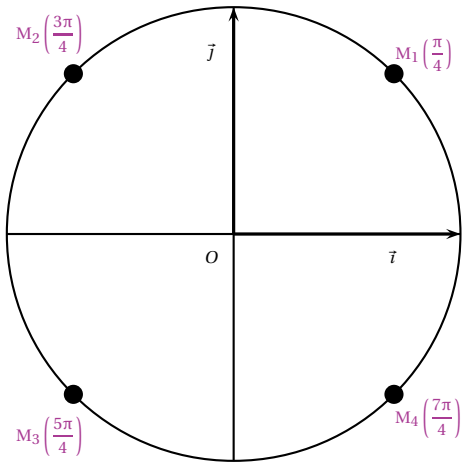


FIGURE *II.7 – Images des solutions de (E_3)*

Or $(4k)$, $(4k+1)$, $(4k+2)$, $(4k+3)$ sont des entiers et réciproquement tout entier n est de la forme : $4k+r$ avec $r \in$

$\{0;1;2;3\}$ *; en effet,* k *et* r *sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* n *par* 4 *; donc :*

$$\boxed{(E_3) \iff x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})}$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.7. □

II.3.3.c $\tan x = \tan\alpha$

THÉORÈME II.3.3

Soit α un nombre réel tel que $\tan\alpha$ soit défini.

$$\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\tan x = \tan\alpha \iff x \equiv \alpha \ (\mathrm{mod}\ \pi)$$

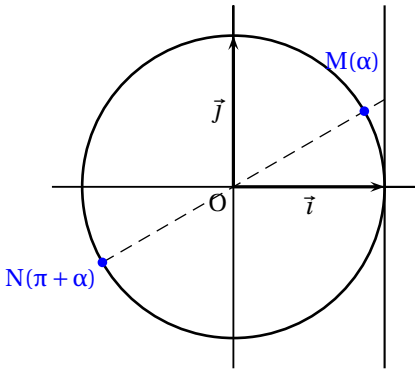


FIGURE II.8 – Équation $\tan x = \tan\alpha$

II.3.3.d $a\cos x + b\sin x = c$

On rappelle que les formules de passages entre coordonnées rectangulaires et coordonnées polaires sont par : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

et $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$.

Pour plus de précisions, on pourra se référer au paragraphe VII.2.4 page 81. On se propose de résoudre l'équation :

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad \text{(II.27)}$$

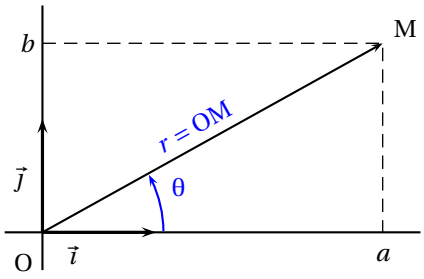


FIGURE II.9 – Coordonnées polaires

Où a, b, c sont des réels tels que a et b ne soient pas tous nuls.

Posons : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$; on a alors : $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$; d'où il vient :

$$\text{(II.9)} \iff r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{r}.$$

On est ainsi ramené au type d'équation étudié au paragraphe II.3.3.a (page 15).

Exercice II.3.3. ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***et représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation :***

$$3\cos x + \sqrt{3}\sin x = -3 \qquad \text{(II.28)}$$

Solution *On a :* $\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ *; on en déduit que :*

$$
\begin{aligned}
\text{(II.28)} &\iff 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = -3\\
&\iff \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}\\
&\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}\\
&\iff \left|\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \quad ou \qquad\qquad (k\in\mathbb{Z})\\ x-\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\\
&\iff \left|\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \quad ou \qquad\qquad (k\in\mathbb{Z})\\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

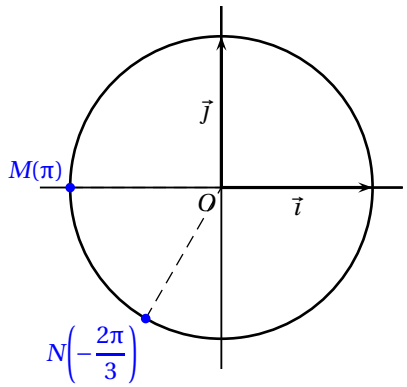


FIGURE *II.10 – Images des solutions de l'équation* (II.28)

□

II.4 Géométrie du triangle

Dans toute cette partie ABC désigne un triangle, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, désignent respectivement les angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$; a, b, c désignent respectivement les distances BC, CA et AB et $\mathscr{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

II.4.1 Aire d'un triangle

Comme chacun sait, l'aire d'un triangle se calcule par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Dans le triangle ABC ci-contre, si on choisit AB pour base alors la hauteur CH est déterminée par :

$$\text{CH} = \text{BC}\cos\widehat{ABC} = a\sin\widehat{B}.$$

On en déduit que : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B}$.

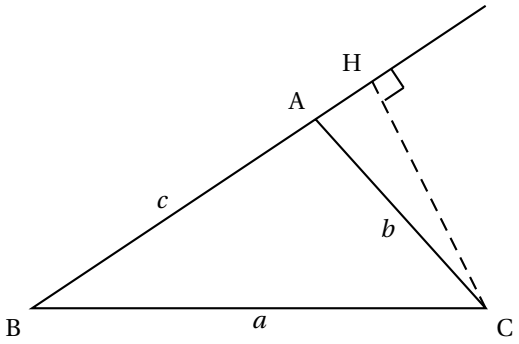


FIGURE II.11 –

Plus généralement :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} \qquad \text{(II.29)}$$

II.4.2 Théorème des sinus

THÉORÈME II.4.1

Soit ABC un triangle et $\mathscr{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit, on a :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

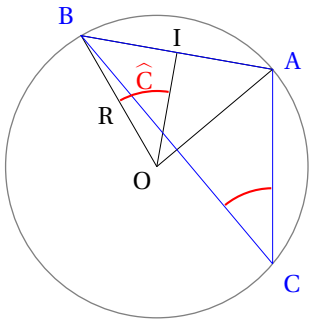


FIGURE II.12 –

Démonstration En multipliant (II.29) membre à membre par $\frac{2}{abc}$, il vient :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

Les trois angles du triangle ABC ne peuvent être tous droits ou obtus, car sinon leur somme serait strictement supérieure à un angle plat. On en déduit que l'un des angles au moins est aigu, par exemple $\widehat{C}$. Soit I le milieu du segment [AB] et O le centre du cercle circonscrit. Le triangle OAB est isocèle en O et, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. On en déduit que le triangle OBI est rectangle en I et que : $\widehat{BOI} = \widehat{C}$; d'où il vient : $\frac{c}{2} = \text{BI} = \text{R}\sin\widehat{C}$; donc : $\frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$. □

II.4.3 Théorème d'Al Kashi

Théorème II.4.2

Soit ABC un triangle, on a :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Démonstration (1) On a : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

On démontre de même **(2)** et **(3)**. □

Remarques

1. *Lorsque l'un des angles est droit, on retrouve le théorème de* Pythagore *; en effet si par exemple l'angle* $\widehat{A}$ *est droit,* ***(1)*** *devient :* $a^2 = b^2 + c^2$.

2. *Le théorème des sinus (II.4.1) et le théorème d'*Al Kashi *(II.4.2) permettent lorsqu'elle est possible la résolution des triangles*[1].

II.4.4 Théorème de la médiane

Théorème II.4.3

Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC], on a :

(1) $2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$;

(2) $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$.

Démonstration (1) On a :

$$\begin{aligned} 2AA'^2 &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}\right)^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 \\ &= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= AB^2 + AC^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \end{aligned}$$

(2) En utilisant **(1)**, il vient : $\frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$;

d'où l'on tire : $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$. □

II.5 Polynômes du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $P(x)$, résoudre l'équation $P(x) = 0$, étudier le signe $P(x)$ suivant les valeurs de x, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

II.5.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$; on écrit $P(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $P(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $P(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $P(x)$ est : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

1. Résoudre un triangle : étant donnés un certain nombre d'angles et de côtés d'un triangle, déterminer les angles et les côtés non donnés.

étapes	cas particulier	cas général
1.	$P(x)=3x^2+5x-7$	$P(x)=ax^2+bx+c$
	$P(x)=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
2.	$P(x)=3\left(x^2+2\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{84}{36}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$	
3.	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$	$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{109}}{6}\right)$	
	$P(x)=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$	

Récapitulatif des étapes

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise ; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteur de degré un à coefficient réels.

DÉFINITION II.5.1

Le nombre, Δ, défini par : $\Delta=b^2-4ac$; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{II.30}$$

II.5.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
D'après (II.30), pour tout réel x :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \tag{II.31}$$

Introduisons la fonction $u: x\mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (II.31) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2a}\\-\frac{\Delta}{4a}\end{pmatrix}$.

THÉORÈME II.5.1

La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à Oy et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$; de plus, dans le repère $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y=aX^2$.

Remarque *D'après (II.31) on a :* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Exemple *On se propose de représenter graphiquement la fonction f définie par :* $f(x)=x^2-5x+4$.
On a : $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ *et* $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}+4=\frac{16}{4}-\frac{25}{4}=-\frac{9}{4}$.
Introduisons le point $S\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$, *dans le repère* $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $Y=X^2$.
Nous en déduisons la courbe de la figure II.13.

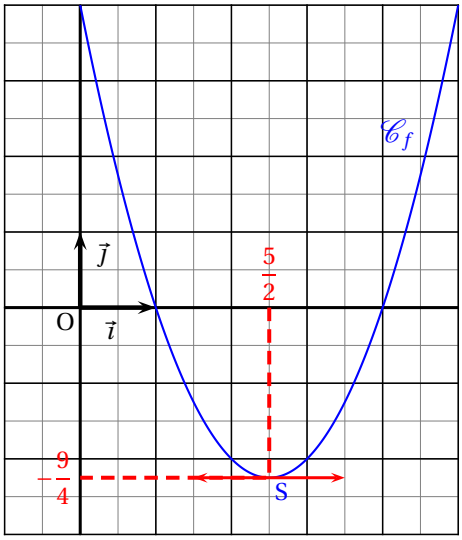


FIGURE II.13 – Représentation graphique de f.

On déduit du théorème II.5.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de a.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

FIGURE II.14 – Lorsque $a > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

FIGURE II.15 – Lorsque $a < 0$.

II.5.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : Si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (II.30) dans le cas où : $\Delta > 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME II.5.2

Soit $P : x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Si $\Delta = 0$ P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$P(x) = a(x-x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

Remarques

1. *Si on remplace Δ par 0 dans les formules de calcul de x_1 et x_2, on obtient : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$.*

2. *Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

3. *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

4. *Le théorème II.5.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré,P, que pour résoudre l'équation, $P(x) = 0$ (voir corollaire II.5.3).*

Exercice II.5.1. ***Factoriser lorsque cela est possible.***

a. **$P(x) = 2x^2+3x-6$.**

b. **$P(x) = 2x^2-8x+8$.**

c. **$P(x) = 2x^2-5x+8$.**

d. **$P(x) = -5x^2+3x+2$.**

Solution

a. *On a : $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-6) = 57$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} \quad et \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = 2\left(x-\frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)}.$$

b. Méthode des identités

$$\boxed{P(x) = 2\left(x^2-4x+4\right) = 2(x-2)^2}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = (-8)^2-4\times 2\times 8 = 0$; donc $\Delta = 0$ et P a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = 2(x-2)^2}.$$

c. *On a : $\Delta = (-5)^2-4\times 2\times(8) = 39$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\textbf{\textit{P n'est pas factorisable.}}}$$

d. Méthode de la racine évidente *On voit que 1 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$\boxed{P(x) = (x-1)(-5x-2)}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 3^2-4\times(-5)\times 2 = 49 = 7^2$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-7}{-10} = 1 \quad et \quad x_2 = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)}}.$$

□

COROLLAIRE II.5.3

Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{(E)}$$

et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.5.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$.***

a. $\mathbf{3x^2+5x-7=0}$.

b. $\mathbf{3x^2-5x-2=0}$.

c. $\mathbf{3x^2+5x+7=0}$.

d. $\mathbf{-5x^2+4x-\frac{4}{5}=0}$.

Solution ***a.*** *On a : $\Delta = 25-4\times3\times(-7) = 109$; donc $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{6} \quad et \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{-5-\sqrt{109}}{6}, \frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right\}}}.$$

b. Méthode de la racine évidente *On voit que 2 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$3x^2-5x-2 = (x-2)(3x+1).$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}}}.$$

c. *On a : $\Delta = 25-4\times3\times7 = -59$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\mathbf{S = \emptyset}}.$$

d. Méthode des identités

$$-5x^2+4x-\frac{4}{5} = -5\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right) = -5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 16-4\times(-5)\times\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$; donc $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

□

II.5.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x. On a vu en II.5.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
a	signe de a				
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (II.30) : $P(x) = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$; donc P est du signe de a.

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME II.5.4

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$ $P(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ $P(x)$ est du signe de a.

Exercice II.5.3. ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

a. $P_1 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 4$.

b. $P_2 : x \mapsto 3x^2 + 3x + 4$.

c. $P_3 : x \mapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}$.

Solution a. *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P_1 *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}.$$

On en déduit que le signe de P_1 *est donné par le tableau suivant.*

x		$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{4}$	
$P_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. *On a :* $\Delta = 9 - 48 = -39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$P_2 > 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

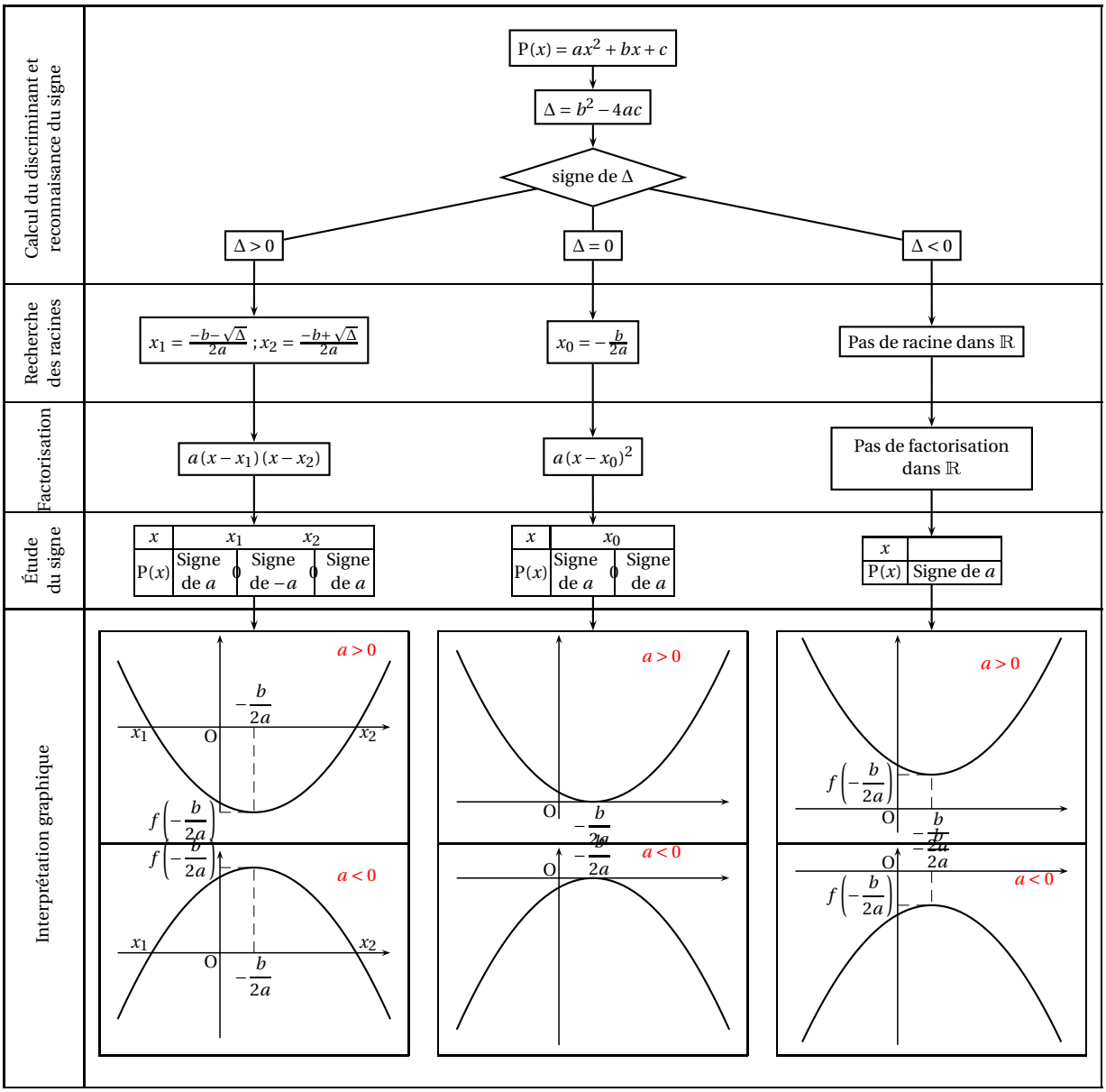
c. *On a :* $\Delta = 4 - 4 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P_3 *a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$P_2 \geqslant 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* P_2 *est s'annule seulement en* $\frac{2}{5}$.

□

II.5.5 Tableau récapitulatif



II.5.6 Compléments

THÉORÈME II.5.5 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Soit $ax^2 + bx + c$ un triôme du second degré qui a deux racines : x_1 et x_2. On a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

THÉORÈME II.5.6 ÉQUATIONS EN SOMME ET PRODUIT

Soit deux nombres dont on connaît le produit P et somme S. Ces deux nombres sont les racines du trinôme :

$$x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}.$$

II.5.7 Travaux dirigés

II.5.7.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme P : $x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

Partie A – avec le discriminant

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $X = x^2$).

1. $P_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.
2. $P_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.
3. $P_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.
4. $P_4 : x \mapsto x^4 + 16$.
5. $P_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.
6. $P_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

Partie B – sans le discriminant

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

II.5.7.b Équations en somme et produit

1. Soit P : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de a, b et c la somme et produit des racines.
2. Soit α et β deux nombres dont on connaît la somme, s et le produit, p.
Démontrer que α et β sont les racines du polynôme : P : $x \mapsto x^2 - sx + p$.
3. Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

II.5.8 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
II.5.a. Écrire P : $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.b. Écrire Q : $x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.c. Écrire R : $x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.
II.5.d. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.
II.5.e. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

II.6 Exercices résolus

Exercice II.6.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Solution *L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{D}_f$:

$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

On en déduit que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, est l'image de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = -\dfrac{1}{x}$; par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. On en déduit le graphique de la figure II.16. □

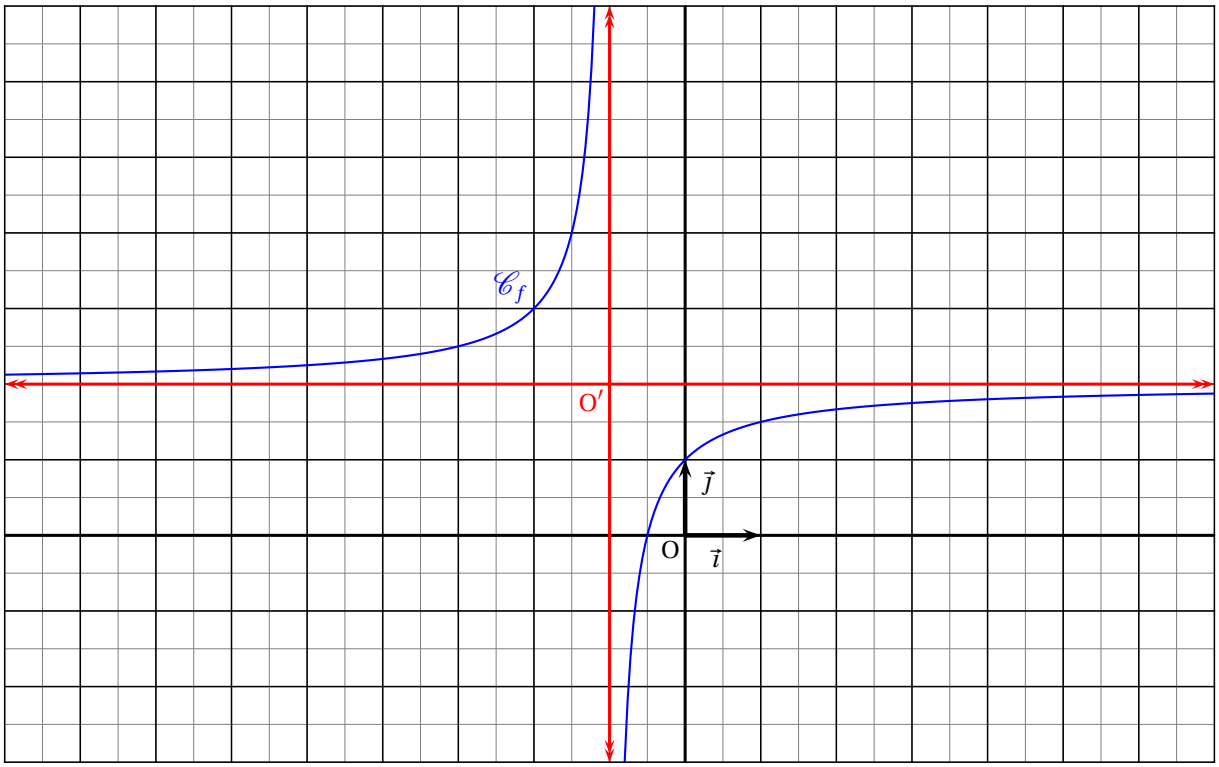


FIGURE II.16 – Représentation graphique de f.

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

Exercice II.6.2. ***m désigne un nombre réel. On considère les fonctions $f_m : x \mapsto mx+5m+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{-x-2}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.

2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$.

Solution ***1.*** *Pour tout réel m, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x) = h(x) \qquad (\mathrm{E}_m)$$

dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Les courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ ont autant de points d'intersection que (E_m) a de solutions.

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_m) &\iff mx+5m+3 = \frac{-x-2}{x+3}\\ &\iff mx^2+3mx+5mx+15m+3x+9 = -x-2\\ &\iff mx^2+(8m+4)x+15m+11 = 0.\end{aligned}$$

(E_0) *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(\mathrm{E}_0) \iff 4x+11=0 \iff x = -\frac{11}{4}.$$

Donc, pour $m=0$, (E_m) n'a qu'une solution et donc $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_0$ n'ont qu'un point d'intersection.
Pour $m\neq 0$, (E_m) est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :

$$\Delta_m=(8m+4)^2-4m(15m+11)=4\left((4m+2)^2-15m^2-11m\right)=4\left(m^2+5m+4\right).$$

Δ_m est du signe de $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta=25-4\times 4=9$, donc Δ_m a deux racines : $m_1=\dfrac{-5-3}{2}=-4$ et $m_1=\dfrac{-5+3}{2}=-1$.
On en déduit le signe de Δ_m suivant les valeurs de m :

m	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$		

D'où l'on tire que :

- ***pour $m\in\{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour $m\in]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour $m\in]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont deux points d'intersection.***

Un point $A(x,y)$ appartient à toutes les droites $\mathscr{D}_m$ si, et seulement si pour tout $m\in\mathbb{R}$: $y=mx+5m+3$. Or :

$$y=mx+5m+3 \iff (x+5)m+3-y=0.$$

On cherche donc x et y pour que le polynôme en m : $(x+5)m+3-y$; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :

$$\begin{cases} x+5=0\\ 3-y=0\end{cases}$$

C'est-à-dire lorsque : $(x;y)=(-5;3)$.

Les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en $A(-5;3)$

2. *$\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$ sont les droites d'équations respectives : $y=-4x-17$, $y=-x-2$ et $y=3$.*
De plus, pour tout $x\in D_h$, on a : $h(x)=\dfrac{-x-2}{x+3}=\dfrac{-x-3+1}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+3}$. Donc $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On déduit de cette étude la figure II.17. □

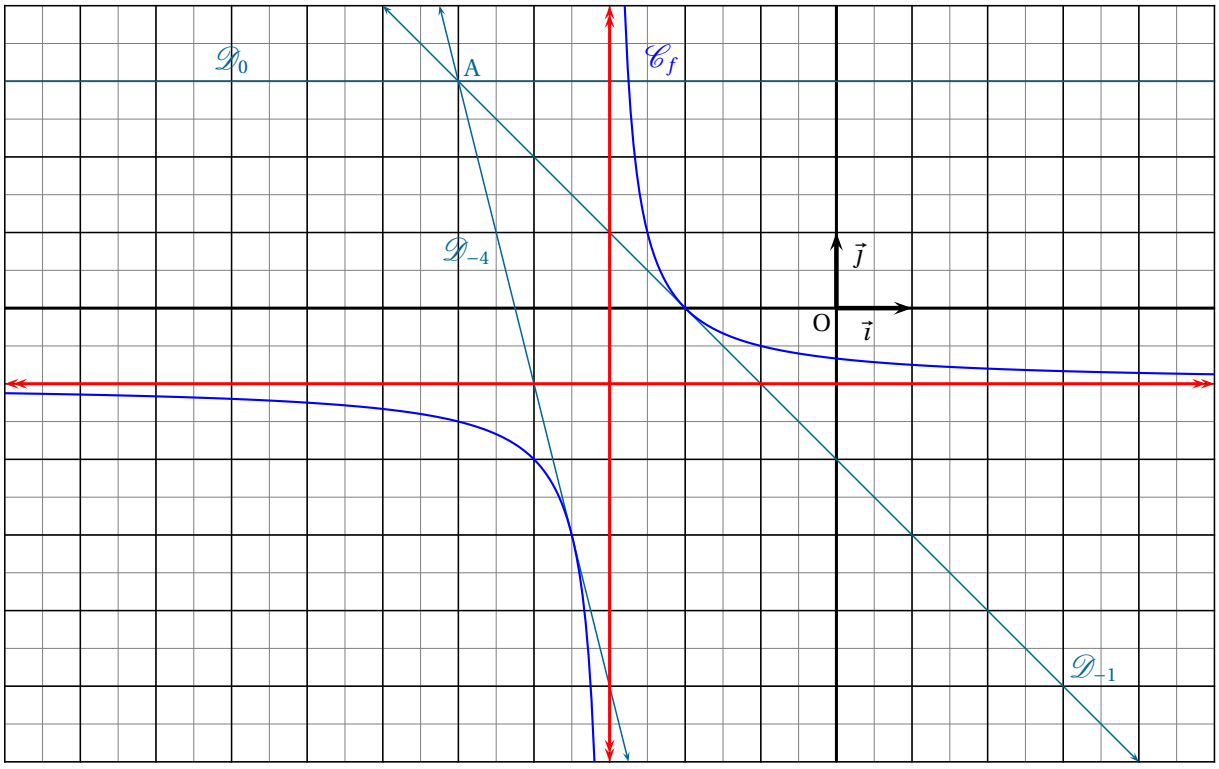


FIGURE II.17 – Représentation graphique de f.

Exercice II.6.3. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$.

Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ puis tracer ces deux courbes.

Solution *La position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ est déterminée par le signe de la fonction $f-h$ dont l'ensemble de définition est : $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Pour tout réel x :*

$$(f-h)(x) = 2x+3-\frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 81-4\times 16 = 17$.
Donc le numérateur a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

On en déduit le signe de $f-h$:

x		$\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$		-3		$\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2+9x+8$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(f-h)(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

D'où l'on tire que :

- ***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}$.***
- ***pour $x \in \left]\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4};-3\right[\cup \left]\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;***
- ***pour $x \in \left]-\infty;\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]-3;\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.***

De plus $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$. On déduit de cette étude la figure II.18. □

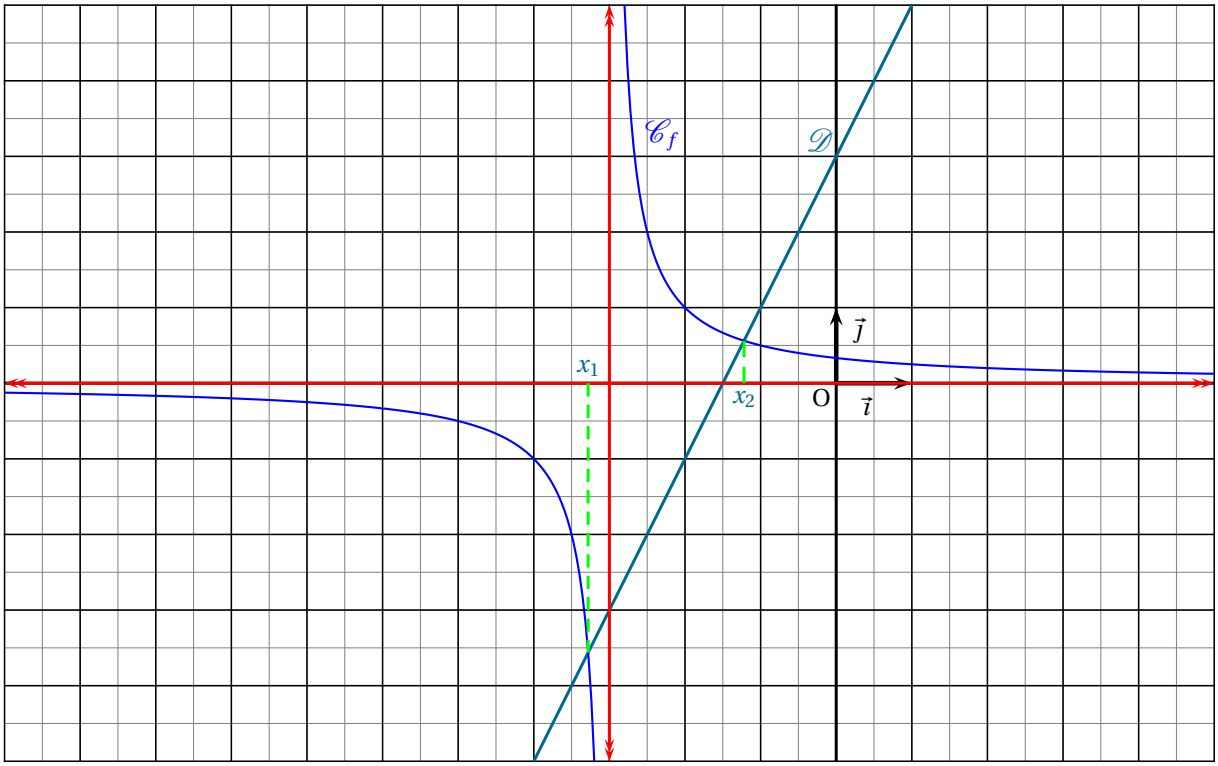


FIGURE II.18 – Représentation graphique de f.

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$

III.1.1 Majorants, minorants ...

Considérons une partie E de $\mathbb{R}$, par exemple : $E =]-3;0] \cup \{2\}$;
On a pour tout $x \in E$: $2,5 \geqslant x$; on dit que 2,5 est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que 2,5 est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in E$: $-4 \leqslant x$; on dit que -4 est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que -4 est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est -3.

THÉORÈME III.1.1

Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de A : $|x| \leqslant A$

Démonstration Pour tous nombres réels x et A :

$$|x| \leqslant A \iff -A \leqslant x \leqslant A.$$

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

S'il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$; alors $-A$ est minorant de E et A est un majorant de E ; on en déduit que E est borné.

Réciproquement, si E est borné. Soit m un minorant de E et M un majorant de E. Posons : $A = \max\{-m, M\}$.

On a : $-m \leqslant A$ et $M \leqslant A$; donc : $-A \leqslant m$ et $M \leqslant A$; or pour tout élément x de E : $m \leqslant x \leqslant M$; donc par transitivité : $-A \leqslant x \leqslant A$.

Soit finalement, pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$. □

III.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément)

Ce paragraphe est hors programme, il peut ne pas être lu et est destiné aux élèves désireux d'en savoir plus.
Soit maintenant une partie majorée non vide E quelconque. Les considérations envisagées ci-dessus laissent supposer que l'ensemble des majorants de E est un intervalle qui serait donc de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Mais si a n'était pas un majorant de E, alors il existerait un élément x de E tel que : $a < x$.
On se trouverait alors dans la situation contradictoire suivante :
$\frac{a+x}{2}$ est un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} \in]a;+\infty[$) et $\frac{a+x}{2}$ n'est pas un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} < x$).
On en déduit que a est le plus petit des majorants de E et donc la borne supérieure de E.

Cette étude nous conduit à énoncer le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME III.1.2 THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Toute partie majorée (respectivement minorée) non vide de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque *Ce théorème est faux dans* $\mathbb{Q}$.

Exemple *Dans* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble*

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$$

est majoré par $\frac{3}{2}$ *mais n'a pas de borne supérieure ; alors que dans* $\mathbb{R}$ *il a une borne supérieure :* $\sqrt{2}$.

III.2 Définitions

III.2.1 Introduction

DÉFINITION III.2.1 SUITE NUMÉRIQUE

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

Exemples

1. *On peut considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $u_n = n^2$.
On a alors : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16$ ...
Pour chaque terme u_n on a : $u_n = f(n)$; *où f est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (u_n) ***est définie explicitement***.
On peut calculer directement des termes de « grands indices » ($u_{100} = 10\,000$).

2. *On peut considérer la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :* $\begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{cases}$.

On a alors : $v_2 = \dfrac{1}{2}$; $v_3 = \dfrac{1}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{16}$ ...
v_0 et v_1 ne sont pas définis.
Pour chaque terme on a : $v_{n+1} = f(v_n)$; *où f est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (v_n) ***est définie par récurrence*** .
Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.
La suite (v_n) peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.

3. *On peut également considérer la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{cases}$.

Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Remarque *Toutes les suites étudiées en classe de Première et de Terminale seront définies sur $\mathbb{N}$ ou à partir d'un certain indice.*

III.2.2 Composée d'une suite par une fonction

DÉFINITION III.2.2

Soit f une fonction et (v_n) une suite d'éléments de l'ensemble de définition de f.
La composée de (v_n) par f est la suite (u_n) de terme général : $u_n = f(v_n)$.

Exemple *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont définies par :* $v_n = n^2$ *et* $f(x) = 2x - 3$; *alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :* $u_n = 2n^2 - 3$.

III.2.3 Exercices

III.2.a. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 4n^2 - n + 1$.

III.2.b. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_n = u_{n-1}^2 + 1$.

III.2.c. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, composée de la suite (u_n) de l'exercice précédent par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

III.3 Représentation graphique d'une suite

III.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction f sur la partie positive de son ensemble de définition.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par :* $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$ *; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$ *; pour chaque indice* n, u_n *est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse* n.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure III.1).

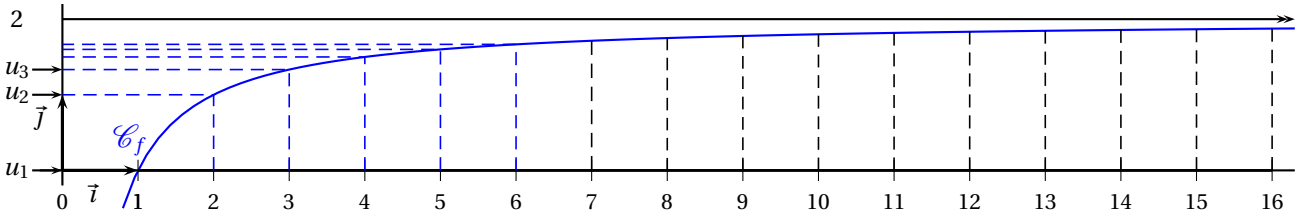


FIGURE III.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

III.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction f sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice [1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

Méthode pour placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses lorsque u_n est placé

- On place sur la courbe le point A_n d'abscisse u_n. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}.
- On place sur la première bissectrice le point B_n de même ordonnée que A_n. B_n est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, B_n a donc pour abscisse u_{n+1}.
- Il ne reste plus qu'à placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$;

on trace sur $[0;+\infty[$ *la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ *et la droite* Δ *d'équation :* $y = x$.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure III.2).

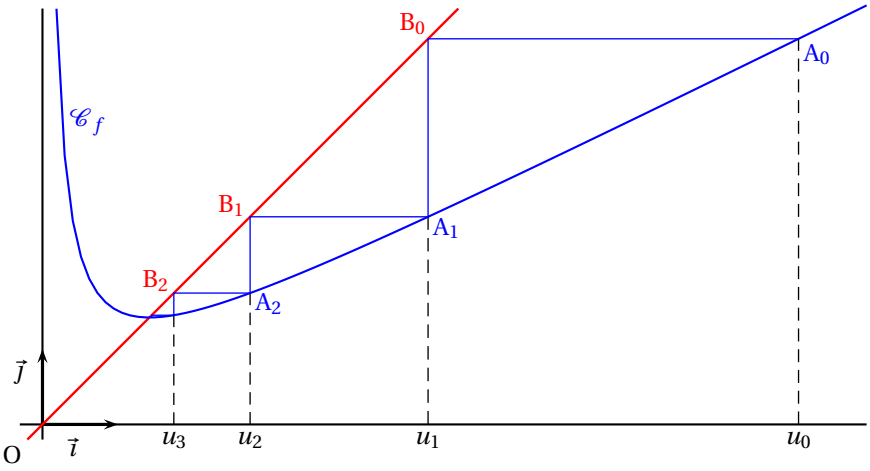


FIGURE III.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

III.3.3 Exercices

III.3.a. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_n = f(n)$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) et déterminer sa limite.

III.3.b. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel non nul, n, $u_n = f(u_{n-1})$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) (unité graphique : 20 cm) et conjecturer sa limite.

III.3.c. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

(unité graphique : 2cm). f est la fonction : $x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x}$. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f. (u_n) est la suite vérifiant, $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer les points fixes[2] de f.

3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite éventuelle.

III.4 Suites bornées

III.4.1 Généralités

DÉFINITIONS III.4.1 **SUITE BORNÉE**

(1) Dire qu'une suite est *majorée* (respectivement *minorée*) signifie que l'ensemble des termes de cette suite est majoré (respectivement minoré).

(2) Une suite à la fois majorée et minoré est dite *bornée*.

Exemple *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2\sin n + 1$.*
Soit n un entier naturel. La fonction $f : x \mapsto 2x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient dominant positif) et on sait que : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$; donc : $f(-1) \leqslant f(\sin n) \leqslant f(1)$; c'est-à-dire : $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$. La suite (u_n) est donc majorée par 3 et minorée par -1

Notations et vocabulaire
1. *Lorsqu'une suite (u_n) est majorée, par abus de langage nous appellerons borne supérieure de (u_n) la borne supérieure de l'ensemble de ces termes.*
2. *On défini de même la borne inférieure d'une suite minorée.*

Exercice III.4.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :***

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et majorée par 1.

Solution ***1.*** *On a :*

$$u_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} \qquad u_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3+i} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{37}{60}$$

2. *Soit n un entier naturel non nul. u_n est une somme de n termes, elle donc minorée par n fois le plus petit et majorée par n fois le plus grand. Donc :*

$$n \times \frac{1}{n+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{1}{n+1}.$$

Or : $n \times \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{2}$ et $n \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; donc : $n \times \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ (car $\dfrac{n}{n+1}$ est un quotient de deux nombres réels strictement positifs et numérateur est inférieur au dénominateur). Donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

La suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et majorée par 1.

□

III.4.2 Exercices

III.4.a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \dfrac{1}{2+\sin n}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.4.b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \sin n\right)^2$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$.

III.4.c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$, de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.5 Suites monotones

III.5.1 Définitions

DÉFINITIONS III.5.1 SUITE MONOTONE

(1) Dire qu'une suite est croissante (respectivement décroissante) signifie que cette suite est une fonction croissante (respectivement décroissante).
(2) Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Dire que (u_n) est croissante signifie que pour tous entiers p et q supérieurs ou égaux à n_0 :

$$p \leqslant q \quad \Longrightarrow \quad u_p \leqslant u_q.$$

Remarques
1. *On définit de même les suites* strictement *monotones.*
2. *Toute suite croissante est minorée par son premier terme*
3. *Toute suite décroissante est majorée par son premier terme*

DÉFINITIONS III.5.2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
(1) La suite (u_n) est dite constante lorsque pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à n_0 : $u_n = u_{n_0}$.
(2) La suite (u_n) est dite stationnaire lorsqu'il existe un nombre entier, p, tel que pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à p : $u_n = u_p$.

Remarques
1. *Les suites constantes sont les suites à la fois croissantes et décroissantes.*
2. *Les suites stationnaires sont les suites constantes à partir d'un certain indice.*
3. *Les suites constantes sont des cas particuliers de suites stationnaires.*

III.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

III.5.2.a Cas général

THÉORÈME III.5.1
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique.
(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$; alors la suite (u_n) est croissante.
(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Démontrons **(1)**. Soit p et q deux entiers tels que : $n_o \leqslant p \leqslant q$. On a :

$$u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \cdots \leqslant u_{q-1} \leqslant u_q$$

donc la suite (u_n) est croissante. On démontre de même **(2)**. □

Exercice III.5.1. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$.***

Solution *Soit n un entier naturel non nul. On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

or n et $n+1$ sont tous deux strictement positifs donc pour tout entier naturel non nul n on a : $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$;
c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante. □

III.5.2.b Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs

THÉORÈME III.5.2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dont tous les termes sont *strictement positifs*.

(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; alors la suite (u_n) est croissante.

(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème se déduit du précédent car les termes de la suite étant strictement positifs, on a :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$. □

Exercice III.5.2. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *Tous les termes de cette suite sont strictement positifs. Soit n un entier naturel non nul.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. La suite (u_n) est décroissante. □

III.5.2.c Lorsque la suite est définie explicitement, $u_n = f(n)$

THÉORÈME III.5.3

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie par une relation du type : $u_n = f(n)$.

(1) Si la fonction f est croissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est croissante.

(2) Si la fonction f est décroissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème est une conséquence immédiate de la DÉFINITION III.5.1 □

Exercice III.5.3. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *On sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.* □

Remarque *La réciproque de ce théorème est fausse, la suite (u_n) peut être croissante sans que la fonction f le soit. Pour s'en convaincre il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.*

La fonction f n'est pas monotone car sa dérivée, la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \cos(2\pi x)$, est strictement positive sur les intervalles $\left]k - \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{5}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et strictement négative sur les intervalles $\left]k + \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{7}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$; et pourtant la suite (u_n), définie par $u_n = f(n) = \dfrac{n}{2}$, est strictement croissante (voir figure III.3).

III.5.2.d Composée d'une suite monotone par une fonction monotone

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème **??**.

THÉORÈME III.5.4

Si u_n est une suite monotone d'éléments d'un intervalle I et si f est une fonction monotone sur I, alors $f(u_n)$ est une suite monotone ; plus précisément, le sens de variation de $f(u_n)$ est donné dans le tableau ci-dessous.

	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
(u_n) est croissante	$(f(u_n))$ est croissante	$(f(u_n))$ est décroissante
(u_n) est décroissante	$(f(u_n))$ est décroissante	$(f(u_n))$ est croissante

Exemple *Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général : $v_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.*

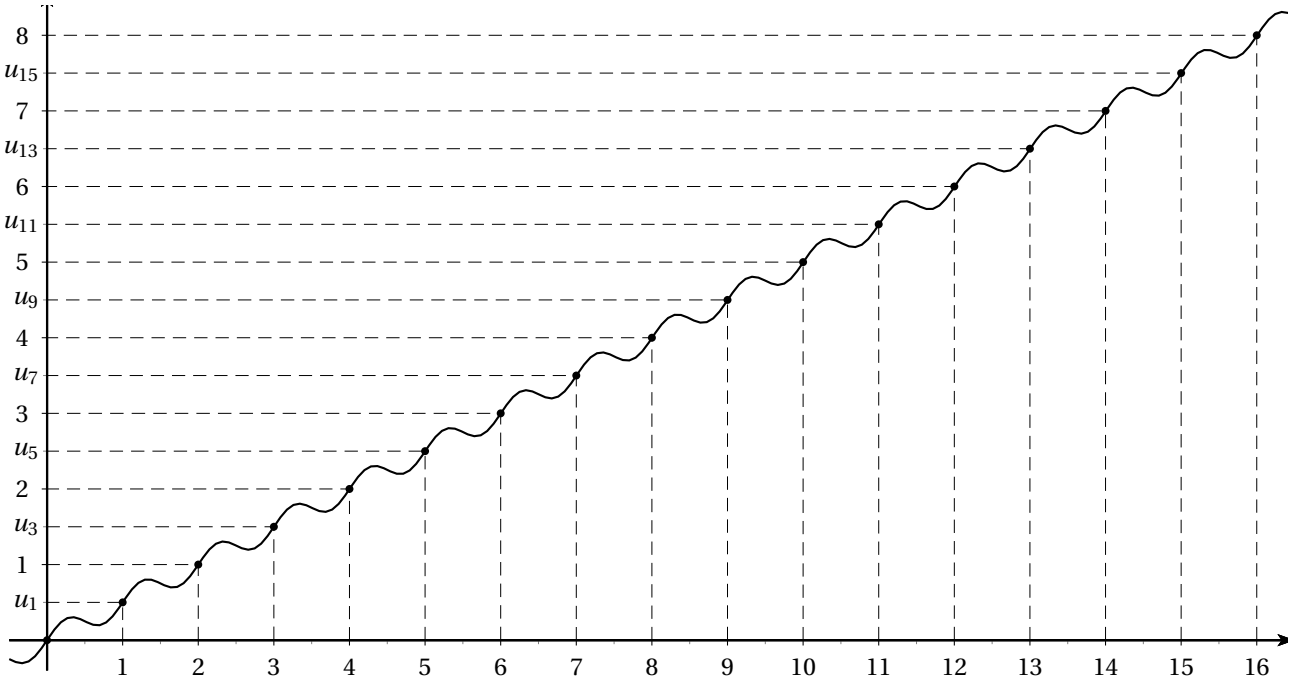


FIGURE III.3 – Suite croissante définie explicitement, sans que le fonction soit croissante.

(v_n) est la composée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. (u_n) est strictement positive (comme somme de nombres strictement positifs) et croissante ($\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} > 0$) de plus la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$; donc la suite (v_n) est décroissante.

III.5.3 Exercices

III.5.a. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

III.5.b. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

III.5.c. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = n^2 + 4n - 7$.

III.5.d. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = \frac{n^2+3}{n+4}$.

III.5.e. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

III.6 Suites arithmétiques - suites géométriques

III.6.1 Suites arithmétiques

III.6.1.a Définition

DÉFINITION III.6.1
Une suite *arithmétique* de *raison r* est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

Exemple *Pour la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_3 = 5$, on a : $u_4 = 3$; $u_5 = 1$; $u_6 = -1$ ...*

La figure III.4 suggère que pour une suite arithmétique de raison r : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p + 4$; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

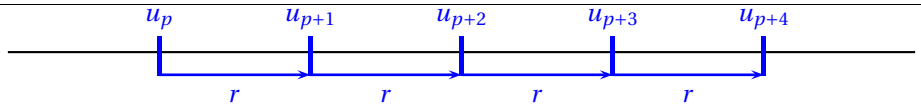


FIGURE III.4 – Suite arithmétique.

THÉORÈME III.6.1

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p + r$; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant r. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois r, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et si $u_{13} = 52$ alors : $u_{121} = u_{13} - 5(121-13) = -488$.*

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.6.2

Si (u_n) est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n-n_0) + u_{n_0}.$$

Exemple *La suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.*

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

2. *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré 1 est la raison.*

III.6.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.1.

THÉORÈME III.6.3

(1) Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.

(2) Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

DÉFINITION III.6.2

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

THÉORÈME III.6.4

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite arithmétique, r sa raison et k l'indice de b.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

III.6.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite arithmétique et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & + & (u_m + r) & + & \cdots & + & (u_m + (p-m)r) \\ S = & (u_m + (p-m)r) & + & (u_m + (p-m-1)r) & + & \cdots & + & u_m \end{cases}$

puis par somme : $2S = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

THÉORÈME III.6.5

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique et m et p des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

Exercice III.6.1. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels non nuls sont les n premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice III.6.2. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour k variant de 1 à n ; ce sont donc les n premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$.* □

III.6.2 Suites géométriques

III.6.2.a Définition

DÉFINITION III.6.3

Une suite *géométrique* de *raison q* est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples *Considérons les suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n), définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives 2, -3, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs 3, 2, -4. Les cinq premiers termes de chaque suite sont représentés dans la tableau III.1.*

n	0	1	2	3	4
u_n	3	6	12	24	48
v_n	2	-6	18	-54	162
w_n	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

TABLE III.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n).

Remarques

1. *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
2. *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
3. *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
4. *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
5. *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

THÉORÈME III.6.6

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.

Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p q$; $u_{p+2} = u_{p+1} q$; $u_{p+3} = u_{p+2} q$;…
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par q, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème III.6.6 le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.6.7

Si (u_n) est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*
2. *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k\,q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

Exemples

1. *La suite géométrique, (u_n), de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\frac{1}{9} \times 3^n$.*
2. *La suite géométrique, (v_n), de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\frac{1024}{(-2)^n}$.*

III.6.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.3.

THÉORÈME III.6.8

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Le sens de variation de (u_n) est donné dans le tableau ci-dessous.

(u_n)	$q \in]1;+\infty[$	$q \in]0;1[$	$q \in]-\infty;0[$	$q = 0$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	croissante	décroissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} < 0$	décroissante	croissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} = 0$	constante				

DÉFINITION III.6.4

La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre : $\sqrt{ab}$.

THÉORÈME III.6.9

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors b est la moyenne géométrique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite géométrique, q sa raison et k l'indice de b.

La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = q u_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = q u_k = qb \end{cases}$; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

Représentation graphique d'une suite géométrique

Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison q, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §III.3.2 page 33.

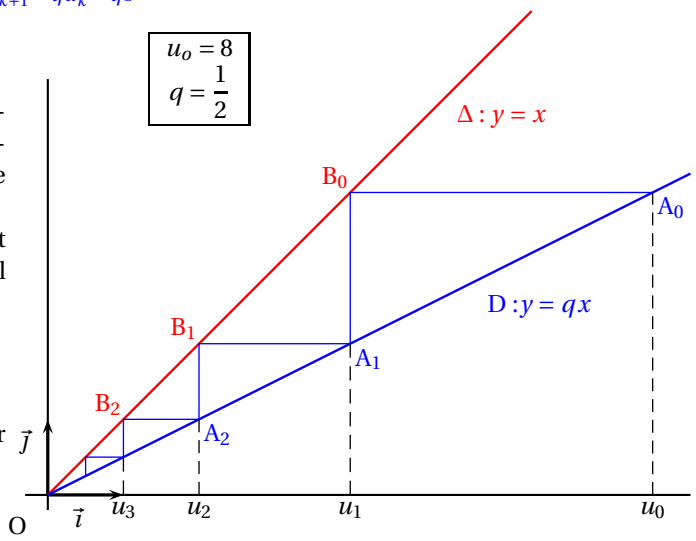
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport q. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel n :

$\overrightarrow{\text{OB}}_{n+1} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{\text{OB}}_{n+1} = q\,\overrightarrow{\text{OB}}_n$.

Donc B_{n+1} est l'image de B_n par h.

On démontre de même que A_{n+1} est l'image de A_n par h.



III.6.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison q (avec $q\neq 1$) et m et p deux entiers tels que : $n_0\leqslant m\leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S=\underbrace{u_m+u_{m+1}+\cdots+u_p}_{p-m+1 \text{ termes}}=\sum_{n=m}^{p}u_n$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{lccccccc} S= & u_m & +qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & \\ qS= & & qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & +u_mq^{p-m+1}\end{array}\right.$

puis par différence : $qS-S=u_mq^{p-m+1}-u_m$; d'où finalement :

$$u_m+u_{m+1}+\cdots+u_p=\frac{u_m-u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme}-\text{suivant du dernier}}{1-\text{raison}}$.

Remarque *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul n :* $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice III.6.3. ***Démontrer que pour tout $x\in[0;1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$; on a : $1+x+\cdots+x^n\leqslant\dfrac{1}{1-x}$***

Solution *$1+x+\cdots+x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, donc :*

$$1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Or $1-x$ est strictement positif et : $1-x^{n+1}\leqslant 1$ (car x est positif) ; donc par quotient :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\leqslant\frac{1}{1-x};$$

c'est-à-dire :

$$1+x+\cdots+x^n\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

□

COROLLAIRE III.6.10

Pour tous nombres réels a, b et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

Démonstration Pour $a=0$, l'égalité devient : $-b^n=-b\times b^{n-1}$; qui est vraie.

Pour $a=b$, l'égalité devient : $0=0\times na^{n-1}$; qui est vraie.

Lorsque $a\neq 0$ et $a\neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\dfrac{b}{a}$, on en déduit que :

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^{n-1}-\frac{b^n}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^n-b^n}{b-a}.$$

En multipliant les membres extrêmes par $b-a$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Lorsque $n=2$, on retrouve l'identité II.3 et lorsque $n=3$, on retrouve l'identité II.6.*
2. *Lorsque n est* impaire, *en remplaçant b par $-b$, on obtient :*

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right)$$

Lorsque $n=3$, on retrouve l'identité II.7.

III.6.3 Exercices résolus

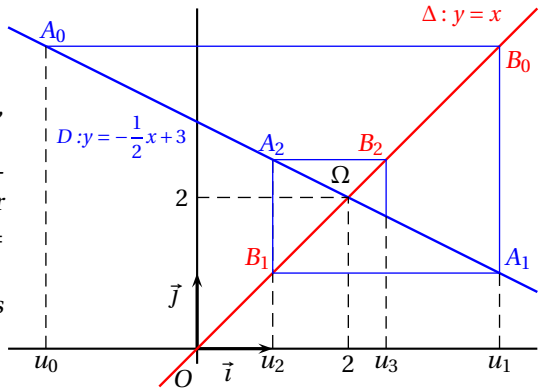
III.6.3.a Suite arithmético-géométrique

Exercice III.6.4. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l}u_0=-2\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3\end{array}\right.$.***

1. Déterminer un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-a$; soit géométrique.

2. Exprimer explicitement le terme général de la suite (v_n) ; en déduire celui de la suite (u_n).

Solution *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*



On trace les droites D et Δ d'équations respectives :
$y = -\frac{1}{2}x + 3$ *et* $y = x$.
Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ *vérifient les équations de D et Δ, donc Ω est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.*
Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie h, de centre Ω, transforme (pour tout n) A_n *en* A_{n+1}. *Ce qui suggère une relation du type :* $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1} = k\overrightarrow{\Omega A}_n$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ *et* $\overrightarrow{\Omega A}_n$ *ont respectivement pour abscisses* $u_{n+1} - 2$ *et* $u_n - 2$.

On aurait donc : $u_{n+1} - 2 = k(u_n - 2)$.
Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, *la suite* (v_n) *est géométrique.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$.
Donc, pour $a = 2$, *la suite* (v_n) *est la suite géométrique de raison* $-\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_0 = -4$.
Par conséquent la suite (v_n) *est définie par :* $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = v_n + 2$;
donc la suite (u_n) *est définie par :* $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$. □

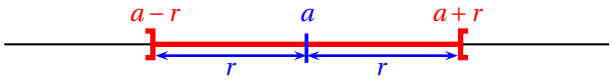
Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

III.7 Limites de suites

Soit a un réel et r un réel strictement positif. On appelle intervalle ouvert de centre a et de rayon r l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$. Cet intervalle sera noté $\mathrm{I}_{a,r}$. $\mathrm{I}_{a,r}$ est l'ensemble des réels dont la distance à a est strictement inférieure à r. Pour tout réel x on a donc :

$$x \in \mathrm{I}_{a,r} \iff |x - a| < r.$$



III.7.1 Limite finie, limite infinie

III.7.1.a Définitions

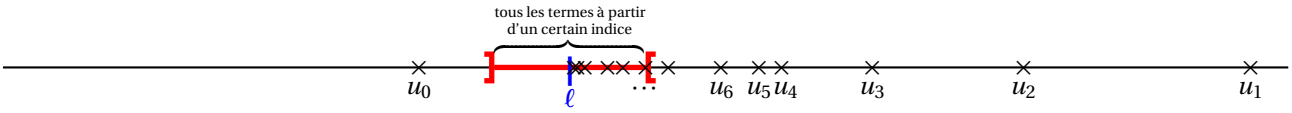
DÉFINITION III.7.1
Dire qu'un réel ℓ est la limite d'une suite (u_n) signifie que *tout* intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exemple *Démontrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *définie par :* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *; a pour limite 0.*
Soit $]-r\,;r[$ *(avec* $r > 0$*) un intervalle ouvert centré en* 0.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, *on ait :* $u_n \in]-r\,;r[$ *; c'est-à-dire :* $-r < u_n < r$.
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$.
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, *on a alors :* $n \geqslant \mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$ *; la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{+\star}$,

on en déduit que : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ *; la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{+\star}$*, on en déduit que :* $r < 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$.
D'où : $u_n \in]-r\,;r[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$.
Donc la suite (u_n) *a pour limite* 0.

La définition III.7.1 signifie que les termes de la suite sont à une distance aussi petite qu'on le souhaite dès que les indices sont suffisamment grands. On a donc une accumulation des termes de la suite (u_n) autour de ℓ.



D'après la définition III.7.1, pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite ℓ, il suffit de démontrer que pour tout $r > 0$, il existe un entier N tel que si $n > \mathrm{N}$, alors $|u_n - \ell| < r$.

DÉFINITIONS III.7.2

(1) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(2) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple *Démontrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = \sqrt{n}$ *; a pour limite* $+\infty$.
Soit A un un nombre réel.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on ait :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; c'est-à-dire :* $\mathrm{A} < u_n$.
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \mathrm{A}^2$.
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on a alors :* $n \geqslant \mathrm{N} > \mathrm{A}^2$ *; la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, on en déduit que :* $\sqrt{n} > |\mathrm{A}|$ *; d'où par transitivité :* $\sqrt{n} > \mathrm{A}$. *D'où :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$.
Donc la suite (u_n) *a pour limite* $+\infty$.

Remarques

1. *Une suite qui a une limite finie est dite* ***convergente****.*
2. *Une suite qui n'a pas de limite ou dont la limite n'est pas finie est dite* ***divergente****.*
3. *Dans les définitions de limites de suites, on peut remplacer l'expression « à partir d'un certain indice » par « sauf un nombre fini d'entre eux ».*
4. *Si une suite converge vers un nombre* ℓ*, alors tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. En effet : tout intervalle ouvert contenant* ℓ *inclut un intervalle ouvert de centre* ℓ.
5. *Dans la définition III.7.1 on pourrait donc remplacer « de centre* ℓ *» par « contenant* ℓ *».*

THÉORÈME III.7.1

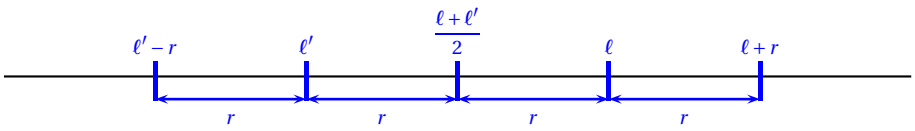
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente et ℓ sa limite. (u_n) converge ver ℓ, il existe donc un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$: $|u_n - \ell| < 1$. Posons alors : $\mathrm{M} = \max\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_{\mathrm{N}}, \ell+1\}$ et $m = \min\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_{\mathrm{N}}, \ell-1\}$.
La suite (u_n) est majorée par M et minorée par m, elle est donc bornée. □

THÉORÈME III.7.2 UNICITÉ DE LA LIMITE

Une suite ne peut pas avoir plusieurs limites.

Démonstration



Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Nous démontrerons ici que (u_n) ne peut pas avoir deux limites finies distinctes. Les autres cas se démontrent de la même façon.
Si la suite (u_n) avait deux limites distinctes ℓ et ℓ' en posant : $r = \dfrac{|\ell' - \ell|}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ') les intervalles $]\ell - r\,;\ell + r[$ et $]\ell' - r\,;\ell' + r[$ seraient disjoints. La suite (u_n) aurait pour limite ℓ, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell - r\,;\ell + r[$, elle aurait de même pour limite ℓ', donc à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell' - r\,;\ell' + r[$; en posant : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\}$; à partir de l'indice N'' tous les termes de la suite (u_n) seraient à la fois éléments de $]\ell - r\,;\ell + r[$ et de $]\ell' - r\,;\ell' + r[$, donc de leur intersection, c'est-à-dire de l'ensemble vide ; ce qui est impossible.
La suite (u_n) ne peut donc pas avoir deux limites finies distinctes. □
Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions de la limite d'une suite et d'une fonction.

THÉORÈME III.7.3

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie explicitement par une relation du type : $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{L}$ avec $\mathrm{L}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$

Remarques

1. *La réciproque de ce théorème est fausse.*

2. *Ce théorème n'est pas applicable dans le cas d'une suite définie par récurrence.*

III.7.2 Théorèmes de comparaisons

THÉORÈME III.7.4 THÉORÈME DES GENDARMES 1RE FORME

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ trois suites.
Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration Soit r un réel strictement positif. il suffit donc de prouver qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert, $\mathrm{I}_{\ell,r}$ de centre ℓ et de rayon r.
La suite (v_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_v, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
La suite (w_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_w, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
Posons : $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_v;\mathrm{N}_w\}$. Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on a : $\ell - r < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ. □

Exercice III.7.1. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$; d'où : $0 \leqslant 1+(-1)^n \leqslant 2$.*

Pour tout entier $n > 0$, en divisant membre à membre par n, il vient : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.

Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; donc par produit par 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$;
d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Remarques

1. *Le théorème III.7.4 reste vrai même si la condition $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ n'est pas vérifiée pour tout n, mais seulement à partir d'un certain indice.*

2. *Plus généralement, tous les théorème de ce paragraphe reste vrai même si leur condition d'inégalité n'est pas vérifiée pour tout n, mais seulement à partir d'un certain indice.*

COROLLAIRE III.7.5 THÉORÈME DES GENDARMES 2E FORME

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
S'il existe une suite positive $(d_n)_{n\geqslant n_0}$ et un réel ℓ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell| \leqslant d_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

DémonstrationIl suffit d'appliquer le théorème III.7.4 avec les suites $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ de termes généraux : $v_n = \ell - d_n$ et $w_n = \ell + d_n$. □

Exercice III.7.2. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n}$.*

Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

THÉORÈME III.7.6

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites.
(1) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $v_n \leqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $v_n \geqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que dans les deux cas la suite (u_n) vérifie les conditions de la définition III.7.2.
(1) Soit $]\mathrm{A};+\infty[$ un intervalle. La suite v_n tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à N, $u_n \geqslant v_n \geqslant \mathrm{A}$; c'est-à-dire : $v_n \in]\mathrm{A};+\infty[$. La suite u_n diverge vers $+\infty$.

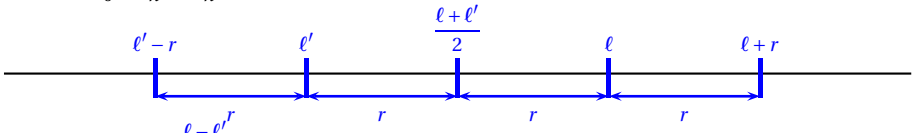
(2) se démontre de la même façon. □

Exercice III.7.3. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $u_n \geqslant n-1$.*
Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$; par comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

THÉORÈME III.7.7
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$

Démonstration



Supposons que : $\ell > \ell'$; posons alors : $r = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ').

On a donc : $\ell' + r = \dfrac{\ell + \ell'}{2} = \ell - r$. Les intervalles $]\ell - r\,;\ell + r[$ et $]\ell' - r\,;\ell' + r[$ sont donc disjoints. À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $]\ell - r\,;\ell + r[$ et à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (v_n) seraient dans $]\ell' - r\,;\ell' + r[$; en posant : $N'' = \max\{N;N'\}$; à partir de l'indice N'' on a : $\ell' - r < v_n < \dfrac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \ell + r$; ce qui contredit : $u_n \leqslant v_n$.
Donc : $\ell \leqslant \ell'$. □

Remarques

1. *En particulier, si M est majorant de (u_n), alors : $\ell \leqslant M$.*
2. *Si M est minorant de (u_n), alors : $m \leqslant \ell$.*
3. *Le théorème III.7.7 devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Pour s'en convaincre il suffit d'étudier les cas des suites de termes généraux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$*

III.7.2.a Suites de références

THÉORÈME III.7.8
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définies par : $u_n = \dfrac{1}{n}$; $v_n = \dfrac{1}{n^2}$; $w_n = \dfrac{1}{n^3}$; $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
ont pour limite 0.

Démonstration Soit $]-r\,;r[$ un intervalle contenant 0 et N un entier strictement plus grand que $\dfrac{1}{r^2}$.
Pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

- $w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n$, car : $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$;
- $n > \dfrac{1}{r^2}$; donc : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $t_n < r$;
- donc finalement : $-r < 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n < r$.

Pour tout $r > 0$, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]-r\,;r[$, elles convergent donc vers 0. □

THÉORÈME III.7.9
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par : $u_n = n$; $v_n = n^2$; $w_n = n^3$; $t_n = \sqrt{n}$;
ont pour limite $+\infty$.

Démonstration Soit A un réel et N un entier strictement plus grand que A^2 et que 1.
Pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

- $t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, car : $1 < n$;
- $n > A^2$; donc : $\sqrt{n} > |A| \geqslant A$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; c'est-à-dire : $A < t_n$;
- donc finalement : $A < t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Pour tout réel A, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$, elles divergent donc vers $+\infty$. □

Remarque *Les théorèmes III.7.8 et III.7.9 peuvent également se déduire du théorème III.7.3.*

III.7.3 Calcul algébrique de limites

III.7.3.a Somme de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N}; \mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| < r$$

Donc la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général $u_n + k$ converge vers $\ell + k$.

III.7.3.b Produit de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes donc, d'après le théorème III.7.1 elle sont bornées. En appliquant le théorème III.1.1 on en déduit l'existence des nombres réels M et M′ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ et $|v_n| \leqslant \mathrm{M}'$.
Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2\mathrm{M}'}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2\mathrm{M}}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N}; \mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \left|u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)\right| \leqslant |u_n| \times \left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right| \times |u_n - \ell| \leqslant |u_n| \times \frac{r}{2\mathrm{M}} + \left|\ell'\right| \times \frac{r}{2\mathrm{M}'}$$

D'où :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2}$$

Or, par définition des nombres M et M′ et d'après la remarque consécutive au THÉORÈME III.7.7, $\dfrac{|u_n|}{\mathrm{M}} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ell'}{\mathrm{M}'} \leqslant 1$.
Donc par somme et par produit par $\dfrac{r}{2}$ qui est positif :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$ il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n \times v_n)$ sont dans l'intervalle de centre $\ell\ell'$ et de rayon r.
Donc la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général ku_n converge vers $k\ell$.

III.7.3.c Inverse d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite convergeant vers une limite non-nulle ℓ.
Démontrons que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

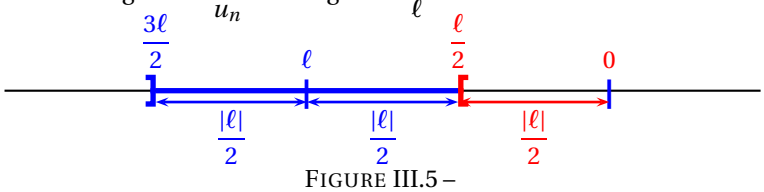


FIGURE III.5 –

À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite sont compris entre $\frac{\ell}{2}$ et $\frac{3\ell}{2}$.

On a alors : $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$; d'où :

$$\frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{2}{|\ell|}.$$

À partir de l'indice N, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell|.$$

Soit $r > 0$. À partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle de centre ℓ et de rayon $\frac{\ell^2}{2}r$, on a alors : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell^2}{2}r$. D'où, par produit par $\frac{2}{\ell^2}$:

$$\frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell| \leqslant r.$$

Posons : $N'' = \max\{N, N'\}$. À partir de l'indice N'', on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$, à partir d'un certain indice tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ sont dans l'interlvalle de centre $\frac{1}{\ell}$ et de rayon r, donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

III.7.3.d Quotient de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives (avec $\ell' \neq 0$).

Démontrons que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

D'après III.7.3.c, la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Donc daprès III.7.3.b, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

III.7.3.e Cas général

Plus généralement nous admettons les résultats suivants concernant la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites, ils se démontrent en utilisant des techniques semblables à celles utilisée ci-dessus. Le symbole « fi » signifie : forme indéterminée ; cela signifie que lers règles usuelles liant les opérations et le calcul de limites ne permettent pas de déterminer la limite éventuelle dans la configuration étudiée.

Limite de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	fi

Limite du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	fi	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite de l'inverse d'une suite

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ $(\ell \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement positive à partir d'un certain indice} \\ -\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement négative à partir d'un certain indice} \end{cases}$

Limite du quotient de deux suites

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie.

Pour calculer la limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$, il suffit de remarquer que pour tout nombre entier, n, ou elle est définie : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

Le résultat désiré se déduit alors des considérations sur les limites de somme et d'inverse de suites.

III.7.4 Limites de suites géométriques

LEMME III.7.10

Soit λ un réel strictement positif.

(1) Si $\lambda > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.

(2) Si $\lambda < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.

Démonstration Démontrons **(1)** .

Posons : $x = \lambda - 1$. On a : $x > 0$; donc, d'après l'inégalité de Bernoulli (voir exercice résolu **??** page **??**), pour tout nombre entier supérieur à 2 : $(1+x)^n > 1 + nx$; c'est-à-dire : $\lambda^n > n(\lambda - 1) + 1$.

Or, d'après le théorème III.7.3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(\lambda-1)+1) = +\infty$; donc par comparaison (théorème III.7.6) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.

Démontrons **(2)** .

Soit $\lambda \in]0;1[$. Posons : $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. On a : $\lambda' > 1$; donc d'après **(1)** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda'^n = +\infty$; d'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda'^n} = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. □

THÉORÈME III.7.11

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme a. La limite de (u_n) est donnée par le tableau suivant.

	$q \leqslant -1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$a > 0$	pas de limite	0	a	$+\infty$
$a = 0$				
$a < 0$	pas de limite		a	$-\infty$

Démonstration

1er cas : $a = 0$ ou $q = 1$ Le résultat est immédiat car la suite est constante.

2e cas : $a > 0$ et $q \neq 1$

si $\lvert q\rvert < 1$ On a vu (§ III.7.1.a) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n - 0\rvert = 0$.

Or pour tout indice n : $\lvert u_n - 0\rvert = a\lvert q\rvert^n$; de plus, d'après le lemme III.7.10 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert q\rvert^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = 0$.

si $1 < q$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = +\infty$ or (u_n) est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

si $q \leqslant -1$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = 1$; or les termes u_n changent de signe avec la parité de n, donc (u_n) n'a pas de limite.

3e cas : $a < 0$ et $q \neq 1$ On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par -1.

□

III.7.5 Exercices

III.7.a. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{n-3}{n+3}$.

III.7.b. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{n^2-3}{n+3}$.

III.7.c. Donner un contre exemple illustrant la remarque **1** succédant au théorème III.7.3.

III.7.d. Donner un exemple de suite divergente et bornée.

III.7.e. Donner un exemple de suite dont la limite est $+\infty$ et qui n'est pas croissante à partir d'un certain indice.

III.7.f. Donner un exemple de suite non majorée qui ne diverge pas vers $+\infty$.

III.7.g. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pi$.

e. $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.

III.7.h. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pi$.

e. $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

III.8 Suites monotones bornées

III.8.1 Théorème de convergence d'une suite monotone

THÉORÈME III.8.1

(1) Toute suite croissante et majorée est convergente et sa limite est sa borne supérieure.

(2) Toute suite décroissante et minorée est convergente et sa limite est sa borne inférieure.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et majorée. La suite (u_n) est majorée, d'après le théorème III.1.2, il a donc une borne supérieure ℓ.
On veut donc démontrer que (u_n) converge vers ℓ.
Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant \ell$.

Soit r un réel strictement positif, démontrons qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite (u_n) vérifie : $\ell - r < u_n < \ell + r$.
ℓ est le plus petit des majorants et : $\ell - r < \ell$; donc $\ell - r$ n'est pas un majorant, on en déduit qu'il existe un indice N tel que : $\ell - r < u_N$.
Mais la suite (u_n) est croissante et majorée par ℓ, donc pour tout entier $n \geqslant N$: $\ell - r < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ.
On démontre **(2)** de la même façon. □

Ce théorème s'applique dans le cas d'une suite monotone dont on connaît un majorant M (dans le cas où la suite est croissante) ou un minorant m (dans le cas où la suite est décroissante) mais dont on ne sait pas calculer algébriquement la limite.
On obtient ainsi l'existence d'une limite mais on ne connaît pas sa valeur. On a toutefois une information partielle sur la localisation de la limite : $u_{n_0} \leqslant \ell \leqslant M$ ou $m \leqslant \ell \leqslant u_{n_0}$.
Nous verrons ultérieurement des méthodes permettant d'exploiter ces informations pour déterminer la limite.

Remarque *Dans le théorème III.8.1, si la suite n'est monotone qu'à partir d'un certain indice, elle reste encore convergente.*

Exercice III.8.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$u_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

3. Justifier que (u_n) est convergente et préciser un intervalle dans le quel se trouve sa limite.

Solution

1. $u_0 = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{0!} = 2$

$u_1 = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} = 3$

$u_2 = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} = 3$

$u_3 = \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} = \dfrac{17}{6} = 2,83333\cdots$

$u_4 = \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{11}{4} = 2,75$

2. *Soit n un entier tel que : $n \geqslant 1$. On a :* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{n+1}{(n+1)!} = -\dfrac{n-1}{(n+1)!}$.

On a : $-\dfrac{n-1}{(n+1)!} \leqslant 0$ *dès que $n \geqslant 1$; donc la suite (u_n) est donc décroissante à partir de l'indice 1.*

3. *Les termes de la suite sont des sommes de nombres positifs, 0 est donc un minorant de la suite. La suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1 et minorée par 0, elle est donc convergente et sa limite vérifie : $0 \leqslant \ell$.*
Le plus grand des termes de la suite est u_1, c'est-à-dire 3, donc : $\ell \leqslant 3$, d'où :

$$\ell \in [0;3].$$

□

COROLLAIRE III.8.2 **THÉORÈME DE DIVERGENCE D'UNE SUITE MONOTONE**

(1) Toute suite croissante et non convergente diverge vers $+\infty$.

(2) Toute suite décroissante et non convergente diverge vers $-\infty$.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et non convergente.

Il suffit de démontrer que pour tout réel A, les termes de la suite sont tous plus grand que A à partir d'un certain indice.

D'après le théorème III.8.1, si (u_n) était majorée elle serait convergente, mais ce n'est pas le cas donc elle n'est pas majorée.

Soit A un nombre réel ; A n'est pas un majorant de la suite, il existe donc un indice N tel que : $u_N > A$. La suite est croissante, donc pour tout entier $n > N$: $u_n > A$. la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

On démontre **(2)** de la même façon. □

COROLLAIRE III.8.3

(1) Toute suite croissante et convergente a pour borne supérieure sa limite.

(2) Toute suite décroissante et convergente a pour borne inférieure sa limite.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et convergente. D'après le théorème III.7.1 (u_n) est bornée et le résultat se déduit alors des théorèmes III.8.1 et III.7.2.

On démontre **(2)** de la même façon. □

III.8.2 Suites adjacentes

DÉFINITION III.8.1

Deux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont dites adjacentes lorsqu'elles vérifient les trois propriétés suivantes.

(1) L'une est croissante.

(2) L'autre est décroissante.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$.

THÉORÈME III.8.4

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites adjacentes. Quitte à les intervertir on peut supposer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

Considérons la suite (w_n) définie par : $w_n = v_n - u_n$; pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$w_{n+1}-w_n=(v_{n+1}-u_{n+1})-(v_n-u_n)=\underbrace{\left(v_{n+1}-v_n\right)}_{\text{négatif}}-\underbrace{\left(u_{n+1}-u_n\right)}_{\text{positif}};$$

donc la suite (w_n) est décroissante, de plus elle converge vers 0 donc d'après le corollaire III.8.3 la suite (w_n) est positive ; la monotonie des suites (u_n) et (v_n) nous permet alors d'en déduire que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$u_{n_0}\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_{n_0}.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ sa limite.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ' sa limite.

On a : $\ell'-\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$; les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite. □

III.8.3 Exercices résolus

Exercice III.8.2. ***1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 3-\dfrac{2}{x}$.***

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 3$, et pour tout nombre entier naturel, n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que tous les termes de la suite (u_n) sont éléments de l'intervalle $[1,3]$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Solution *1. L'ensemble de définition de f est : $\mathbb{R}^\star$.*

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction, f', définie par :

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}.$$

Un carré est toujours positif, donc : $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

2. a. *Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».*

On a : $u_0 = 3$; donc P_0 est vraie.

Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
D'après ***1.****, la fonction f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$, *elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle* $[1,3]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant 3$;
donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que :

tous les termes de la suite (u_n) sont éléments de l'intervalle $[1,3]$

b. *Nous avons :* $u_0 = 3$ *et* $u_1 = 3 - \dfrac{2}{3}$; *donc :* $u_1 \leqslant u_0$. *Ce premier résultat préfigure peut-être une décroissance.*
Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

D'après le calcul ci-dessus et le résultat obtenu à la question précédente, P_0 *est vraie.*
Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.
D'après ***1.****, la fonction f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$, *elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle* $[1,3]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; *donc :* $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que pour tout nombre entier naturel, n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; *en particulier :*

la suite (u_n) est décroissante.

3. *D'après* ***2.a.*** *et* ***2.b.*** *la suite u_n est décroissante et minorée par 1 :*

La suite (u_n) est convergente et sa limite est supérieur ou égale à 1.

□

III.8.4 Exercices

III.8.a. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

III.8.b. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $w_n = v_n - u_n$; est une suite géométrique.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. a. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $t_n = 2u_n + 3v_n$; est une suite constante.
b. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

4. Exprimer explicitement, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.

III.9 Exercices

III.1. **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-6}{x-1}$.
a. Préciser l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout élément, x, de D_f :

$$\frac{4x-6}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

c. Étudier les variations de f.
d. Déterminer les points fixes de f.
e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
f. Tracer $\mathscr{C}_f$.

2. Représenter sur le graphique établi en **1.f.** les quatre premiers termes de la suite (u_n) vérifiant, $u_0 = 7$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.
Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

III.2. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

1. Donner les dix premiers termes de la suite.

2. (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0 = b_0 = 1$. La raison de (a_n) est positive et celle de (b_n) est négative. Elles vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

a. Démontrer que les raisons des suites (a_n) et (b_n) sont les solutions de l'équation :

$$q^2 = q + 1 \qquad \text{(E)}$$

b. En déduire les expressions explicites des suites (a_n) et (b_n).

3. Déterminer le couple (α,β) de nombres réels solution du système : $\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = u_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = u_1 \end{cases}$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$

5. Conclure.

Sujets de Baccalauréat

III.3. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \ \text{ et } \ w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

D'après France juin 2009

Chapitre IV

Limites de fonctions, continuité

IV.1 Limite finie (ou réelle)

IV.1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Dans toute la suite de ce chapitre, lorsqu'une fonction f sera envisagée $\mathscr{D}_f$ désignera son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

DÉFINITION IV.1.1

Dire qu'un réel l est limite d'une fonction f en $+\infty$ signifie que *tout* intervalle *ouvert* contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est plus grand qu'un certain réel A.

Remarques

1. *On écrit alors :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = l$.

2. *Cette définition signifie que la distance entre* $f(x)$ *et* l *est aussi petite qu'on le souhaite dès que* x *est suffisamment grand.*

3. *On définit de même la limite de* f *en* $-\infty$ *en remplaçant « dès que* x *est plus grand qu'un certain réel* A *» par « dès que* x *est plus petit qu'un certain réel* A *».*

THÉORÈME IV.1.1

Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

ont pour limite 0 en $+\infty$.

Démonstration Soit $]a;b[$ un intervalle contenant 0 et A un réel strictement plus grand que $\dfrac{1}{b^2}$ et que 1.

Pour tout réel $x \geqslant$A, on a :

- $\dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, car : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$;
- $x > \dfrac{1}{b^2}$; donc : $\sqrt{x} > \dfrac{1}{b}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < b$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $k(x) < b$;
- donc finalement : $a < 0 < h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant k(x) < b$.

Dès que x est plus grand que A, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$ sont dans l'intervalle $]a;b[$; donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

Remarque *De même :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

Interprétation graphique

IV.1.2 Limite d'une fonction en un réel *a*

IV.2 Notion de continuité

IV.3 Utilisation de la continuité

IV.3.1 Continuité et bijection

Dans cette partie le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé.

IV.3.1.a Définition

DÉFINITION IV.3.1 BIJECTION

Soit f est une fonction et I, J deux intervalles. On dit que f réalise une bijection de I vers J lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

1. Pour tout x élément de I : $f(x) \in$ J.
2. Pour tout y élément de J, il existe un unique x élément de I tel que : $y = f(x)$.

Exemple *La fonction $x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, elle réalise également une bijection de $]-\infty;0]$ vers $[0,+\infty[$, mais elle ne réalise pas de bijection de $\mathbb{R}$ vers $[0,+\infty[$.*

IV.3.1.b Bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

- On appelle bijection réciproque l'application de J vers I, parfois notée f^{-1}, qui à tout élément de J associe son unique antécédent dans I.
- f^{-1} est une bijection.
- Pour tout élément x de I et tout élément y de J, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
- Deux bijections réciproques ont des représentations symétriques par rapport à la première bissectrice [1].

Exercice IV.3.1. ***Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 2x+1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$.* $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ *est donc l'unique antécédent de y dans $\mathbb{R}$; par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est la fonction* $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. □

IV.3.1.c Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé

THÉORÈME IV.3.1 THÉORÈME DE LA BIJECTION

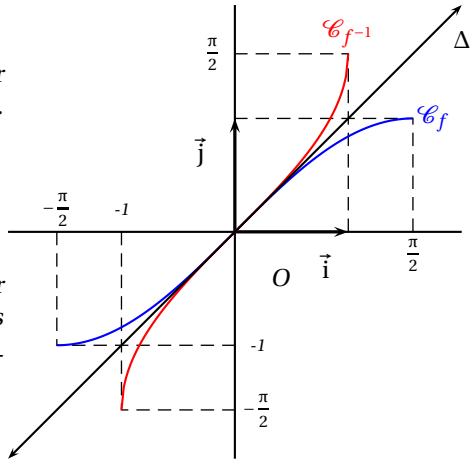
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé [a ; b]. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a;b]$ alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $\left[f(a);f(b)\right]$ (resp. $\left[f(b);f(a)\right]$) et la bijection réciproque est également strictement monotone et a le même sens de variation que f.

Exemples

1. *La fonction sinus est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. L'image de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par cette fonction est l'intervalle $[-1;1]$. La fonction sinus réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1;1]$.*

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$.

f est une bijection ; on désigne par f^{-1} sa bijection réciproque. Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ désignent les courbes représentatives respectives des fonctions f et f^{-1}. On sait que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ.



2. *résolution d'équation*

Remarque *Plus généralement, une fonction f strictement monotone et dérivable sur un intervalle I réalise une bijec-*

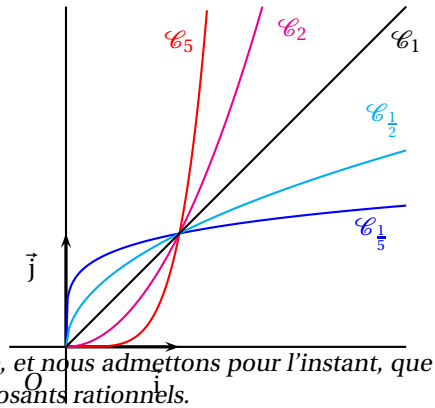
1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

tion de I vers $f(I)$, mais ce théorème est hors programme.

Exemple *Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ définie par : $f_n(x) = x^n$.*
La fonction f_n est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a : $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc, f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$; elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

- *Cette bijection réciproque est appelée **fonction racine n-ième**.*
- *L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.*

- *On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$.*
- *On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
- *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne respectivement par $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$. Les courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*



Remarque *Plus généralement, on démontrera dans un prochain chapitre, et nous admettons pour l'instant, que les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels.*

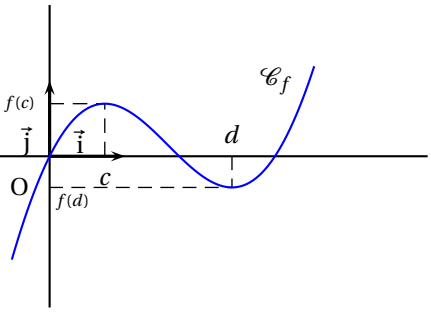
Exemple *Pour x positif, on a : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4 = x^{\frac{4}{3}}$ et $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{17}{12}}$.*

IV.3.1.d Applications à la résolution d'équations

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de la bijection.

THÉORÈME IV.3.2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé $[a;b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires $\big(f(a) \times f(b) < 0\big)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a;b]$.



Chapitre V

Exponentielles et équations différentielles

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la fonction exponentielle, d'établir les principales propriétés de cette fonction et les théorèmes de résolutions d'équations différentielles.

V.1 La fonction exponentielle de base e

V.1.1 Propriété fondamentale

L'activité sur la méthode d'Euler nous conduit à conjecturer et nous admettons momentanément l'existence d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les contraintes suivantes (l'existence d'une telle fonction sera établie § **??**).

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \tag{V.1}$$

Nous désignerons par exp cette fonction. Le principal objectif de ce paragraphe est d'établir la propriété fondamental de la fonction exp (elle transforme les sommes en produit) et de démontrer que la fonction exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1). La fonction exp est une fonction usuelle, elle est disponible dans toutes les calculatrices scientifiques. Pour tout nombre réel x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $\exp(x)$ peut aussi être noté : $\exp x$.

Remarque *Le nombre* e, *défini par :* $\mathrm{e} = \exp 1$ *; est une constante mathématique fondamentale.*

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\exp 0 = 1$ *et* $\mathrm{e} = 2,7182818\cdots$.

THÉORÈME V.1.1

(1) Pour tout nombre réel x : $\exp -x = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour tous nombres réels a et b : $\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f_a : x \mapsto \exp(a+x)\exp(-x)$. f_a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a'(x) = \exp(a+x)\exp(-x) - \exp(a+x)\exp(-x) = 0$;
donc la fonction f_a est constante ; or : $f_a(0) = \exp a$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(a+x)\exp(-x) = \exp a \tag{V.2}$$

(1) En particulier pour $a = 0$, on obtient : $\exp(x)\exp(-x) = 1$; donc pour tout réel x : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour $x = b$ dans (V.2), il vient : $\exp(a+b)\exp(-b) = \exp a$, en multipliant membre par $\exp b$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Ce théorème signifie que* exp *transforme les sommes en produits.*

2. *Plus généralement, on démontre par récurrence que pour tous nombres réels* $a_1, \cdots, a_n$ *on a :*
$\exp(a_1 + \cdots + a_n) = (\exp a_1) \times (\exp a_2) \times \cdots \times (\exp a_n)$.

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On déduit de* ***(1)*** *que :* $\exp x \neq 0$. *On déduit de* ***(2)*** *que :* $\exp x = \left(\exp \dfrac{x}{2}\right)^2$ *; donc :* $\exp x \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout réel x *:* $\exp x > 0$.

COROLLAIRE V.1.2

La fonction exp est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration Soit f une fonction, solution de problème. Démontrons que : $f = \exp$.
Considérons la fonction g définie par : $g = \dfrac{f}{\exp}$. La fonction g, quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur est toujours non nul, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par :

$$g' = \frac{\exp' \times f - f' \times \exp}{\exp^2} = \frac{\exp \times f - f \times \exp}{\exp^2} = 0.$$

Par conséquent la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus : $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp 0} = 1$; donc pour tout réel x : $g(x) = 1$. D'où il vient : $f = \exp$. □

V.1.2 Sens de variation

La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.1.3

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE V.1.4

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $a < b$ équivaut à $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$;

(2) $a \leqslant b$ équivaut à $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$;

(3) $a = b$ équivaut à $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$;

Démonstration Soit a et b deux réels.

(1) D'après le théorème V.1.3, on a : $a < b \implies \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ et $b \leqslant a \implies \mathrm{e}^b \leqslant \mathrm{e}^a$.

La dernière implication a pour contraposée : $a < b \impliedby \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$; on a donc : $a < b \iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.

(2) D'après **(1)** : $b < a \iff \mathrm{e}^b < \mathrm{e}^a$. Donc, par contraposée : $a \leqslant b \iff \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$.

(3) On en déduit que : $a = b \iff \begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \\ \mathrm{e}^b \leqslant \mathrm{e}^a \end{cases} \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$. □

V.1.3 Autres propriétés algébriques de l'exponentielle

Nous savons que fonction exp transforme les sommes en produits. Dans ce paragraphe nous allons établir les implications algébriques de cette propriété.

THÉORÈME V.1.5

Pour tous réels a et b, tout entier m, tout entier naturel non nul n et tout nombre rationnel r.

(1) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) $\exp(ma) = \exp^m a$

(3) $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) $\exp(ra) = \exp^r a$

Démonstration Soit a et b deux réels, m un entier, n un entier naturel non nul et r un nombre rationnel.

(1) $\exp(a-b) = \exp a \times \exp(-b) = \exp a \times \dfrac{1}{\exp b} = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) Si $m = 0$ ou $m = 1$, la propriété est immédiate.

Pour $m \geqslant 2$: $\exp(ma) = \exp(\underbrace{a + \cdots + a}_{m \text{ termes}}) = \underbrace{\exp a \times \cdots \times \exp a}_{m \text{ facteurs}} = \exp^m a$.

Pour $m \leqslant -1$: on a $-m \geqslant 1$ et donc : $\exp(ma) = \exp(-m(-a)) = \exp^{-m}(-a) = \left(\dfrac{1}{\exp a}\right)^{-m} = \exp^m a$.

(3) On a : $\left(\exp \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\dfrac{a}{n}\right) = \exp a$; donc : $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $r = \dfrac{p}{q}$.

Donc : $\exp(ra) = \exp\left(\dfrac{p}{q}a\right) = \left(\exp(pa)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\exp a\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \exp^r a$ □

Remarque *Les propriétés* ***(1)*** *(pour $r = 1$),* ***(3)*** *(pour $r \in \mathbb{Z}$) et* ***(4)*** *(pour $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{N}^*$) sont des cas particuliers de la propriété* ***(5)****.*

Convention

Étant donné un nombre réel a, on décide d'étendre par continuité la fonction $x \mapsto \exp^x a$, initialement définie sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout réel x : $\exp^x a = \exp(xa)$.

En particulier, lorsque $a = 1$, pour tout réel x : $\exp x = \mathrm{e}^x$.

Désormais, $\exp x$ sera de préférence noté : e^x.

V.1.4 Quelques limites

V.1.4.a Limites aux bornes

THÉORÈME V.1.6

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Démonstration La suite (u_n) de terme général : $u_n = e^n$; est la suite géométrique de raison e (exp est strictement croissante donc : $e^0 < e^1$; c'est-à-dire : $e > 1$) et de premier terme 1 ($1 > 0$) donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A\in\mathbb{R}$. Il existe un entier naturel N tel que : $u_N > A$; donc pour tout $x > N$, on a : $e^x > e^N > A$.
Ce qui signifie, par définition, que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Posons : $u = -x$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{e^u} = 0$;
donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. □

V.1.4.b Nombre dérivé en 0

La fonction exp est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est e^0. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.1.7

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

V.1.4.c Croissance comparée de x et exp

Le théorème suivant signifie que e^x tend plus vite que x vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que e^x tend plus vite vers 0 que x vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

THÉORÈME V.1.8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0.$$

Démonstration Introduisons la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto e^x - x$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'' : x \mapsto e^x - 1$.
La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel positif x, on a : $e^x \geqslant e^0$; c'est-à-dire : $e^x \geqslant 1$.
La fonction f'' est donc positive sur $[0;+\infty[$ on en déduit que la fonction f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc pour tout réel positif x : $f'(x) \geqslant f'(0)$; c'est-à-dire : $f'(x) \geqslant 1$.
La fonction f' est donc positive sur $[0;+\infty[$ on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc pour tout réel strictement positif x : $f(x) \geqslant f(0)$; c'est-à-dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$; d'où : $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + 1 \geqslant \dfrac{x^2}{2}$; puis : $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$ (car $x > 0$).
On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$; donc par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Posons $u = -x$. Il vient : $x e^x = -u e^{-u} = -\dfrac{u}{e^u}$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et par quotient $\lim\limits_{u\to+\infty} -\dfrac{u}{e^u} = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$. □

Exercice V.1.1. ***Étudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$.***

Solution *Pour tout réel $x > 0$:* $\dfrac{e^x}{x+1} = \dfrac{e^x}{x}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{1}{1+u} = 1$ *; donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ *;*
de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *; donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = +\infty$. □

V.2 La fonction logarithme népérien

V.2.1 Introduction

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; donc exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

DÉFINITION V.2.1

La fonction *logarithme népérien*[1], notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exp.

Sur la figure V.1 sont tracées les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = \ln x$; ainsi que la tangente

1. John NEPER, baron de Merchiston, mathématicien écossais 1550-1617

D_J à $\mathscr{C}_{\exp}$ en J (cette droite passant par J(0;1) et ayant pour coefficient directeur $e^0 = 1$, a pour équation : $y = x+1$) et la tangente D_I à $\mathscr{C}_{\ln}$ au point I(1;0).

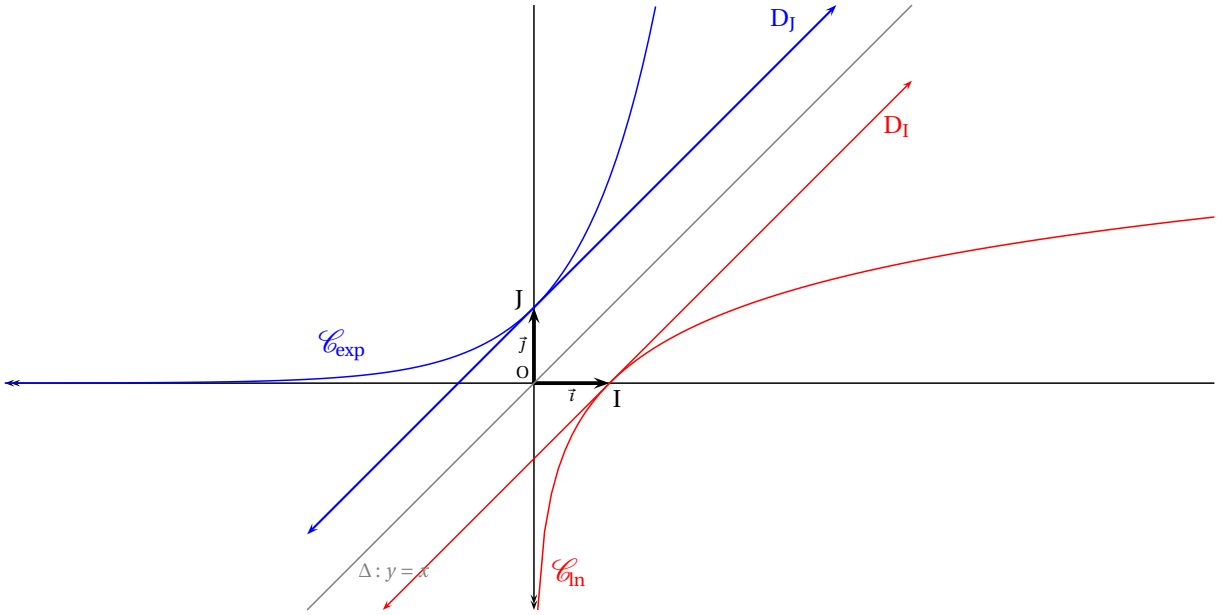


FIGURE V.1 – Courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \ln x$

Remarque *La définition V.2.1 et l'analyse de la figure V.1 amènent les propriétés suivantes qui seront éventuellement confirmées par des théorèmes ultérieures.*

1. *La fonction* ln *est une bijection de* $]0;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

2. *Pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$ *:* $\quad y = \ln x \iff x = e^y$.

En particulier : $e^{\ln x} = e^y = x$ *et* $\ln\left(e^y\right) = \ln x = y$.

3. *La fonction* ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$ *;*

En effet, la fonction exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$, *donc* $\mathscr{C}_{\exp}$ *présente en chacun de ses points une tangente sécante à* Ox *et à* Oy. *La réflexion d'axe* Δ *est isométrie, elle conserve donc le contact ; on en déduit qu'en chacun de ses points la courbe* $\mathscr{C}_{\ln}$ *présente une tangente sécante à* Oy *(et à* Ox*).*

4. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :* $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

En effet exp *transforme les sommes en produits donc* ln *transforme les produits en sommes.*

5. *Plus généralement pour tous réels* $x_1, \ldots, x_n$ *strictement positifs :*

$$\ln(x_1 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n).$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

7. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *;*

8. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :*

$$\begin{aligned} a = b &\iff \ln a = \ln b \\ a < b &\iff \ln a < \ln b \\ a \leqslant b &\iff \ln a \leqslant \ln b \end{aligned}$$

On déduit de même du théorème et de la convention énoncés au paragraphe V.1.3 le théorème suivant.

THÉORÈME V.2.1

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout nombre rationnel r.

(1) $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

(2) $\quad \ln(a^r) = r \ln a$.

Remarques

1. *En particulier, lorsque* $r = -1$ *:* $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

2. *On déduit de* ***(2)*** *que :* $a^r = \exp(\ln(a^r)) = \mathrm{e}^{r\ln a}$

V.2.2 Dérivabilité

Le théorème suivant exprime que la fonction ln est dérivable en 1 et que son nombre dérivé en 1 et 1.

THÉORÈME V.2.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.$$

Démonstration D'après le résultat obtenu dans l'exercice VIII.6.1., pour, $x=y$ et $x=-y$, on a pour tout réel, y : $\mathrm{e}^y \geqslant y+1$ et $\mathrm{e}^{-y}\geqslant -y+1$. On en déduit que pour $y\in\mathbb{R}$,

$$1-\frac{1}{\mathrm{e}^y}\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^y-1.$$

En posant, $x=\mathrm{e}^y$ (on a donc $y=\ln x$), on en déduit que pour tout nombre réel, x, strictement positif, $1-\dfrac{1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1$, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1.$$

En divisant membre à membre par, $x-1$, dont le signe est déterminé par la position de x par rapport à 1, on en déduit que :

- si $x<1$ alors : $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{\ln x}{x-1}\geqslant 1$;
- si $x>1$ alors : $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant 1$.

Par continuité de la fonction inverse, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, donc par comparaison des limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

Posons : $h=x-1$. On a donc : $x=h+1$; $\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln(h+1)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0}(h+1)=1$. Par composition des limites, on en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. □

Remarque *Ce théorème se lit sur la figure V.1, il exprime que la tangente à* $\mathscr{C}_{\ln}$ *en I,* $\mathrm{D_I}$*, a pour coefficient directeur 1.*

THÉORÈME V.2.3

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

Démonstration Soit, a, un nombre réel strictement positif. Déterminons le nombre dérivé de ln en a. Désignons, pour tout nombre réel x strictement positif et distinct de a, par θ_x le taux de variation de ln et a et x. On a : $\theta_x=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}$.

Posons : $u=\dfrac{x}{a}$. On a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{a}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}=1$. Puis par quotient par a : $\lim\limits_{x\to a}\theta_x=\dfrac{1}{a}$.
Ainsi la fonction est continue et dérivable en a et son nombre dérivé en a est 1. On en déduit le théorème. □

Remarques

1. *On pouvait aller plus vite en utilisant la dérivabilité de* ln*. En dérivant membre à membre l'identité,* $\mathrm{e}^{\ln x}=x$*, il vient :* $(\ln x)'\,\mathrm{e}^{\ln x}=1$*. D'où l'on tire :* $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

2. *La dérivabilité de* ln *sur* $]0;+\infty[$ *établit la continuité de* ln *sur ce même intervalle.*

V.2.3 Dérivée de ln *u*

THÉORÈME V.2.4

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $\dfrac{u'}{u}$.

Exemple *La dérivée sur* $\mathbb{R}$ *de* $x\mapsto\ln\left(x^2+1\right)$ *est* $x\mapsto\dfrac{2x}{x^2+1}$.

V.2.4 Logarithme népérien et calcul intégral

THÉORÈME V.2.5
Pour tout nombre réel strictement positif, x :

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}\,t}{t}.$$

THÉORÈME V.2.6
Soit u une fonction continûment dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive sur I : $\ln|u|$.

V.3 Des exponentielles et des logarithmes

V.3.1 Notation a^b, pour a, b réels et $a > 0$

DÉFINITION V.3.1
Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, on note a^b le nombre $\mathrm{e}^{b\ln a}$

Remarques

1. *On en déduit que :* $\ln\left(a^b\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{b\ln a}\right) = b\ln a$.
2. *Cette définition est en accord avec les précédentes définitions de* a^b *lorsque* $a > 0$.

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\pi^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\pi}$.

THÉORÈME V.3.1
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous nombres réels b et b' :

(1) $1^b = 1$;

(2) $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$;

(3) $(aa')^b = a^b a'^b$; $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$.

Démonstration Soit a, a', b, b' quatre réels tels que : $a > 0$ et $a' > 0$; on a :
(1) On a : $1^b = \mathrm{e}^{b\ln 1} = \mathrm{e}^0 = 1$;
(2) On a : $a^b a^{b'} = \mathrm{e}^{b\ln a}\mathrm{e}^{b'\ln a} = \mathrm{e}^{(b+b')\ln a} = a^{b+b'}$.
On démontre de même les autres identités. □

V.3.2 Fonctions exponentielles de base a (avec $a > 0$)

V.3.2.a Définition

DÉFINITIONS V.3.2
(1) Une fonction exponentielle est une fonction continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$ qui vérifie pour tous réels x et x' :

$$f(x+x') = f(x) \times f(x'). \tag{V.3}$$

(2) Le nombre strictement positif, $f(1)$, est appelé *base* de l'exponentielle.

Exemple *La fonction* exp *est une exponentielle de base* e.

THÉORÈME V.3.2
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$). Il existe une unique fonction exponentielle de base a.

Démonstration

Existence

Considérons la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln a}.$$

La fonction exp est strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a(x) > 0$. On a : $f_a(1) = \mathrm{e}^{\ln a} = a$;
de plus pour tous réels x et x' : $f_a(x+x') = \mathrm{e}^{(x+x')\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\,\mathrm{e}^{x'\ln a} = f_a(x)f_a(x')$. Donc f_a est une fonction exponentielle de base a.

Unicité

Soit f une fonction exponentielle de base a. Démontrons que $f = f_a$.
Pour $x = x' = 0$ dans V.3, on obtient : $f(0) = f^2(0)$; or : $f(0) \neq 0$ (car $f(0) > 0$) ; donc : $f(0) = 1$.
Pour $x = -x'$ dans V.3, on obtient : $f(x)f(-x) = 1$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
On en déduit comme dans le théorème V.1.5 que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = f(r\times 1) = f^r(1) = a^r$.
Introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - f_a(x)$.
g est la différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout nombre rationnel r, on a : $g(r) = a^r - \mathrm{e}^{r\ln a} = a^r - a^r = 0$.
Soit x un nombre irrationnel et $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ [2] une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Par continuité de g : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(x)$; mais pour tout entier naturel n : $g(u_n) = 0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = 0$; d'où : $g(x) = 0$. On en déduit que g est nulle sur $\mathbb{R}$ puis que : $f = f_a$. □

Remarques

1. *La fonction exponentielle de base a est donc la fonction : $x \mapsto a^x$.*
2. *Les deux exponentielles les plus utilisées sont $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 10^x$.*

V.3.2.b Sens de variation

L'exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$. On considérera désormais des exponentielles de base a avec $a \neq 1$. L'exponentielle de base a est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$ par la fonction exp. On sait que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'exponentielle de base a a le même sens de variation que la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$.

Pour $a > 1$ On a : $\ln a > \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Pour $0 < a < 1$ On a : $\ln a < \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

On en déduit les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x		↗	1	↗	a	↗	$+\infty$
	0						

TABLE V.1 – avec $a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

TABLE V.2 – avec $0 < a < 1$

V.3.3 Fonctions logarithmes de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)

On sait que si $a > 0$ et $a \neq 1$, l'exponentielle de base a est strictement monotone et transforme $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit alors que l'exponentielle de base a est un bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

DÉFINITION V.3.3
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).
La fonction *logarithme de base a* est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a.

Notations et vocabulaire

1. *La fonction logarithme de base a est notée* $\log_a$.
2. *La fonction* $\log_{\mathrm{e}}$ *est également notée* ln *ou parfois* Log.
3. *La fonction* $\log_{10}$, *appelée* logarithme décimal *est également notée* log.

Ainsi, pour tout entier relatif n : $\log 10^n = n$.

2. Il suffit de prendre la suite définie par : $u_n = [x\times 10^n]\times 10^{-n}$ où $x \mapsto [x]$ désigne la fonction partie entière.
En effet, pour tout entier naturel n : $[x\times 10^n] \leqslant x\times 10^n < [x\times 10^n]+1$; d'où : $0 \leqslant x\times 10^n - [x\times 10^n] < 1$; puis par produit par 10^{-n} (qui est strictement positif) : $0 \leqslant x - u_n < 10^{-n}$. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$; donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

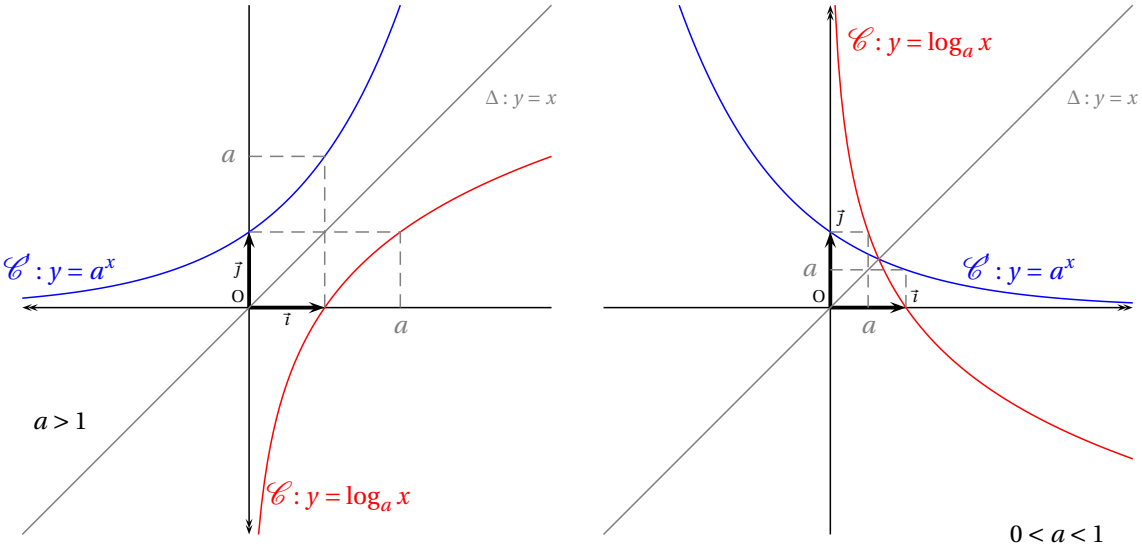


FIGURE V.2 – Courbes d'équations $y = a^x$ et $y = \log_a x$ avec $a = 2$ puis $a = \dfrac{1}{2}$.

C'est tout l'intérêt de cette fonction log très utilisée en physique. c'est-à-dire Si x a pour écriture scientifique $x = d \times 10^n$ où d est un nombre décimal compris entre 1 et 10 et $n \in \mathbb{Z}$, alors :
$\log x = \log(d \times 10^n) = \log d + \log 10^n = n + \log d$.
$1 \leqslant d < 10$ implique que $0 \leqslant \log d < 1$. Donc, n est la partie entière de $\log x$ et $\log d$ sa partie fractionnaire. Le nombre n est appelé caractéristique de $\log x$, $\log d$ est appelé *mantisse* de $\log x$.

Exemples

1. $\log 150 = 2,176\cdots$.
On a : $\log 150 = \log(10^2 \times 1,5) = 2 + \log(1,5) = 2,176\cdots$.
La caractéristique de $\log 150$ *est* 2 *et sa mantisse est* $0,176\cdots$.

2. *On aimerait savoir combien il y a de chiffres dans* 13^{128}.
On a : $\log\left(13^{128}\right) = 128 \log 13 = 142,584\cdots$ *; donc* 13^{128} *est constitué de* 143 *chiffres.*

Remarque *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$, *on a :* $\quad y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$.

THÉORÈME V.3.3

Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).

Pour tout réel x strictement positif : $\quad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Démonstration Posons : $y = \log_a x$; on a donc : $x = a^y = \mathrm{e}^{y \ln a}$; d'où : $\ln x = y \ln a$; puis : $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. □

Exemple *Calculer :* $\log_2 65536$ *;* $\log 1000000$ *;* $\log_3 729$ *et* $\log_7 343$.

V.4 Équations différentielles

V.4.1 Introduction

Considérons les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$; $g : x \mapsto \sin \omega x$ avec $\omega \in \mathbb{R}^\star$ et $\mathrm{P} : x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$.

- Calculer la dérivée de f et démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) - 2f(x) = 0$.
- Calculer la dérivée seconde g'' de g et démontrer que pour tout réel x, on a : $g''(x) + \omega^2 g(x) = 0$.
- Calculer la dérivée de P et démontrer que pour tout réel x, on a : $\mathrm{P}'(x) - \mathrm{P}(x) = -\dfrac{x^4}{24}$

On a sur $\mathbb{R}$: $f' - 2f = 0$. on dit que f est une solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$.
De même g est solution de l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.
P est solution de l'équation différentielle : $y' - y = -\dfrac{x^4}{24}$.

Notations et vocabulaire
1. *Une* équation différentielle *est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.*
La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', ...
Le plus souvent, la variable sera notée x ou t.
2. *L'*ordre *d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée intervenant dans cette équation. Par exemple :* $5y'' - 4y' - y = 0$ *; est une équation différentielle d'ordre* 2.
3. *Une* solution sur un intervalle ouvert *I d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'équation sur l'intervalle. Par exemple,* exp *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $5y'' - 4y' - y = 0$.
4. Résoudre ou intégrer *une équation différentielle sur un intervalle ouvert I c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cet intervalle.*
5. *Une* courbe intégrale *d'une équation différentielle est la courbe représentative d'une solution.*

V.4.2 Équations du type $y' - ay = 0$

Soit a un nombre réel. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = 0 \tag{V.4}$$

À toute fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction z dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par : $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
On a donc : $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ et $y'(x) = \big(z'(x) + az(x)\big)\,\mathrm{e}^{ax}$.
On en déduit que, pour tout nombre réel x : $(y' - ay)(x) = z'(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.
Par conséquent y est solution de (V.4) si et seulement si z' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si z est une fonction constante. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.4.1
Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = 0$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$$

où k est un nombre réel.

Exemple *Les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $y' - 2y = 0$ *; sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{2x}$ *où k est un nombre réel. Les fonctions* $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto 5\,\mathrm{e}^{2x}$ *et* $x \mapsto 0$ *sont donc des solutions sur* $\mathbb{R}$.

THÉORÈME V.4.2
Soit a un nombre réel et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = 0$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration Les solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
$f_k(x_0) = y_0 \iff k\,\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \iff k = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$.
La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \mapsto y_0\,\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$. □

Exercice V.4.1. ***1. Résoudre sur*** $\mathbb{R}$ ***:*** $y' = 3y$.
2. Déterminer la solution dont la courbe intégrale passe par le point $A(-2;-4)$
Solution 1. *Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{3x}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.
2. *La solution dont la courbe intégrale passe par le point* $A(-2;-4)$ *est donc la fonction :* $x \mapsto -4\,\mathrm{e}^{3(x+2)}$. □

Interprétation géométrique

Le théorème V.4.2 signifie que les courbes intégrales de l'équation forment une partition [3] du plan : par tout point $A(x_0, y_0)$, il passe une courbe intégrale et une seule (cf. figure V.3). Les solutions de l'équation : $y' = y$; sont les fonctions $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3. Une *partition* d'un ensemble E est une famille de sous ensembles non vides de E, deux à deux disjoints, dont l'union est E

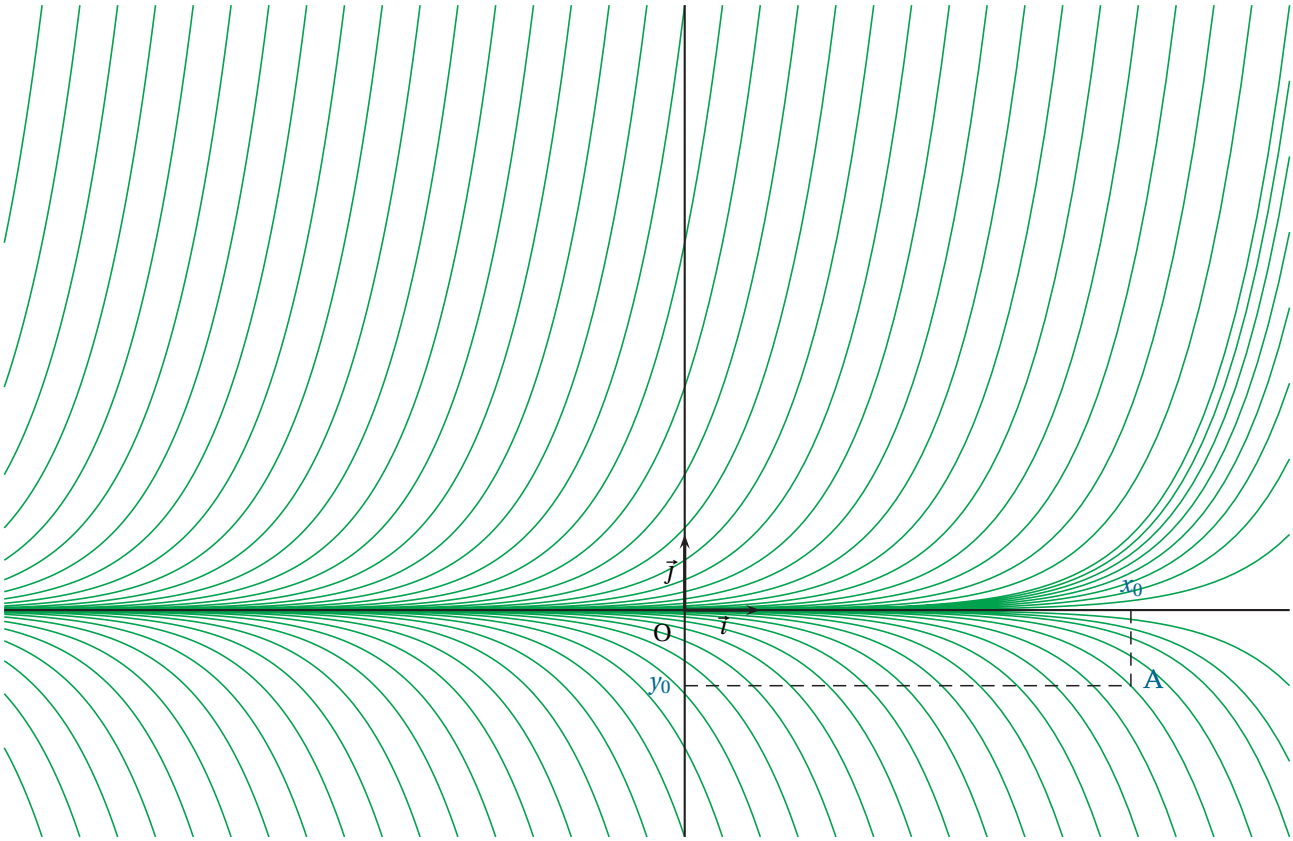


FIGURE V.3 – Courbes intégrales de l'équation : $y' = y$

V.4.3 Équations du type $y' - ay = b$

Soit a et b deux nombres réels. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = b \tag{V.5}$$

Remarques
1. *Cette équation sera équation sera appelée « équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre » alors que l'équation : $y - ax = 0$; sera appelée « équation sans second membre » associée à cette équation.*
2. *Lorque $a = 0$, les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $x \mapsto bx + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
3. *Lorque $a \neq 0$, la fonction constante $y = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de (V.5)*

THÉORÈME V.4.3
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = b$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

où k est un nombre réel.

Démonstration Posons $z = y + \dfrac{b}{a}$. On a donc : $y = z - \dfrac{b}{a}$ et $y' = z'$; d'où :

$$y' - ay = b \quad \Longleftrightarrow \quad z' - a\left(z - \frac{b}{a}\right) = b \quad \Longleftrightarrow \quad z' - az = 0$$

D'après le théoréme V.4.1, les solutions de la dernière équation sont de la forme $z : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$ □

Remarque *On peut retenir ce théorème sous la forme suivante : La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.*
On retrouve cette formulation arithmétique avec les équation diophantiennes du type : $ax + by = c$.

Exemple *Les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $y' - 2y = 5$ *; sont les fonctions de la forme :* $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$ *où* k *est un nombre réel. Les fonctions* $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$, $x \mapsto 5\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}$ *et* $x \mapsto -\dfrac{5}{2}$ *sont donc des solutions sur* $\mathbb{R}$.

THÉORÈME V.4.4

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = b$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration Les solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$f_k(x_0) = y_0 \iff k\mathrm{e}^{ax_0} - \dfrac{b}{a} = y_0 \iff k = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax_0}$.

La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \mapsto \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$. □

Remarque *Lorsque* $a = 0$ *l'unique courbe intégrale de* $y' - ay = b$ *passant par* $\mathrm{A}(x_0\,;y_0)$ *est la droite d'équation* $y = b(x - x_0) + y_0$.

Exercice V.4.2. ***1. Résoudre sur*** $\mathbb{R}$ ***l'équation*** $y' = 3y - 7$.

2. Déterminer la solution, f***, vérifiant*** $f(2) = 5$.

Solution ***1.*** *On remarque que* $y = \dfrac{7}{3}$ *est une solution paticulière, les solutions de l'équation sont donc les fonctions :* $x \mapsto k\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{7}{3}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.

2. *On a :* $f(2) = 5 \iff k\mathrm{e}^{6} + \dfrac{7}{3} = 5 \iff k = \dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{-6}$.

On en déduit que f *est la fonction :* $x \mapsto \dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{3(x-2)} + \dfrac{7}{3}$. □

V.4.3.a Temps caractéristique

En physique on utilise parfois le temps caractéristique lorsqu'on est confronté à la solution d'une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $a < 0$ vérifiant $y(0) = 0$.

La solution générale de l'équation est : $t \mapsto k\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ et la solution particulière vérifie $k = \dfrac{b}{a}$. On en déduit qu'a chaque instant : $y(t) = -\dfrac{b}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{at}\right)$.

Le *temps caractéristique* (ou *constante de temps* en électricité) est l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote et de la tangente à l'origine à la courbe représentative de la fonction y.

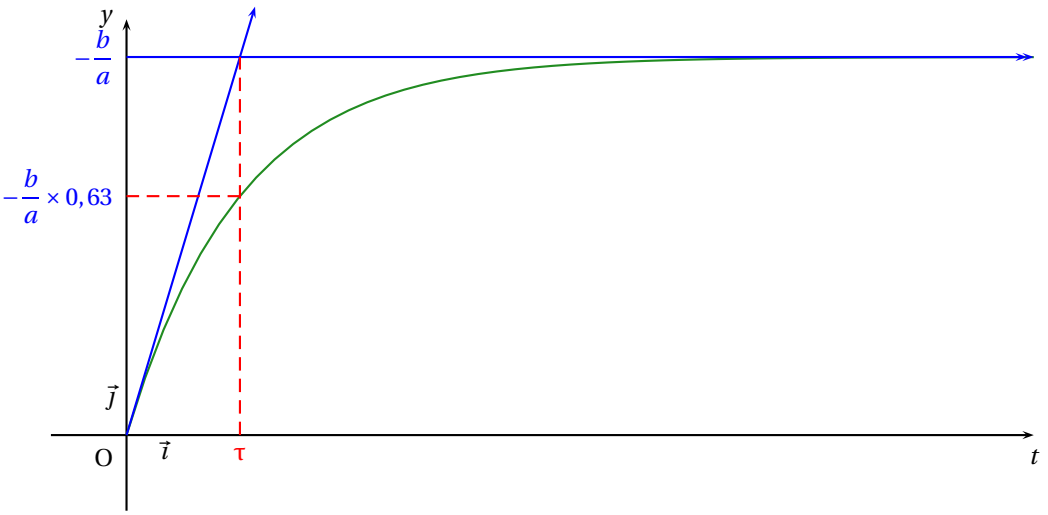


FIGURE V.4 – Courbe de y, asymptote et tangente à l'origine.

Remarques

1. $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = b$ *donc l'équation réduite de la tangente, T, à la courbe représentative de y, à l'origine est* $y = bx$.

2. *On a : $a<0$; donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\dfrac{b}{a}$; la droite D d'équation, $y = -\dfrac{b}{a}$, est asymptote à la courbe en $+\infty$.*

3. *le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de T et D, donc la solution de l'équation $bx = -\dfrac{b}{a}$ soit $\tau = -\dfrac{1}{a}$.*

Interprétation

- On a : $y(\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -1\right)$; or : $1-\exp -1 = 0{,}63\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 63% de sa valeur limite.
- On a : $y(5\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -5\right)$; or : $1-\exp -5 = 0{,}99\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 99% de sa valeur limite.

V.4.4 Exercices

V.4.a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a. $y' = y$.

b. $y' = -y$.

c. $y' = -3y$.

d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)y$.

V.4.b. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale.

a. $y' = 2y$ et $y(0) = 1$.

b. $y' = -y$ et $y(3) = 1$.

c. $y' - 3y = 0$ et $y(4) = \mathrm{e}^2$.

V.4.c. **1.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' = 3y'$.

2. Déterminer la solution vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

V.4.d. Une population de microbes se développe dans une culture suivant une loi où à chaque instant le taux d'accroissement est proportionnel à l'effectif. Sachant qu'au bout d'une heure il y a 10^4 microbes et que deux heures plus tard il y en 4×10^4, quelle est l'effectif initial de cette culture ?

Chapitre VI

Dérivabilité

VI.1 Fonctions dérivables

VI.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

La notion de dérivée a été vue en classe de Première.

THÉORÈME VI.1.1 NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes elles expriment que le réel $f'(a)$ est le *nombre dérivé* de f en a.

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$;
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$;
3. Pour tout réel h tel que $a+h$ soit dans I :
   $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$;
4. Pour tout élément x de I :
   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = 0$.

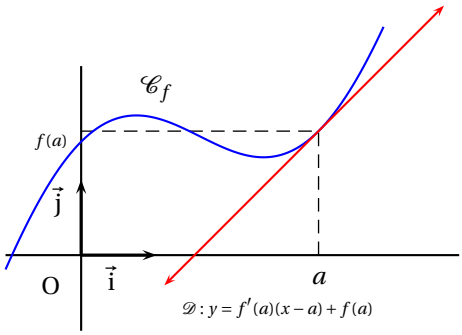
Vocabulaire et notations

- Lorsque f admet un nombre dérivé en a, on dit que f est dérivable en a ;
- Le nombre dérivé en a est noté $f'(a)$;
- Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I $\left(\text{I} \subset \text{D}_f\right)$, on dit que f est dérivable sur I.
- La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Dire que f est dérivable en a signifie que $\mathscr{C}_f$ admet au point $\text{A}\left(a; f(a)\right)$ une tangente (ou une demi-tangente lorsque a est une borne de D_f) non parallèle à l'axe des ordonnées. Cette tangente à pour équation :

$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$



Exemple *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. En particulier, f est dérivable en 3, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc au point d'abscisse 3 une tangente $\mathscr{D}$. De plus : $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$; $\mathscr{D}$ a donc pour équation : $y = 6(x-3)+9$; c'est-à-dire : $y = 6x-9$*

Remarque *Lorsque : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_2$; où l_1 et l_2 sont deux réels distincts, la fonction f n'est pas dérivable en a, mais l_1 est le nombre dérivé à gauche en a et l_2 est le nombre dérivé à droite en a ; la courbe $\mathscr{C}_f$ présente alors au point d'abscisse a une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche.*

VI.1.2 Dérivabilité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. (Elle n'est pas dérivable en 0)
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

VI.1.3 Principaux résultats

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{Z}^\star\right)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^\star$ si $n<0$ $\mathbb{R}$ si $n>0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

TABLE VI.1 – Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n (n \in \mathbb{Z}^\star)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

TABLE VI.2 – Dérivées et opérations sur les fonctions

VI.2 Dérivation d'une fonction composée

VI.2.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée

THÉORÈME VI.2.1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a : $\left(f \circ u\right)' = u' \times \left(f' \circ u\right)$.

Cette démonstration est hors programme, elle n'est donnée ici qu'à titre indicatif.

Démonstration Soit a un élément de I. Démontrons que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$.

- u est dérivable en a, donc pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a :
  $u(a+h) = u(a) + u'(a)\,h + h\varphi(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
- f est dérivable en $u(a)$, donc pour tout réel t tel que $u(a)+t$ appartienne à J, on a :
  $f(u(a)+t) = f(u(a)) + f'(u(a))\,t + t\phi(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \phi(t) = 0$.
- En particulier, lorsque $a+h \in$ I, pour $t = u'(a)\,h + h\varphi(h)$; on obtient :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + f'(u(a))\left[u'(a)\,h + h\varphi(h)\right] + \left[u'(a)\,h + h\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)$;
  c'est-à-dire :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)\,f'(u(a))\,h + h\underbrace{\left[f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)\right]}_{\varepsilon(h)}$.
  Posons : $\varepsilon(h) = f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)\,h + h\varphi(h)\right)$.
- Pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a : $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)\,f'(u(a))\,h + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Cette dernière égalité signifie que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$;

□

Exemple *Étudier la dérivabilité de la fonction* $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ *et* $f : x \mapsto \cos x$ *; on a :* $g = f \circ u$.
La fonction u *est dérivable sur* $]-\infty;1[$ *et* $u(]-\infty;1[) =]0;+\infty]$ *; la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *qui contient* $]0;+\infty[$.
Donc, g *est dérivable sur* $]-\infty;1[$. *On démontre de même que* f *est dérivable sur* $]1;+\infty[$.
Pour tout x *élément de* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, *on a donc :* $g'(x) = u'(x) \times f'[u(x)] = -\dfrac{1}{(1-x)^2}\sin\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Remarque *Soit g une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point. Si g est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, alors g est dérivable sur son ensemble de définition.*

VI.2.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$

THÉORÈME VI.2.2

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I et $u(\mathrm{I}) \subset]0;+\infty]$ car u est strictement positive sur I. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$. □

Exemple ***Exercice VI.2.1.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.***

Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$; on a : $g = \sqrt{u}$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$; donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que g' est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

VI.2.3 Dérivée de la fonction u^n ($n \in \mathbb{Z}$)

1er cas $n > 1$

THÉORÈME VI.2.3

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction :

$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I. De plus, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x) \times n \times u^n(x)$. □

Exemple ***Exercice VI.2.2.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin^6 x$***

La fonction sin *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction* cos*, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 6\cos x \sin^5 x$.*

2e cas $n < 0$

THÉORÈME VI.2.4

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I, et n un entier ($n < 0$). La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction

$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $v = \dfrac{1}{u}$.

Exemple ***Exercice VI.2.3.*** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^6}$***

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ne s'anulle pas sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -6\dfrac{2x}{(x^2+1)^7}$.

Remarque *Comme précédemment, les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels. Nous admettons momentanément le théorème suivant.*

THÉORÈME VI.2.5

Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

1. La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r x^{r-1}$.
2. La fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $r u' u^{r-1}$.

La seconde partie se déduit de la première à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemple *Exercice VI.2.4.* ***Déterminer la dérivée de la fonction*** $f : x \mapsto \left(2x^2+1\right)^3 \sqrt{2x^2+1}$.

On a $f = u^{\frac{7}{2}}$, *où u est la fonction* $x \mapsto 2x^2+1$; *la fonction u est dérivable et strictement positive sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée est la fonction* $u' : x \mapsto 4x$; *la fonction f est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* f' *définie par :*
$f'(x) = \dfrac{7}{2} \times 4x\left(2x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} = 14x\left(2x^2+1\right)^2 \sqrt{2x^2+1}$.

VI.3 Dérivation et études de fonctions

VI.3.1 Sens de variation

THÉORÈME VI.3.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– Si $f' > 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I ;
– si $f' < 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I ;
– si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

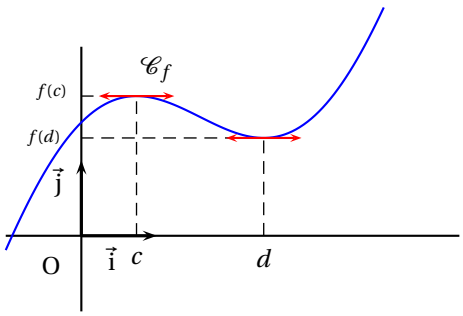
Remarque *De même si* $f' \geqslant 0$ *(resp.* $f' \leqslant 0$*) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Exemple *La fonction* $f : x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et sa dérivée est strictement positive sur* $]0;+\infty]$ *; donc f est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$.

Remarque *La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *a une dérivée strictement négative sur son ensemble de définition et pourtant la fonction f n'est pas décroissante. L'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.*

VI.3.2 Extremum local

D'après la figure ci-contre :
– $f(c)$ est maximum local de f ;
– $f(d)$ est minimum local de f.
On dit également que f admet un maximum en c et un minimum en d.



THÉORÈME VI.3.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I. f admet un extremum local en a si et seulement si f' s'annule et change de signe en a.

Ce théorème est connu depuis la classe de Première.

VI.4 Dérivées successives d'une fonction

DÉFINITIONS VI.4.1 DÉRIVÉE n-IÈME D'UNE FONCTION

Soit f une fonction et I un intervalle.
(1) Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
(2) Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
(3) De proche en proche, la fonction dérivée n-ième de f sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction dérivée $(n+1)$-ième de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f. On utilise également, notamment en sciences physiques, la notation de Leibniz : f', f'', …, $f^{(n)}$; sont notées respectivement $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, …, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Exemples

1. ***Exercice VI.4.1.*** ***Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.***

On a : $f'(x) = x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 2x - 4$; $f^{(3)}(x) = 2$; $f^{(4)}(x) = 0$.

Donc, pour tout nombre entier n tel que $n \geqslant 4$, on a : $f^{(n)}(x) = 0$.

2. ***Exercice VI.4.2.*** ***Calculer la dérivée n-ième de la fonction $g : x \mapsto \sin x$.***

On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ g''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ g^{(3)}(x) &= \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Démontrons cette égalité par récurrence.

1. *L'égalité est vraie pour $n = 1$.*
2. *Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire :*
   $g^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$;
   on en déduit que : $g^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$;
   donc, l'égalité est vraie pour $k+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

VI.5 Exercices résolus

Exercice VI.5.1. ***Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.*
Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow 2(y-x) = \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \left(2(y-x)\right)^2 = x^2 + 1 \text{ et } 2(y-x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 8yx + 4y^2 - 1 = 0 \text{ et } x - y \leqslant 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré d'inconnue x dont le discriminant est :
$\Delta = (-8y)^2 - 4 \times 3(4y^2 - 1) = 16y^2 + 12$.
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{8y - \sqrt{16y^2+12}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{8y + \sqrt{16y^2+12}}{6}$;
c'est-à-dire : $x_1 = \dfrac{4y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.
D'où il vient : $x_1 - y = \dfrac{y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ et $x_2 - y = \dfrac{y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.

Or : $4y^2+3>4y^2$ *; donc :* $\sqrt{4y^2+3}>|2y|$ *;*
D'où : $x_1-y<\dfrac{y-2|y|}{3}\leqslant 0$ *et* $x_2-y>\dfrac{y+2|y|}{3}\geqslant 0$.
x_1 *est la seule solution vérifiant la contrainte* $x-y\leqslant 0$ *,* x_1 *est donc l'unique antécédent de* y *dans* $\mathbb{R}$ *et on a :* $y=f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{4y-\sqrt{4y^2+3}}{3}$.
Par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *et sa bijection réciproque est la fonction* $f^{-1}:x\mapsto\dfrac{4x-\sqrt{4x^2+3}}{3}$. □

Exercice VI.5.2. ***On se propose de déterminer la dérivée de la fonction*** $f:x\mapsto\sqrt{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}$.

1. a. Étudier le signe de la fonction $u:x\mapsto\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ ***(on pourra utiliser*** u''***).***

b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f***.***

2. Étudier la dérivabilité de f ***en 0 (on pourra poser :*** $t=\dfrac{x}{2}$***).***

3. Déterminer la dérivée de la fonction f***.***

Solution

1. a. *La fonction* u *est la somme de la fonction* cos *et d'une fonction polynôme, elle est donc deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*. Sa dérivée première est la fonction* $u':x\mapsto x-\sin x$ *; et sa dérivée seconde est la fonction* $u'':x\mapsto 1-\cos x$*. La fonction* u'' *étant positive on en déduit que la fonction* u' *est strictement*[1] *croissante sur* $\mathbb{R}$*. De plus* $u'(0)=0$ *donc* u' *est strictement positive sur* $]0;+\infty[$ *et strictement négative sur* $]-\infty;0[$ *et par conséquent* u *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *et strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$ *or* $u(0)=0$ *donc la fonction est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$ *et s'annule en 0.*

On a $f=\sqrt{u}$*. La fonction* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$*,* f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}^\star$ *et sa dérivée sur* $\mathbb{R}^\star$ *est* $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$*, pour savoir si elle dérivable en 0, on doit calculer la limite en 0 de la fonction* θ *définie par :* $\theta(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$.
Posons : $t=\dfrac{x}{2}$*. Pour tout réel non nul* x*, on a :*

$$u(x)=\cos 2t-1+\frac{(2t)^2}{2}=1-2\sin^2 t-1+2t^2=2t^2\left(1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right).$$

Donc pour tout réel non nul x *:* $\theta(x)=\dfrac{\sqrt{u(x)}}{x}=\dfrac{\sqrt{2t^2\left(1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right)}}{2t}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{|t|}{t}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}$.

Donc : $\theta(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t<0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t>0\end{cases}$

On sait que : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ *; donc par composition par la fonction* $x\mapsto\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x^2}$ *:*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0\,;$$

on a de même : $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0.$

Pour $x>0$*, on a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{2}=0$ *avec* $\dfrac{x}{2}>0$ *et* $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0$*; Donc par composition :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\theta(x)=0$*; de même :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\theta(x)=0$*. Donc la fonction* f *est dérivable en 0 et* $f'(0)=0$.
La fonction f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* f' *définie par :*

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{x-\sin x}{2\sqrt{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}}\text{ lorsque } x\neq 0 \text{ et } f'(0)=0.\ \square$$

1. on peut admettre ici cette justification peu rigoureuse, un argumentation correcte serait la suivante. Soit a et b deux réels tels que $a<b$. La fonction u'' est dérivable et strictement positive (sauf en nombre fini de points) sur $[a;b]$, u' est donc strictement croissante sur $[a;b]$; d'où : $u'(a)<u'(b)$; cette inégalité étant vérifiée pour tous réels a et b tels que $a<b$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice VI.5.3. ***On se propose d'étudier la fonction*** $f : x \mapsto \dfrac{|x-1|\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, D_f, ***de*** f.

2. Étudier la limite de f ***en*** $-\infty$

3. Étudier la dérivabilité de f ***en 1.***

4. Étudier la dérivabilité de f ***en 3.***

5. On considère la fonction u ***définie sur*** $]-\infty;3[$ ***par*** $u(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{4-x}}$ ***;***
calculer $u'(x)$.

6. Déterminer la dérivée de f, ***étudier le sens de variation de*** f ***et dresser son tableau de variation.***

7. a. Étudier la limite en $-\infty$ ***de*** $x \mapsto f(x)+x-1$ ***(on pourra poser*** $t = x-1$***).***

b. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ ***d'équation*** $y = -x + \dfrac{1}{2}$ ***est asymptote à la courbe représentative,*** $\mathscr{C}_f$, ***de*** f.

8. Représenter graphiquement la fonction f.

Solution

1. *Pour tout nombre réel* x, f *est définie en* x *si et seulement si* $3-x \geqslant 0$ *et* $4-x>0$, *donc* $D_f =]-\infty;3]$

2. *Pour tout* $x<0$, *on a :* $f(x) = (1-x)\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}}$.

De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x} = 0$;
donc par différences, quotient puis composition par la fonction racine carrée :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}} = 1$;

or : $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$; *donc par produit :* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. *On a :* $f(1) = 0$; *donc pour étudier la dérivabilité de* f *en 1, il faut étudier la limite de* $\dfrac{f(1+h)}{h}$ *lorsque* h *tend vers 0.*

Pour $h \leqslant 2$ *et* $h \neq 0$, *on a :* $\dfrac{f(1+h)}{h} = \dfrac{|h|}{h} \times \dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}}$,

avec : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\dfrac{|h|}{h} = -1$ *lorsque h<0 et* $\dfrac{|h|}{h} = 1$ *lorsque h>0.*

Donc par produit : $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(1+h)}{h} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ *et* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(1+h)}{h} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc f *n'est pas dérivable en 1, mais la courbe* $\mathscr{C}_f$ *présente au point d'abscisse 1 une demi-tangente à droite de coefficient directeur* $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ *et une demi-tangente à gauche de coefficient directeur* $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. *La fonction* f *n'est pas définie à droite de 3 et* $f(3) = 0$, *donc pour étudier la dérivabilité de* f *en 3, il faut étudier la limite de* $\dfrac{f(3+h)}{h}$ *lorsque* h *tend vers 0 par valeurs inférieures. Pour* $h<0$, *on a :* $\dfrac{f(3+h)}{h} = \dfrac{\sqrt{-h}}{h} \times \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}} \times \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}}$. *On a :* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} -\dfrac{1}{\sqrt{-h}} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}} = 2$; *donc par produit :* $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(3+h)}{h} = -\infty$.

Donc f *n'est pas dérivable en 3, mais la courbe* $\mathscr{C}_f$ *présente au point d'abscisse 3 une demi-tangente verticale (vers le haut).*

5. *La fonction* $v : x \mapsto \dfrac{3-x}{4-x}$ *est une fonction homographique, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition,* $\setminus\{4\}$, *de plus pour* $x<3$, $3-x>0$ *et* $4-x>0$ *donc* v *est strictement positive sur* $]-\infty;3[$ *par* $u = \sqrt{v}$ *est dérivable sur* $]-\infty;3[$ *et sa dérivée est* $u' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$. *La dérivée de* v *est la fonction* $v' : x \mapsto -\dfrac{1}{(4-x)^2}$, *donc la dérivée de* u *est la fonction est la fonction* u' *définie sur* $]-\infty;3[$ *par :* $u'(x) = \dfrac{-1}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}}$.

C'est-à-dire : $\boxed{u'(x) = \dfrac{-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}}}$.

6. *Sur* $]-\infty;1[\cup]1;3[$ f *est le produit de deux fonctions dérivables donc* f *est dérivable.*
pour $x \in]1;3[$ *:* $f(x) = (x-1)\,u(x)$; *donc :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)+(x-1)\,u'(x) \\ &= \sqrt{\frac{3-x}{4-x}}-\frac{x-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{(3-x)(4-x)-(x-1)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{2x^2-15x+25}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \end{aligned}$$

Dans cette fraction le dénominateur (produit de quantité positives) est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2-15x+25$. Le discriminant est $\Delta = 15^2-4\times 2\times 25 = 25$, donc le trinôme admet deux racines : $x_1=\dfrac{15-5}{4}=\dfrac{5}{2}$ et $x_1=\dfrac{15+5}{4}=5$. Le trinôme est du signe de 2 à l'extérieur des racines et du signe de -2 à l'intérieur, donc f' est strictement positive sur $]1;\dfrac{5}{2}[$ et strictement négative sur $]\dfrac{5}{2};3[$; donc f est strictement croissante sur $[1;\dfrac{5}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\dfrac{5}{2};3]$.
Pour $x\in]-\infty;1[$: $f(x)=(1-x)\,u(x)$; donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -u(x)+(1-x)\,u'(x) \\ &= -\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}+\frac{x-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{-(3-x)(4-x)+(x-1)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \\ &= \frac{-\left(2x^2-15x+25\right)}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}} \end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, f' est strictement négative sur $]-\infty;1[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$. Donc finalement f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et sur $[\dfrac{5}{2};3]$ et strictement croissante sur $[1;\dfrac{5}{2}]$. On en déduit le tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

7. a. *Posons : $t=x-1$. Pour $x<1$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x)+x-1 &= \frac{|t|\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}+t \\ &= t\left(1-\frac{\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}\right) \\ &= t\frac{\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}} \\ &= t\frac{(3-t)-(2-t)}{\sqrt{3-t}\left(\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}\right)} \\ &= t\frac{1}{\left(\sqrt{-t}\right)^2\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)} \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{3}{t}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2}{t}=0$;
donc par différences, composition par la fonction racine carrée, somme, produit et quotient :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-1\right)=-\dfrac{1}{2}$. D'où il vient par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)\right)=0$.
Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. □

Chapitre VII

Nombres complexes

VII.1 Introduction

VII.1.1 Des équations et des ensembles

Dans les classes précédentes, on a vu l'ensemble $\mathbb{N}$, dans cette ensemble on peut résoudre des équations telles que : $x+3=7$; où la solution est 4. Cependant, dans $\mathbb{N}$, des équations telles que : $x+7=3$; n'ont pas de solution. C'est alors qu'on a eu l'idée d'étendre l'ensemble des nombres ; on a ainsi obtenu un nouvel ensemble appelé $\mathbb{Z}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : -4. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $3x=-15$; ont une solution alors que d'autres équations, pourtant semblables, telles que : $3x=-7$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{Q}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : $-\dfrac{7}{3}$. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=4$; ont deux solutions (2 et -2) alors que des équations assez proches telles que : $x^2=3$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation précédente a deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Mais cela n'est pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=-4$; assez proches des deux équations précédentes, n'ont pas de solution. Si on veut qu'une telle équation ait, comme les autres, deux solutions il faut étendre l'ensemble des nombres.

On part du principe qu'il existe un nombre i (i comme imaginaire) tel que : $i^2=-1$; et notre objectif est de trouver un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{C}$, qui sera le plus petit ensemble de nombres (qui seront appelés nombres complexes) vérifiant les contraintes suivantes.

1. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$;
2. $i\in\mathbb{C}$;
3. Les lois algébriques concernant l'addition et la multiplication des nombres sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.

La somme ou le produit de deux nombres réels est un nombre réel, la dernière condition impose donc que la somme ou le produit de deux nombres complexes soit un nombre complexe. En particulier $2i$ et $-2i$ sont deux nombres complexes et on a :
$(2i)^2=2^2\times i^2=4\times(-1)=-4$ et $(-2i)^2=(-2)^2\times i^2=4\times(-1)=-4$;
donc la dernière équation envisagée à maintenant, elle aussi, deux solutions.

Pour les raisons que nous venons d'évoquer, tout nombre de la forme (dite *algébrique*) $a+ib$, où a et b sont des nombres réels, sont des nombres complexes. Peut-on par additions ou par multiplications obtenir des nombres complexes qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme ? Pour se faire une idée, prenons quelques exemples.

VII.1.2 Activités

Mettre sous forme algébrique les nombre complexes suivants.

$z_1=(2+5i)+(3-7i)$; $z_2=(2+5i)-(3-7i)$; $z_3=(2+5i)(3-7i)$

$z_4=(2+5i)(2-5i)$; $z_5=\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}}$; $z_6=\dfrac{3-7i}{2+5i}$

$z_7=i^4$; $z_8=(1+i)^2$; $z_9=(1+i)^{17}$

Plus généralement, pour $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ (où a, a', b, b' sont des réels), mettre sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'$, zz',$z-z'$ et lorsque $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, $\dfrac{1}{z}$.

VII.1.3 Définitions

L'activité précédente suggère la définition suivante.

DÉFINITIONS VII.1.1 NOMBRE COMPLEXE, $\mathbb{C}$

(1) Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels et $i^2=-1$.

(2) L'ensemble des nombres complexes est appelé $\mathbb{C}$.

Remarque *On a :* $0\times 2i=(0\times 2)i=0\times i$ *; donc :* $0=0\times 2i-0\times i=0(2i-i)=0\times i$ *; d'où :* $0\times i=0$.

Notations et vocabulaire

1. *lorsqu'un nombre complexe z est écrit sous la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels, on dit qu'il est écrit sous* forme algébrique *;*

2. *le nombre réel a est appelé* partie réelle *de z et est noté $\Re\mathrm{e}(z)$;*

3. *le nombre réel b est appelé* partie imaginaire *de z et est noté $\Im\mathrm{m}(z)$; en particulier $\Im\mathrm{m}(z)$ est un nombre réel ;*

4. *si $b=0$, alors $z=a$ (car on a : $i\times 0=0$) ; z est un nombre réel ; tout nombre réel est bien un nombre complexe ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$) ;*

5. *Si $a=0$, alors $z=ib$; z est dit* imaginaire pur.

Exemple *Si :* $z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *; alors :* $\Re\mathrm{e}(z)=\dfrac{1}{2}$ *et* $\Im\mathrm{m}(z)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$

VII.1.4.a Addition, soustraction, multiplication

Comme on l'a vu en activités, l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies de la façon suivante.

DÉFINITIONS VII.1.2

Soit a, a', b, b' des nombres réels.

(1) $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$;

(2) $(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$;

(3) $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

Remarques

1. *Lorsque :* $b=b'=0$ *; on retrouve l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

2. $(a+ib)+(-a-ib)=0$ *; tout nombre complexe, $z=a+ib$, a un opposé :* $-z=-a-ib$.

Le théorème suivant signifie que, comme nous l'avions désiré, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$; sa démonstration, fastidieuse et sans surprise, est laissée au soin du lecteur courageux.

THÉORÈME VII.1.1

Pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

(1)	$z+z'\in\mathbb{C}$	$+$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(2)	$z+z'=z'+z$	$+$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(3)	$z+(z'+z'')=(z+z')+z''$	$+$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(4)	$z+0=0+z=z$	dans $\mathbb{C}$, 0 est élément neutre pour $+$;
(5)	$z\times z'\in\mathbb{C}$	$\times$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(6)	$z\times z'=z'\times z$	$\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(7)	$z\times(z'\times z'')=(z\times z')\times z''$	$\times$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(8)	$z\times 1=1\times z=z$	dans $\mathbb{C}$, 1 est élément neutre pour $\times$;
(9)	$z\times(z'+z'')=z\times z'+z\times z''$	$\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{C}$;

VII.1.4.b Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.1.3 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z=a+ib$.

On appelle *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par : $\overline{z}=a-ib$.

Exemple *Si* $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *alors* $\overline{z}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4.c Égalité de deux nombres complexes

THÉORÈME VII.1.2

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.
(1) $z=0$ si et seulement si $a=0$ et $b=0$;
(2) $z=z'$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$

0 est appelé *nombre complexe nul.*

Démonstration

(1) On sait que si $a=0$ et $b=0$, alors $z=0$.
Réciproquement si $z=0$, alors : $z\overline{z}=0$; c'est-à-dire : $a^2+b^2=0$;
a et b sont réels et on sait que dans $\mathbb{R}$ la somme des carrés de deux nombres est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls. On en déduit **(1)**.

(2) On a : $z-z'=(a-a')+i(b-b')$; donc : $z=z'\iff z-z'=0\iff\left\{\begin{array}{l}a-a'=0\\b-b'=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a=a'\\b=b'\end{array}\right.$. □

VII.1.4.d Inverse d'un nombre complexe non nul, division

THÉORÈME VII.1.3

Tout nombre complexe non nul a un *inverse.*

Démonstration Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z=a+ib$.
On a donc : $a^2+b^2\neq 0$; et d'après les définitions VII.1.2 :

$$\left(a+ib\right)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=1.$$

L'inverse de z s'obtient par la formule : $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$. □

Exemple *Pour* $z=3+5i$, *on obtient :* $\frac{1}{z}=\frac{1}{3+5i}=\frac{3-5i}{3^2+5^2}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$.

Remarque *La formule introduite dans la démonstration du théorème VII.1.3 peut s'écrire :* $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

THÉORÈME VII.1.4

Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux au moins est nul.

Démonstration Soit z et z' deux nombres complexes. D'après les définitions VII.1.2, le théorème VII.1.2 et la remarque §VII.1.3, si $z=0$ ou $z'=0$ alors $zz'=0$.
Réciproquement, si $zz'=0$ alors $z=0$ ou $z'=0$. En effet si $z\neq 0$, alors $\frac{1}{z}\times zz'=\frac{1}{z}\times 0$; c'est-à-dire : $z'=0$. □

La *division* se définit par : $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$ (pour $z\neq 0$).

Exemple $\frac{2+3i}{2-i}=\frac{(2+3i)(2+i)}{2^2+1^2}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$.

VII.1.4.e Groupes et corps

Ce paragraphe peut être omis par les élèves ne suivant l'enseignement de spécialité mathématique.
On a vu que dans $\mathbb{C}$, + est une loi de composition interne, commutative, associative dans laquelle 0 est élément neutre et pour laquelle tout élément a un opposé ; ces cinq propriétés étant réunies, on dit que $(\mathbb{C},+)$, c'est-à-dire $\mathbb{C}$ muni de l'addition, est un groupe commutatif.

De même $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, muni de la multiplication est groupe commutatif.

$(\mathbb{C},+)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe et $\times$ est distributive par rapport à + ; on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps.

De plus × est commutative dans $\mathbb{C}$, on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Remarques

1. *$(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{Q},+,\times)$ sont des corps commutatifs.*

2. *$(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est un corps car certains entiers non nuls n'ont pas d'inverse entier.*

3. *Désignons par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries du plan ; $(\mathscr{I},\circ)$ est un groupe, non commutatif.*

VII.1.4.f Identités remarquables

Les formules suivantes, établies dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME VII.1.5

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n, on a :

$(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2$; $(z-z')^2 = z^2-2zz'+z'^2$

$(z+z')(z-z') = z^2-z'^2$; $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k z'^{n-k}$ (formule du binôme de NEWTON)

$z^n-z'^n = (z-z')\left(z^{n-1}+z^{n-2}z'+z^{n-3}z'^2+\cdots+zz'^{n-2}+z'^{n-1}\right) = (z-z')\sum_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}z'^k$

VII.2 Interprétations géométriques

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

VII.2.1 Affixe, point image, vecteur image

– L'application qui à tout nombre complexe de forme algébrique $a+ib$ associe le point $M(a;b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathscr{P}$.
$M(a;b)$ est appelé *point image* du nombre complexe $a+ib$; $a+ib$ est appelé *affixe* du point $M(a;b)$

– L'application qui à tout nombre complexe $a+ib$ associe le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.
$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $a+ib$; $a+ib$ est appelé *affixe* du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

– Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé *plan complexe*. Un point M d'affixe z est souvent noté $M(z)$.

– Les droites de repères $(O;\vec{\imath})$ et $(O;\vec{\jmath})$ sont respectivement appelée *axe réel* et *axe imaginaire*.

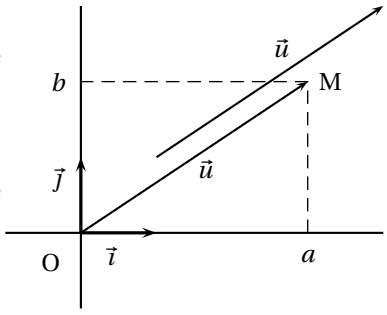


FIGURE VII.1 – Interprétation géométrique

Exemples

1. *O est le point d'affixe 0.*

2. *$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs d'affixes respectives* 1 *et* i.

Remarques

1. *Deux points sont confondus si et seulement si ils ont la même affixe.*

2. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.*

VII.2.2 $\vec{u}+\vec{u'}$, $k\vec{u}$, $\overrightarrow{MM'}$

Le tableau VII.1 donne les interprétations géométriques de certaines opérations dans $\mathbb{C}$.

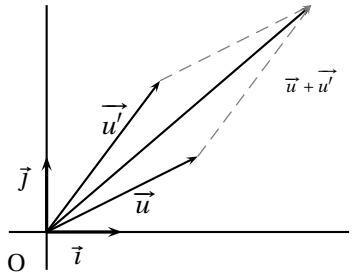
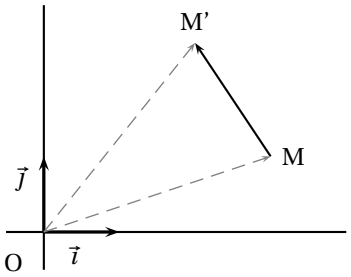
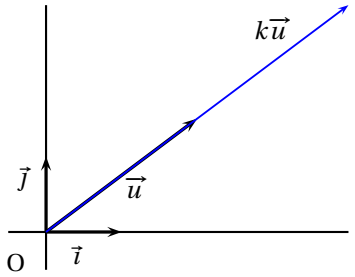
Somme	Différence	Produit par un nombre réel
		
$z_{\vec{u}}+z_{\vec{u'}}=z_{\vec{u}+\vec{u'}}$	$z_{M'}-z_M=z_{\overrightarrow{MM'}}$	$kz_{\vec{u}}=z_{k\vec{u}}$

TABLE VII.1 – Opérations sur les vecteurs

Exercice VII.2.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm)***

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+2i$; $z_B=4-2i$; $z_c=5$ et $z_D=\frac{7}{2}+2i$. 2. Démontrer que le quadrilatère AOBC est un parallélogramme. 3. Démontrer que les droites (AB) (CD) sont parallèles.

Solution

1. *Voir figure VII.2.*

2. *Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=1+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=5-(4-2i)=1+2i$ *; on a :* $z_{\overrightarrow{OA}}=z_{\overrightarrow{BC}}$ *; donc :* $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ *. Le quadrilatère AOBC est donc un parallélogramme.*

3. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=\frac{7}{2}+2i-5=-\frac{3}{2}+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(4-2i)-(1+2i)=3-4i=-2\left(-\frac{3}{2}+2i\right)$ *;*

On a : $z_{\overrightarrow{CD}}=-2z_{\overrightarrow{CD}}$ *; donc :* $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$ *.*

Les droites (AB) (CD) ont des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont donc sont parallèles. □

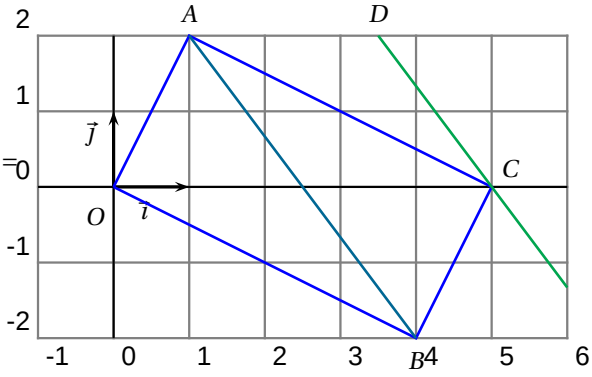


FIGURE VII.2 –

VII.2.3 Écriture complexe de certaines symétries

La symétrie par rapport à l'axe réel est la transformation qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\overline{z}$.

De même la transformation complexe $z\mapsto -z$ est associée à la symétrie par rapport à l'origine et la transformation complexe $z\mapsto -\overline{z}$ est associée à la symétrie par rapport à l'axe imaginaire.

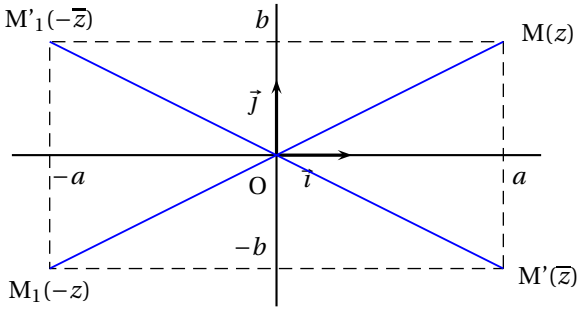


FIGURE VII.3 – Nombres complexes et symétries

VII.2.4 Coordonnées polaires

Un point M, distinct de l'origine peut-être repéré par ses coordonnées rectangulaires (a,b) ou par ces coordonnés polaires (r,θ).

Dire que M a pour coordonnées rectangulaires (a,b) signifie que $\overrightarrow{OM}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$.

Dire que M a pour coordonnées polaires (r,θ) signifie que $OM=r$ et $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta\,(\text{mod}\,2\pi)$. Le schéma ci-dessous résume les règles de passage d'un système de coordonnées à l'autre.

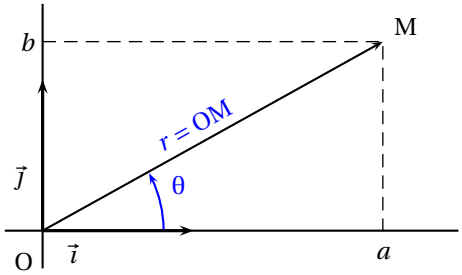


FIGURE VII.4 – Coordonnées polaires

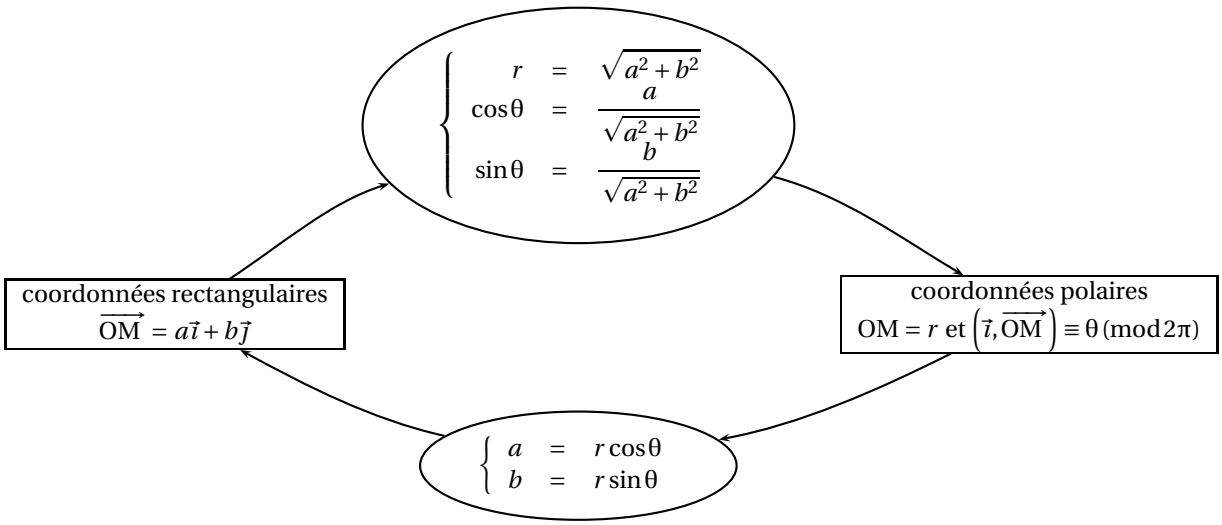


FIGURE VII.5 – Formules de conversions coordonnées polaires ⟷ coordonnées rectangulaires

VII.2.5 Module et arguments

VII.2.5.a Module d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.2.1 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + ib$.

On appelle *module* de z le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarques

1. *Pour tout nombre complexe z, on a : $|z|^2 = z\overline{z}$.*

2. *Pour $b = 0$, on a : $z = a$ et $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$; le module étend à $\mathbb{C}$ la fonction valeur absolue.*

Exemple *Pour $z = 2+3i$, on a : $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ et $z\overline{z} = (2+3i)(2-3i) = 2^2+3^2 = 13$*

THÉORÈME VII.2.1

Pour tout nombre complexe z, on a : $|z| = 0 \iff z = 0$

Démonstration $|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff z\overline{z} = 0 \iff (z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0) \iff z = 0$. □

VII.2.5.b Arguments d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION VII.2.2 ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle *argument* de z toute mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques

1. *Si θ et θ' sont deux arguments de z alors $\theta' = \theta + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

2. *On note :* $\arg(z) = \theta + k2\pi$ *(avec $k \in \mathbb{Z}$) ou* $\arg(z) \equiv \theta \,(\text{mod}\, 2\pi)$.

3. *Dire qu'un nombre complexe z a pour module r et pour argument θ signifie que l'image de z dans le plan complexe a pour coordonnées polaires (r, θ).*

VII.2.5.c Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + ib$; de module r, d'argument θ et M son image dans le plan complexe. On sait que : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
Donc : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

DÉFINITION VII.2.3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle *forme trigonométrique* de z l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemples $1+i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ *et* $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

Remarques

1. *On passe de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul de la même façon qu'on transforme des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires (cf. figure §VII.5 page 82) ;*

2. *Soit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *;*

- *si* $r > 0$ *alors la forme trigonométrique de* z *est* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ *;*
- *si* $r < 0$ *alors la forme trigonométrique de* z *est* $z = -r\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Exemple *La forme trigonométrique de* $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ *est :* $2\left(\cos -\dfrac{5\pi}{6} + i\sin -\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

On déduit de l'étude menée §VII.2.4 que deux nombres complexes non nuls ont même argument (modulo 2π) et même module si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Le théorème VII.1.2 permet alors d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.

VII.3 Propriétés algébriques

VII.3.1 Propriétés du conjugué

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition VII.1.3 p. 78.

THÉORÈME VII.3.1

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$.

(1) $\overline{\overline{z}} = z$; **(2)** $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$;
(3) $z + \overline{z} = 2\Re\mathrm{e}(z)$; **(4)** $z - \overline{z} = 2i\Im\mathrm{m}(z)$;
(5) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$; **(6)** z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$;

Exemples

1. $\overline{\overline{3+2i}} = \overline{3-2i} = 3+2i$
2. $(-3+2i) + (-3-2i) = -6$
3. $(-3+2i)\overline{(-3-2i)} = (-3)^2 - (-4) = 13$
4. $(-3+2i) - (-3-2i) = 4i$

THÉORÈME VII.3.2

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$;
(3) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
(4) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}\ (z \neq 0)$;
(5) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}\ (z \neq 0)$;
(6) $\overline{z^n} = \overline{z}^n\ (z \neq 0)$;

Démonstration Introduisons les formes algébriques de z et z' : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
On en déduit immédiatement **(1)** et **(2)**.
(3) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$;
donc : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
(4) Pour $z \neq 0$, on a : $z \times \dfrac{1}{z} = 1 \iff \overline{z \times \dfrac{1}{z}} = 1 \iff \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1 \iff \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = 1 \iff \overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
donc : $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
(5) Pour $z \neq 0$, on a : $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \times \dfrac{1}{z}} = \overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;
(6) Pour $n > 0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(3)**.
Pour $n < 0$ on a $-n > 0$ et donc : $\overline{z^n} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{-n}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{-n}}} = \dfrac{1^{-n}}{\overline{z}^{-n}} = \left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^{-n} = \overline{z}^n$ □

VII.3.2 Propriétés du module et des arguments

THÉORÈME VII.3.3

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire)*

(2) $|zz'| = |z|\times|z'|$ *et* $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z') \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ *et* $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(4) $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ *et* $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z')-\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(5) $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \,(\text{mod}\, 2\pi)$

Démonstration

(1) L'inégalité triangulaire se déduit de l'interprétation géométrique de $|z+z'|$.

Introduisons les formes trigonométriques de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

(2) On a : $\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\cos\theta'-\sin\theta)\right] \\ &= rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)\end{aligned}$

On en déduit la propriété.

(3) On a : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{r}{r^2}(\cos\theta - i\sin\theta) = \dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)$.

On en déduit la propriété.

(4) On a : $\begin{aligned} \dfrac{z'}{z} &= z'\times\dfrac{1}{z} = r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right) \\ &= \dfrac{r'}{r}\left[\left(\cos\theta'\cos(-\theta)-\sin\theta'\sin(-\theta)\right)+i\left(\cos\theta'\sin(-\theta)+\sin\theta'\cos(-\theta)\right)\right] \\ &= \dfrac{r'}{r}\left(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta)\right).\end{aligned}$

On en déduit la propriété.

(5) Pour $n=0$, la propriété est immédiate.

Pour $n>0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(2)**.

Pour $n<0$ on a $-n>0$ et donc, d'après **(3)** : $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} = \dfrac{1}{r^{-n}\left(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right)} = r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$.

On en déduit la propriété. □

Remarques

1. *Le module est utilisé pour définir la distance entre deux nombres complexes. La distance entre z et z' est $|z'-z|$.*

2. *On dira qu'une suite (z_n) de nombres complexes converge vers un nombre complexe ℓ si la distance entre z_n et l tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; c'est-à-dire si la suite réelle de terme général $|z_n-\ell|$ converge vers 0.*

3. *En particulier une suite géométrique de terme général : $z_n = w\times q^n$ ($w\in\mathbb{C}$ et $q\in\mathbb{C}$) converge vers 0 si et seulement si $|q|<1$, en effet : $|z_n| = |w|\times|q|^n$.*

On démontre, comme dans $\mathbb{R}$, que pour $|q|<1$, la suite de terme général : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(wq^k\right)$; converge vers : $\dfrac{w}{1-q}$.

VII.3.3 Formule de MOIVRE (complément)

Pour $r=1$ dans l'identité (5) du théorème VII.3.3, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.3.4 **FORMULE DE MOIVRE** [1]

Pour tout nombre réel θ et tout nombre entier relatif n, on a :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Exercice VII.3.1. ***Déterminer la forme algébrique de : $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003}$.***

Solution *On a :* $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2003} = \cos\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Or : $\dfrac{2003}{3}\pi = \dfrac{2004-1}{3}\pi = \dfrac{6\times334-1}{3}\pi = 334\times2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

Donc : $z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

1. MOIVRE (ABRAHAM DE) *Vitry-le-François 1667 - Londres 1754,* mathématicien britannique d'origine française. Il précisa les principes du calcul des probabilités et introduisit la trigonométrie des quantités imaginaires, énonçant implicitement la formule qui porte son nom.

Remarque *Depuis la rentrée de septembre 2001, la formule de* MOIVRE *n'est plus au programme de Terminale S.*

VII.4 Notation exponentielle

VII.4.1 Une équation différentielle

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(t)+i\sin(t). \end{array}$$

Soit t un nombre réel. Les fonctions cos et sin sont dérivables en t et ont respectivement pour nombre dérivés $-\sin(t)$ et $\cos(t)$; il existe donc deux fonctions ε_r et ε_i telles que : $\lim\limits_0 \varepsilon_r = \lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$; et pour tout réel h :

$$\cos(t+h) = \cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h); \tag{VII.1}$$
$$\sin(t+h) = \sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h). \tag{VII.2}$$

Introduisons la fonction ε de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$. On a : $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2}$; donc par produit et somme des limites puis par composition par la fonction racine carrée : $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$. De plus, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \cos(t+h) + i\sin(t+h) \\ &= (\cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h)) + i\,(\sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h)) \\ &= f(t) + h\big(-sin(t) + i\cos(t)\big) + h\big(\varepsilon_r(h) + i\varepsilon_i(h)\big) \\ &= f(t) + hif(t) + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction : if. On a donc :

$$f' = if \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale dont la solution formelle est la fonction,

$$f : t \longmapsto \mathrm{e}^{it}.$$

Notation Pour tout nombre réel θ, on convient de noté $\mathrm{e}^{i\theta}$, le nombre complexe d'argument θ et de module 1. On a donc : $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

VII.4.2 Définitions et propriétés

DÉFINITION VII.4.1 FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle *forme exponentielle* de z l'écriture : $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Exemples

1. $1 = e^{i0}$;
2. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;
3. $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;
4. $-1 = e^{i\pi}$;
5. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;
6. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

Remarque *Pour tous nombres réels r et θ :* $\left|re^{i\theta}\right| = |r| \times \left|e^{i\theta}\right| = |r|$.

Sous forme exponentielle, le théorème VII.3.3 s'écrit de la façon suivante.

THÉORÈME VII.4.1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls de forme exponentielle : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$; et n un entier relatif, on a :

(1) $\left|z+z'\right| \leqslant r+r'$;
(2) $zz' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$;
(3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$;
(4) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}\mathrm{e}^{i(\theta'-\theta')}$;
(5) $z^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$.

VII.4.3 Forme exponentielle et symétries usuelles

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de l'étude menée §VII.2.3. p. 81

THÉORÈME VII.4.2

Soit z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$.
Les formes exponentielles de $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ sont :
$\overline{z} = re^{-i\theta}$; $-z = re^{i(\theta+\pi)}$; $-\overline{z} = re^{i(\pi-\theta)}$.

Exemple *Pour $z = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on obtient : $\overline{z} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$; $-z = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et $-\overline{z} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.*

VII.4.4 Formules d'EULER

D'après les formules (2) et (5) théorème VII.3.1, on a pour tout nombre complexe z :
$\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
En particulier pour $z = e^{i\theta}$, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.4.3 FORMULES D'EULER [2]

Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

VII.4.5 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carrée d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.
Par exemple 2 a deux racines carrées : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; -1 a également deux racines carrées : i et $-i$.
L'écriture $\sqrt{Z}$ n'a de sens que si Z est un *réel positif*.

THÉORÈME VII.4.4

Soit Z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $Z = re^{i\theta}$.
z a exactement deux racines complexes : $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Démonstration Les racines carrées de Z, sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^2 = Z$.
On remarque que le nombre $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ est solution de (E), en effet : $z_1^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{i\theta} = Z$; donc :
(E) $\iff z^2 = z_1^2 \iff z^2 - z_1^2 = 0 \iff (z-z_1)(z+z_1) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ; Z a donc exactement deux racines carrées : z_1 et $z_2 = -z_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$. □

Remarques

1. *0 n'a qu'une racine carrée : 0.*

2. *Les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposées.*

3. *Le théorème VII.4.4 permet d'obtenir les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme exponentielle ; une méthode permettant de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique est proposée §VII.6.4.*

VII.5 Nombres complexes et polynômes (compléments)

Dans cette partie l'étude des démonstrations est facultative.

2. EULER (LEONHARD) *Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783,* mathématicien suisse. Il fut, au XVIIIe siècle, le principal artisan de l'essor de l'analyse, qu'il réorganisa autour du concept fondamental de fonction. Il exerça son inventivité dans de nombreux domaines de la physique mathématique.

VII.5.1 Théorème fondamental de l'algèbre

THÉORÈME VII.5.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit P un polynôme à coefficients complexes et α un nombre complexe.
α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z).$$

Démonstration Si, pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; alors, pour $z = \alpha$, on obtient : $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$; et donc α est racine de P.
Réciproquement, démontrons que si α est racine de P alors il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
Si P est le polynôme nul, l'implication est immédiate car n'importe quel polynôme Q convient ; nous supposons désormais le polynôme P non nul.
P est alors défini par une expression du type : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ (avec $a_n \neq 0$).
On introduit donc le polynôme T défini par : $T(z) = P(z+\alpha)$. T est la composée d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré n, T est donc un polynôme de degré n. Il est par conséquent défini par une expression du type : $T(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$.
Or : $T(0) = P(0+\alpha) = 0$; donc : $b_0 = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \quad T(z) = z\left(b_n z^{n-1} + \ldots + b_1\right)$.
On en déduit que pour tout nombre complexe z : $P(z) = T(z-\alpha) = (z-\alpha)\underbrace{\left(b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1\right)}_{Q(z)}$.
la propriété est alors démontrée est introduisant le polynôme Q défini par : $Q(z) = b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1$. □

Le lemme suivant est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

LEMME VII.5.2

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n a au plus n racines distinctes.

Démonstration Raisonnons par récurrence sur le degré de P.
Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 0 est un polynôme constant non nul, il n'a donc pas de racine et la propriété est démontrée pour $n = 0$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que si pour un certain entier naturel k, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à k a au plus k racines distinctes, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $k+1$ a au plus $k+1$ racines distinctes.
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$ ayant plus de $k+1$ racines distinctes et soit α l'une d'elle. On aura pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. P ayant plus de $k+1$ racines distinctes, Q a plus k racines distinctes et d'après l'hypothèse de récurrence, Q est donc le polynôme nul ; d'où, par produit, P est le polynôme nul.
Donc, par récurrence, un polynôme non nul de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines distinctes. □

THÉORÈME VII.5.3

(1) Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
(2) Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes sont égaux.

Démonstration (1) est une conséquence immédiate de lemme précédent.
(2) Si P et T sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes alors P-T est un polynôme degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines distinctes ; donc d'après le lemme, P – T est le polynôme nul ; d'où : P = T. □

VII.5.2 Résolution des équations du second degré

VII.5.2.a Factorisation d'un trinôme du second degré

On se propose de factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = az^2 + bz + c$
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
Procédons, comme en classe de Première dans la cas réel, en utilisant la forme canonique. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) && \text{, car } a \neq 0 \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

On introduit le nombre Δ, appelé *discriminant* de l'équation ou du trinôme, défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta = 0$, alors : $P(z) = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$.
Si $\Delta \neq 0$ et on introduit δ une racine carrée complexe de Δ. On a alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{(2a)^2}\right] \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) \\ &= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

On déduit de cette étude le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.4

(1) Tout trinôme du second degré à coefficients complexes peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

(2) Les racines du polynôme d'indéterminée z : az^2+bz+c ;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a\neq 0$, sont :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est l'une des deux racines carrées complexes du discriminant : $\Delta=b^2-4ac$.
On a alors la factorisation :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

Remarques

1. *Les racines carrées de Δ sont δ et $-\delta$, donc remplacer δ par $-\delta$ ne fait qu'échanger z_1 et z_2.*

2. *Lorsque $\Delta=0$ les racines carrées du discriminant sont égales et on a : $z_1=z_2$.*

3. *Lorsque $\Delta\neq 0$, on a : $z_1\neq z_2$.*

Exercice VII.5.1. ***1. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $2i$.***

2. Factoriser le trinôme : $P(z)=(1-i)z^2-\sqrt{2}z+\frac{1}{2}$.

Solution 1. *On a :* $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=(1+i)^2$;

Les racines carrées complexes de $2i$ sont donc : $1+i$ et $-1-i$.

2. *Le discriminant du trinôme est :* $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(1-i)\times\frac{1}{2}=2i=(1+i)^2$;

il admet donc deux racines : $z_1=\frac{\sqrt{2}+(1+i)}{2(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)+(1+i)^2}{2(1^2+1^2)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)+2i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et $z_2=\frac{\sqrt{2}-(1+i)}{2(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)-2i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{-2+\sqrt{2}}{4}$.

Donc : $P(z)=(1-i)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{-2+\sqrt{2}}{4}\right)$ □

VII.5.2.b Résolution d'équations du second degré

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z, (E) : $az^2+bz+c=0$;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a\neq 0$.
Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; on a :
$az^2+bz+c=0\iff a(z-z_1)(z-z_2)=0\iff(z=z_1 \quad \text{ou} \quad z=z_2)$.
On en déduit que lorsque $\Delta=0$, l'équation admet une solution double : $z=-\frac{b}{2a}$.
Lorsque $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.

Exemples

1. ***Exercice VII.5.2.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z+3=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times 2\times 3=-15=\left(i\sqrt{15}\right)^2$ *; donc :* $S=\left\{\frac{-3-i\sqrt{15}}{4};\frac{-3+i\sqrt{15}}{4}\right\}$.

2. ***Exercice VII.5.3.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z-1=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times 2\times(-1)=17=\left(\sqrt{17}\right)^2$ *; donc :* $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

VII.5.2.c Somme et produit de racines

Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; pour tout nombre complexe z on a :

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2) = az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2$$

On en déduit, par identifications, que : $b=-a(z_1+z_2)$ et $c=az_1z_2$.
D'où l'on tire le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.5

Soit az^2+bz+c un trinôme du second degré ($a\neq 0$), S la somme et P le produit des racines. On a :

$$\mathrm{S}=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}=\frac{c}{a}$$

Exemple *Exercice VII.5.4.* ***Résoudre : $3z^2+4z-1=0$.***

On remarque que 1 est solution évidente, on sait que le produit des solutions dans $\mathbb{C}$ est $-\frac{1}{3}$ donc l'autre solution est : $-\frac{1}{3}$; d'où : $S=\left\{1;-\frac{1}{3}\right\}$

VII.6 Utilisation des nombres complexes (compléments)

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel tel que : $n\geqslant 2$.

VII.6.1 Racines n-ièmes de l'unité

On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant : $z^n=1$.
Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les racines du polynôme de degré n : z^n-1 ;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de l'unité distinctes.
Pour tout entier k le nombre $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$ est racine n-ième de l'unité ; en effet : $\left(\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{ik2\pi}=1$.
De plus deux entiers k et k' génèrent la même racine si et seulement si $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}=\mathrm{e}^{k'i\frac{2\pi}{n}}$; c'est-à-dire : $\mathrm{e}^{i2\pi\frac{k-k'}{n}}=1$;
ce qui signifie que $k-k'$ est multiple de n c'est-à-dire que k et k' ont le même reste par la division par n. Or les restes possibles par la division par n sont les entiers compris entre 0 et $n-1$; on obtient donc toute les racines n-ièmes de l'unité en faisant varié k de 0 à $n-1$.
Sur la figure ci-contre, pour tout k, M_k est le point d'affixe $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$.
Si z est une racine n-ième de l'unité, alors $\overline{z}^n=\overline{z^n}=\overline{1}=1$; donc $\overline{z}$ est également une racine n-ième de l'unité. On en déduit qu'à part 1 et éventuellement -1 (lorsque n est pair) les racines n-ièmes de l'unité sont deux à deux conjuguées.
Lorsqu'on effectue la somme des racines n-ièmes de l'unité, on obtient : $\mathrm{S}=1+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3+\cdots+\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc :
$\mathrm{S}=\dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}=0$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

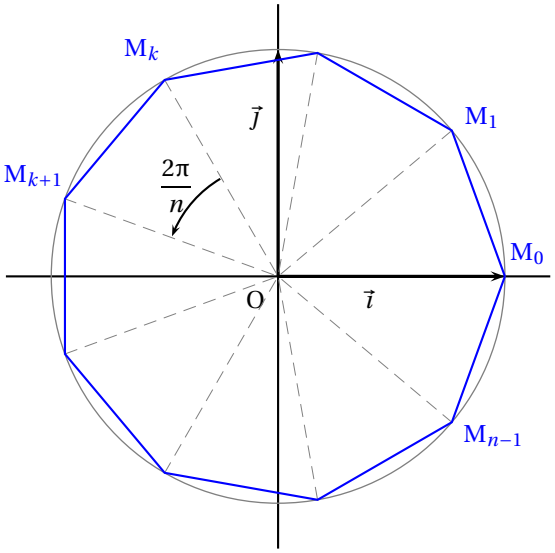


FIGURE VII.6 – Racines n-ièmes de l'unité

VII.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soit Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^n=\mathrm{Z}$.
Les racines n-ièmes de Z sont donc les racines du polynôme de degré n : $z^n-\mathrm{Z}$;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de Z distinctes.
Soit r le module et θ un argument de Z. Posons : $w=\dfrac{z}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}}$. On a donc : $z=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}w$. On en déduit que : $z^n=\mathrm{Z} \iff \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n w^n=\mathrm{Z} \iff \mathrm{Z}w^n=\mathrm{Z} \iff w^n=1$ (car $\mathrm{Z}\neq 0$.
z est donc racine n-ième de Z si et seulement si w est racine n-ième de l'unité. On sait qu'il y a n racines n-ième de

l'unité distinctes, il y donc également n racines n-ième de Z distinctes, ce sont les nombres de la forme : $\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\,w$ où w est une racine n-ième de l'unité. Les racines n-ième de Z sont donc les nombres de la forme :

$$\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \qquad (\text{avec } k\in\mathbb{Z}).$$

On établi de la même façon qu'en VII.6.1 que la somme des racines n-ièmes de Z est nulles.

Exercice VII.6.1. ***Déterminer les racines quatrièmes de*** $1+i$.

Solution *On a :* $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *; donc :* $\left(\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}\right)^4=1+i$. *On sait que les racines quatrièmes de l'unité sont :* 1 *;* i *;* -1 *et* $-i$ *; les racines quatrièmes de* $1+i$ *sont donc :* $\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $i\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $-\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *et* $-i\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$ *; c'est-à-dire :*

$$\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}\,;\qquad \sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}\,.$$

□

VII.6.3 Polynômes

VII.6.3.a Factorisation de polynômes symétriques

Considérons le polynôme : $2z^3+3z^2+3z+2$;
on observe une symétrie dans les coefficients : 2 ; 3 ; 3 ; 2.
On dit que le polynôme est symétrique.

Plus généralement un polynôme de degré n : $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$;
est dit symétrique lorsque pour tout entier naturel k ($k\leqslant n$), on a : $a_k=a_{n-k}$.

Exercice VII.6.2. ***On se propose de factoriser, dans*** $\mathbb{C}$ ***puis dans*** $\mathbb{R}$***, le polynôme P défini par :***

$$P(z)=4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4.$$

1. a. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son conjugué*** $\overline{\alpha}$ ***est également racine de P.***

b. 0 est-il racine de P ?

c. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son inverse*** $\frac{1}{\alpha}$ ***est également racine de P.***

2. a. Calculer $P(2i)$.

b. En déduire trois autres racines de P.

c. Décomposer P en produit d'un facteur de degré 4 par un facteur de degré 2.

3. a. Factoriser le polynôme : $Q(z)=z^2+z+1$.

b. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de six facteurs de degré 1 à coefficients complexes.***

c. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de trois facteurs de degré 2 à coefficients réels.***

Solution 1. a. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; on a donc :* $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $\overline{P(\alpha)}=0$.

$$\begin{aligned}\text{Or : }\overline{P(\alpha)} &= \overline{4\alpha^6+4\alpha^5+21\alpha^4+17\alpha^3+21\alpha^2+4\alpha+4}\\ &= 4\overline{\alpha^6}+4\overline{\alpha^5}+21\overline{\alpha^4}+17\overline{\alpha^3}+21\overline{\alpha^2}+4\overline{\alpha}+4\\ &= 4\overline{\alpha}^6+4\overline{\alpha}^5+21\overline{\alpha}^4+17\overline{\alpha}^3+21\overline{\alpha}^2+4\overline{\alpha}+4\\ &= P\left(\overline{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son conjugué* $\overline{\alpha}$ *est également racine de P.*

b. $P(0)=4$ *et* $4\neq 0$ *; donc 0 n'est pas racine de P.*

c. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; d'après* ***1.a.****, on a donc :* $\alpha\neq 0$ *; et donc* $\frac{1}{\alpha}$ *est défini.*

$$\begin{aligned}\text{De plus : } P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+17\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)+4\\ &= 4\frac{1}{\alpha^6}+4\frac{1}{\alpha^5}+21\frac{1}{\alpha^4}+17\frac{1}{\alpha^3}+21\frac{1}{\alpha^2}+4\frac{1}{\alpha}+4\\ &= \frac{1}{\alpha^6}\left(4+4\alpha+21\alpha^2+17\alpha^3+21\alpha^4+4\alpha^5+4\alpha^6\right)\\ &= \frac{P(\alpha)}{\alpha^6}\end{aligned}$$

Or : $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son inverse* $\frac{1}{\alpha}$ *est également racine de P.*

2. a. *Calculons* $P(2i)$.

$$\begin{aligned} P(2i) &= 4(2i)^6+4(2i)^5+21(2i)^4+17(2i)^3+21(2i)^2+4(2i)+4 \\ &= 4\times 64\times(-1)+4\times 32\times i+21\times 16\times 1+17\times 8\times(-i)+21\times 4\times(-1)+4\times 2i+4 \\ &= -256+128i+336-136i-84+8i+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{2i}$ ***est racine de P.***

b. $2i$ *est racine de P, donc son conjugué,* $-2i$ *et son inverse,* $-\dfrac{i}{2}$ *sont également racines de P ;* $-\dfrac{i}{2}$ *est racine de P, donc son conjugué,* $\dfrac{i}{2}$ *est également racine de P.*

Les nombres $\mathbf{2i}$, $\mathbf{-2i}$, $\dfrac{i}{2}$ ***et*** $-\dfrac{i}{2}$ ***sont racines de P.***

c. *P est un polynôme de degré 6 admettant* $2i$ *pour racine, donc d'après le théorème fondamental de l'algèbre, il existe un polynôme* Q_1*, de degré 5, tel que pour tout nombre complexe z :* $P(z)=(z-2i)Q_1(z)$.
On sait que : $P(-2i)=0$ *et* $-2i$ *n'est pas racine de* $(z-2i)$ *donc* $-2i$ *est racine* Q_1*. Il existe donc un polynôme* Q_2*, de degré 4, tel que pour tout nombre complexe z :* $Q_1(z)=(z+2i)Q_2(z)$ *; soit :* $P(z)=(z-2i)(z+2i)Q_2(z)$.

En réitérant le procédé pour $\dfrac{i}{2}$ *et* $-\dfrac{i}{2}$*, on en déduit qu'il existe un polynôme* Q_4*, de degré 2, tel que pour tout nombre complexe z :* $P(z)=(z-2i)(z+2i)(z-\dfrac{i}{2})(z+\dfrac{i}{2})Q_4(z)$.

Posons : $Q=\dfrac{1}{4}Q_4$.

On a alors pour tout z de $\mathbb{C}$ *:*
$$\begin{aligned} P(z) &= 4(z-2i)(z+2i)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})Q(z) \\ &= (z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)Q(z) \\ &= (z^2+4)(4z^2+1)Q(z) \\ &= (4z^4+17z^2+4)Q(z) \end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $Q(z)$ *deux méthode s'offrent à nous, on peut procéder par identification ou effectuer la division euclidienne de* $4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4$ *par* $4z^4+17z^2+4$.

1re méthode

Q est un polynôme de degré 2, il a donc une expression de la forme : $Q(z)=az^2+bz+c$.
On a donc pour tout z de $\mathbb{C}$ *:*
$$\begin{aligned} 4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4 &= \left(4z^4+17z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= 4az^6+4bz^5+(4c+17a)z^4+17bz^3+(17c+4b)z^2+4bz+4c \end{aligned}$$

Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs, ils sont donc égaux et par conséquent ils ont les mêmes coefficients ; a, b et c sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 4a & & & = & 4 \\ & 4b & & = & 4 \\ 17a & & +4c & = & 21 \\ & 17b & & = & 17 \\ & 4b & +17c & = & 21 \\ & 4b & & = & 4 \\ & & 4c & = & 4 \end{cases}$$

Le sous-système constitué de la 1re, la 2e, la 4e, la 6e et la 7e équation a pour unique solution : $a=b=c=1$ *; et cette solution est également solution des deux équations restantes, donc Q est le polynôme défini par :* $Q(z)=z^2+z+1$.
Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$ *:* $\mathbf{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

2e méthode

Effectuons la division euclidienne de $P(z)$ *par* $4z^4+17z^2+4$.

$4z^6$	$+4z^5$	$+21z^4$	$+17z^3$	$+21z^2$	$+4z$	$+4$	$4z^4+17z^2+4$
	$4z^5$	$+4z^4$	$+17z^3$	$+17z^2$	$4z$	$+4$	z^2+z+1
		$4z^4$		$+17z^2$		$+4$	
						0	

Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$ *:* $\mathbf{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

3. a. *Le discriminant de Q est :* $\Delta=1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ *;*
les racines de Q sont donc : $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\overline{j}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, le coefficient de degré 2 de Q est 1, on en déduit que pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$Q(z)=\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b. *D'après **2.c.** et **3.a.**, on a donc pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z)=(z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

c. *En effectuant le produit des facteurs dont les coefficients sont conjugués, on obtient alors pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z)=(z^2+4)(4z^2+1)\left(z^2+z+1\right).$$

□

On remarque que 0 n'est jamais racine d'un polynôme symétrique de degré n : $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$;
car : P(0) = $a_0 = a_n$ et $a_n \neq 0$.

Pour déterminer les racines d'un polynôme symétrique à coefficients réels, on peut combiner deux propriétés :

1. Si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie que l'image de l'ensemble des racines de P est symétrique par rapport à l'axe réel.
2. Si α est racine de P, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie, en utilisant la propriété précédente, que l'ensemble des racines de P est invariant par la transformation du plan complexe privé de l'origine qui à tout point M d'affixe d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{1}{\overline{z}}$.
   Cette transformation est une inversion de pôle O et de puissance 1, on la rencontrera peut-être dans un exercice de géométrie.

On déduit de ces deux propriétés que si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ sont également racines de P. Ce qui permet, lorsque $\Im m(\alpha)\neq 1$ et $|\alpha|\neq 1$, de faire apparaître dans P quatre facteurs de degré 1.

VII.6.3.b factorisation de $x^n - y^n$

EN PROJET

VII.6.4 Forme algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe non nul de forme algébrique : Z = A + iB ; on se propose de déterminer la forme algébrique des racines carrées complexes de Z. On cherche donc les nombres z de forme algébrique : $z = a + ib$; tels que : $z^2 = Z$.

On remarque que : $|z|^2 = |Z|$; les couples $(a;b)$ cherchés sont donc les solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & |Z| \\ a^2-b^2 & = & \Re e(Z) \\ 2ab & = & \Im m(Z) \end{array}\right.$

Pour résoudre ce système on utilise les deux premières équations pour déterminer a^2 et b^2, puis on se sert de la dernière pour déterminer les signes relatifs de a et b.

Exemples

1. *Exercice VII.6.3.* ***Déterminer les racines carrées complexes de $2+3i$.***

On a : $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a+ib$; on a : $z^2 = (a^2-b^2)+i(2ab)$ *et* $|z|^2 = a^2+b^2$.

z est racine carrée de $2+3i$ si et seulement si $(a;b)$ est solution du système : (Σ) $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & \sqrt{13} \\ a^2-b^2 & = & 2 \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right.$.

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & \sqrt{13}+2 \\ 2b^2 & = & \sqrt{13}-2 \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}+2}{2} \\ b^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}-2}{2} \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. .$$

On a donc : $\left(a=\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\ ou\ a=-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\right)$ *et* $\left(b=\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\ ou\ b=-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$ *et a et b sont de même signe.*

Les racines carrées de $2+3i$ sont donc : $z=\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$;

et son opposé : $-z = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$.

2. ***Exercice VII.6.4.*** ***Déterminer*** $\cos\dfrac{\pi}{8}$ ***et*** $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

$e^{i\frac{\pi}{8}}$ *est une racine carrée de* $e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et :* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *; donc :*

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8} &= 1 \\ \cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \text{soit } 2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } 2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

d'où : $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

On sait de plus que : $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *; donc :* $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ *;*

d'où : $\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ *et* $\boldsymbol{\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

VII.6.5 Trigonométrie

L'exponentielle complexe permet de retrouver assez rapidement beaucoup de formules de trigonométrie. Cette partie du cours donne quelques exemples de façons de procéder.

VII.6.5.a Détermination de lignes trigonométriques particulières

Exercice VII.6.5. ***Déterminer les lignes trigonométriques de*** $\dfrac{\pi}{12}$.

Solution *On a :* $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ *; donc :*

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ ; on en déduit que :}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \Re e\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \Im m\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} ;$$

d'où :
$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}. \square$$

VII.6.5.b Formules usuelles de trigonométrie

Dérivées

D'un point de vue formel la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{it}$ est la fonction $t \mapsto ie^{it}$, or pour tout nombre réel t, on a : $ie^{it} = -\sin(t) + i\cos(t)$. On retrouve ainsi facilement que la dérivée de cos est $-\sin$ et que la dérivée de sin est cos.

Transformation de produit en somme

Les formules transformations de produit en somme sont très faciles à retrouver.
Soit a et b deux nombres réels, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \cos a\cos b &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\cdot\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right). \end{aligned}$$

On retrouve donc :

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

Transformation de somme en produit

Les formules transformations de somme en produit sont également très faciles à retrouver. Soit p et q deux nombres réels, on a d'une part : $e^{ip}+e^{iq} = (\cos p+\cos q)+i(\sin p+\sin q)$; d'autre part en remarquant que :

$p=\dfrac{p+q}{2}+\dfrac{p-q}{2}$ et $q=\dfrac{p+q}{2}-\dfrac{p-q}{2}$; il vient :
$\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}=\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=2\left(\cos\dfrac{p+q}{2}+i\sin\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\dfrac{p-q}{2}$.
En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

VII.6.5.c Linéarisation de polynômes en cos x et en sin x

VII.6.5.d Exercices divers

Exercice VII.6.6. ***Soit α un nombre réel. On considère la suite $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$\mathrm{C}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)}{2^k}.$$

Exprimer C_n, pour $n\in\mathbb{N}$, sans signe somme. En déduire la limite de la suite (C_n).

Solution *Il suffit d'introduire la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\sin(k\alpha)}{2^k}$.*

On a alors, pour $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)+i\sin(k\alpha)}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ik\alpha}}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}\right)^k.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc :

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\frac{1-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}}{1-\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}}=\frac{\left(1-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)}=\frac{1-\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}+\frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{2^{n+2}}}{1-\cos\alpha+\frac{1}{4}};$$

d'où :

$$\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n=\frac{\left[4-2\cos\alpha-\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right]+i\left[2\sin\alpha-\frac{\sin\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\sin\left(n\alpha\right)}{2^n}\right]}{5-4\cos\alpha}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{C}_n=\Re\mathrm{e}\left(\mathrm{C}_n+i\mathrm{S}_n\right)=\frac{4-2\cos\alpha-\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}+\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}}{5-4\cos\alpha}.$$

On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\text{et}\qquad\left|\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n};$$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ *; donc par comparaison :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}=0.$$

Par somme puis par quotient on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{C}_n=\frac{4-2\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}.$$

□

VII.7 Géométrie et nombres complexes

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

VII.7.1 Propriétés générales

THÉORÈME VII.7.1

Soit A, B, C, D (A ≠ B et C ≠ D) quatre points d'affixes respectives : z_A ; z_B ; z_C ; z_D ; θ un réel et r un réel strictement positif. les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) $CD = r\,AB$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \theta \,(\text{mod}\, 2\pi)$

(2) $z_D - z_C = r\,e^{i\theta}(z_B - z_A)$

(3) $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\,e^{i\theta}$

Démonstration On sait que A ≠ B, donc : **(2)** ⟺ **(3)**.

Démontrons que : **(3)** ⟺ **1**. $z_D - z_C$ et $z_B - z_A$ sont les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$; donc : $CD = |z_D - z_C|$ et $AB = |z_B - z_A|$.

De plus, d'après la relation de CHASLES sur les angles de vecteur : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{i},\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$;

d'où : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)\,(\text{mod}\, 2\pi)$. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et mêmes arguments, donc :

$$\textbf{(3)} \iff \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = r \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \theta\,(\text{mod}\, 2\pi).$$

En utilisant la propriété **(4)** du théorème VII.3.3 page 84, on en déduit que :

$$\textbf{(3)} \iff \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = r \quad \text{et} \quad \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_)) \equiv \theta\,(\text{mod}\, 2\pi).$$

D'où il vient : **(3)** ⟺ **(1)**. □

VII.7.2 Écriture complexe de quelques transformations usuelles

Dans le tableau VII.2, pour chaque transformation, M désigne un point d'affixe z et M' désigne l'image de M. L'écriture complexe exprime l'affixe de M' en fonction de celle de M.

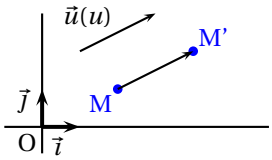
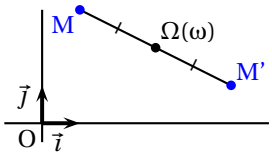
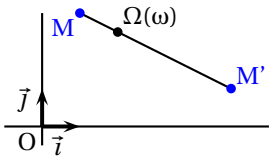
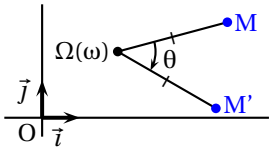
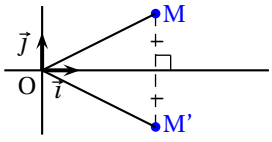
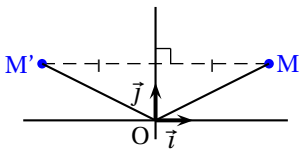
Transformation	M a pour image M'	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(u)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$ $u \in \mathbb{C}$
Symétrie de centre Ω(ω)		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = -z + 2\omega$ $\omega \in \mathbb{C}$
Homothétie de centre Ω(ω) et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$
Rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
Réflexion par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = \overline{z}$
Réflexion par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{j},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{j},\overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = -\overline{z}$

TABLE VII.2 – Écriture complexe de quelques transformations

VII.7.3 Affixe du barycentre d'un système de points pondérés

On déduit de la définition du barycentre et des propriétés des affixes de vecteurs le théorème suivant.

THÉORÈME VII.7.2

Soit $A_1, A_1, \ldots, A_n$, n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \ldots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme n'est pas nulle.
L'affixe, z_G, du barycentre G du système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Exemples

1. *L'affixe du milieu de [AB] est :* $\dfrac{z_A + z_B}{2}$;
2. *L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est :* $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Chapitre VIII

Intégration

VIII.1 Primitives d'une fonction

VIII.1.1 Introduction

Les intervalles considérés dans cette partie ne sont jamais réduits à un réel.

DÉFINITION VIII.1.1
Soit f une fonction et I un intervalle sur lequel f est définie.
Les primitives de f sur I (s'il en existe) sont les fonctions F définies et dérivables sur I vérifiant pour tout $x \in$ I :

$$F'(x) = f(x).$$

Exemples

1. *Considérons la fonction* $f : x \mapsto x^2$. *Les fonctions* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ *et* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 7$ *sont deux primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction* ln *est une primitive sur* $]0, +\infty[$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.1.1
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

On sait que la dérivée d'une fonction constante définie sur un intervalle est la fonction nulle définie sur cet intervalle.
On sait également que si une fonction définie sur un intervalle a une dérivée nulle alors cette fonction est constante.
On en déduit le lemme suivant.

LEMME VIII.1.2
Soit I un intervalle.
Les primitives sur I de la fonction nulle sont les fonctions constantes définies sur I.

THÉORÈME VIII.1.3
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Démonstration Soit $k \in \mathbb{R}$ et G la fonction définie par : $G(x) = F(x) + k$. G est la somme de deux fonction dérivables sur I, elle donc dérivable sur I et pour tout $x \in$ I, on a : $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$; donc G est une primitive de f sur I.
Réciproquement, soir G une primitive de f sur I, démontrons qu'elle ne diffèrent de F que d'une constante.
Pour tout $x \in$ I, on a : $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$; donc G – F est une primitive sur I de la fonction nulle, on en déduit que G – F est une fonction constante $x \mapsto k$ définie sur I ; d'où : $G = F + k$. □

Exemple *Les primitives sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto x^2$ *sont les fonctions de la forme* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + k$ *(avec* $k \in \mathbb{R}$*).*

Remarque *On déduit du théorème VIII.1.3 que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.*

THÉORÈME VIII.1.4
Soit f un fonction continue sur un intervalle I, $a \in$ I et $b \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur b en a.

Démonstration

Existence Soit G une primitive de f sur I et F la fonction définie par : $F(x) = G(x) - G(a) + b$.
F est une primitive de f sur I et $F(a) = G(a) - G(a) + b = b$.

Unicité Soit H une primitive de f sur I prenant la valeur b en a, démontrons que H = F.
Les fonctions F et H ont le même ensemble de définition : I. De plus ce sont deux primitives sur I de f, elle ne diffèrent donc que d'une constante, k. On a : $k = H(a) - F(a) = b - b = 0$; donc : H = F.

□

Exemple *L'unique primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *prenant la valeur* 7 *en* 10 *est la fonction* $x \mapsto \ln(x) - \ln(10) + 7$.

VIII.1.2 Détermination pratique

En pratique pour déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle, on utilise les tableaux suivants qui sont essentiellement déduits des tableaux du paragraphe VI.1.3.

fonction	primitive	Intervalle
$x \mapsto k \quad (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n < -1$ $\mathbb{R}$ si $n > 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+\tan^2 x$ ou $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$

TABLE VIII.1 – Primitives des fonctions élémentaires

fonction	primitive	remarque
$u+v$	$U+V$	
ku	kU	
$u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < -1$ alors $u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	
$v' \times (u' \circ v)$	$u \circ v$	

TABLE VIII.2 – Primitives et opérations sur les fonctions

Exercice VIII.1.1. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}^\star$ ***de*** $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + \dfrac{5}{x^3}$.

Solution *La fonction* $x \mapsto 2x^3 + 3x^2$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + x^3$ *et la fonction* $x \mapsto x^{-3}$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}^\star$ *la fonction* $x \mapsto -2x^{-2}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}^\star$ *de* $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + \dfrac{5}{x^3}$ *est donc* $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 - \dfrac{5}{2x^2}$. □

Exercice VIII.1.2. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}$ ***de*** $x \mapsto \cos(2\pi x) + 5e^{3x}$.

Solution *Une primitive de* cos *est* sin, $x \mapsto \cos(2\pi x)$ *est de la forme* $x \mapsto \cos(ax+b)$ *avec* $a = 2\pi$ *et* $b = 0$; *donc* $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto \cos(2\pi x)$. *De même,* $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x}$ *une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto e^{3x}$; *donc une des primitives sur* $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto \cos(2\pi x) + 5e^{3x}$ *est* $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + \dfrac{5}{3}e^{3x}$. □

Exercice VIII.1.3. ***Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (3x^2-2x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$.***

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^3-2x^2+3x+1$. On a : $f = u'u^{10}$ donc la fonction $\dfrac{u^{11}}{11}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*
Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2-4x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{11}(x^3-2x^2+3x+1)^{11}$. □

Exercice VIII.1.4. ***Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.***

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$. On a : $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ donc la fonction $\dfrac{1}{2}\ln|u|$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\ln u$ (car la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$), est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*
Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. □

VIII.1.3 Exercices

VIII.1.a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^5-\pi x^5+\sqrt{2}x^3-2x^2+3x-\ln 2$.

VIII.1.b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

VIII.1.c. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ de $x \mapsto \dfrac{5}{3x+2}$.

VIII.1.d. Déterminer une primitive sur $\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{5}{3x+2}$.

VIII.1.e. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 100\cos(2x+3)$.

VIII.1.f. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 50\sin(3x+2)$.

VIII.1.g. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5x^2+3x-1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{7}{x^4}$.

VIII.1.h. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{5x^7-2x^4+8x^3-5x^2+6x-1}{x^4}$.

VIII.1.i. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de tan.

VIII.1.j. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin x \cdot \cos x$.

VIII.1.k. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \tan x+\tan^3 x$.

VIII.2 Premiers calculs

VIII.2.1 Introduction

Dans tous ce chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle d'inéquations : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$.

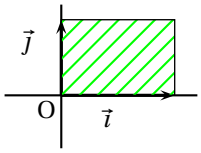


FIGURE VIII.1 –

On se propose d'aborder une théorie qui nous permette de calculer pour une fonction positive, f, définie sur un intervalle $[a,b]$ l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Cette aire sera notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de f de x dé x » ou « somme de a à b de f de x dé x ».
Nous verrons que, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a un sens même si $a>b$ ou si la fonction f n'est pas positive sur entre a et b.

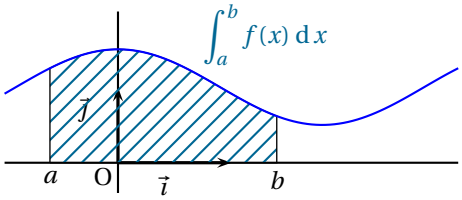


FIGURE VIII.2 –

À travers l'histoire les calculs d'aires ont longtemps occupés les hommes de sciences. LEIBNIZ[1] et NEWTON ont construits, de façons indépendantes et presque simultanées, une théorie de détermination d'aires et de volumes par le calcul intégral.

La construction rigoureuse du calcul intégral dans le cas des fonctions continues fut établie dans la première moitié du XIXe siècle par CAUCHY[2].

1. LEIBNIZ Gottfried Wilhelm savant Allemand 1645-1766.
2. CAUCHY Louis Augustin mathématicien Français 1789-1857.

Au milieu du XIXe siècle RIEMANN [3] généralisa cette théorie à une classe plus grande de fonctions. L'idée de cette théorie consiste à découper la région dont on cherche l'aire en rectangles verticaux et l'aire de la région est alors la limite des sommes des aires des rectangles quand leurs bases tend vers 0. La théorie de l'intégrale actuellement

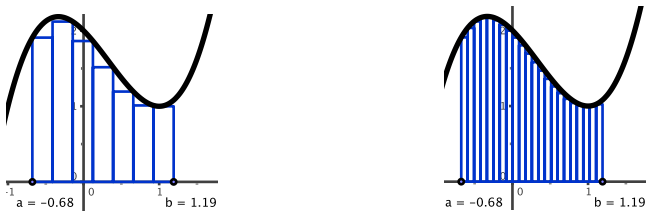
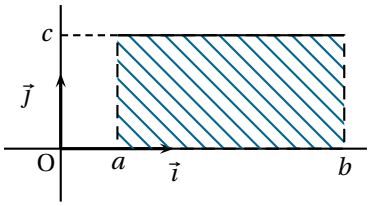


FIGURE VIII.3 – Integrale de Riemann.

utilisée par les mathématiciens est la théorie présentée par LEBESGUE [4] dans la thèse qu'il soutint en 1902. L'exposé de cette théorie requiert généralement un niveau licence. En simplifiant, on peut dire que Lebesgue découpa la région dont on cherche l'aire en tranches horizontales et non verticales, comme l'avait fait Riemann. Là encore, la théorie de Lebesgue étend celle de Riemann à une classe plus grande de fonctions et la communauté mathématique considère cette théorie comme satisfaisante.

VIII.2.2 Intégrale d'une fonction constante



L'intégrale de a à b de la fonction $x \mapsto c$, où a, b, c sont des réels tels que : $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$; est l'aire de la région d'inéquations : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant c \end{cases}$.

Ce nombre est noté : $\int_a^b c \, \mathrm{d}x$.

On a donc :

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a) \tag{VIII.1}$$

Nous étendons la formule (VIII.1) aux cas où c est négatif ou $b < a$.

Exemples

1. *Calculer les intégrales suivantes, puis les illustrer graphiquement.*

$\int_2^7 3 \, \mathrm{d}x$; $\int_7^2 3 \, \mathrm{d}x$; $\int_{-1}^7 -2 \, \mathrm{d}x$; $\int_7^{-1} -2 \, \mathrm{d}x$.

2. *Calculer les intégrales suivantes :* $\int_2^5 \lambda \, \mathrm{d}x$; $\int_2^5 \mathrm{d}x$ *et* $\int_1^t 3 \, \mathrm{d}x$.

Remarque *La variable d'intégration est muette.*

Exemple *Calculer :* $\int_2^7 3 \, \mathrm{d}t$.

VIII.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $[a\,;b]$ un intervalle non réduit à un point. Une subdivision, σ, de $[a\,;b]$ est une suite finie et strictement croissante $x_0 = a$, x_1, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n = b$. Le pas de cette subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$

Exemple

- 1 ; 1,5 ; 2.
- 1 ; 1,3 ; 1,6 ; 2.
- 1 ; 1,3 ; 1,5 ; 1,6 ; 2.

sont des subdivisions de $[1\,;2]$ *de pas respectifs :* 0,5 *;* 0,4 *et* 0,4.

Tout élément de la première subdivision est élément de la troisième, on dit que la troisième est plus fine que la première.

Plus généralemant si σ et σ' sont deux subdivisions d'un intervalle $[a\,;b]$ la subdivision que l'on notera $\sigma \cup \sigma'$, constituée des éléments des deux subdivisions, est une subdivision plus fine que σ et σ'.

3. RIEMANN Bernhard mathématicien Allemand 1826-1866.
4. LEBESGUE Henri Léon mathématicien Français 1875-1941.

DÉFINITION VIII.2.1
Une fonction en escalier sur $[a;b]$, f, est une fonction à laquelle on peut associer une subdivision σ de $[a;b]$ telle que f soit une fonction constante sur chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1},x_i[$.

Remarques
1. *Si σ' est une subdivision de $[a;b]$ plus fine que σ, alors σ' peut également être associer à f.*
2. *En pratique, on introduit les nombres $c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_n$ tels que sur chaque intervalle $]x_{i-1},x_i[$ la fonction f est constante et vaut : c_i.*

Soit f une fonction, positive et en escalier sur $[a;b]$, σ est une subdivision de $[a;b]$ associée à f et $c_1,\cdots,c_n$ les nombres tels que pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$: $f=c_i$ sur $[x_{i-1};x_i]$. L'intégrale de f de a à b sera l'aire de la région $\mathscr{R}$ délimitée par les droites d'équations : $x=a$; $x=b$; l'axe des abscisses et la représentation graphique de f ; c'est-à-dire la région constituée des points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b\\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$$

$\mathscr{R}$ est constituée de n rectangles. Pour i variant de 1 à n, le i-ème rectangle a pour base x_i-x_{i-1} et pour hauteur c_i il a donc pour aire : $(x_i-x_{i-1})c_i$. On en déduit que :

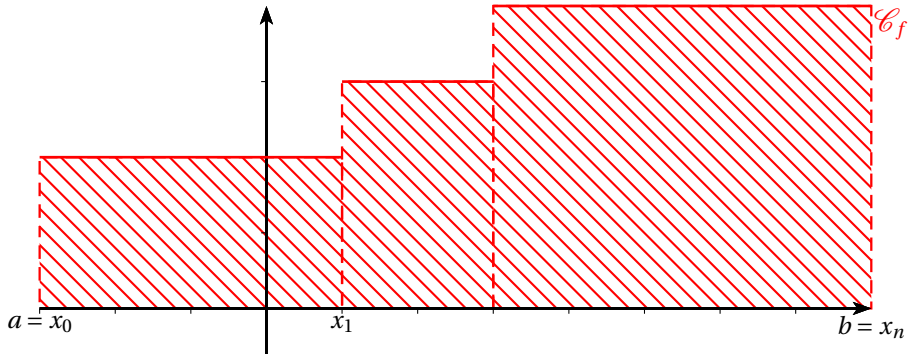


FIGURE VIII.4 – Intégrale d'une fonction en escalier positive.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\text{aire}\left(\mathscr{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i.$$

Nous admettons que cette aire est indépendante de la subdivision choisie. Ce qui justifie les définitions suivantes. Si on avait pris une subdivision plus fine $(y_j)_{j\leqslant m}$ en notant d_j la valeur de f sur $]y_{j_1},x_j[$, on obtenait :

$$\text{aire}\left(\mathscr{A}\right)=\sum_{j=1}^{m}d_j(x_j-x_{j-1}).$$

Plus généralement on a la définition suivante.

DÉFINITIONS VIII.2.2
Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ (f n'est plus nécessairement positive sur $[a;b]$).

(1) L'*intégrale* de f entre a et b est le nombre noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i$$

où (x_i) est une subdivision de $[a;b]$ associée à f.

(2)

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque *Les valeurs des $f(x_i)$ sont sans importance dans le calcul de cette intégrale.*

Soit α et β deux nombres, nous désignerons par $\max(\alpha;\beta)$ le plus grand des deux et par $\min(\alpha;\beta)$ le plus petit. Nous

étendons ces définitions au cas des fonctions.
Considérons par exemple sur l'intervalle $[-1;3]$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \mapsto -x+4$. Sur $[-1;2]$: $g \geqslant f$; alors

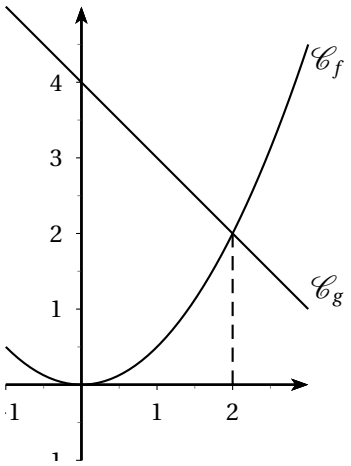


FIGURE VIII.5 – min et max de deux fonctions.

que sur $[-1;2]$: $f \geqslant g$; nous en déduisons que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont définies par :

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ f(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases} \qquad \min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ g(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases}$$

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.2.1
Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ respectivement associées à des subdivisions σ_f et σ_g.
Les fonctions $f+g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont des fonctions en escalier sur $[a;b]$ associées à la subdivision $\sigma_f \cup \sigma_g$

VIII.2.4 Activité

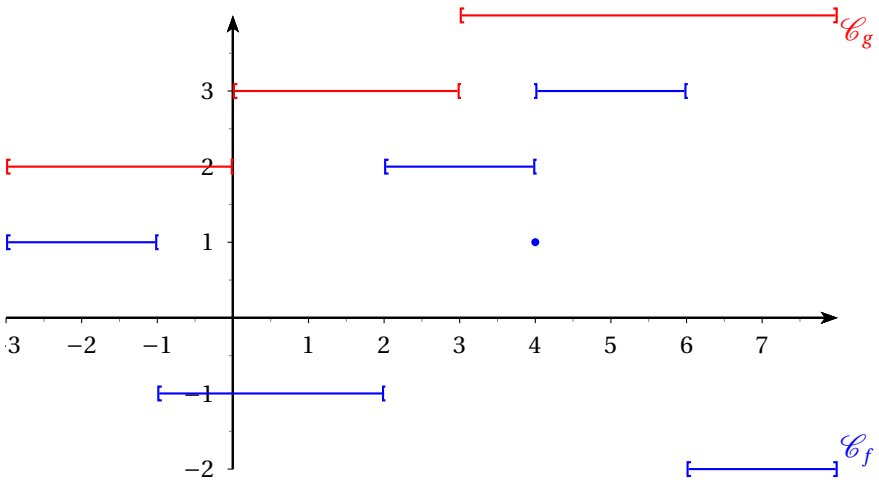


FIGURE VIII.6 – Représentations graphiques de deux fonctions en escalier.

1. Calculer : $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$; $\int_{-3}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on en termes de majorations ?
2. Calculer : $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comparer d'une part : $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$;

d'autre part : $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{8}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Tracer la représentation graphique de $2f$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} 2f(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

4. Tracer la représentation graphique de $f+g$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

VIII.2.5 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

L'activité ci-dessus suggère les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME VIII.2.2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ et α un nombre réel.

(1)
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2)
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques

1. *Plus généralement :* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2. *L'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions est la conbinaison linéaire des intégrales. On dit que l'intégrales des fonctions en escalier est linéaire.*

THÉORÈME VIII.2.3 COMPARAISON DES INTÉGRALES

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$.

Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque *Le théorème n'est pas établi dans le cas d'une inégalité stricte.*

THÉORÈME VIII.2.4 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction en escalier sur un intervalle I et a, b et c trois éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

VIII.3 Intégrale de Riemann

VIII.3.1 Définition

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction quelconque comme une limite comune d'intégrales de fonctions en escalier.

DÉFINITION VIII.3.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

Nous dirons que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ s'il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $f_n \leqslant f \leqslant g_n$.

(2) Les suites (I_n) et (J_n) définies par : $\mathrm{I}_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.

La limite commune de ces deux suites est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour justifier cette définition, nous devons établir que la limite commune des suites (I_n) et (J_n) est indépendantes des suites (f_n) et (g_n).
Soit deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant :

- Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $k_n \leqslant f \leqslant l_n$.
- Les suites (K_n) et (L_n) définies par : $K_n = \int_a^b k_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $L_n = \int_a^b l_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.
  Désignons par ℓ leur limite commune.

Nous devons démontrer que : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On a, sur $[a;b]$, pour tout entier naturel n : $f_n \leqslant f \leqslant l_n$;
donc par comparaison des intégrales, pour tout entier naturel n : $I_n \leqslant L_n$.
Par comparaisons des limites (théorème III.7.7), nous en déduisons que : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ell$.
En comparant k_n et g_n on démontre de même que : $\ell \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Il serait maintenant intéressant connaître quelques fonctions intégrables au sens de Riemann. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.1
Les fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ ou monotones sur $[a,b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

VIII.3.2 Sommes de Riemann

VIII.3.2.a Introduction

Pour démontrer le théorème VIII.3.1, il faut considérer une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ puis construire les suites adjacentes (I_n) et (J_n). Pour construire ces suite qui convergent vers l'intégrale de f et donc sont des approximations de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; on utilise les sommes de Riemann.

Soit f une fonction définie entre autre sur $[a;b]$, $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a;b]$ et $\xi_1,\cdots,\xi_n$ des nombres tels que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$: $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. La somme de Riemman de f sur $[a,b]$ associée à (x_i) et à (ξ_i) est l'intégrale de la fonction en escalier, f_e, définie par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\qquad c_i = f(\xi_i)$$

On a alors :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

On devine que cette dernière intégrale sera une appriximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ d'autant meilleure que la subdivision associée sera fine et que les ξ_i auront été choisis judicieusement.

En pratique on choisit le nombre, n, d'intervalles de la subdivision, puis on prend la subdivision à pas constant : $h = \dfrac{b-a}{n}$. La subdivision, σ_n, est alors définie par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n} = a + kh$.
Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.2
Soit f une fonction continue ou montone sur $[a\,b]$ et (I_n) une suite de sommes de Riemann de f sur $[a,b]$, associées à σ_n.

La suite (I_n) est convergente et sa limite est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque *Ce théorème peut servir à démontrer le théorème VIII.3.1*

Nous allons maintenant examiner des exemples communs de sommes de Riemann. Le premier a un intérêt théorique, les suivants permettent de calculer des valeurs approchées d'une intégrale. Nous supposerons dans tous ces exemples que la fonction f est continue sur $[a,b]$ et nous calculerons une somme de Riemann de f sur $[a,b]$ associée à σ_n. Nous aurons ainsi :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

VIII.3.2.b Sommes de Darboux

Nous admettons le théorème suivant : par une fonction continue, l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.
Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, posons :

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

D'après ce théorème, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$: $f([x_{i-1},x_1]) = [m_i,\mathrm{M}_i]$.
Il existe donc deux nombres ξ_i et ξ_i' éléments de $[x_{i-1},x_1]$ tels que : $f(\xi_i) = m_i$ et $f(\xi_i') = \mathrm{M}_i$.
Nous appellerons respectivement somme de Darboux[5] inférieure et somme de Darboux supérieure de f relativement à σ_n les nombres $s_{\sigma_n}(f)$ et $\mathrm{S}_{\sigma_n}(f)$ définis par :

$$s_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i(x_i - x_{i-1}).$$

On peut visualiser les sommes de Darboux en utilisant Geogebra.

Exemple *On se propose d'encadrer* $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *entre deux sommes de Darboux dans le cas de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{3} + 1 + \sin x$.
On entre successivement les instructions suivantes dans la ligne de commandes :

- `f(x) = 1 + x / 3 + sin(x)`
- `n=6`
- `SommeInférieure[f, 1, 7, n]`
- `SommeSupérieure[f, 1, 7, n]`

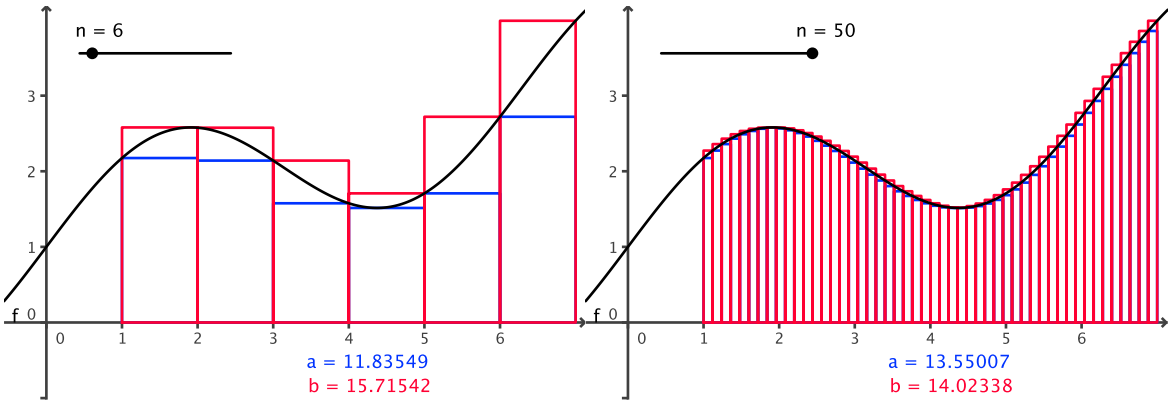


FIGURE VIII.7 – Sommes de Darboux.

D'après la figure VIII.7 : $s_{\sigma_6}(f) = 11,83\cdots$ *et* $\mathrm{S}_{\sigma_6}(f) = 15,71\cdots$

VIII.3.2.c Méthode des rectangles

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\xi_i = x_{i-1}$ ou $\xi_i = x_i$

Remarques

1. *Lorsque la fonction f est monotone, ces valeurs approchées coïncident avec les sommes de Darboux.*

2. *Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.d Méthode du point médian

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

5. DARBOUX Jean-Gaston mathématicien Français 1842-1917.

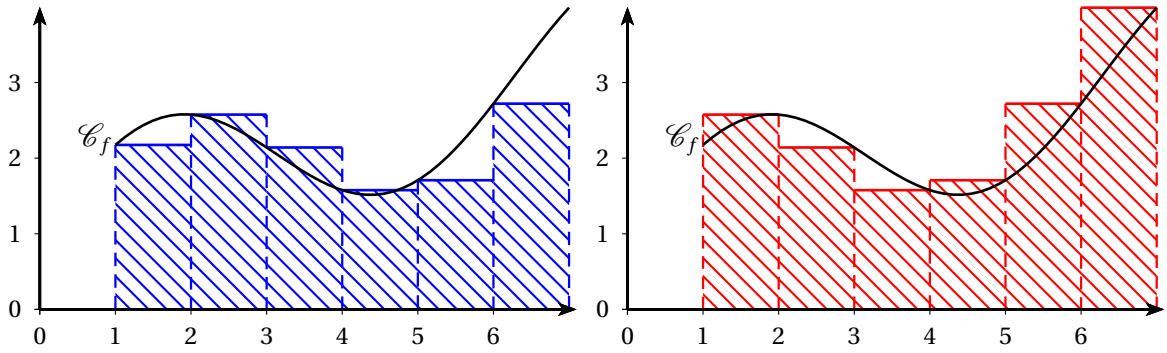


FIGURE VIII.8 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

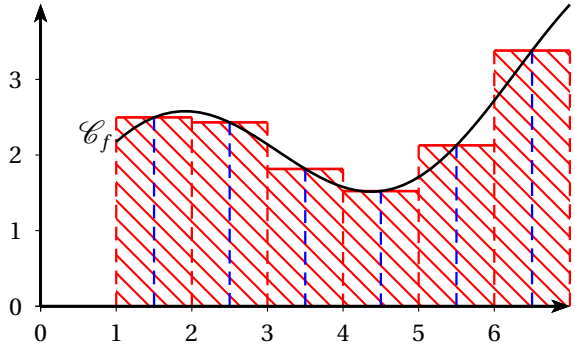


FIGURE VIII.9 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des points médians.

Remarque *Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{M}{4n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.e Méthode des trapèzes

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, xi_i tel que : $f(\xi_i) = \dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$.
Les ξ_i sont bien définis grâce à la continuité de f et au théorème des valeurs intermédiaires.

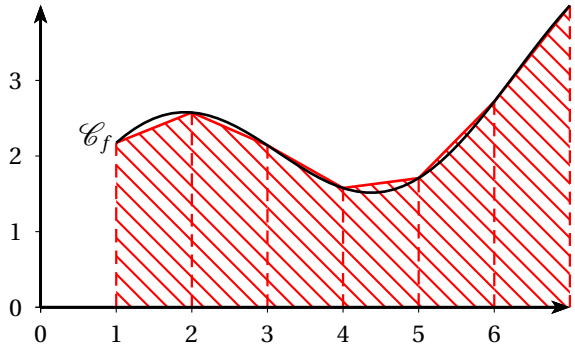


FIGURE VIII.10 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Remarque *Si f est deux fois dérivable sur $[a,b]$ et si $|f''|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{12n^2}(b-a)^3.$$

VIII.3.3 Exemple d'intégrale d'une fonction usuelle

On rappelle que la partie entière d'un nombre réel, x, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. La partie entière de x sera ici notée $\lfloor x \rfloor$. Pour tout nombre réel, x, $\lfloor x \rfloor$ est l'entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On définit de même la fonction plafond par :

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

$\lceil x \rceil$ est donc le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. Pour tout nombre réel, x, $\lceil x \rceil$ est l'entier vérifiant :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $n = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$. Ces fonctions permettent d'encadrer n'importe quel réel entre deux entiers consécutifs (ou égaux si le réel considéré est un entier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil.$$

On rapelle que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dans cette activité, f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ (on rappelle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$) et α désigne un nombre réel strictement positif. On se propose de démontrer que la fonction f est intégrable sur $[0;\alpha]$ et d'exprimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction α.
Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0;\alpha]$ les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lfloor\frac{nx}{\alpha}\right\rfloor\right) \qquad g_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lceil\frac{nx}{\alpha}\right\rceil\right)$$

1. Dans cette question, $\alpha = 3$ et $n = 6$.

a. Représenter sur un même graphique les fonctions : f, f_6 et g_6.

b. Déterminer I_6 et J_6.

2. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul fixé.

a. On veut subdiviser l'intervalle $[0;\alpha]$ en n intervalles de même amplitude.
Donner les éléments et le pas de la subdivision.

b. Démontrer que pour tout élément k de $[\![0;n]\!]$: $f_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = g_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = f\left(k\frac{\alpha}{n}\right)$.

c. Démontrer que pour tout élément k de $[\![1;n]\!]$, les fonctions f_n et g_n sont constantes sur l'intervalle $\left]\,(k-1)\frac{\alpha}{n}\,;k\frac{\alpha}{n}\right[$.
En déduire que f_n et g_n sont des fonctions en escalier associées à une subdivision qu'il conviendra de préciser.

d. Déduire de l'étude menée en **2.c** que :

$$\mathrm{I}_n = \frac{\alpha^3}{6}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \frac{\alpha^3}{6}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

3. a. Après avoit préciser le signe des suites (I_n) et (J_n), étudier leur monotonie (*on pourra calculer le quotient de deux termes consécutifs*).

b. Démontrer que les suites (I_n) et (J_n) sont adjacentes.

4. Déterminer la limite commune des suites (I_n) et (J_n). Puis dériver cette limite par rapport à α.

VIII.4 Théorème fondamental de l'analyse

VIII.4.1 Problème ouvert

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite éventuelle et sens de variation) définie par, $u_0 = \mathrm{e}-1$, et pour tout nombre entier naturel, n : $u_{n+1} = -1+(n+1)u_n$.
Tous les théorèmes, toutes les calculatrices et tous les logiciels sont utilisables à volonté.

VIII.4.2 Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle I, α un élément de I et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

À tout élément, t, de I tel que $t \geqslant a$, on associe le nombre $\mathrm{F}(t)$ défini comme l'aire, en unités d'aires, de la région délimitée par l'axes des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = t$ (voir fig. VIII.11).

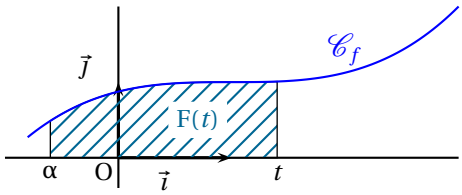


FIGURE VIII.11 –

Soit t_0 un nombre réel où la fonction F est définie. On aimerait savoir la fonction F est dérivable en t_0. Soit h un réel strictement positif suffisamment petit pour que $\mathrm{F}(t_0+h)$ soit défini(voir fig. VIII.11).

Désignons $\mathscr{R}$ la région hachurée dont l'aire est : $\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)$. $\mathscr{R}$ est incluse dans un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0+h)$ et inclus un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0)$. On en déduit que :

$$h\times f(t_0) \leqslant \mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0) \leqslant h\times f(t_0+h).$$

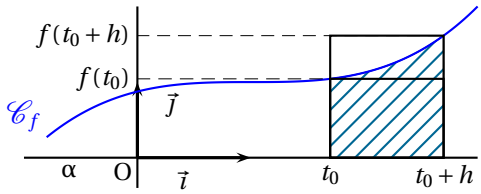


FIGURE VIII.12 –

En divisant membre à membre par h qui est positif, il vient :

$$f(t_0) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0+h). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Pour h négatif, on a :

$$-h\times f(t_0+h) \leqslant \mathrm{F}(t_0)-\mathrm{F}(t_0+h) \leqslant -h\times f(t_0).$$

En divisant membre à membre par $-h$ qui est positif, il vient :

$$f(t_0+h) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0). \qquad \text{(VIII.3)}$$

La fonction f est continue en t_0, donc : $\lim\limits_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$.
Par comparaison des limites dans (VIII.2) et (VIII.3) il vient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} = f(t_0)$$

Ainsi F est dérivable en t_0 et son nombre dérivé en t_0 est $f(t_0)$. Plus généralement, pour tout élément, t, ou F est définie : $\mathrm{F}'(t) = f(t)$. Donc F est une primitive de f.
Soit a et b deux éléments de I tels que : $\alpha \geqslant a \geqslant b$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

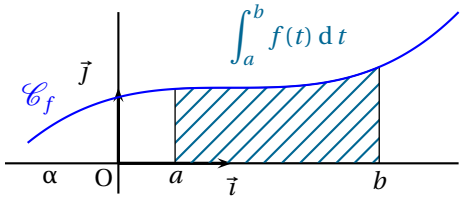


FIGURE VIII.13 –

Soit G une autre primitive de f. Il existe une constante, k, tel que :
$\mathrm{G} = \mathrm{F}+k$. On a donc :

$$\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \big(\mathrm{F}(b)+k\big)-\big(\mathrm{F}(a)+k\big) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Cette étude suggère le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME VIII.4.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Remarques

1. *En reprenant le dernier argument de l'étude précédente, on démontre que l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*

2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle, I, dont la dérivée, f', est continue sur I et a et b deux éléments de I. La fonction f est une primitive sur I de la fonction f' continue sur cet intervalle, donc :*

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Notations et vocabulaire

1. *On écrit :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

2. *L'expression « $[\mathrm{F}(t)]_a^b$ » se lit : « $\mathrm{F}(t)$ pris entre a et b »*

3. *a et b sont les bornes de l'intégrale.*

Exemples

1. *La fonction* sin *est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $-\cos$; donc :*

$$\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}\,t=[-\cos t]_0^{\pi}=\big(-\cos\pi\big)-\big(-\cos 0\big)=2.$$

2. *La fonction, $f:x\mapsto 3x^2-6x$, est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $\mathrm{F}:x\mapsto x^3-3x^2$; donc :*

$$\int_{-1}^{3}f(t)\,\mathrm{d}\,t=\left[t^3-3t^2\right]_{-1}^{5}=\big(3^3-3\times 3\big)-\big((-1)^3-3(-1)^2\big)=18+4=22.$$

COROLLAIRE VIII.4.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

(1) On a : $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0.$

(2) On a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$

Démonstration Soit, F, une primitive de f sur I. On a :

(1) $$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(a)=0.$$

(2) $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(b)=-\big(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\big)=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$ □

COROLLAIRE VIII.4.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un élément de I.

La fonction, $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$, est la primitive de f sur I nulle en a.

Démonstration L'existence et l'unicité d'une telle primitive sont garanties par le théorème VIII.1.4.

Considérons une primitive, F, de f sur I et désignons par G la fonction : $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

On a : $\mathrm{G}(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$. De plus, pour tout élément, x, de I, on a :

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a).$$

En dérivant membre à membre cette identité par rapport à x, il vient : $\mathrm{G}'(x)=f(x)$.

Donc G est la primitive de f sur I nulle en a. □

Exemple *La fonction* ln *est la primitive sur $]0;+\infty[$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ nulle en 1. Donc, pour tout nombre réel strictement positif, x :*

$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}\,t}{t}=[\ln t]_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x.$$

La fonction ln *peut être définie comme l'intégrale de la fonction inverse.*

Interprétation graphique

Soit f une fonction continue et *positive* sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec : $a<b$.

Le nombre, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$, est la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Voir figure VIII.13.

Exercice VIII.4.1. ***Calculer :*** $\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\mathrm{d}\,t$.

Solution $\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\mathrm{d}\,t=\left[5\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{3}=61,5-\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{188}{3}$ □

Exercice VIII.4.2. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *On a :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t=\left[3\frac{\sin 2t}{2}+2\frac{\cos 3t}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9\sqrt{3}-8}{12}.$$

□

Exercice VIII.4.3. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\mathrm{d}\,t$.

Solution *Introduisons la fonction,* $u:t\mapsto\cos t$, *et la fonction polynôme,* $\mathrm{P}:t\mapsto\frac{1}{2}t^4-t^3$.
On a : $u'(t)=-\sin t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=2t^3-3t^2$. *Donc, pour* $t\in\mathbb{R}$ *:* $\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)=u'\times\mathrm{P}'(u)(t)$. *Ainsi :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\mathrm{d}\,t=\left[\frac{1}{2}\cos^4 t-\cos^3 t\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{9}{32}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25-12\sqrt{3}}{32}.$$

□

Exercice VIII.4.4. ***Calculer :*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Pour* $t\in\mathbb{R}$, *on a :* $\cos^5 t=\cos t\left(\cos^2 t\right)^2=\cos t\left(1-\sin^2 t\right)^2=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right)$.

Introduisons les fonctions : $u:t\mapsto\sin t$ *et* $\mathrm{P}:t\mapsto\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)=\cos t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=t^4-2t^2+1$.

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)\times\mathrm{P}(u(t))=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right)=\cos^5 t$.

D'où il vient :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t=\left[\mathrm{P}(u(t))\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\left[\frac{\sin^5 t}{5}-\frac{2}{3}\sin^3 t+\sin t\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{160}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{160}.$$

□

VIII.4.3 Exercices

VIII.4.a. Calculer : $\int_{1}^{4}5x^3+4x^2+3x-5\,\mathrm{d}\,x$.

VIII.4.b. calculer : $\int_{0}^{5}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t$; $\int_{0}^{x}(2t-3)\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_{0}^{x}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.c. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5\cos 6t-3\sin 9t)\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.d. calculer : $\int_{2}^{5}\left(5\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{5t}\right)\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.e. calculer : $\int_{0}^{3}t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.f. calculer : $\int_{0}^{9}\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.g. calculer : $\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{t}}$.

VIII.4.h. calculer : $\int_{4}^{12}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{2t+1}}$.

VIII.4.i. calculer : $\int_{0}^{3}(2t+3)\sqrt{2t+3}\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.j. calculer : $\int_{-1}^{3}\frac{t\,\mathrm{d}\,t}{t^2+1}$.

VIII.4.k. calculer : $\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{e}^{2t}-1}$.

VIII.4.l. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.m. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.4.n. calculer : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5 Proptiétés algébriques

VIII.5.1 Relation de Chasles

THÉORÈME VIII.5.1 **RELATION DE CHASLES**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I.
On a : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) + (\mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(b)) = \mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

□

Interprétation graphique

Si f est positive sur I et si, $a \leqslant b \leqslant c$, désignons par D la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = c$. Le théorème VIII.5.1 signifie que :

$$\text{aire}(\mathrm{D}) = \text{aire}(\mathrm{D}_1) + \text{aire}(\mathrm{D}_2)$$

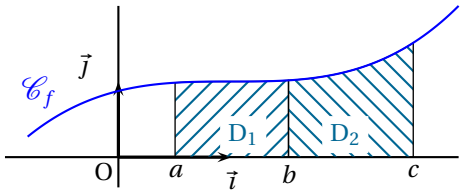


FIGURE VIII.14 –

Exercice VIII.5.1. ***Calculer :*** $\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Éliminons la valeur absolue. L'expression sans valeur absolue de $||t-1||$ est donnée par le tableau ci-dessous.*

x		1	
$\lvert t-1\rvert$	$1-t$	0	$t-1$

D'après la relation de Chasles, on a donc :

$$\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 |t-1|\,\mathrm{d} + \int_1^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 1-t\,\mathrm{d} + \int_1^3 t-1\,\mathrm{d} = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^3 = \frac{5}{2}.$$

□

VIII.5.2 Linéarité

THÉORÈME VIII.5.2 **LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE**
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.
(1) On a :
$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$
(2) On a :
$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F et G deux primitives sur I de f et g.
(1) F + G est une primitive sur I de, $f+g$, donc :

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}+\mathrm{G})(b)-(\mathrm{F}+\mathrm{G})(a) = \mathrm{F}(b)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{F}(a)-\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) αF est une primitive sur I de, αf, donc :

$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha\mathrm{F}(b)-\alpha\mathrm{F}(a) = \alpha(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

□

On dit que l'intégrale est linéaire. Cela signifie que l'intégrale d"une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des intégrales.

Remarque *En particulier :* $$\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Exemple

$$3\int_2^7 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}\,t - 2\int_2^7 \left(3t^2+4\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 \left(3\left(2t^2-1\right)-2\left(3t^2+4\right)\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 -11\,\mathrm{d}\,t = -55.$$

Exercice VIII.5.2. ***On rappelle l'identité :*** $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^4b^2+6ab^5+b^6$.

Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \,\mathrm{d}\,t$.

Solution *Pour tout nombre réel, t, on a :*

$$\cos^6 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{i6t}+6\mathrm{e}^{i4t}+15\mathrm{e}^{i2t}+20+15\mathrm{e}^{-i2t}+6\mathrm{e}^{-i4t}+\mathrm{e}^{-i6t}\right) = \frac{1}{2^5}(\cos 6t+6\cos 4t+15\cos 2t+10).$$

On en déduit que :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2^5}\left[\frac{\sin 6t}{6}+3\frac{\sin 4t}{2}+15\frac{\sin 2t}{2}+10t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10\pi}{32} = \frac{5\pi}{16}.$$

□

Remarque *Pour intégrer la fonction $t \mapsto \cos^6 t$, nous l'avons exprimée comme combinaison linéaire des fonctions : $t \mapsto \cos 6t$; $t \mapsto \cos 4t$; $t \mapsto \cos 2t$ et $t \mapsto 1$.*

Plus généralement, une fonction qui se présente comme un polynôme où les indéterminées sont les fonctions cos et sin est appelé polynôme trigonométrique.

Pour intégrer un polynôme trigonométrique on peut le linéariser ; c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto \cos nt$ et $t \mapsto \sin bt$ ou n désigne un entier naturel.

VIII.5.3 Exercices

VIII.5.a. Calculer : $\displaystyle\int_0^5 |t+2| \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5.b. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t| \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.5.c. Calculer : $\displaystyle\int_0^5 \left|(x-1)^2-4\right| \mathrm{d}\,t$.

VIII.5.d. On pose : $\mathrm{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}\,t$ et $\mathrm{B} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}\,t$.

1. En ne calculer ni A ni B, calculer : A + B et A − B.

2. En déduire A et B.

VIII.5.e. En linéarisant $\cos^2$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.f. En linéarisant $\sin^2$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.g. En linéarisant $\cos^3$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.5.h. En linéarisant $\sin^3$, calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t \,\mathrm{d}\,t$

VIII.6 Propriétés de comparaison

Afin d'illustrer les théorèmes par des exemples les plus proches possible des questions d'examen, on introduit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{U}_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$ et pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{U}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$.

VIII.6.1 Signe de l'intégrale

THÉORÈME VIII.6.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si f est positive sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \geqslant 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. La fonction f est positive sur $[a;b]$, donc F est croissante sur cet intervalle. Ainsi : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \geqslant 0$; c'est-à-dire : $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \geqslant 0$. □

Exemple *La fonction* exp *est positive sur* $[0;1]$, *donc :* $\mathrm{U}_0 \geqslant 0$.

THÉORÈME VIII.6.2

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_a^b g(t) \,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F et G des primitives respectives de f sur I. On a : $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, c'est-à-dire $g-f \geqslant 0$ sur $[a;b]$; d'après le théorème VIII.6.1 :

$\int_a^b (g-f)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. On en déduit le résultat désiré par linéarité. □

Exemples

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1-t \leqslant 1$ et $(1-t)^n \mathrm{e}^t$ est positif; donc par produit : $(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t$.*
Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$: $\mathrm{U}_{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n$.
La suite est ainsi décroissante et minorée par 0 (voir exemple précédent) elle donc convergente.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ et $(1-t)^n$ est positif; donc par produit : $(1-t)^n \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}$.*

Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$ et par linéarité : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

Or : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
Par comparaison des limites, (U_n) converge vers 0.

COROLLAIRE VIII.6.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que : $a \leqslant b$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Démonstration On a : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a;b]$; donc par comparaison des intégrales : $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.6.1. ***Démontrer que pour tout nombre réel, x : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.***

Solution

Si $x = 0$ *alors $\mathrm{e}^x = 1$ et $x+1 = 1$, donc : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.*

Si $x > 0$ *alors pour $t \in [0;x]$, $\mathrm{e}^t \geqslant 1$, car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

Si $x < 0$ *alors pour $t \in [x;0]$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $1 - \mathrm{e}^x \leqslant -x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

□

Pour démontrer une inégalité du type, $f < g$, sur un intervalle du type, $[a;b]$ ou $[a;\infty[$, il suffit parfois de vérifier que, $f(a) < f(b)$, de démontrer que , $f' < g'$, sur cet intervalle puis de comparer les intégrales.

VIII.6.2 Inégalité de la moyenne

THÉORÈME VIII.6.4 INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I tels que, $a \leqslant b$, et m, M deux nombres réels tels que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$.

$$m(b-a) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Démonstration On a : $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a;b]$; donc, par comparaison des intégrales : $\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^f f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$m(b-a) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

□

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est encadrée entre les aires des rectangles de base, $b-a$, et de hauteurs m et M.

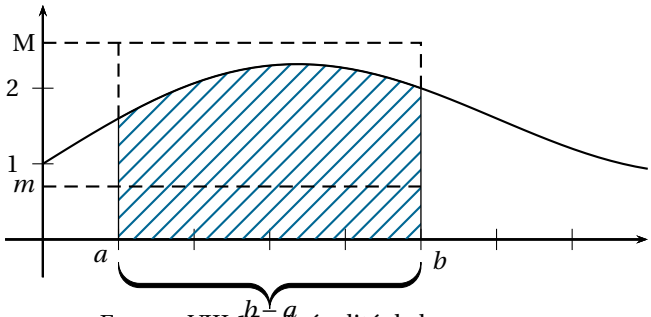


FIGURE VIII.15 – Inégalité de la moyenne.

Remarque *$b-a$ n'est autre que l'amplitude de l'intervalle $[a;b]$.*

Exemple *La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour $t \in [3;5]$: $\dfrac{1}{25} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{9}$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[3;5]$:

$$\frac{2}{25} \leqslant \int_3^5 \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \frac{2}{9}.$$

Exercice VIII.6.2. ***Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*** [6].

Solution *La fonction, $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ sur $[k;k+1]$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[k;k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

En additionnant membre à membre les n inégalités ainsi obtenues pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant u_n.$$

Or : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \ln(n+1)$; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant \ln(n+1) \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Par comparaison des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Voir figure VIII.16. □

L'inégalité de la moyenne peut aussi s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME VIII.6.5 INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I, et M un nombre réel tel que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $\left|f(t)\right| \leqslant \mathrm{M}$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|.$$

Démonstration $\left|f(t)\right| \leqslant \mathrm{M}$, signifie : $-\mathrm{M} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème VIII.6.4 avec $m = -\mathrm{M}$. **Si $a \leqslant b$,** on a : $-\mathrm{M}(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(b-a)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$.
Si $b \leqslant a$, on a : $-\mathrm{M}(a-b) \leqslant \int_b^a f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(a-b)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$. □

6. Cette suite est appelée série harmonique.

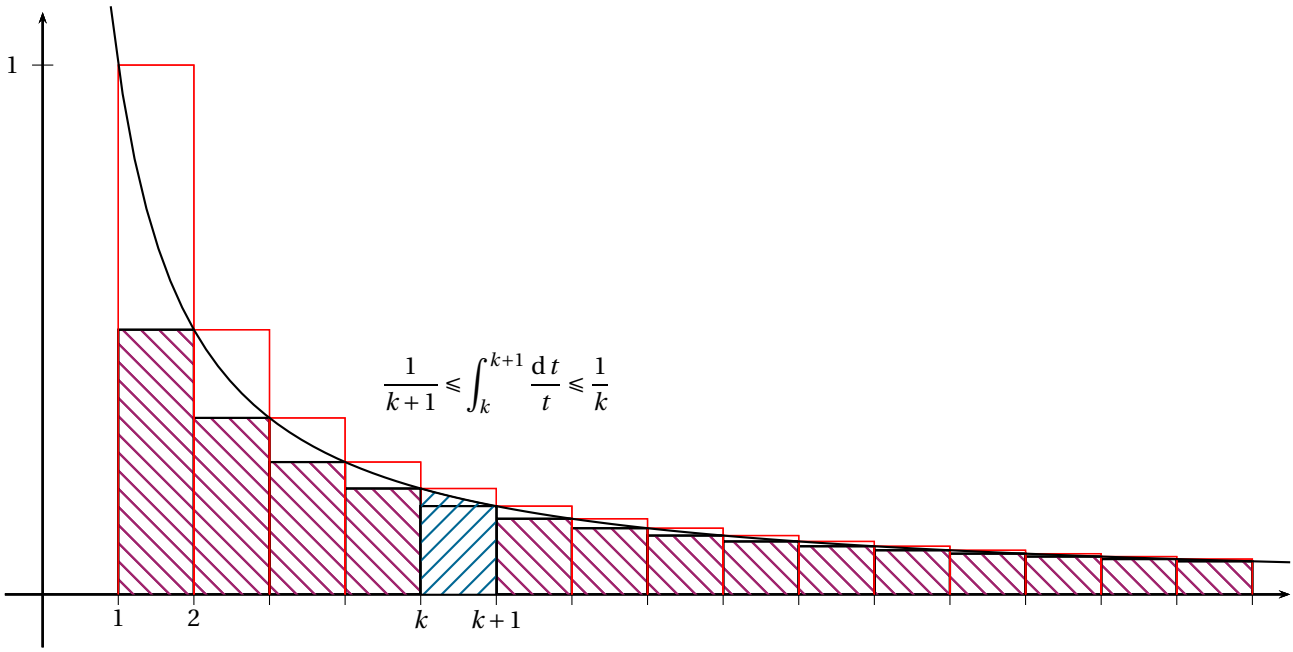


FIGURE VIII.16 – Limite de la série harmonique.

Exercice VIII.6.3. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définie par : $u_n = \frac{1}{n}\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t$.***

Solution *On sait que :* $|\sin| \leqslant 1$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donc, d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à* sin *entre* n *et* $n-2(-1)^n$ *:* $\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant 2$.

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, *en divisant membre à membre l'inégalité ci-dessus par* n *qui est strictement positif :*

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ *; donc, par comparaison des limites, la suite* (u_n) *converge vers* 0. □

VIII.6.3 Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION VIII.6.1

Soit f une fonction continue sur une intervalle I et $[a\,;b]$ un intervalle non réduit à un point inclus dans I.

La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a\,;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle de base, $b-a$, et de hauteur μ. Voir figure VIII.17.

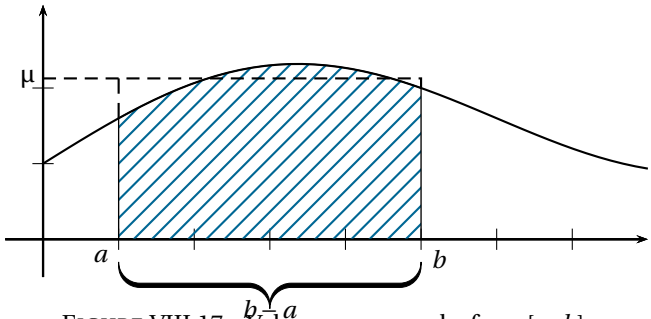


FIGURE VIII.17 – Valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

Interprétation cinématique Une droite (AB) est graduée et orientée de A vers B. Un point mobile sur l'axe par de A à l'instant t_0 pour arriver en B à l'instant, t_1. La vitesse moyenne du trajet est le quotient de la distance parcourue par le mis pour la parcourir, c'est-à-dire :

$$v_{moy} = \frac{\text{AB}}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Désignons respectivement par $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ l'abscisse et la vitesse du point mobile à l'instant t. La valeur moyenne, μ, de la vitesse sur l'intervalle $[t_0\,;t_1]$ vérifie :

$$\mu = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{t_1 - t_0}\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = v_{moy}.$$

On en déduit que la vitesse moyenne est la valeur moyenne de la vitesse.

Remarque *On déduit de l'inégalité de la moyenne, que si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur $[a\,;b]$, alors : $m \leqslant \mu \leqslant \text{M}$.*

Exemples

1. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0\,;\pi]$ *est :*

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\,[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{-(-1)-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

2. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0\,;2\pi]$ *est :*

$$\mu_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\,[-\cos t]_0^{2\pi} = \frac{-(-1)-(-(-1))}{2\pi} = 0.$$

VIII.6.4 Exercices

VIII.6.a. Peut-on, sans calcul, déterminer le signes des intégrales suivantes ?

a. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1}$. **b.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

c. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\cos t}$. **d.** $\displaystyle\int_{0,2}^{0,8} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

VIII.6.b. **1.** Justifier que pour tout $t \in [0\,;1]$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x + 1.$$

VIII.6.c. **1.** Démontrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$:

$$\ln x \leqslant x - 1$$

2. Démontrer que pour tout $x \in]0\,;1]$:

$$\ln x \leqslant x - 1$$

VIII.6.d. **1.** Justifier que pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\sin t} \leqslant 2.$$

2. En déduire que :

$$\frac{3}{\pi} \leqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sin t} \leqslant \frac{6}{\pi}.$$

VIII.6.e. Démontrer que : $105 \leqslant \displaystyle\int_9^{16} \sqrt{x^2+144}\,\mathrm{d}\,x \leqslant 140$.

VIII.6.f. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[1\,;4]$.

VIII.6.g. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[-1\,;1]$.

VIII.6.h. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$; m, μ et M sont respectivement un minorant, la valeur moyenne et un majorant de f sur $[a\,;b]$.
Démontrer que : $m \leqslant \mu \leqslant \text{M}$.

VIII.7 Autres techniques de calcul

VIII.7.1 Intégration par parties

THÉORÈME VIII.7.1

Soit u et v deux fonctions continûment dérivables[7] sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration On a : $(uv)' = u'v + uv'$; donc : $u'v = (uv)' - uv'$. Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur I, donc les fonctions, $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues sur I. En intégrant terme à terme la dernière identité, il vient :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.7.1. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t$ *et* $u'(t) = \sin t$. *On a,* $v'(t) = 1$, *et on peut prendre :* $u(t) = -\cos t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t\,\mathrm{d}t = \pi + [\sin t]_0^\pi = \pi.$$

□

Exercice VIII.7.2. ***Déterminer une primitive sur*** $]0;+\infty[$ ***de la fonction*** ln.

Solution *D'après le corollaire VIII.4.3, La primitive de fonction* ln *nulle en* 1 *est la fonction,* F, *définie par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Posons : $v(t) = \ln t$ *et* $u'(t) = 1$. *On a,* $v'(t) = \dfrac{1}{t}$, *et on peut prendre :* $u(t) = t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $]0;+\infty[$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{F}(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

□

On peut être amener à enchaîner plusieurs intégrations par parties pour obtenir un résultat.

Exercice VIII.7.3. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t^2$ *et* $u'(t) = \cos t$. *On a,* $v'(t) = 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \sin t$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi t^2\cos t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

□

Exercice VIII.7.4. ***Calculer :*** $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = \cos 2t$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^{3t}$. *On a,* $v'(t) = -2\sin 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{I} = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\cos 2t\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2}{3}\sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\pi} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons : $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$.

Posons : $v(t) = \sin 2t$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^{3t}$. *On a,* $v'(t) = 2\cos 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}$.
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{3}\cos 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\mathrm{I}.$$

7. Une fonction continûment dérivable sur un intervalle, I, est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée est continue sur I.

Ainsi : $3\mathrm{I} = \mathrm{e}^{3\pi} - 1 - \dfrac{4}{3}\mathrm{I}$. *On en déduit que :*

$$\mathrm{I} = \frac{3}{13}\left(\mathrm{e}^{3\pi} - 1\right)$$

□

Exercice VIII.7.5. ***1.*** (U_n) ***est la suite introduite à la deuxième ligne de section VIII.6.***
Déterminer une expression de U_{n+1} ***en fonction de*** U_n***, valable pour tout entier naturel,*** n***.***

2. En déduire la résolution du problème ouvert énoncé à la sous-section VIII.4.1

Solution ***1.*** *Soit* n *un entier naturel. On a :*

$$\mathrm{U}_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t$$

Posons : $v(t) = (1-t)^{n+1}$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^t$. *On a,* $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, *et on peut prendre :* $u(t) = \mathrm{e}^t$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\mathrm{U}_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

Donc, pour tout entier naturel, n *:*

$$\mathrm{U}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

2. *Ainsi la suite*(U_n) *a la même relation de récurrence que la suite* (u_n) *introduite à la sous-section VIII.4.1. Si de plus ces deux suites avaient le même premier termes, elles seraient alors égales.*
On sait que : $u_0 = \mathrm{e} - 1$. *Calculons* U_0. *On a :*

$$\mathrm{U}_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

Les suites (U_n) *et* (u_n) *sont égales, donc la suite*(u_n) *est décroissante et converge vers* 0. □

Pour établir la relation de récurrence d'une suite définie par une intégrale, on utilise souvent une (ou plusieurs) intégration par parties.

VIII.7.2 Intégration et invariance géométrique

VIII.7.2.a Intégration de fonctions paires ou impaires

THÉORÈME VIII.7.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, symétrique par rapport à 0.

(1) Si f est paire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) Si f est impaire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

Si f est paire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)) - (\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x))\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(-x) - 2\mathrm{F}(0)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) - f(-x) = 0$ (car f est paire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = 0$; d'où : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Si f est impaire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) + f(-x) = 0$ (car f est impaire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

□

Remarques

1. *Lorsque* f *est paire, l'égalité est équivalente à :* $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

2. *Lorsque f est impaire, l'égalité est équivalente à :* $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.18.

Dans le cas où la f est paire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit que :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Dans le cas où la f est impaire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que :

$$-\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

FIGURE VIII.18 – Intégrales de fonctions paires ou impaires.

Exemples

1. *La fonction $x \mapsto x^2$ est paire, donc :* $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 2\int_{0}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 18$.

2. *La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, donc :* $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}\,t = 0$.

VIII.7.2.b Intégration de fonctions périodiques

THÉORÈME VIII.7.3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Pour tous nombres réels a et b.

(1) $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$. **(2)** $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

(1) On introduit la fonction, G, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{F}(x+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(x)$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc G l'est aussi et pour tout élément, x, de $\mathbb{R}$: $\mathrm{G}'(x) = f(x+\mathrm{T}) - f(x) = 0$ (car f est T-périodique).

La fonction G est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et pour tout élément, a, de I : $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

(2) On déduit de **(1)** : $\displaystyle\int_{b}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$; c'est-à-dire : $\mathrm{F}(b+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(a+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(a)$.

D'où : $\mathrm{F}(b+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(a+\mathrm{T}) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$; c'est-à-dire : $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t$. □

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.19.

(1) Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils peuvent être coupés en deux morceaux tels que le premier de D_2 est l'image du second de D_1 par la translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$ et le second de D_2 est l'image du premier de D_1 par la translation de vecteur $2\mathrm{T}\vec{\imath}$.

On en déduit que :

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) Les domaines D_3 et D_4 ont la même aire parce que D_4 est l'image de D_3 par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
On en déduit que :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

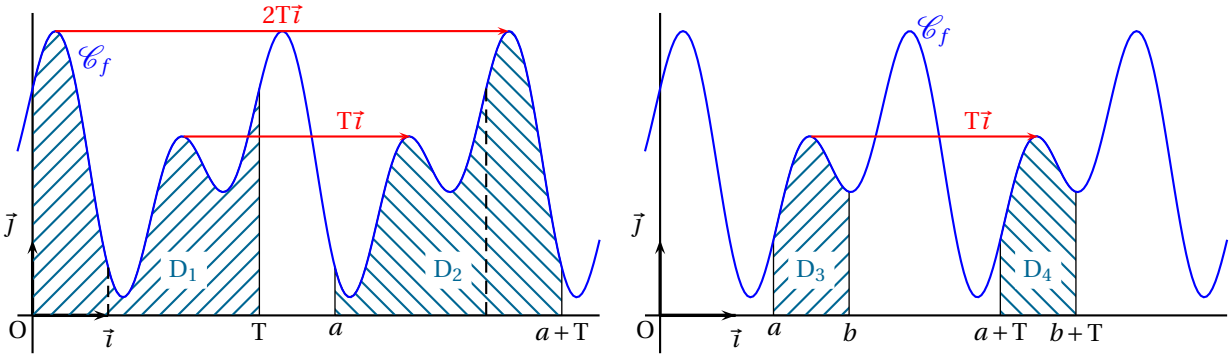


FIGURE VIII.19 – Intégrale de fonction périodique.

Remarques

1. *Plus généralement, pour tout entier relatif, n :* $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$

2. *La propriété **(1)** du théorème signifie que l'intégrale de f sur un intervalle d'amplitude* T *est indépendante de cet intervalle.*

3. *En particulier la valeur moyenne d'une fonction, f, T-périodique est la valeur moyenne de f sur un intervalle d'amplitude* T.

VIII.7.3 Exercices

VIII.7.a. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt.$

VIII.7.b. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t\,e^t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^2 t^2 e^t\,dt.$

VIII.7.c. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t^2 e^{2t}\,dt.$

VIII.7.d. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t\,dt.$

Chapitre IX

Dénombrement

IX.1 Notions Préliminaires

IX.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles

Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble fini.

- Le *cardinal* de E, noté $\mathrm{card}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{card}\,\mathrm{E}$, est le nombre d'éléments de E.
  Par exemple, pour $\mathrm{E} = \{a,b,c,d\}$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = 4$.
- *L'ensemble des parties* de E est noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$
  Par exemple, pour $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = 3$.
  $\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$.
  On a : $\mathrm{card}\big(\mathscr{P}(\mathrm{E})\big) = 8$.
- Une *partition* de E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont l'union est E.
  Par exemple $\big\{\{a\}, \{b\}, \{c,d\}\big\}$ est une partition de $\{a,b,c,d\}$.

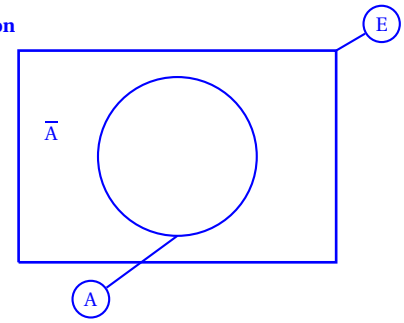
THÉORÈME IX.1.1 PRINCIPE D'ADDITIVITÉ
Si $\{\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n\}$ est une partition de E, alors : $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = \mathrm{card}(\mathrm{E}_1) + \cdots + \mathrm{card}(\mathrm{E}_n)$.

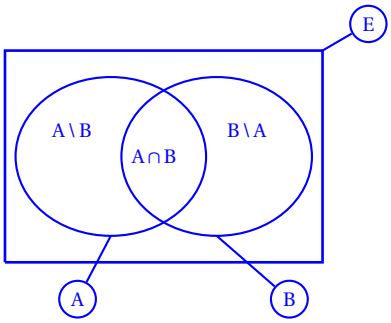
THÉORÈME IX.1.2
Pour toute parties A et B d'un ensemble E, on a :

(1) $\mathrm{card}\big(\overline{\mathrm{A}}\big) = \mathrm{card}(\mathrm{E}) - \mathrm{card}(\mathrm{A})$.

(2) $\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{B}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Démonstration





(1) $\{\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\}$ est une partition de E ; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}\big(\overline{\mathrm{A}}\big) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$$

On en déduit la propriété.

(2) $\{\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}\}$ est une partition de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \big(\mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big) + \big(\mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big) - \mathrm{card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})$$

Or $\{\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$ et $\{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}\}$ sont respectivement des partitions de A et B ; donc :

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{B}).$$

On en déduit la propriété. □

Exercice IX.1.1. ***Dans un groupe d'individus.***

(1) **200** ***pratiquent le football, parmi eux*** **80** ***pratiquent le rugby et*** **30** ***le tennis de table ;***

(2) **160 *pratiquent le rugby et parmi eux 25 pratiquent le tennis de table ;***

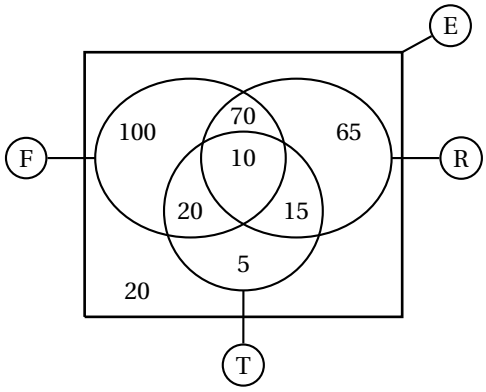
(3) **50 *pratiquent le tennis de table ;***

(4) **10 *pratiquent les trois sports ;***

(5) **20 *ne pratiquent aucun des sports cités.***

Combien y a-t-il de d'individus dans ce groupe ?

Pour résoudre le problème, on peut construire le diagramme ci-contre.



F désigne l'ensemble des footballeurs etc. On peut répartir les individus en huit classes :
$F\cap T\cap R$; $F\cap T\cap\overline{R}$; $F\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap T\cap R$; $F\cap\overline{T}\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap T\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}$;
qui forment une partition de E. On en déduit la construction du diagramme :

- D'après **(5)** : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=20$;
- D'après **(4)** : $\text{card}\left(F\cap T\cap R\right)=10$;
- D'après **(1)** 80 individus pratiquent le football et le rugby et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 70 pratiquent uniquement le football et le rugby : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap R\right)=70$;
- De même : $\text{card}\left(F\cap T\cap\overline{R}\right)=20$;
- Parmi les 200 footballeurs 100 (10+70+20) pratiquent donc au moins un des deux autres sports, d'où : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=100$;
- D'après **(2)** 25 individus pratiquent le rugby et le tennis de table et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 15 pratiquent uniquement le rugby et le tennis de table : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap R\right)=15$;
- Parmi les 160 rugbymen 10+70+15 c'est-à-dire 85 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap R\right)=75$;
- Parmi les 50 pongistes 10+20+15 c'est-à-dire 45 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap\overline{R}\right)=5$;

On en déduit le nombre d'individu : 305.

Pour dénombrer un ensemble, on peut en faire apparaître une partition.

IX.1.2 Produit cartésien d'ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble, noté $E\times F$, des couples (x,y) où $x\in E$ et $y\in F$. L'écriture $E\times F$ se lit « E croix F ».

Exemple

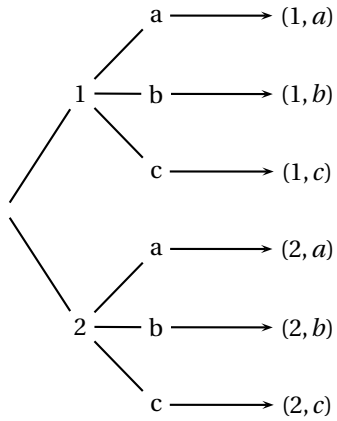
Pour $E=\{1;2\}$ *et* $F=\{a;b;c\}$*, on a :*

$E\times F=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$E\times F$	a	b	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$

THÉORÈME IX.1.3

Lorsque E et F sont des ensembles finis : $\text{card}\left(E\times F\right)=\text{card}\left(E\right)\times\text{card}\left(F\right)$.



Lorsqu'un ensemble E peut être construit par un arbre où on a :
- 1re étape : n_1 cas ;
- 2e étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_2 cas ;
- ...
- p^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_p cas.

On a alors : $\text{card}\left(E\right)=n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$.

Remarques

1. *Plus généralement, on définit le produit cartésien de p ensembles :* $E_1\times E_2\times\cdots\times E_p$

2. *Lorsque $E_1, \ldots, E_p$ sont finis, on a :* $\text{card}\left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\right) = \text{card}\left(E_1\right) \times \cdots \times \text{card}\left(E_p\right)$.
3. *En particulier, l'ensemble* $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ *est noté* E^p. *Les éléments de* E^p *sont les p-uplets, ou p-listes, d'éléments de E. Et on a :* $\text{card}\left(E^p\right) = \text{card}\left(E\right)^p$.

Exercice IX.1.2. ***Combien y a-t-il de codes possibles dans un cadenas présentant quatre molettes de dix chiffres chacune.***
Solution *Considérons l'ensemble :* $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $\text{card}\left(E\right) = 10$. *L'ensemble des codes est l'ensemble des quadruplets* $(c_1;c_2;c_3;c_4)$ *d'éléments de E. Il y a donc* $\text{card}\left(E^4\right)$, *c'est-à-dire 10 000, codes possibles.* □

IX.2 Factorielle

DÉFINITION IX.2.1
Soit n un entier naturel, on appelle $n!$ (lire : « factorielle n ») l'entier naturel non nul défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{, si } n \neq 0 ; \\ \\ 1 & \text{, si } n = 0. \end{cases}$$

Exemples
1. $0! = 1$; $1! = 1$.
2. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$; *ou encore :* $5! = 3! \times 4 \times 5$.
3. $\dfrac{6!}{4!} = 5 \times 6$; $\dfrac{12!}{4! \times 8!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 445$.
Plus généralement, pour $0 \leqslant p \leqslant n$: $\dfrac{n!}{p!} = (p+1) \times \cdots \times n$.
4. ***Exercice IX.2.1.*** ***Une mère a quatre petits garçons, elle a acheté quatre voitures de couleurs différentes. De combien de façons peut-elle attribuer une voiture à chacun ?***
Elle a :
- ▷ 4 *choix possibles pour attribuer la première voiture ;*
- ▷ 3 *choix possibles pour attribuer la deuxième voiture ;*
- ▷ 2 *choix possibles pour attribuer la troisième voiture ;*
- ▷ 1 *choix possible pour attribuer la dernière voiture.*

Soit en tout $4! = 24$.
5. *Plus généralement pour construire une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n. On a :*
- ▷ n *choix possibles pour attribuer l'image du premier élément ;*
- ▷ $n-1$ *choix possibles pour attribuer l'image du deuxième élément ;*

$\vdots$

- ▷ $n-k+1$ *choix possibles pour attribuer l'image du* k^e *élément ;*

$\vdots$

- ▷ 1 *choix possible pour attribuer l'image du dernier élément.*

Soit en tout $n!$.

On en déduit le théorème suivant.
THÉORÈME IX.2.1
Le nombre de bijections d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n, est $n!$.

Exercice IX.2.2. ***Un groupe de six personnes décide de s'asseoir autour d'une table à six places. De combien de façons les individus peuvent ils se répartir autour de la table ?***
Solution *Chaque répartition est une bijection entre l'ensemble des individus et l'ensemble des places, il y a donc* $6!$ *répartitions possibles, c'est-à-dire :* 720. □

Remarque *Deux ensembles images l'un de l'autre par une bijection ont même cardinal.*

DÉFINITION IX.2.2
Une *permutation* d'un ensemble E est une bijection de E vers E.

Remarque *Si* $\text{card}(\text{E}) = n$*, alors il y a* $n!$ *permutations de E.*

IX.3 Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments

IX.3.1 Tirages successifs avec remise

Exercice IX.3.1. ***Une urne contient*** n ***billes, numérotés de*** 1 ***à*** n***.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
$\vdots$
On choisit une p***-ième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.***
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution

1re *méthode* *L'ensemble des choix possibles est* E^p*, il y en a donc :* $\text{card}\left(\text{E}^p\right) = n^p$.

2e *méthode* *On a* n *possibilités pour le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le deuxième tirage.*
$\vdots$
On a n *possibilités pour le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le* p*-ième tirage.*
Soit au total : n^p *choix possibles.* □

THÉORÈME IX.3.1

Lorsqu'on pratique le tirage *successif avec remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\text{card}\left(\text{E}^p\right) = n^p$.

Remarque *On peut avoir :* $p > n$.

Exercice IX.3.2. ***Dans une classe de*** 17 ***élèves on doit choisir un responsable du cahier de texte par semaine et ceci pour les*** 33 ***semaines de cours. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des élèves de la classe. Les répartitions possibles sont les* 33*-uplets d'éléments de E (l'ensembles des répartitions possibles est donc* E^{33}*) ; il y a donc :* 17^{33} *; répartitions possibles, c'est-à-dire :* 40 254 497 110 927 943 179 349 807 054 456 171 205 137. □

IX.3.2 Tirages successifs sans remise

Exercice IX.3.3. ***Une urne contient*** n ***billes, numérotés de*** 1 ***à*** n***.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
$\vdots$
On choisit une p***-ième bille*** $(p \leqslant n)$***, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.***
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution *On a* n *possibilités le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-1$ *possibilités le deuxième tirage.*
$\vdots$
On a $n-p+1$ *possibilités le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-p$ *possibilités le* p*-ième tirage.*
Soit au total : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *choix possibles.* □

THÉORÈME IX.3.2

Lorsqu'on pratique le tirage *successif sans remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque *On a nécessairement :* $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice IX.3.4. ***Une course de chevaux, pour le tiercé, a 17 partants. Combien a t-on d'arrivées possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des chevaux. Les arrivées possibles sont les triplets d'éléments* distincts *de E ; il y a donc :* $\dfrac{17!}{(17-3)!}$ *; arrivées possibles, c'est-à-dire :* $17 \times 16 \times 15 = 4\,080$. □

Remarque *Lorsque $p = n$, un tirage est une bijection de E vers $\{1\,;2\,;\cdots\,;n\}$ et on obtient $n!$ tirages possibles.*

IX.3.3 Combinaisons - Tirages simultanés

IX.3.3.a Combinaisons

DÉFINITION IX.3.1

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

Exemple *Pour $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$.*
Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a, b\}$ *;* $\{a, c\}$ *;* $\{b, c\}$.

Remarques
1. *Dans un ensemble, les éléments sont deux à deux distincts.*
Ainsi $\{a, b, a\}$ n'est pas un ensemble car il contient deux fois a.
2. *Deux ensembles qui contiennent les mêmes éléments sont égaux.*
Ainsi : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Notation Le nombre de parties (i.e. de combinaisons) de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exemples

1. *De l'exemple ci-dessus, on déduit que :* $\binom{3}{2} = 3$ *;*

2. *E est un ensemble à n éléments. Il n'existe qu'une partie de E qui contient zéro élément, c'est l'ensemble vide, donc :* $\binom{n}{0} = 1$

3. *une seule partie de E contient n éléments, c'est E lui-même, donc :* $\binom{n}{n} = 1$ *;*

4. *il y a autant d'éléments que de singletons, donc :* $\binom{n}{1} = n$.

THÉORÈME IX.3.3

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration Soit A une combinaison de p éléments de E. Pour former avec les éléments de A un p-uplet d'éléments distincts on choisit quel élément sera le premier, quel élément (parmi les éléments restants) sera le deuxième et ainsi de suite. Choisir un p-uplet d'éléments distincts de A c'est donc se donner une bijection entre A et $\{1\,;\ldots\,;p\}$. On peut donc former $p!$ p-uplets d'éléments distincts de A. Plus généralement, avec chaque combinaison de p éléments de E on peut former $p!$ p-uplets d'éléments distincts. Or il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de E à p éléments, il y a donc en tout $p!\binom{n}{p}$ p-uplets d'éléments distincts de E. Donc, d'après le théorème IX.3.2 :

$$p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On en déduit que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

□

Exemples

1. $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!\times 6!} = \dfrac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3} = 3\times 4\times 7 = 84.$

2. $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{6!\times 43!} = \dfrac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} = 44\times 3\times 46\times 47\times 49 = 13\,983\,816.$

THÉORÈME IX.3.4

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

(1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

(2) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$

Démonstration Soit p et n deux entiers tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$;

(1) $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = \binom{n}{n-p}$;

(2)
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$
□

Exemples $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$; $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \binom{11}{7}$

Remarques *Les propriétés du théorème IX.3.4 se justifient également par des arguments intuitifs simples. Soit E un ensemble à n éléments.*

1. *Une combinaison de E a p éléments si et seulement si la combinaison complémentaire a $n-p$ éléments. Il y a donc autant de combinaisons de E à p éléments que de combinaisons de E à $n-p$ éléments.*

2. *Dans le cas où $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on choisit un élément fixé e. Les combinaisons de E à p éléments se répartissent en deux types ; celles qui contiennent e et celles qui ne contiennent pas e. Une combinaison contenant e est l'union de $\{e\}$ avec une combinaison de $\mathrm{E}\setminus\{e\}$ à $p-1$ éléments. Il y a donc $\binom{n-1}{p-1}$ combinaisons de E à p éléments contenant e.*

Une combinaison ne contenant pas e est une combinaison de $\mathrm{E}\setminus\{e\}$ à p éléments. Il y a donc $\binom{n-1}{p}$ combinaisons de E à p éléments ne contenant pas e ; d'où : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

IX.3.3.b Triangle de Pascal

On sait que pour $0 < p < n$, on a :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}.$$

Ce résultat permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche, en formant le triangle de Pascal [1] à l'aide du schéma suivant :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$
$$\shortparallel$$
$$\binom{n}{p}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	⋯
0	**1**						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮						⋱

IX.3.3.c Tirages simultanés

Choisir p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E c'est se donner une combinaison de E à p éléments ; il y a donc $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n.

Exercice IX.3.5. ***25 individus doivent choisir trois d'entre eux pour les représenter. De combien de façon peuvent-ils choisir leurs trois représentants ?***

Solution *Les choix possibles sont les combinaisons de trois individus parmi les* 25 *du groupe, il y a donc* $\binom{25}{3}$ *choix possibles ; c'est-à-dire :* 2300. □

IX.3.3.d La formule du binôme de NEWTON

THÉORÈME IX.3.5 **FORMULE DU BINÔME DE NEWTON** [2]

Soit a et b deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel ($n \neq 0$ si $a+b=0$). On a :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p.$$

Démonstration Raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n=0$, on a : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p\binom{0}{0}a^0b^0=1=(a+b)^0$;

L'égalité est donc vraie pour $n=0$.

Pour $n=1$, on a : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b=(a+b)^1$;

L'égalité est donc vraie également pour $n=1$.

Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire : $(a+b)^k=\sum_{p=0}^{k}\mathrm{C}_k^p a^{k-p}b^p$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k\\
&= (a+b)\left(\mathrm{C}_k^0a^k+\mathrm{C}_k^1a^{k-1}b+\mathrm{C}_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^k\right)\\
&= \left(\mathrm{C}_k^0a^{k+1}+\mathrm{C}_k^1a^kb+\mathrm{C}_k^2a^{k-1}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kab^k\right)+\left(\mathrm{C}_k^0a^kb+\mathrm{C}_k^1a^{k-1}b^2+\mathrm{C}_k^2a^{k-2}b^3+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^{k+1}\right)\\
&= \mathrm{C}_k^0a^{k+1}+\left(\mathrm{C}_k^0+\mathrm{C}_k^1\right)a^kb+\cdots+\left(\mathrm{C}_k^{p-1}+\mathrm{C}_k^p\right)a^{k-p+1}b^p+\cdots+\left(\mathrm{C}_k^{k-1}+\mathrm{C}_k^k\right)ab^k+\mathrm{C}_k^kb^{k+1}\\
&= \mathrm{C}_{k+1}^0a^{k+1}+\mathrm{C}_{k+1}^1a^kb+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^pa^{k-p+1}b^p+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^kab^k+\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}b^{k+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}^pa^{k+1-p}b^p
\end{aligned}$$

1. Blaise PASCAL (1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe français.
2. Isaac NEWTON (1642 - 1727), mathématicien, physicien et astronome anglais.

Ou encore : $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$$
\begin{aligned}
&= (a+b)\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p \\
&= a\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p + b\sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^p \\
&= \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p} b^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k} C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + \sum_{p=1}^{k+1} C_k^{p-1}\, a^{k-p+1} b^p \\
&= C_k^0\, a^{k-0+1} b^0 + \sum_{p=1}^{k} \left(C_k^p\, a^{k-p+1} b^p + C_k^{p-1}\, a^{k-p+1} b^p \right) + C_k^k\, a^{k-(k+1)+1} b^{k+1} \\
&= C_{k+1}^0\, a^{k+1-0} b^0 + \sum_{p=1}^{k} \left(C_{k+1}^p\, a^{k-p+1} b^p \right) + C_{k+1}^{k+1}\, a^{k+1-(k+1)} b^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p\, a^{k+1-p} b^p
\end{aligned}
$$

Donc, par récurrence, la formule du binôme de Newton est démontrée. □

Remarques

1. *Cette formule explique le nom de « coefficients binomiaux » donné aux nombres* $\binom{n}{p}$.

2. *La formule du binôme de Newton peut également être établie à partir de considérations plus intuitives. Fixons n, on a :*

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n \text{ facteurs}}. \tag{IX.1}$$

$a+b$ est une somme de monômes de degré 1 en a et b donc $(a+b)^n$ est une somme de monômes de degré n en a et b ; c'est-à-dire de monômes de la forme : $\alpha_p a^{n-p} b^p$; en observant la formule (IX.1) on remarque que α_p est le nombre de fois où apparaît $a^{n-p} b^p$ dans le développement. Or les monômes $a^{n-p} b^p$ apparaissent lorsqu'on prend a dans $n-p$ facteurs et b dans les p facteurs restants. Par conséquent, il y a autant de monômes $a^{n-p} b^p$ dans le développement qu'il y a de façons de choisir $n-p$ facteurs parmi n ; c'est-à-dire : $\binom{n}{n-p}$; ou encore : $\binom{n}{p}$; donc : $\alpha_p = \binom{n}{p}$; puis :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemples

1. $(2+i)^6 = \binom{6}{0}2^6 + \binom{6}{1}2^5 i + \binom{6}{2}2^4 i^2 + \binom{6}{3}2^3 i^3 + \binom{4}{2}2^2 i^4 + \binom{6}{5}2^1 i^5 + \binom{6}{6}2^0 i^6$

$= 1\times 64 + 6\times 32i + 15\times 16\times(-1) + 20\times 8\times(-i) + 15\times 4\times 1 + 6\times 2\times i + 1\times 1\times(-1)$

$= -117 + 44i$

2. $(1+\sqrt{2})^5 = 1 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5$

$= 1 + 5\sqrt{2} + 10\times 2 + 10\times 2\sqrt{2} + 5\times 4 + 4\sqrt{2}$

$= 41 + 29\sqrt{2}$

COROLLAIRE IX.3.6

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de parties de E est : 2^n

Démonstration Pour tout entier p tel que : $0 \leqslant p \leqslant n$; le nombre de parties de E à p éléments est : $\binom{n}{p}$. Donc :

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{0}1^n\times 1^0 + \binom{n}{1}1^1\times 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1}\times 1^1 + \binom{n}{n}1^0\times 1^n = (1+1)^n = 2^n$$ □

Remarque *On aurait pu obtenir cette propriété sans utiliser la formule du binôme du Newton. En effet, numérotons les éléments de E de 1 à n. Considérons une partie A de E, à chaque numéro associons $\in$ si l'élément correspondant appartient à A et $\notin$ sinon, on associe ainsi à A un n-uplet d'éléments de $\{\in, \notin\}$. En répétant le procédé pour toutes les parties de A de E, on met en bijection l'ensemble des parties de E avec l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{\in, \notin\}$; d'où :* $\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.

IX.3.4 Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous récapitule les façons de calculer le cardinal de l'univers dans les principaux cas.

	Tirages successifs de p éléments parmi n	Tirage simultané de p éléments parmi n
avec remise	n^p	$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
sans remise	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$	

TABLE IX.1 – Tableau récapitulatif

Chapitre X

Calcul des probabilités

X.1 Calculs de probabilités

X.1.1 Vocabulaire des événements

X.1.1.a Expérience aléatoire

- Lorsqu'on lance un dé, six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  On dit qu'on a réalisé une *expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant 6 *éventualités* ou *issues* et que l'*univers* associé a cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- Le lancer de deux pièces de monnaies distinctes est une expérience aléatoire comportant 4 éventualités. L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$.

Dans la première moitié de ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

X.1.1.b Événements liés à une expérience aléatoire

DÉFINITIONS X.1.1

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

(1) On appelle *événement* toute partie de Ω.

(2) On appelle *événement élémentaire* tout singleton de Ω.

Exemples *Dans le lancer d'un dé :*

1. *« obtenir un nombre pair » est l'événement* $\{2;4;6\}$ *;*

2. *« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire* $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient « 4 » lors d'un lancer de dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.

Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

Vocabulaire des événements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité ou issue	Élément de Ω	ω $(\omega \in \Omega)$
Événement	Partie de Ω	$A(A \subset \Omega)$
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}(\omega \in \Omega)$
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\varnothing$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \varnothing$
Événement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

Exemples *Dans le lancer d'un dé, on considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».*

1. *On a :* $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$ *;* $A \cup B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».*

2. *On a :* $A \cap B = \{2\}$ *;* $A \cap B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».*

3. *Les événements B et C sont incompatibles.*

4. *On a :* $\bar{A} = \{1;3;5\}$ *;* $\bar{A}$ *est l'événement : « obtenir un nombre impair ».*

X.1.2 Probabilité d'un événement

X.1.2.a Introduction

On lance un dé bien équilibré ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1;5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé, on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2;4;6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé ; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé ; sa probabilité est 0.

DÉFINITION X.1.2

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une *probabilité* sur l'univers Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarques

1. *La probabilité de l'événement élémentaire* $\{\omega\}$ *est notée* $P(\omega)$.
2. *Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.*

ω	ω_1	$\cdots$	ω_i	$\cdots$	ω_n
$P(\omega)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Exemples *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*
La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.
1. *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*
L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. *Soit p la probabilité d'apparition d'un nombre pair et q celle d'un nombre impair.*
On a : $p = 2q$.
Or : $P(\Omega) = 1$ *; donc :* $3p + 3q = 1$.
On en déduit que : $q = \frac{1}{9}$ *et* $p = \frac{2}{9}$.
Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P(\omega)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. *Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?*
La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1;2;3;4\}$.
On a : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{2}{3}$.

X.1.2.b Équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité*.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

THÉORÈME X.1.1

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Démonstration Les événements élémentaires ont tous la même probabilité, soit p cette probabilité. On a : $P(\Omega) = 1$; donc : $p\,\text{card}(\Omega) = 1$; d'où : $p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

On en déduit que pour tout événement A, on a : $P(A) = p\,\text{card}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. □

Remarque *Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de Ω, cas possibles.*
On écrit souvent : $P(A) = \dfrac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$.

Exercice X.1.1. ***On lance deux dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus.***
Quelle est la probabilité d'obtenir 10 ?

Solution *L'univers Ω est l'ensemble des couples d'éléments de :* $\{1;2;3;4;5;6\}$.
On a : $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$. *« Obtenir 10 » est l'événement :* $\{(4;6),(5;5),(6;4)\}$.
On est dans une situation d'équiprobabilité (dés parfaits), donc la probabilité cherchée est : $\dfrac{1}{12}$. □

Exercice X.1.2. ***On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.***
Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?

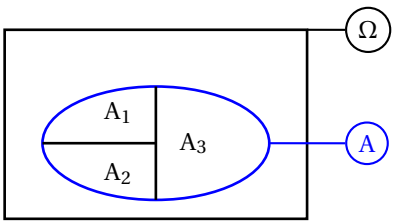
Solution *L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes d'un jeu de 32, donc :* $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = 201\,376$.
Les cartes sont tirées au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
Soit A l'événement : « tirer le roi de cœur ». Réaliser A c'est choisir le roi de cœur puis tirer 4 cartes parmi les 31 cartes restantes ; donc : $\text{card}(A) = \binom{31}{4} = 31\,465$.
La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{31\,465}{201\,376} = \dfrac{5}{32} = 0{,}156\,25$. □

X.1.2.c Propriétés

THÉORÈME X.1.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :
(1) si $A \cap B = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Démonstration
(1) Si l'un (au moins) des événements A ou B est impossible, alors la propriété est évidente. En effet si $A = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(\varnothing \cup B) = P(B)$ et $P(A) + P(B) = P(\varnothing) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$.
Si les deux événements sont possibles, alors quitte à numéroter à nouveau les éventualités on peut supposer que : $A = \{\omega_1;\ldots;\omega_p\}$ et $B = \{\omega_{p+1};\ldots;\omega_q\}$.
On a alors : $A \cup B = \{\omega_1;\ldots;\omega_q\}$;
d'où : $P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(\omega_i) + \sum_{i=p+1}^{q} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{q} P(\omega_i) = P(A \cup B)$.
(2) Pour $B = \bar{A}$, on obtient : $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. □

Remarque *Plus généralement, par récurrence, on déduit de* ***(1)*** *que si* A_1, …, A_n *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :* $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
Ce qui peut également s'écrire : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.



On en déduit le théorème suivant.

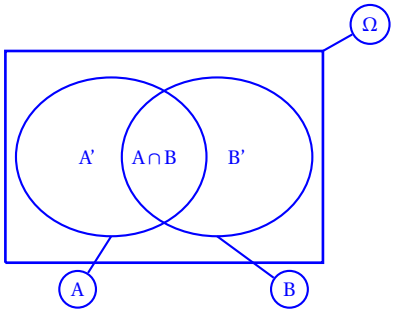
THÉORÈME X.1.3 **THÉORÈME FAIBLE DES PROBABILITÉS TOTALES**
Si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ est une partition [1] d'un événement A, alors :
$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

THÉORÈME X.1.4
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et A, B deux événements.
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration

Notons A' le complémentaire de $A\cap B$ dans A et B' le complémentaire de $A\cap B$ dans B.
On a : $A = (A\cap B)\cup A'$, avec $(A\cap B)\cap A' = \varnothing$;
donc : $P(A) = P(A\cap B) + P(A')$.
On a : $B = (A\cap B)\cup B'$, avec $(A\cap B)\cap B' = \varnothing$;
donc : $P(B) = P(A\cap B) + P(B')$.
Tout élément de $A\cup B$ est soit élément de A mais pas de B, soit élément de B mais pas de A soit élément des deux. $\{A', A\cap B, B'\}$ est donc une partition de $A\cup B$. On en déduit que : $P(A\cup B) = P(A') + P(B') + P(A\cap B)$.

$$P(A\cup B) = \big(P(A') + P(A\cap B)\big) + \big(P(B') + P(A\cap B)\big) - P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cup B)$$
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



□

Exercice X.1.3. ***Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on désigne par N son numéro. On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».***

1. Déterminer la probabilité des événements A, B et $A\cap B$.

2. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A\cup B$.

Solution ***1.*** *L'univers est :* $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$;
La boule est tirée au hasard on a donc équiprobabilité.
Pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, *on a donc :* $P(\omega) = \dfrac{1}{15}$;
d'où : $P(A) = P(\{2;4;6;8;10;12;14\}) = \dfrac{7}{15}$; $P(B) = P(\{3;6;9;12;15\}) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$
et $P(A\cap B) = P(\{6;12\}) = \dfrac{2}{15}$.
2. *On a :* $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{8}{15}$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$;
et $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{7}{15} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{3}$. □

X.1.2.d Événements indépendants

DÉFINITION X.1.3

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Deux événements A et B sont *indépendants* lorsque : $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

Dans le cas contraire, A et B sont dits dépendants.

Exemples

1. *Dans une classe de* 36 *élèves, on aimerait savoir si les élèves littéraires sont meilleurs en sport que les élèves non littéraires.*

Un élève est déclaré littéraire lorsqu'il a obtenu la moyenne en français, sportif lorsqu'il a obtenu la moyenne en éducation physique et sportive. Le tableau ci-joint récapitule les résultats de l'enquête menée dans cette classe.

	Littéraires	*Non littéraires*	*Total*
Sportifs	*18*	*6*	*24*
Non sportifs	*9*	*3*	*12*
Total	*27*	*9*	*36*

TABLE *X.1 – sportifs & littéraires*

On choisit au hasard un élève et on considère les événements suivants.

S : « l'élève est sportif »
L : « l'élève est littéraire »

On a : $P(S) = \dfrac{2}{3}$; $P(L) = \dfrac{3}{4}$ *et* $P(S\cap L) = \dfrac{1}{2}$; *donc :*

$$P(S\cap L) = P(S)\times P(L)$$

Les événements S et L sont indépendants.
Si on choisit un littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est : $\dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$.
Si on choisit un non littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est encore : $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
Dans cette classe, les littéraires ne sont ni plus ni moins sportifs que les non littéraires.

2. *Une classe comprend* 15 *filles et* 21 *garçons.*

On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte, on obtient les résultats ci-contre. On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements F : « l'élève est une fille » et V : « l'élève est volontaire » .

	Filles	*Garçons*	*Total*
Volontaires	8	16	24
Non volontaires	7	5	12
Total	15	21	36

TABLE *X.2 – Volontaires par genre*

On a : $P(F) = \frac{5}{12}$ *;* $P(V) = \frac{2}{3}$ *et* $P(V \cap F) = \frac{2}{9}$ *; donc :*

$$P(F \cap V) \neq P(F) \times P(V)$$

Les événements F et V sont dépendants.

Si on choisit une fille au hasard, la probabilité pour qu'elle soit volontaire est : $\frac{8}{15}$.

Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité pour qu'il soit volontaire est : $\frac{16}{21}$.

Plus généralement, on définit l'indépendance de n événements.

DÉFINITION X.1.4

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont *indépendants* lorsque pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\{1; \ldots; n\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} P(A_{i_k}).$$

Remarque *Les considérations précédentes permettent de calculer la probabilité de* $A \cap B$ *lorsque A et B sont des événements indépendants. Cette indépendance peut être signalée dans l'énoncé. Mais elle peut aussi découler des conditions de l'expérience ; ainsi, il y a indépendance entre les résultats :*

- *de tirages successifs avec remise ;*
- *de jets successifs d'un dé, ou d'une pièce de monnaie.*

Exercice X.1.4. ***On joue à pile ou face avec une pièce tordue où la probabilité d'obtenir face est*** $\frac{1}{3}$ ***et celle d'obtenir pile*** $\frac{2}{3}$***. On lance neuf fois cette pièce. On désigne par*** F_1 ***l'événement « obtenir face au*** 1er ***lancer » puis*** F_2 ***…***

Quelle est la probabilité de l'événement (F_1 ***et*** F_2 ***et*** F_9***) ?***

Solution *Les événements* F_1, F_2 *et* F_9 *sont indépendants donc :*

$$P(F_1 \text{ et } F_2 \text{ et } F_9) = P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_9) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$ □

Exercice X.1.5. ***Un joueur de fléchettes dispose d'une cible carrée d'un mètre de côté. Il lance une fléchette, on suppose qu'il plante la fléchette dans la cible, mais n'importe où dans la cible. Ainsi la probabilité que la fléchette se plante dans une région R est l'aire, en mètre carré de cette région. Par abus de langage nous identifierons la région et l'événement correspondant. On considère les événements suivants. A ; B ; C ; D .***

1. Démontrer que les événements A, B, C et D sont deux à deux indépendants.

2. Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

3. Les événements A, B, C, D sont-ils indépendants ?

Solution 1. *Les aires des régions A, B, C, D représentent chacune la moitié de l'aire de la cible, donc :*

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$P(A) \times P(B) = P(A) \times P(C) = P(A) \times P(D) = P(B) \times P(C) = P(B) \times P(D) = P(C) \times P(D) = \frac{1}{4}$$

Les intersections sont définies par : $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cap D$; $B \cap C$; $B \cap D$; $C \cap D$.

Les aires de ces intersections représentent chacune le quart de l'aire de la cible aire ; donc :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A \cap D) = P(B \cap C) = P(B \cap D) = P(C \cap D) = \frac{1}{4}$$

Les événements A, B, C et D sont donc deux à deux indépendants.

2. *On sait déjà que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a comparer* $P(A) \times P(B) \times P(C)$ *avec* $P(A \cap B \cap C)$*. On a :* $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$.

$A \cap B \cap C$ *est la région :* ; *donc :* $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$.

Par conséquent les événements A, B, C sont indépendants.

3. *On sait déjà que les événements A, B, C, D sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a savoir si, lorsqu'on en choisit trois ou lorsqu'on choisit les quatre, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.*

D'après l'étude menée en ***1.*** *:* $A \cap D = B \cap D$ *; donc :* $A \cap B \cap D = A \cap D$ *; d'où :* $P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4}$.

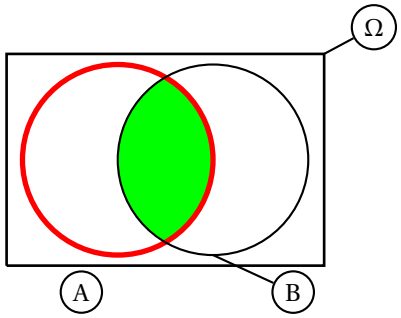
Or : $P(A) \times P(B) \times P(D) = \frac{1}{8}$.

Les événements A, B, C, D sont donc dépendants. □

X.1.3 Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, un univers Ω est muni d'une probabilité P.

X.1.3.a Introduction



Soit A et B deux événements $(P(A) \neq 0)$. On cherche à connaître la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On appellera *probabilité de B sachant A* cette probabilité et on la notera : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.
Pour répondre à cette question, il suffit en fait de prendre A comme nouvel univers. La probabilité sur ce nouvel univers est notée P_A. On doit avoir : $P_A(A) = 1$; on choisit donc de définir, pour tout événement B, $P_A(B)$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

DÉFINITION X.1.5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit A un événement de probabilité non nulle.

La probabilité sachant A, notée P_A, est la probabilité définie par : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Exemples *Reprenons les exemples de la définition X.1.3 (événements indépendants) page 134.*

1. *On choisit un élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'il soit sportif ?*

Solution

$$P_L(S) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

On remarque que : $P_L(S) = P(S)$.

2. *On choisit une élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'elle soit volontaire pour jouer au football ?*

Solution

$$P_F(V) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{2}{9} \times \frac{12}{5} = \frac{8}{15}.$$

□

On remarque que : $P_F(V) \neq P(V)$.

Remarque *Dans les exemples ci-dessus, les probabilités conditionnelles peuvent s'obtenir par lecture directs dans les tableaux X.1 et X.2 pages 134 et 135.*

THÉORÈME X.1.5

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) \neq 0$.

(1) A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.

(2) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

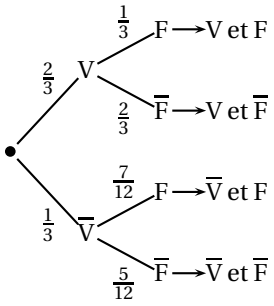
Démonstration

(1) $P_A(B) = P(B) \iff \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \iff P(A) \times P(B) = P(B \cap A)$.

(2) C'est une conséquence de la définition X.1.5. □

X.1.3.b Arbres pondérés

Pour schématiser une situation et effectuer rapidement les calculs demandés, on représente souvent la situation étudiée par un *arbre pondéré*.
L'arbre ci-contre représente le situation du tableau X.2 page 135.
D'après ce tableau :
$P(V) = \frac{2}{3}$; $P_{\overline{V}}(F) = \frac{7}{12}$; $P(\overline{V} \cap \overline{F}) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$.



Déterminer la probabilité des événements : $\overline{V} \cap \overline{F}$; $V \cap \overline{F}$; $V \cap F$ et $\overline{V} \cap F$.
Combien vaut la somme des probabilités des événements : $V \cap F$; $V \cap \overline{F}$; $\overline{V} \cap F$ et $\overline{V} \cap \overline{F}$.

Remarque *Un arbre pondéré est une représentation intuitive permettant une utilisation simplifiée du théorème X.1.5.*

X.1.3.c Théorème des probabilités totales

On se propose d'utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour déterminer P(F).
$\{V, \overline{V}\}$ est une partition de l'univers Ω, donc $\{V \cap F, \overline{V} \cap F\}$ est une partition de F. En utilisant le théorème faible des probabilités totales (théorème X.1.3 page 133) on en déduit que :

$$P(F) = P(V \cap F) + P(\overline{V} \cap F)$$

or :

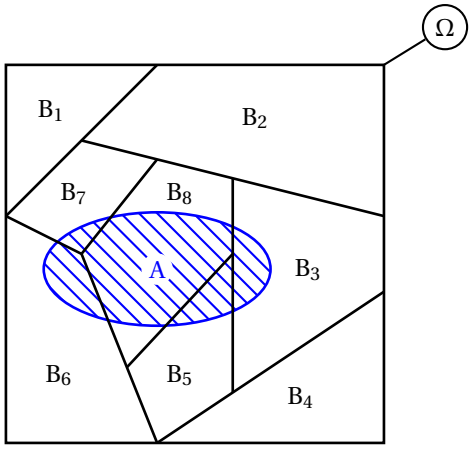
$$P(V \cap F) = P(V) \times P_V(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{36} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{V} \cap F) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(F) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

donc :

$$P(F) = \frac{5}{12}.$$

Plus généralement, si $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement A :
$\{B_1 \cap A, \ldots, B_n \cap A\}$; est une partition de A et on a :

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A).$$



On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME X.1.6 THÉORÈME DES PROBABILITÉS TOTALES

Si $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω telle que pour tout i : $P(B_i) \neq 0$;
alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{B_n}(A).$$

X.1.3.d Exercice résolu

Exercice X.1.6. ***Un sac contient 5 billes blanches et 8 billes noires, indiscernables au touché. On tire successivement et sans remise trois billes.***

1. Décrire l'univers.

2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au troisième tirage.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au deuxième tirage.

5. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille noire au deuxième tirage et une bille blanche au troisième tirage.

6. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu au deuxième tirage une bille noire, sachant que la bille obtenue au troisième tirage était blanche.

Solution 1. *À chaque tirage on peut obtenir soit une bille blanche (B) soit une bille noire (N). L'univers est donc l'ensemble des 3-listes d'éléments* {B, N} *où, par exemple,* (B, N, N) *représente l'éventualité : « tirer d'abord une bille blanche puis deux billes noires ».*

2. *Désignons par B_1 l'événement : « obtenir une bille blanche au 1er tirage » et définissons de même B_2, B_3, N_1, N_2 et*

N_3. Les billes sont indiscernables au touché, on a donc équiprobabilité à chaque tirage ; ce qui signifie qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une couleur est le quotient du nombre de billes de cette couleur par le nombre total de billes dans le sac.

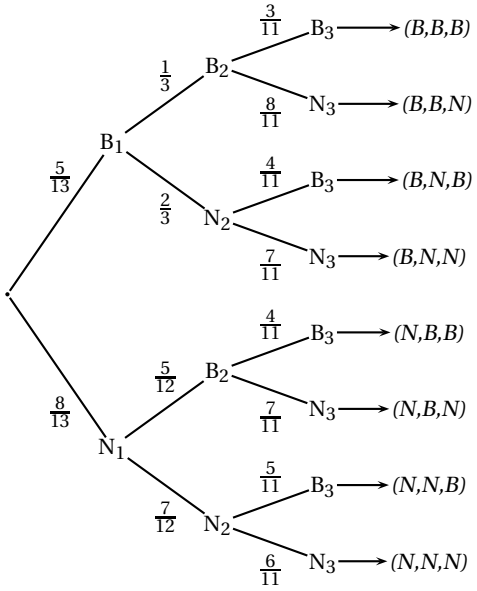
8 billes noires ; donc : $P(B_1) = \frac{5}{13}$ *et* $P(N_1) = \frac{8}{13}$.

Si B_1 est réalisé il reste alors 4 billes blanches et 8 billes noires dans le sac ; d'où : $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$ *et* $P_{B_1}(N_2) = \frac{2}{3}$.

En poursuivant ce raisonnement jusqu'à l'élimination de tous les cas possibles, on obtient l'arbre pondéré ci-contre dont on déduit par exemple que :

$P(B,N,N) = \frac{5}{13} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{11} = \frac{70}{429}$.

En procédant de même pour toutes les éventualités, on obtient l'arbre pondéré ci-contre d'où l'on tire le tableau ci-dessous.



Événement	(B,B,B)	(B,B,N)	(B,N,B)	(B,N,N)
Probabilité	$\frac{15}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$
Événement	(N,B,B)	(N,B,N)	(N,N,B)	(N,N,N)
Probabilité	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{84}{429}$

3. *On a :* $B_3 = \{(B,B,B),(B,N,B),(N,B,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(B_3) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

4. *On a :* $B_2 = \{(B,B,B),(B,B,N),(N,B,B),(N,B,N)\}$ *; donc :*

$$P(B_2) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

5. *On a :* $N_2 \cap B_3 = \{(B,N,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(N_2 \cap B_3) = \frac{40+70}{429} = \frac{10}{39};$$

6.

$$P_{B_3}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{10}{39} \times \frac{13}{5} = \frac{2}{3};$$

□

X.2 Variable aléatoire

X.2.1 Introduction

On lance deux dés bien équilibrés (un vert et un rouge) et on s'intéresse à la somme, X, obtenue.

L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de {1;2;3;4;5;6} donc : card (Ω) = 36 ; les dés étant bien équilibrés, chaque événement élémentaire a la même probabilité : $\frac{1}{36}$. L'ensemble des valeurs possible de X est : {2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12}. On désigne par : X = 2 ; l'événement : « la somme obtenue est 2 ». Afin de mieux connaître la « loi de probabilité de X », on dresse le tableau ci-contre. L'événement : X = 8 ; est réalisé 5 fois, donc : $P(X=8) = \frac{5}{36}$.

En procédant de même pour tout les valeurs possibles de X, on obtient le tableau ci-dessous.

r \ v	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

DÉFINITION X.2.1

On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

1. X(Ω) *est appelé* univers image *de* Ω *par X.*

2. *(*X = x_i*) désigne l'événement « X prend la valeur* x_i *».*

3. *(*X ⩽ *a) désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égal à a ».*

DÉFINITION X.2.2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe P(X = x_i).

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau

et il recommandé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	⋯	x_n
P(X = x_i)	p_1	p_2	⋯	p_n

X.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

DÉFINITION X.2.3

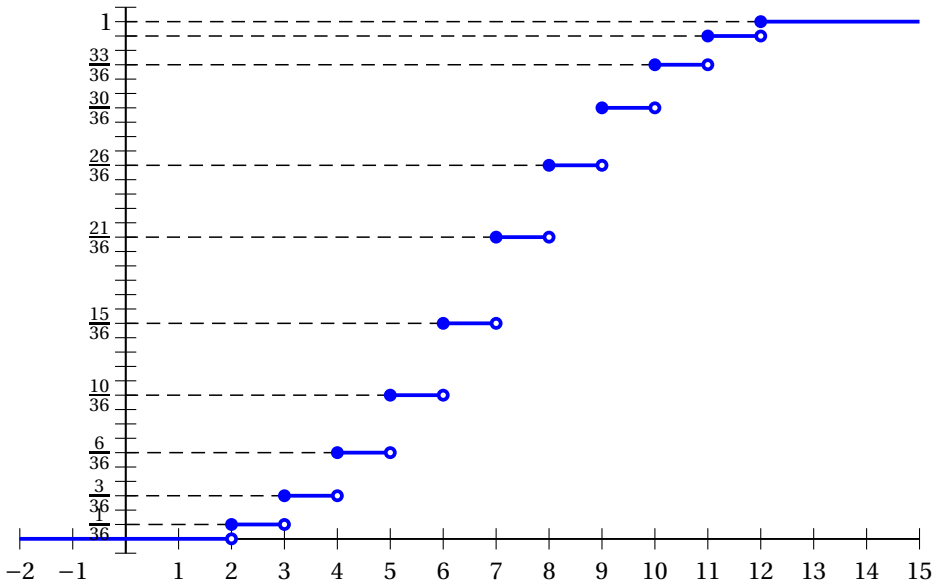
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.

La fonction de répartition de X est l'application F de ℝ vers [0,1] définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple *Reprenons l'exemple introductif ; F est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 2; \\ \frac{1}{36} & \text{, si } 2 \leqslant x < 3; \\ \frac{3}{36} & \text{, si } 3 \leqslant x < 4; \\ \frac{6}{36} & \text{, si } 4 \leqslant x < 5; \\ \frac{10}{36} & \text{, si } 5 \leqslant x < 6; \\ \frac{15}{36} & \text{, si } 6 \leqslant x < 7; \\ \frac{21}{36} & \text{, si } 7 \leqslant x < 8; \\ \frac{26}{36} & \text{, si } 8 \leqslant x < 9; \\ \frac{30}{36} & \text{, si } 9 \leqslant x < 10; \\ \frac{33}{36} & \text{, si } 10 \leqslant x < 11; \\ \frac{35}{36} & \text{, si } 11 \leqslant x < 12; \\ 1 & \text{, si } 12 \leqslant x. \end{cases}$$



Remarques

1. *F est une fonction en escalier, définie et croissante sur* ℝ.

2. *La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.*

X.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

X.2.3.a Espérance mathématique

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?

Désignons par X le gain, en euros, du joueur pour une partie. S'il obtient 6 on lui rembourse 36, il a donc gagné 20 euros.

L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5,\ 6\}$;
l'univers image est donc :
$X(\Omega) = \{-15;-12;-7;0;9;20\}$.
Le dé étant bien équilibré, on a équiprobabilité sur l'univers et donc, ici, sur l'univers image ; on en déduit la loi de probabilité de X.

x_i	-15	-12	-7	0	9	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sur un 600 parties un joueur réalisera en moyenne 100 fois chaque événement élémentaire. Le gain moyen par partie sera donc :

$$\frac{1}{600}\big(100\times(-15)+100\times(-12)+100\times(-7)+100\times 0+100\times 9+100\times 20\big) = -\frac{5}{6}$$

On peut donc espérer perdre en moyenne $\frac{5}{6}$ € par partie.
On remarque que : $\frac{5}{6} = -15\times\frac{1}{6} - 12\times\frac{1}{6} - 7\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 20\times\frac{1}{6}$.
Plus généralement, on a la définition suivante.

DÉFINITION X.2.4

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1,\dots,x_n$ avec les probabilités respectives $p_1,\dots,p_n$.
On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Remarques

1. *L'espérance mathématique est l'équivalent, en probabilité, de la moyenne en statistique.*
2. *L'espérance est donc une caractéristique de position.*
3. *Pour une variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$, ($x_1 = \cdots = x_n = \lambda$) on a :* $E(\lambda) = \lambda$.
4. *Pour calculer l'espérance d'un variable aléatoire, il peut-être commode de reprendre la tableau de la loi de probabilité de la façon suivante.*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	*Total*
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1
x_ip_i	x_1p_1	x_2	$\cdots$	x_np_n	*E(X)*

Exercice X.2.1. ***Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X = n)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = 7$

L'espérance mathématique de X est donc : 7. □

X.2.3.b Variance, écart type

La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. Dans une classe un devoir a été donné dans deux matières, on choisit un élève au hasard et on désigne par X sa note dans la première matière et par Y sa note dans la seconde matière. Les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-contre.

n	10
$P(X = n)$	1

n	0	20
$P(Y = n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans les deux cas l'espérance est 10 et pourtant les résultats de la classe dans les deux matières sont, en un certain sens, opposés : dans la première tous les élèves ont 10 et dans la seconde les notes sont réparties aux extrêmes.

DÉFINITIONS X.2.5

Soit X une variable aléatoire.

(1) On appelle *variance* de X le nombre réel, noté V(X), défini par : $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.

(2) On appelle *écart type* de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

1. *La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*
2. *La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.*

3. *La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.*

X.2.3.c Propriétés de l'espérance et de la variance

THÉORÈME X.2.1

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et λ un réel.

(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
(2) $E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$;
(3) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$;
(4) $E(X - E(X)) = 0$;
(5) $V(X+\lambda) = V(X)$;
(6) $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Démonstration Notons ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les éventualités et p_i les probabilités des événements élémentaires associés.

(1) On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i$ et $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i$.

De même : $E(X+Y) \sum_{i=1}^{n} (X+Y)(\omega_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} \big(X(\omega_i)p_i + Y(\omega_i)p_i\big) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i = E(X) + E(Y)$.

(2) On déduit **(2)** de **(1)** en prenant pour Y la variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$.

(3) $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda X(\omega_i)p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i = \lambda E(X)$.

(4) D'après **(2)** (avec $\lambda = -E(X)$) : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

(5) $V(X+\lambda) = E\Big(\big(X+\lambda - E(X+\lambda)\big)^2\Big) = E\Big(\big(X+\lambda - E(X) - \lambda\big)^2\Big) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = V(X)$.

(6) $V(\lambda X) = E\Big(\big(\lambda X - E(\lambda X)\big)^2\Big) = E\Big(\big(\lambda X - \lambda E(X)\big)^2\Big) = E\Big(\lambda^2\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \lambda^2 E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \lambda^2 V(X)$. □

Remarques

1. *En pratique toutes ces propriétés sont naturelles, afin de les illustrer prenons pour univers une classe où un devoir a été donné ; la moyenne de la classe est* 5 *et la variance* 3*. On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un élève et désigne par X sa note. X est une variable aléatoire et on a :* $E(X) = 5$ *et* $V(X) = 3$.

Si on décide d'ajouter 1 *point à chaque élève, alors la moyenne augmentera de* 1 *point :* $E(X+1) = E(X) + 1 = 6$.

En revanche le fait d'ajouter 1 point à chaque élève ne changera pas la façon dont les notes sont réparties autour de la moyenne, c'est-à-dire : $V(X+1) = V(X)$.

Si on décide de multiplier par 2 *la note de chaque élève, alors la moyenne sera multipliée par* 2 *elle aussi :* $E(2X) = 2E(X) = 10$. *De plus en multipliant par* 2 *les notes, on multiplie également par* 2 *les écarts à la moyenne et donc par 4 leur carré ; par conséquent :* $V(2X) = 4V(X)$.

2. *Pour donner un sens intuitif à la propriété* ***(1)*** *gardons l'exemple de la classe. Un devoir constitué d'un exercice sur* 7 *points et d'un problème sur* 13 *points à été donné. Cette fois-ci X désigne la note obtenue à l'exercice et Y la note obtenue au problème. La note obtenue au devoir est alors* $X+Y$*. La moyenne de la classe au devoir est la somme des moyennes de l'exercice et du problème :* $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

3. *On déduit des deux dernières propriétés que :* $\sigma(X+\lambda) = \sigma(X)$ *et* $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$.

4. *On déduit des propriétés* ***(1)*** *et* ***(3)*** *que pour tous réels* α, β *; on a :* $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

On dit que l'espérance est linéaire.

D'après le théorème X.2.1 l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances. Il est donc naturelle de se demander s'il n'en est pas de même pour le produit. Prenons un exemple.

On dispose de deux rectangles, les dimensions de l'un sont 2 par 3 et celles de l'autre sont 4 par 5.

On choisit un rectangle au hasard et on désigne par ℓ sa largeur et L son longueur. L'aire est donc la variable aléatoire $L\ell$.

La moyenne des largeurs est : $E(\ell) = 3$.

La moyenne des longueurs est : $E(L) = 4$.

Les aires sont 6 et 20 donc : $E(L\ell) = 13$.

On constate, ici, que : $E(L\ell) \neq E(L) \times E(\ell)$.

Nous avons précédemment remarqué que la définition de la variance ne conduisait pas à un calcul aisé. le théorème suivant remédie à cette carence.

THÉORÈME X.2.2 FORMULE DE KÖNIG [2]

Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E\big(X^2\big) - E^2(X)$.

2. KÖNIG, Johann Samuel (1712–1757)

Démonstration Par définition :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\alpha}X + \underbrace{E^2(X)}_{\beta}).$$

Donc par linéarité et d'après le propriété **(2)** du théorème X.2.1 :

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X);$$

d'où l'on tire : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$. □

Exercice X.2.2. ***Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X=n)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{21}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{18}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{6}{18}$	$E(X) = 7$
$n^2P(X=n)$	$\frac{2}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{50}{18}$	$\frac{90}{18}$	$\frac{147}{18}$	$\frac{160}{18}$	$\frac{162}{18}$	$\frac{150}{18}$	$\frac{121}{18}$	$\frac{72}{18}$	$E(X^2) = \frac{329}{6}$

La variance de X est donc : $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$.

On en déduit l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$. □

X.2.4 Variables aléatoires indépendantes

X.2.4.a Loi produit

DÉFINITION X.2.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.

La *loi couple* (X,Y) est l'application de $X \times Y$ vers $[0;1]$ qui à tout couple (x_i, y_j) associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$.

Exercice X.2.3. ***On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :***

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;} \\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{, si } \omega \text{ est un nombre premier;} \\ 10 & \text{, si } \omega \text{ n'est pas premier.} \end{cases}$$

Déterminer la loi couple (X, Y).

Solution *Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.3. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi couple (X, Y) est donc déterminée par le tableau X.4. Pour construire ce dernier, on utilise le tableau X.3 :* $(X = 1 \text{ et } Y = 5) = \{3;5\}$ *; donc :* $P(1;5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	10	5	5	10	5	10
(X,Y)(ω)	(1;10)	(0;5)	(1;5)	(0;10)	(1;5)	(0;10)

TABLE *X.3 – Images de Ω par X, Y et (X, Y).*

X \ Y	5	10
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABLE *X.4 – Loi couple de (X, Y).*

□

Remarques

1. *La loi couple est aussi appelée* loi de probabilité conjointe *ou* loi de probabilité simultanée *ou encore* loi de probabilité produit *; les probabilités contenues dans le tableau X.4 sont alors appelées* probabilités conjointes *ou* probabilités simultanées.

2. *Dans le tableau X.4 si on ajoute une ligne et une colonne « Total », on obtient le tableau X.5 où les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y apparaissent dans les marges. Ces lois sont alors appelées* lois marginales

X \ Y	5	10	Total
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{2}$	$P(Y=10)=\frac{1}{2}$	1

TABLE X.5 – Lois marginales.

X.2.4.b Variables aléatoires indépendantes

Exemples

1. *Reprenons l'exemple du § X.2.4.a. D'après le tableau X.5 on constate que les événements* $(X=0)$ *et* $(Y=5)$ *sont dépendants ; en effet :* $P(X=0 \text{ et } Y=5)=\frac{1}{6}$ *et* $P(X=0)\times P(Y=5)=\frac{1}{4}$.
On dit alors que les variables X et Y sont dépendantes.

2. *On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :*

$$X(\omega)=\begin{cases}0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;}\\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.}\end{cases}$$

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	5	5	10	10	10	10
(X,Y)(ω)	(1;5)	(0;5)	(1;10)	(0;10)	(1;10)	(0;10)

TABLE *X.6 – Images de Ω par X, Y et (X, Y)*

$$Y(\omega)=\begin{cases}5 & \text{, si } \omega \leqslant 2;\\ 10 & \text{, si } 2<\omega.\end{cases}$$

Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.6. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi conjointe et les lois marginales sont déterminée par le tableau X.7.

X \ Y	5	10	*Total*
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=1)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{3}$	$P(Y=10)=\frac{2}{3}$	1

TABLE *X.7 – Loi couple de (X, Y).*

On constate que chaque probabilités conjointe est le produit des probabilités marginales associées ; par exemple : $P(X=0 \text{ et } Y=10)=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=P(X=0)\times P(Y=10)$.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION X.2.7

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $Y(\Omega)=\{y_1,\cdots,y_q\}$ leurs univers images respectifs.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$ et tout $y\in Y(\Omega)$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants.

Remarques

1. *La condition d'indépendance peut s'écrire également, pour tout* $x\in X(\Omega)$ *et tout* $y\in Y(\Omega)$ *:*

$$P\big(X=x \text{ et } Y=y\big)=P(X=x)\times P\big(Y=y\big)$$

ou encore, pour tout $\omega\in\Omega$ *:*

$$P(X=X(\omega) \text{ et } Y=Y(\omega))=P(X=X(\omega))\times P(Y=Y(\omega))$$

2. *Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si le tableau de leur loi conjointe est un tableau de proportionnalité.*

THÉORÈME X.2.3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.

(1) $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

(2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration Le formalisme utilisé dans cette démonstration n'est pas au programme de terminale, c'est démonstration peut donc être omise en première lecture et est de toute façon réservée à des lecteurs motivés.

(1)
$$\begin{aligned} E(X) \times E(Y) &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x) \right) \times E(Y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times E(Y) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[x\,P(X=x) \times \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,P(Y=y) \right] \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times y\,P(Y=y) \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \left[xy\,P(X=x \text{ et } Y=y) \right] \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

(2) **(2)** se déduit de **(1)** en utilisant la linéarité de l'espérance et la formule de König.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 && \text{(formule de König)} \\ &= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E(X)+E(Y)\right)^2 \\ &= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E^2(X)+E^2(Y)+2E(X)E(Y)\right)^2 \\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) && \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) && \text{(d'après 1)} \\ &= V(X) + V(Y) && \text{(formule de König)} \end{aligned}$$

□

X.3 Lois de probabilités discrètes

X.3.1 Loi binomiale

X.3.1.a Schéma de Bernoulli

DÉFINITION X.3.1

On appelle *épreuve de Bernoulli* une épreuve à deux issues possibles.

Exemple *On lance un dé bien équilibré et on cherche à faire un* 1. *Désignont par S l'événement : « obtenir* 1 *» ; et par* $\overline{S}$ *l'événement contraire. On a ici :* $P(S) = \frac{1}{6}$ *et* $P\left(\overline{S}\right) = \frac{5}{6}$.

Remarque *Il est d'usage d'appeler succès l'issue recherchée et de la noter S.*

DÉFINITION X.3.2

On appelle *expérience* ou *schéma de Bernoulli* la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

X.3.1.b Loi binomiale

DÉFINITION X.3.3

On appelle *loi binomiale* de paramètres n et p la loi de probabilité de la variable aléatoire désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'épreuve de Bernoulli a été répétée n fois et où la p désigne la probabilité de succès à une épreuve.

Notations et vocabulaire *Cette loi de probabilité est notée :* $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple *Reprenons le jeu de dés où il faut faire un as. On lance quatre fois le dé et on et on désigne par X le nombre de succès. la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres* 4 *et* $\frac{1}{6}$. *Déterminons la probabilité de l'événement* $(X=2)$.
On a : $(X=2) = \left\{(S,S,\bar{S},\bar{S}), (S,\bar{S},\bar{S},S), (S,\bar{S},S,\bar{S}), (\bar{S},S,S,\bar{S}), (\bar{S},S,\bar{S},S), (\bar{S},\bar{S},S,S)\right\}$.
Considérons les événements S_1, $\bar{S}_1$, …, S_4, $\bar{S}_4$ *où, par exemple,* S_3 *désigne l'événement : « obtenir un succès au troisième lancé ». On a alors :* $\left\{(S,S,\bar{S},\bar{S})\right\} = S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4$. *Les résultats des différents lancés sont indépendants donc :*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\mathrm{S},\mathrm{S},\bar{\mathrm{S}},\bar{\mathrm{S}}\right) &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\cap\mathrm{S}_2\cap\bar{\mathrm{S}}_3\cap\bar{\mathrm{S}}_4\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)\times\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{S}}_3\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{S}}_4\right)\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\\ &= \frac{25}{6^4}\end{aligned}$$

On démontre de même que les quatre événements élémentaires qui constituent l'événement (X = 2) *ont tous pour probabilité* $\frac{25}{6^4}$ *; on déduit que :* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = 4\times\frac{25}{6^4} = \frac{25}{324}$.

plus généralement, dans la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, la probabilité d'échec à une épreuve est : $q = 1-p$. Considérons l'événement (X = k) où $0 \leqslant k \leqslant n$. pour réaliser un tel événement, il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs. On peut donc choisir les k épreuves parmi n où on aura un succès et pour les $n-k$ épreuves restantes on aura un échec. Il y a donc $\binom{n}{k}$ éventualités qui réalisent l'événement. De plus chaque événement élémentaire inclus dans l'événement (X = k) a pour probabilité : $p^k q^{n-k}$; on en déduit que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

THÉORÈME X.3.1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

(1) Pour tout entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$; on a :$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

(2) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$.

(3) $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = npq$.

Démonstration **(1)** La propriété **(1)** a été démontrée dans l'étude ci-dessus.

(2) Calculons E(X). Par définition :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, car pour } k=0 \text{ le terme est nul}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left(n-1-(k-1)\right)!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} && \text{, posons : } i=k-1\\ &= np\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\left((n-1)-i\right)!}p^i q^{(n-1)-i}\\ &= np(p+q)^{n-1} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= np\end{aligned}$$

(3) Calculons V(X). On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}^2(\mathrm{X}) && \text{, par le formule de König}\\ &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}^2(\mathrm{X}) && \text{, par linéarité de l'espérance}\\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\right)+np-n^2p^2 && \text{, d'après } \textbf{(2)}\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\right) &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, par définition de } \mathscr{B}(n,p)\\ &= \sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, car les deux premiers termes de la somme sont nuls.}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\left((n-2)-(k-2)\right)!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)} && \text{,posons : } i=k-2\\ &= (n^2-n)p^2\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{i!\left((n-2)-i\right)!}p^i q^{(n-2)-i}\\ &= (n^2-n)p^2(p+q)^{n-2} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= n^2p^2-np^2\end{aligned}$$

On en déduit que : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = n^2p^2-np^2+np-n^2p^2 = np(1-p) = npq$. □

Remarque *En utilisant la formule du binôme de Newton, on vérifie que la somme des probabilités de la loi binomiale est 1.*

X.3.2 Loi de Poisson [3] (complément)

La loi de Poisson n'est pas au programme ; cette étude est donc réservée à des lecteurs motivés et permet de donner plus de sens à la loi exponentielle.

X.3.2.a Calculs préliminaires

Exercice X.3.1. *Soit λ un réel.*

1. On se propose de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = 0$.

a. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n_0 > |\lambda|$, vérifier que pour tout entier $n > n_0$:

$$\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right| \leqslant \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^n \left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^{-n_0}.$$

(On pourra remarquer que : $\dfrac{\lambda^n}{n!} = \dfrac{\lambda^{n_0}}{n_0!} \times \dfrac{\lambda}{n_0+1} \times \dfrac{\lambda}{n_0+2} \times \cdots \times \dfrac{\lambda}{n}$*)*

b. Conclure.

2. Désormais λ est strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère l'intégrale :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda (\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

a. Calculer I_1.

(On pourra utiliser une intégration par parties.)

b. Démontrer que pour tout $t \in [0;\lambda]$, on a :

$$\left|(\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^t\right| \leqslant (\lambda - t)^n \, \mathrm{e}^\lambda.$$

c. En déduire que :

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \mathrm{e}^\lambda \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n+1} + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}.$$

a. Démontrer que la suite $(u_n + \mathrm{I}_n)$ est constante.

b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \mathrm{e}^\lambda. \tag{X.1}$$

X.3.2.b Introduction

1re situation

Dans un petit port de pêche, il y a vingt pêcheurs ; chaque pêcheur a un bateau. Une étude statistique a montré que chaque soir entre 17 heure et 20 heure il rentre au port, en moyenne, trois bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 18 h 30 et 19 h 30 il rentre quatre bateaux au port ?

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On suppose que les heures de retour au port des différents bateaux sont indépendantes. On désigne par p la probabilité pour qu'un bateau donné rentre au port entre 18 h 30 et 19 h 30. On désigne par X le nombre de bateaux qui rentrent port entre 18 h 30 et 19 h 30. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres 20 et p. L'espérance de X est alors $20p$ mais on sait que cette espérance est trois. Par conséquent : $p = \dfrac{3}{20}$.
On en déduit que : $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = \binom{20}{4} p^4 (1-p)^{16} = 0,182\cdots$.

2e situation

Dans un complexe portuaire, une étude statistique a montré que chaque matin entre 8 heure et 12 heure il entre, en moyenne, λ bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 9 h 30 et 10 h 30 il entre k bateaux dans le complexe ?

3. Poisson, Siméon-Denis (1781–1840)

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On désigne par n le nombre de bateaux à travers le monde qui pourraient un jour entré dans le complexe portuaire ; par p la probabilité pour que l'un donné d'entre eux entre dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30 et par X le nombre de bateaux qui entrent dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30. On suppose que les heures d'entrée des n bateaux qui pourraient, un jour, entrer dans le port sont indépendantes. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres n et p ; c'est-à-dire : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. L'espérance de X est alors np mais on sait que cette espérance est λ. Par conséquent : $p = \dfrac{\lambda}{n}$.

On en déduit que : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Malheureusement, en pratique, on ne connaît pas n. On sait seulement qu'il est grand et que k est petit devant lui ; c'est la raison pour laquelle on décide de définir la nouvelle loi de probabilité, si cela a un sens : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k)$.

On a donc : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n-1} \times \cdots \times \frac{n}{n+k-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Pour tous entiers n et j tels que : $0 \leqslant j < n$, on a : $\dfrac{n}{n-j} = \dfrac{1}{1-\frac{j}{n}}$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-j} = 1$.

Par produit de $k-1$ facteurs, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{n}{n+k-1} = 1$.

Par construction de la fonction exp, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$;

de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{u\to 1} u^{-k} = 1$; donc par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$.

Donc par produit des limites :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On doit maintenant vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Or, d'après (X.1) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda}$; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 1$.

DÉFINITION X.3.4

On dit qu'une loi de probabilité a pour loi de probabilité la *loi de Poisson* lorsque son univers image est $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exemples

1. *Dans l'exemple du complexe portuaire, s'il arrive* 53,8 *bateaux à l'heure, la probabilité pour qu'il arrive* 65 *bateaux entre 9 h 30 et 10 h 30 est :* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=65) = \mathrm{e}^{-53,8}\dfrac{53,8^{65}}{65!} = 0,16\cdots$

Remarque *La loi de poisson est généralement utilisée pour modéliser le comptage d'événements rares dans le temps, comme par exemple : le nombre de particules émises par une substance radioactive ou le nombre d'erreurs enregistrées par un central téléphonique ; ou dans l'espace, comme par exemple : le nombre de bactéries dans une préparation microscopique.*

X.3.2.c Espérance et Variance

D'après la construction utilisée il semblerait cohérent que, dans la loi de Poisson, l'espérance soit λ.

THÉORÈME X.3.2

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi de Poisson de paramètre λ.

(1) $E(X) = \lambda$.

(2) $V(X) = \lambda$.

Démonstration

(1) Par définition l'espérance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a : $\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!}$.

On sait que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$; donc : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$. Donc : $E(X) = \lambda$.

(2) Par définition la variance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n}(k-\lambda)^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus : $\sum_{k=0}^{n}(k-\lambda)^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) - 2\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2\,e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$.

D'après les calculs précédents, on a par produit et par somme : $\lim_{n\to+\infty}\left[-2\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2\,e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\right)\right] = -2\lambda^2 + \lambda^2 = -\lambda^2$.

On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

On sait que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$; donc : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2+\lambda$. Donc : $V(X) = \lambda$.□

X.4 Lois de probabilités continues

X.4.1 Intégrales généralisées

X.4.1.a Activité

Exercice X.4.1. ***On considère la fonction,*** $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2-1}$, ***définie sur*** $]1;+\infty[$ ***et la fonction*** $F : x \longmapsto \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ? Que représente F pour f ?

2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x > 1$: $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

3. Calculer $F(x)$ ***en fonction de*** x.

4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

X.4.1.b Définition

Habituellement, lorsqu'on calcul, $\int_a^b f(t)\,dt$, a et b sont des nombres réels et f est une fonction continue sur $[a;b]$. On se propose d'étendre, par passage à la limite, la définition de l'intégrale au cas (lorsque cela est possible) où l'une au moins des bornes est infinie ou la limite en l'une au moins des bornes est infinie. De telles intégrales sont dites impropres.

DÉFINITION X.4.1

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Si f est continue sur $[a;+\infty[$ (sauf peut-être en nombre finis de réels où elle admet une limite à droite et une limite à gauche) et si la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$; admet une limite finie, ℓ, en $+\infty$; alors on écrit : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \ell$.

Remarques

1. *Lorsque l'intégrale a une limite finie, elle est dite convergente.*

2. *Lorsque l'intégrale n'a pas de limite ou que sa limite est infinie, elle est dite divergente.*

3. *On définit de même, lorsqu'elle existe,* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice X.4.2. ***Démontrer que*** $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ***est définie et calculer sa valeur.***

Solution *La fonction* $f : x \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*), paire et positive sur* $\mathbb{R}$*. Considérons la fonction F définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f *est paire, donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{F}(-x) = \int_0^{-x} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{F}(x).$$

La Fonction F est impaire.
Pour $x > 0$*, les éléments de* $[0\,;x]$ *sont positif, et on a alors :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x -2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{e}^{-x^2} = 0$ *; donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

La fonction F est impaire, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} = \mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}$ *; c'est-à-dire :* $\int_0^{-\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}$ *; d'où il vient :*

$$\int_{-\infty}^0 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Par somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

X.4.2 Généralités sur lois de probabilités continues

X.4.2.a Densité de probabilité

DÉFINITION X.4.2
Une *densité de probabilité* sur un intervalle I est une fonction f continue sur I (sauf peut-être en nombre fini d'éléments où elle admet une limite à droite et une limite à gauche), positive sur I et telle que : $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Exemples

1. *D'après l'étude menée en activité à l'exercice X.4.1., la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ *est continue et positive sur* $[2\,;+\infty[$*, de plus :* $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\ln 3}\int_2^{+\infty} \dfrac{2\mathrm{d}t}{t^2-1} = 1$ *; donc* f *est une densité de probabilité sur* $[2\,;+\infty[$.

2. *D'après l'étude menée à l'exercice X.4.2., la fonction* $g : x \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue et positive sur* $\mathbb{R}$*, de plus :* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ *; donc g est une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}$.

X.4.2.b Loi de probabilité continue

DÉFINITION X.4.3
Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I. La loi de probabilité associée à f est la loi définie pour tout intervalle, J, inclus dans I par : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque *Si X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité f alors l'univers image de X est I.*

Exemple *Considérons la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$. Si une variable aléatoire X a pour loi de probabilité la loi associée à g, alors :*

$$\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2) = \int_1^2 |t|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-4}}{2}$$

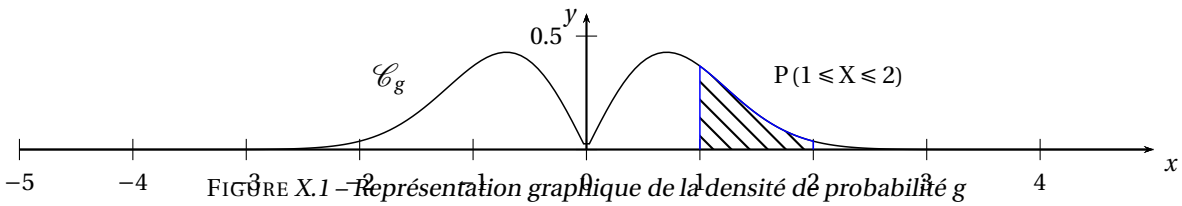


FIGURE *X.1 – Représentation graphique de la densité de probabilité g*

Exercice X.4.3. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \frac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$.***

Calculer la probabilité de l'événement $3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4$.

Solution *On a :* $\mathrm{P}(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4) = \displaystyle\int_3^4 \frac{2\mathrm{d}t}{(\ln 3)(t^2-1)} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_3^4 = \frac{\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{2}{4}}{\ln 3} = 1+\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 3}$ □

X.4.2.c Espérance et variance d'une loi de probabilité continue

L'étude menée dans ce paragraphe n'est pas au programme mais peut aider de bons élèves à mieux comprendre les théorèmes…

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	x_1	x_2	⋯	x_n
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	p_1	p_2	⋯	p_n

On sait que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Lorsque cela est possible, on étend au cas d'une variable aléatoire continue de densité de probabilité, f, définie sur un intervalle, I, ces définition par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} t f(t)\,\mathrm{d}\,t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Remarques

1. *Si l'intégrale définissant l'espérance est divergente, alors l'espérance n'est pas définie.*

2. *Si l'intégrale définissant la variance est divergente, alors la variance n'est pas définie.*

3. *Si l'espérance de X n'est pas définie, alors la variance de X n'est pas définie non plus.*

Exercice X.4.4. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \frac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$. L'espérance et la variance de X sont-elles définies ?***

Solution *Pour $x > 2$, on a :* $\displaystyle\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\ln 3}\int_2^x \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(t^2-1\right)\right]_2^x$.

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}\,t = +\infty$.

Ni l'espérance ni la variance de X ne sont définies. □

Exercice X.4.5. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$.***

Déterminer l'espérance et la variance de X (on pourra utiliser wxMaxima).

Solution *La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout nombre réel t : $g(-t) = |-t|\mathrm{e}^{-(-t)^2}) = |t|\mathrm{e}^{-t^2} = g(t)$. La fonction g est donc paire et la fonction, $t \longmapsto tg(t)$, est impaire comme produit d'une fonction impaire par une fonction paire. On en déduit que l'intégrale, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} tg(t)\,\mathrm{d}\,t$, est nulle si elle est convergente.*

```
Maxima 5.16.3 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp CLISP 2.44.1 (2008-02-23)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1)    g(t):=abs(t)*exp(-t^2);
```
(%o1) $$g(t) := |t| \exp\left(-t^2\right)$$
```
(%i2)    assume(x>0);
```
(%o2) $$[x > 0]$$
```
(%i3)    integrate(t*g(t),t,0,x);
```
(%o3) $$\frac{e^{-x^2}\left(\sqrt{\pi}\, e^{x^2} \operatorname{erf}(x) - 2x\right)}{4}$$
```
(%i4)    limit(%,x,inf);
```
(%o4) $$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Donc l'intégrale est convergente et l'espérance est nulle.

Si la variance est définie, on a : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t$, *par parité.*

```
(%i5)    integrate(t^2*g(t),t,0,x);
```
(%o5) $$\frac{1}{2} - \frac{\left(x^2+1\right) e^{-x^2}}{2}$$
```
(%i6)    limit(%,x,inf);
```
(%o6) $$\frac{1}{2}$$

La variance de X est donc définie et vaut 1. □

X.4.3 Loi uniforme

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité est constante sur $[a\,;b]$ et nulle à l'extérieur de cet intervalle. Désignons par k la valeur de cette constante. On a :

$$1 = \int_{[a\,;b]} k\,\mathrm{d}\,t = k(b-a).$$

On en déduit que : $k = \dfrac{1}{b-a}$.

DÉFINITION X.4.4

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité de probabilité, f, est définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [a;b] \end{cases}$

X.4.4 Loi exponentielle

X.5 Adéquation à la loi équirépartie

On lance un dé usuel 100 fois. On obtient les résultats suivants :

chiffres	1	2	3	4	5	6
effectifs	20	17	12	19	11	21

On aimerait savoir en quel sens on peut considérer ce dé équilibré ou non. Le test à mettre en place ne doit pas être destructeur, il est donc forcément un test statistique. Il ne pourra donc pas être fiable à cent pour cent ; en effet, même avec un dé parfaitement équilibré la probabilité d'obtenir 100 fois le chiffre 1, bien qu'infime, n'est pas nulle. Ainsi rejeter un dé, c'est prendre le risque de rejeter un dé équilibré et accepter un dé, c'est prendre le risque d'accepter un dé déséquilibré. Examinons le tableau des fréquences.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	20%	17%	12%	19%	11%	21%

On constate qu'il y a un écart certain avec le tableau des fréquences idéal.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Doit-on imputer cet écart à un déséquilibre du dé ou à une fluctuation d'échantillonage ? Pour ce faire une idée on aimerait calculer une « distance », d, entre la répartition des fréquences obtenues et la répartition des fréquences idéale. Mais en utilisant le théorème de Pythagore, on sait que les carrés de distances sont plus faciles à calculer que les distances elles-mêmes, on décide donc de calculer le nombre, d^2, défini par :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(f_i - \frac{1}{6} \right)^2$$

où f_i désigne la fréquence observée du chiffre i. Effectuons les premiers calculs avec *wxMaxima*. Désignons par `fo` la liste des fréquences observées.

```
(%i7)    fo:[20,17,12,19,11,21];
```
$$[20,17,12,19,11,21]$$
```
(%i8)    fo:fo/100;
```
$$[\frac{1}{5},\frac{17}{100},\frac{3}{25},\frac{19}{100},\frac{11}{100},\frac{21}{100}]$$
```
(%i9)    d2:apply("+",(fo-1/6)^2);
```
$$\frac{67}{7500}$$
```
(%i10)    float(d2);
```
$$0.0089333333333333$$

Nous avons maintenant une valeur pour d^2, mais cette valeur est pour l'instant inutilisable car nous n'avons aucune valeur de référence.

On fixe donc un seuil d'erreur, par exemple 10%. Ce seuil représente le risque de rejeter à tort l'hypothèse d'équiprobabilité dans 10% des cas les plus rares. L'idéal serait de prendre comme univers l'ensemble de tous les échantillons de 100 lancers de dé possibles, de munir cet univers de la loi équirépartie, de calculer d^2 pour chaque échantillon, de classer tous ces d^2 par ordre croissant et de rejeté les 10% ayant les plus grande valeur. Ont déterminerait donc le 9e décile, D_9, de la série des d^2 et là deux cas seraient envisageables. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est inférieure à D_9 alors *les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de* 10%. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est supérieure à D_9 alors *on rejette l'hypothèse de la compatibilité des données observées avec un modèle équiréparti au seuil de risque de* 10%.

En pratique, $\omega = [\![1;6]\!]^{100}$, donc, $\text{card}(\Omega) = 6^{100} = 6,5\cdots \times 10^{77}$.

Il n'est pas envisageable d'effectuer les calculs nécessaires en un temps raisonnable avec les ordinateurs dont nous disposons pour déterminer D9.

Pour déterminer D9 nous allons simuler sur un tableur un nombre suffisant de séries aléatoires (suivant la loi équirépartie) de cent lancers de dé, pour chaque série on calculera d^2, puis on calculera le 9e décile de la série des d^2. Nous obtenons les résultats suivants.

nombre de séries	300	500	1000	2000
Minimum	0,000733	0,000533	0,000533	0,000333
Q1	0,004333	0,004533	0,004533	0,004533
Médiane	0,007133	0,007533	0,007333	0,007133
Q3	0,010533	0,011133	0,010733	0,010533
D9	0,014733	0,014933	0,014733	0,014733
C95	0,017733	0,017733	0,017333	0,017333
Maximum	0,0299333	0,0337333	0,0351333	0,0351333

Nous constatons que D_9 semble se stabiliser dès mille séries de cents lancers sur la valeur : 0,014 733. Nous prendrons donc cette valeur comme référence. On a, $0,00893\cdots < 0,014733$, on peut donc affirmer : « les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de 10% ».

Chapitre XI

Barycentre

XI.1 Barycentre

Les considérations envisagées dans cette partie sont valables dans le plan et dans l'espace. L'ensemble $\mathscr{W}$ désignera, suivant les besoins du lecteur, le plan $\mathscr{P}$ ou l'espace $\mathscr{E}$.

XI.1.1 Introduction

DÉFINITIONS XI.1.1

(1) Un *point pondéré* est un couple (A, α) où A est un point et α un nombre, appelé coefficient ou masse.

(2) Un *système de points pondérés* est une collection de points pondérés dans laquelle un même point pondéré peut apparaître plusieurs fois.

(3) La *masse* d'un système de points pondérés est la somme des coefficients.

Remarque *La différence entre un système et un ensemble est que dans un ensemble, un même objet ne peut pas apparaître plusieurs fois.*

Exemple *Soit A, B, C trois points de $\mathscr{W}$,*

$$\big\{(A,1),(B,-2),(C,\pi),(B,-2)\big\}$$

est un système de points pondérés de masse $\pi-3$.

XI.1.2 Activités

M ou N désignent des points variables et A, B, C ... des points fixes.

Exercice XI.1.1. ***1. Simplifier :*** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

2. On considère le système de points pondérés $\{(A,2),(B,2)\}$. ***La fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est*** $\vec{f}: M \mapsto 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$.
I désigne le milieu du segment $[AB]$.

a. Simplifier $\vec{f}(M)$.

b. Soit $\vec{g}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée à*** $\{(I,4)\}$.
Que peut-on dire de $\vec{f}$ ***et*** $\vec{g}$ ***?***

Exercice XI.1.2. ***Deux systèmes de points pondérés sont dits équivalents lorsque leurs fonctions vectorielles de Leibniz sont égales. Soit ABC un triangle et*** $\vec{f}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée au système*** $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

1. Donner l'expression de $\vec{f}(M)$.

2. Démontrer que pour tous points M et N de $\mathscr{W}$ ***:***

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(N)+3\overrightarrow{MN}.$$

3. Résoudre l'équation $\vec{f}(M)=\vec{0}$.

4. Déterminer un système réduit à un seul point pondéré équivalent à $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

5. Quel lien existe-t-il entre $\vec{f}$ ***et la fonction vectorielle de Leibniz,*** $\vec{g}$***, associée à*** $\{(A,2),(B,2),(C,2)\}$.

Le point G, centre de gravité de ABC, est aussi appelé isobarycentre des points A, B, C.

Exercice XI.1.3. ***ABCD est parallélogramme de centre I. On considère le système S :*** $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$ ***; et*** $\vec{f}$ ***sa fonction vectorielle de Leibniz associée.***

Lorsqu'un système a une masse non nulle, l'unique solution de l'équation $\vec{f}(M)=\vec{0}$ est appelée barycentre du système.

1. Déterminer le barycentre de S.

2. Simplifier $\vec{f}(M)$.

3. Que peut-on dire des systèmes $\{(A,1),(C,1)\}$ et $\{(I,2)\}$

4. Que peut-on dire des systèmes S et S′ : $\{(I,2),(B,-1)\}$

5. Justifier que S et S′ ont le même barycentre.

6. Plus généralement énoncer un théorème.

Exercice XI.1.4. ***ABCD est un parallélogramme de centre I. On considère les systèmes $\{(A,-2),(B,1)(C,1)\}$ et S′ : $\{(A,1),(B,-1),(C,1),(D,-1)\}$; ainsi que leurs fonctions vectorielles de Leibniz respectives $\vec{f}$ et $\vec{f}'$.***

1. Préciser la masse des systèmes S et S′.

2. Démontrer que $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ sont des fonctions constantes.

3. Résoudre $\vec{f}(M)=\vec{0}$ puis $\vec{f}'(M)=\vec{0}$.

4. Énoncer un théorème sur les systèmes de points pondérés de masse nulle et les fonctions vectorielles de Leibniz constantes.

XI.1.3 Définition et propriétés

DÉFINITION XI.1.2

Soit $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérés. La fonction vectorielle de LEIBNIZ qui lui est associée est la fonction, $\vec{f}$, qui à tout point M de $\mathscr{W}$ associe le vecteur $\vec{f}(M)$ défini par :

$$\vec{f}(M)=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\,.$$

Exemple *Soit A et B deux points de $\mathscr{W}$, I le milieu du segment [AB] et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de* LEIBNIZ *associée au système* $\{(A,2),(B,2)\}$. *Pour tout point M de $\mathscr{W}$:*

$$\vec{f}(M)=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}=4\overrightarrow{MI} \tag{XI.1}$$

En particulier : $\vec{f}(I)=\vec{0}$; $\vec{f}(A)=4\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{f}(A)=4\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AB}$.

THÉORÈME XI.1.1

Soit $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse $m\left(m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$ et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.

(1) Si $m\neq 0$, il existe un unique point G de $\mathscr{W}$ vérifiant : $\vec{f}(G)=\vec{0}$.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(M)=m\overrightarrow{MG}$.

(2) Si $m=0$, alors $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante.

Démonstration Pour tous points M et N de $\mathscr{W}$, on a :
$\vec{f}(M)-\vec{f}(N)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MA_i}-\overrightarrow{NA_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{NM}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\right)\overrightarrow{NM}=m\overrightarrow{NM}$;
donc :

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(N)+m\overrightarrow{MN} \tag{XI.2}$$

Soit A un point fixé. En prenant : N = A, il vient pour tout point M de $\mathscr{W}$:

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(A)+m\overrightarrow{MA} \tag{XI.3}$$

Si $m\neq 0$

EXISTENCE DE G Introduisons le point G tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{m}\vec{f}(A)$.
En utilisant (XI.3) avec : M = G, il vient :

$$\vec{f}(G)=\vec{f}(A)+m\overrightarrow{GA}=\vec{f}(A)-\vec{f}(A)=\vec{0}.$$

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE Pour tous points M de $\mathscr{W}$, en utilisant (XI.2) avec : N = G, il vient :

$$\vec{f}(M)=\vec{f}(G)+m\overrightarrow{MG}=\vec{0}+m\overrightarrow{MG}=m\overrightarrow{MG}\,.$$

UNICITÉ DE G D'après la formule précédente, puisque $m \neq 0$, pour tout point M du plan :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0} \iff m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \mathrm{M} = \mathrm{G}.$$

Si $m = 0$
Pour tous points M de $\mathscr{W}$, d'après (XI.3) :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{f}(\mathrm{A}).$$

Donc $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante. □

Le théorème XI.1.1 justifie la définition suivante.

DÉFINITION XI.1.3
Soit $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse non nulle.
L'unique point, G, vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{GA}_n};$$

est appelé *barycentre* du système.

Notations et vocabulaire *On peut alors écrire :*

$$\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$$

*Si de plus tous les coefficients sont égaux, ont dit que G est l'*isobarycentre *des points* $A_1, \cdots, A_n$.

Remarques
1. *Un système dont la somme des coefficients est nulle n'a pas de barycentre.*
2. *Lorsqu'on évoquera le barycentre d'un système, si cela n'est pas explicitement précisé, il sera sous-entendu que la masse, m, du système est non nulle.*
3. *Si $m \neq 0$, le système $\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ est équivalent à $\{(\mathrm{G}, m)\}$.*
On en déduit que deux systèmes de masses non nulles sont équivalents si et seulement si ils ont le même barycentre et la même masse.
4. *Deux systèmes de masses nulles ne sont pas nécessairement équivalents.*

Exemple
Considérons le système composé de deux boules homogènes de même masse, m, reliées par une tige rigide et sans masse de longueur ℓ. Ce système est équivalent à une masse ponctuelle de masse $2m$ placé au centre, I, de la tige.

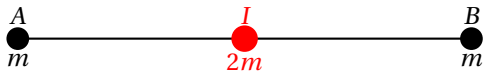


FIGURE XI.1 –

Exercice XI.1.5. ***A, B, C, D sont des points fixés de $\mathscr{W}$ et M est un point variable. Simplifier les écritures.***
a. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
b. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
c. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.
d. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

Solution
a. *Introduisons l'isobarycentre, G, des points A, B et C. Il vient par réduction, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.
b. *On reconnaît une fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de masse nulle. Cette fonction est donc constante, (en calculant l'image de C) pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.
En calculant l'image de A on aurait obtenu, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:* $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
c. *On reconnaît la fonction vectorielle de Leibniz associée au système* $\{(\mathrm{A}, 3), (\mathrm{B}, 5), (\mathrm{C}, -4), (\mathrm{D}, 6),\}$ *de masse* 10. *On a :* $10 \neq 0$ *; ce système a donc un barycentre que nous appellerons* G_1 *; il vient par réduction, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = 10\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$.
d. *De même qu'en* ***b.****, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ *:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BA}} - 4\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. □

Remarque *Les systèmes associés aux questions* ***b.*** *et* ***d.*** *ont une masse nulle, on ne peut donc pas introduire de barycentre.*

XI.1.4 Propriétés

THÉORÈME XI.1.2 HOMOGÉNÉITÉ

On ne change pas le barycentre d'un système en multipliant tous ces coefficients par une même constante non nulle.

Démonstration Soit G le barycentre d'un système $\{(A_i,\alpha_i)\mid i\in[\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle et λ un réel non nul.

On a : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$; donc : $\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\lambda\vec{0}=\vec{0}$. □

THÉORÈME XI.1.3

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et a, b, c, d quatre nombres réels tels que :
$a+b\neq 0$; $a+b+c\neq 0$; $a+b+c+d\neq 0$.

(1) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b)\}$ est le point d'abscisse $\dfrac{b}{a+b}$ sur la droite (AB) munie du repère (A, B).

(2) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c};\dfrac{c}{a+b+c}\right)$ sur le plan (ABC) muni du repère (A, B, C).

(3) Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c+d};\dfrac{c}{a+b+c+d};\dfrac{d}{a+b+c+d}\right)$ dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D).

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit G le barycentre du système. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a par réduction de somme de Leibniz :

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}.$$

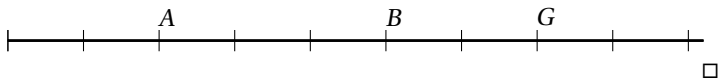
Pour M = A, on en déduit que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Exercice XI.1.6. ***A et B sont deux points tels que*** **AB = 3.** ***Placer le barycentre G du système*** **{(A, −2), (B, 5)}.**

Solution *G est le point d'abscisse* $\dfrac{5}{3}$ *sur la droite* (AB) *munie du repère* (A, B).



□

Exercice XI.1.7. ***Le plan est muni du repère*** $(O;\vec{i},\vec{j})$ ***. On considère les points*** **A(1 ; −1),** ***B(5 ;-1) et*** **C(2; 2).**
Placer le point, G, barycentre du système **{(A, −5), (B, 9), (C, 8)}**

Solution *La masse du système est* 12, *donc par homogénéité :* $G=\text{bar}\left\{\left(A;-\dfrac{5}{12}\right),\left(B;\dfrac{3}{4}\right),\left(C;\dfrac{2}{3}\right)\right\}$. *Nous en déduisons que G est le point de coordonnées* $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{2}{3}\right)$ *dans le repère* (A, B, C). □

THÉORÈME XI.1.4

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et x, y, z trois nombres réels.

(1) Sur la droite (AB) munie du repère (A, B), le point d'abscisse x est le barycentre du système $\{(A,1-x),(B,x)\}$.

(2) Dans le plan (ABC) muni du repère (A, B, C) le point de coordonnées $(x;y)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y),(B,x),(C,y)\}$.

(3) Dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D)le point de coordonnées $(x;y;z)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y-z),(B,x),(C,y)(D,z)\}$.

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit M$(x;y)$ dans le repère (A,B,C). On a :

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{MC}.$$

On en déduit que :

$$(1-x-y)\overrightarrow{MA}+x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes XI.1.3 et XI.1.4.

COROLLAIRE XI.1.5

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires

(1) L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

(2) L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

(3) L'ensemble des barycentres des points A, B, C et D est l'espace $\mathscr{E}$.

Démonstration Démontrons par exemple **(2)**.

D'après le théorème XI.1.3 tout barycentre de A, B, C est un point de (ABC).
D'après le théorème XI.1.4 tout point de (ABC) est un barycentre de A, B, C.
Donc, l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). □

THÉORÈME XI.1.6 ASSOCIATIVITÉ

Dans un système de points pondérés, lorsqu'on remplace un sous-système par un sous-système équivalent, on obtient un système équivalent.

Démonstration Soit un système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$, $\vec{f}$ la fonction vectorielle de LEIBNIZ associée et $\{(B_j,\beta_j) \mid j \in [\![1,p]\!]\}$ un système équivalent au système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,q]\!]\}$ (avec $0 < q < n$).
Nous devons démontrer que les systèmes $\{(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_q,\alpha_q),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ et $\{(B_1,\beta_1),\cdots,(B_p,\beta_p),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ ont la même fonction vectorielle de LEIBNIZ.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a : $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{MB_j}$.
Donc, pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{MB_j} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ □

Remarque *Le théorème XI.1.6 signifie, entre autre, qu'on ne change pas le barycentre d'un système en remplaçant un sous-système par un sous-système équivalent.*

Exercice XI.1.8. ***Soit ABC un triangle et a, b, c trois réels tels que : $a+b \neq 0$; $b+c \neq 0$; $c+a \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$. On considère les points A′, B′ et C′, barycentres respectifs des systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$.***

1. Justifier l'existence des points A′, B′ et C′.

2. Démontrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en un point qu'il conviendra de préciser.

Solution ***1.*** *Les systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$; sont chacun de masse non nulle, donc leurs barycentres existent.*

2. *Posons : $G = \text{bar}\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$.*
Par associativité, on a : $G = \text{bar}\{(A,a)(A',b+c)\} = \text{bar}\{(B,b),(B',a+c)\} = \text{bar}\{(C,c),(C',a+b)\}$.
Donc G appartient à la fois aux trois droites :
G est le point de concours des droites (AA′), (BB′) et (CC′). □

THÉORÈME XI.1.7

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Pour $i \in]\!]1;n[\!]$ on considère des points $A_i(x_i;y_i;z_i)$ et G le barycentre du système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse m non nulle.

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i \end{cases}$

Démonstration Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$m\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}.$$

Pour M = O, on en déduit que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Remarque *Dans le plan on a de même :* $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \end{cases}$

DÉFINITION XI.1.4

Soit f une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même.
On dira que f conserve les barycentres si pour tout système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle m et de barycentre G, le système $\{(f(A_i),\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ a pour barycentre $f(G)$.

Les isométries ont été vues en classe de Seconde, les homthéties seront vues à la fin de l'année scolaire et les similitudes seront vues en enseignement de spécialité en classe de Terminale. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME XI.1.8

(1) Les isométries (translations, rotations, réflexions …), les homothéties et plus généralement les similitudes conservent le barycentre.
(2) Les projections conservent le barycentre.

XI.1.5 Exercices

XI.1.a. ABC est un triangle. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.

Index

affixe, 80
arbre pondéré, 137

barycentre, 155
base
    d'une exponentielle, 62
binôme de NEWTON, 127
borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
borne inférieure d'une suite, 32
borne supérieur d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
borne supérieur d'une suite, 32

$\mathbb{C}$, 78
cardinal, 121
centre de symétrie d'une courbe, 11
composée
    d'une suite par une fonction, 32
coordonnées polaires, 81
courbe intégrale, 65

dérivée n-ième d'une fonction, 73
densité de probabilité, 149
discriminant, 20

écart type, 140
épreuve de Bernoulli, 144
équation
    différentielle, 65
espérance mathématique, 140
événement(s), 131
    élémentaire, 131
    certain, 131
    impossible, 131
    indépendants, 134
éventualité, 131

imaginaire
    pur, 78
inégalité
    de Bernoulli, 7
intégrale
    d'une fonction constante, 100
    d'une fonction continue, 108
    d'une fonction en escalier, 101
    impropre, 148
isobarycentre, 155
issue, voir éventualité

König(formule de), 141

logarithme
    décimal, 63
    de base a, 63
    népérien, 59
loi
    uniforme, 151
loi de probabilité, 139
    binomiale, 144
    conjointe, 143
    couple, 142
    marginale, 143
    simultanée, 143

majorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
mantisse, 64
minorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 31
MOIVRE (formule de), 84
moyenne
    arithmétique, 38
    géométrique, 40

nombres complexes
    arguments, 82
    conjugué, 78
    définition, 78
    forme algébrique, 78
    forme trigonométrique, 83
    inverse, 79
    point image, 80
    quotient, 79
    vecteur image, 80

ordre d'une équation différentielle, 65

partition, 65, 121
point pondéré, 153
première bissectrice, 33, 54
probabilité(s), 132
    conditionnelle, 136
    conjointes, 143
    simultanées, 143

racine n-ième (réelle), 55
racines carrées d'un nombre complexe
    forme algébrique, 92
    forme exponentielle, 86

schéma de Bernoulli, 144
solution d'une équation différentielle, 65
somme
    de Darboux, 105
    de Riemann, 104

suite
arithmético-géométrique, 41
arithmétique, 37
bornée, 34
constante, 35
convergente, 43
croissante, 35
décroissante, 35
divergente, 43
géométrique, 39
majorée, 34
minorée, 34
monotone, 35
numérique, 32
stationnaire, 35
suites adjacentes, 50
synonyme, 1
système de points pondérés, 153

temps caractéristique, 67
théorème
bijection (de la), 54
fondamental de l'algèbre, 87
fondamental de l'analyse, 108
probabilités totales (des), 137
faible, 133

univers, 131
univers image, 139

variable(s) aléatoire(s), 138
indépendantes, 143, 144
variance, 140

ÉPREUVE D'ALGÈBRE L_1

SUJET 1

Exercice 1

1. Vérifier que les formules suivantes sont des tautologies (p, q et r désignent desvariables propositionnelles).
   (a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$;
   (b) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$;
   (c) $(\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p)$
2. Donner les distributions de vérité qui rendent vraies les propositions suivantes : (p, q et r désignent desvariables propositionnelles)
   (a) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$;
   (b) $p \wedge (r \Rightarrow q)$;
   (c) $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \Rightarrow \neg q)$
3. (a) En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que si n est le carré d'un nombre entier non nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
   (b) A l'aide d'un raisonnement par contraposition, démontrer que :
      i. si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair ;
      ii. si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq \varepsilon$, alors $a \leq 0$ ($a \in \mathbb{R}$)
4. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :
   (a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$;
   (b) pour tout entier naturel n, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 3.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que : n est pair si et seulement si n^2 est pair.
6. Démontrons que pour tout réel x, si $x^2 - 9 > 0$, alors $x^2 - x - 2 > 0$.
7. Ecriver la négation de la proposition :
   Il existe une ville au Cameroun dans la quelle toute place comporte au moins une agence bancaire.
8. Rétablisser la forme affirmative d'une ancienne publicité :
   Si vous n'êtes pas moderne, alors nous n'êtes pas client de la Société Camerounaise des Banques.

G.M.C.

Exercice 2

1. On considère l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ ordonné par la relation d'inclusion. Soit $A\{\mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, [0, \pi], \mathbb{N}, \mathbb{Q}\}$. Sans justifier, donner s'il existent (et s'ils n'ehistent pas, le dire) :
   (a) Les éléments maximaux de A;
   (b) Les éléments minimaux de A;
   (c) Le plus grand élément de A;
   (d) La borne inférieure de A.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $(n \geq N \Rightarrow 2 - e < \dfrac{2n+1}{n+2} < 2 + e)$;
3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow E$. Démontrer que :
   (a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$;
   (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
   (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E)\ f^{-1}(E \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$;
   (d) Soit $A \subset E$, a-t-on forcément $f(f^{-1}(f(A))) \subseteq f(A)$? Si oui le prouver, sinon donner un contre exemple ;
   (e) Soit $A \subset E$, a-t-on forcément $f(A) \subseteq f(f^{-1}(f(A)))$? Si oui le prouver, sinon donner un contre exemple.
4. Soit $\mathbb{R}$ déjà muni de la multiplication et de l'addition. On définit la loi $\star$ par : $a \star b = a + b + ab$.
   (a) Montrer que $\star$ est associative et commutative ; qu'elle possède un elément neutre. Quels sont les eléments symétrisables ?
   (b) La loi $\star$ est-elle distributive par rapport à la multiplication ? Est-elle distributive par rapport à l'addition ?
5. Démontrer que la renuion de deux groupes est un sous groupe si et seulement si, l'un est inclus dans l'autre.

Proposée par : ***M. FOBASSO T. Arnaud G.***

G.M.C.

ALGEBRE LINEAIRE LICENCE-2

Sujet n°1

EXERCICE -1

On considère que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1- Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.

2- Montrer que la famille $(\ln p)$ (où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs) est libre.

Exercice -2

1- Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

a. Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes pairs}\}$.

a-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes impairs}\}$?

b. Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?

2- Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Exercice -3

1- Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

a. Montrer que $E = Kerf \oplus Img$.

b. Montrer que $f(Img) = Imf$.

2- soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = id_E$.

a. Montrer que $Ker(f - id) \oplus Im(f - id) = E$

b. Montrer que $Ker(f - id) = Im(f^2 + f + id)$ et $Im(f - id) = Ker(f^2 + f + id)$.

Exercice -4

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$\overrightarrow{a} = (3, 2, 1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 5)$, $\overrightarrow{c} = (0, 1, 2, 3)$, $\overrightarrow{d} = (1, 2, 1, 2)$, $\overrightarrow{e} = (0, -1, 2, 1)$.

Exercice -5

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $Kerf^2 = Kerf$
2. $Imf^2 = Imf$.
3. $Kerf \oplus Imf = E$
4. $Kerf \cap Imf = \{\overrightarrow{0}\}$
5. $Kerf + Imf = E$.

Exercice -6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $X^2 + X = A$.

Soit X une solution et ϕ_A, ϕ_X les endomorphisme de K^2 de matrices A et X dans la base canonique.

1- Montrer que X ou $X + I$ n'est pas inversible.

2- Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A (On montrera que $Ker\phi_X = Ker\phi_A$ et $Im\phi_X = Im\phi_A$).

3- Résoudre l'équation.

Exercice -7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1- Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.

2- Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(6) = 6^n$, $P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n$ et $P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n$.

Montrer que $A^n = P_n(A)$.

Proposée par :

Dr. ATAMEWOUE T. Surdive, Phd Algèbre,

Expert en dispositif de formation à distance

et en E-learning

PROMO-MATHS
Association Pour la Promotion et l'Animation des Mathematiques

ENTRAINEMENTS AUX OLYMPIADES
Niveau Terminales Scientifiques

En prélude aux olympiades qui seront organisées dans le département du Moungo et dans d'autres circonscriptions partenaires en février 2020, par l'Association PROMO-MATHS, voici quelques problèmes "spéciaux" qui ont pour vocation de préparer les futurs candidats à cette compétition qui en sera à sa deuxième édition.

PROBLEME 1 : Fluctuation d'une moyenne

Soit la suite S des n premiers nombres entiers consécutifs : $1, 2, 3, \cdots, n$ qui contient trois entiers a, b et c. Soit m la moyenne arithmétique de S.

Si on retranche a de S, m augmente de 1% exactement.

Si on retranche b de S, m diminue de 1% exactement.

Si on retranche c de S, m augmente de 2% exactement.

Déterminer les quatre entiers n, a, b et c.

PROBLEME 2 : La maison de Ramanujan

Dans une contrée, les maisons sont alignées d'un même côté de la route et numerotées de 1 à n. La maison de Ramanujan verifie la propriété suivante : La somme des numéros des maisons situées à sa gauche est égale à la somme des numéros des maisons situées à sa droite.

Quel est le numéro de la maison de Ramanujan ?

PROBLEME 3 : Cle de relevé d'identité bancaire (RIB)

Le relevé d'identité bancaire comporte de gauche à droite 5 chiffres pour le code de la banque, 5 chiffres pour le code du guichet, 11 chiffres pour le numéro de compte, 2 chiffres pour la clé. La clé K est calculée de la manière suivante : Soit A le nombre constitué par les 21 chiffres de gauche ; on calcule le reste r de la division euclidienne de $100 \times A$ par 97. On prend $K = 97 - r$.

Calculer la clé pour le relevé $14607\ 00052\ 05215075057\, xy$

(*indication* : écrire $100 \times A = P \times 10^{12} + Q \times 10^6 + S$)

PROBLEME 4 : Une application de la divisibilité

Définition : Si p est un nombre premier et n un entier non nul, on note $v_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n.

1- Soit $n = 857\,304$. Calculer $v_2(n), v_3(n), v_5(n), v_7(n)$ et $v_{11}(n)$. Que pouvez-vous conclure ?

2- *Formule de Legendre :*

Soit p un nombre premier et n un entier positif. Le mathématicien Legendre a établit que :

$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$ où $[z]$ désigne la partie entière de z.

En utilisant la formule de Legendre, déterminer par combien de zéros se termine $2019!$

PROBLEME 5 : Carrés et triangle pythagoricien

Un triangle pythagoricien est un triangle rectangle à côtés entiers.

Trouver les dimensions du triangle pythagoricien d'aire minimale dans lequel on peut tracer deux carrés distincts dont les dimensions des côtés sont entières et dont les quatre sommets reposent sur son périmètre.

PROBLEME 6 : Problème Classique : Les Boeufs de Newton

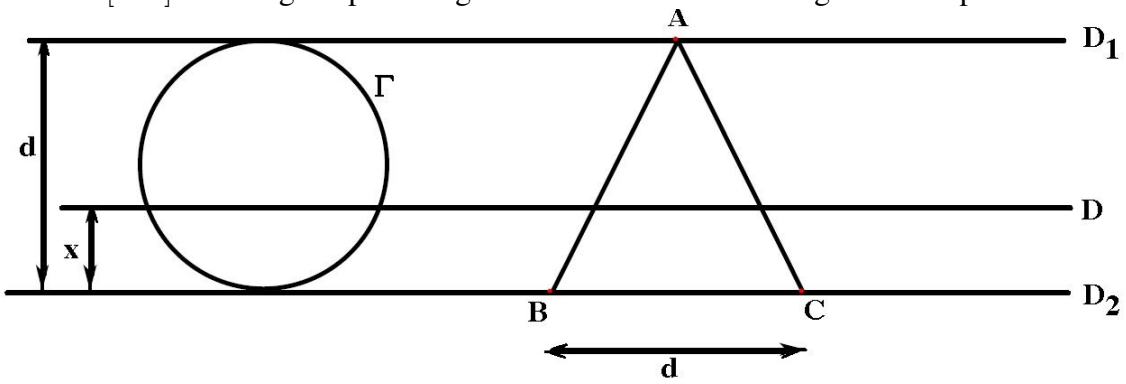
75 boeufs ont besoin de 12 jours pour brouter de l'herbe d'un pré de 60 ares, tandis que 81 boeufs ont besoin de 15 jours pour brouter de l'herbe d'un pré de 72 ares.

Combien faut-il de boeufs pour brouter en 18 jours un pré de 96 ares ?

On suppose que l'herbe croît uniformement et qu'elle est, dans les trois prés, à la même hauteur au début du problème. *Indication* : *la quantité d'herbe disponible par are est une fonction affine du temps.*

PROBLEME 7 : Géométrie et fonction

Sur le même plan sont tracés le cercle (Γ) de diamètre $d = 4$ et le triangle isocèle ABC de sommet A. La base $[BC]$ du triangle a pour longueur d. Le cercle et le triangle sont disposés comme ci-dessous :



Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles et tangentes au cercle (Γ) en deux points diamétralement opposés. Le point A est sur (D_1) et les points B et C sont sur (D_2). Une droite (D) parallèle aux deux premières droites, et à la distance x $(0 \leq x \leq d)$ de (D_2), coupe le cercle et le triangle.

On s'intéresse à la somme des longueurs des segments de la droite (D) qui se trouvent dans le cercle et dans le triangle.

A quelle condition sur x existe t-il une autre droite que (D), dont les segments se trouvant dans le cercle et le triangle ont la même somme de longueur que dans le cas de (D) ?

PROBLEME 8 : La courbe du chien

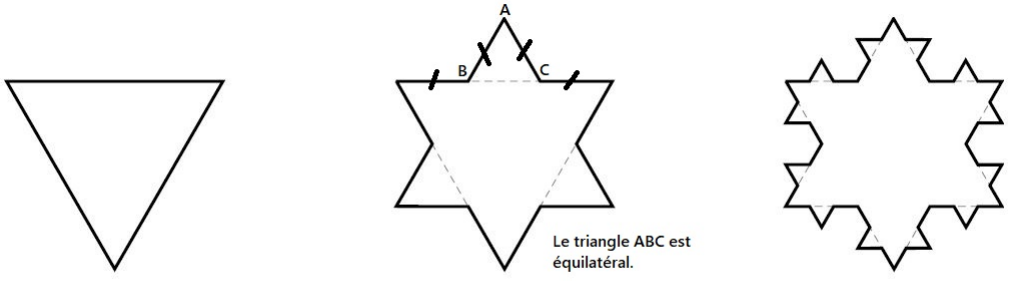
Un homme et son chien sont initialement en deux points H et O du plan, distants de $600m$. L'homme en H et le chien en O. L'homme marche à $5km/h$ le long d'une demi-droite (D) perpendiculaire à (OH). Le chien court vers son maître à une vitesse constante en se dirigeant toujours vers lui et le rattrape.

Si le chien avait eu un peu de jugeote (et une calculette), il aurait pu anticiper la marche de son maître et le rejoindre en ligne droite, gagnant ainsi 15 précieuses secondes.

Quelle est la vitesse du chien ?

PROBLEME 9 : Fractales

Oberver comment on passe de F_0 à F_1, puis de F_1 à F_2 :



F_0 est un triangle équilatéral de côté 1. On désigne respectivement par p_n et a_n le périmètre et l'aire de F_n.

1- Exprimer p_n et a_n en fonction de n.

2- En faisant tendre n vers l'infinie, on obtient un flocon de Koch. Déterminer le périmètre et l'aire du flocon de Koch.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

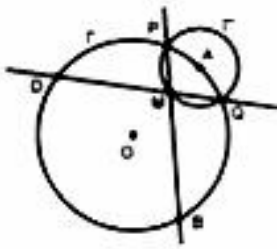
Honneur – Fraternité – Ju

Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

1ère tour — Niveau 7C — 29 Janvier 2019 — Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (20 points)



Soit A un point d'un cercle Γ de centre O et de rayon R.
Soit Γ' un cercle de centre A qui rencontre Γ en P et Q.
M un point de Γ' distinct de P et Q tel que (MP) recoupe Γ en B et (MQ) recoupe Γ en D. On cherche à démontrer par deux méthodes que : $(BD)\perp(AM)$.

1ère Méthode 1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

a) Soit Δ_M une droite quelconque passant par M qui coupe Γ en E et F. Placer $E' = S_{\Delta_M}(E)$ et montrer que $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = OM^2 - R^2$ (ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport à Γ).

b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MD}$?

c) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

2ème Méthode 2 : Angles orientés

a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$

b) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

Exercice 2 : (20 points)

Soit le nombre : $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1° Calculer X^3

2° Montrer que X est un entier naturel que l'on déterminera.

Exercice 3 : (20 points)

1° Soit $A=p^2(2p+1)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de A par 10.

2° Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+\ldots+n^3$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Quel est le chiffre des unités de S_{2019} ?

c) Quel est le chiffre des unités de $\left(\dfrac{S_{2019}}{2019}\right)^{2019}$?

Exercice 4 : (20 points)

Soient n un entier naturel non nul et α un réel.

1° Résoudre le système $\begin{cases}u^n+v^n=2\sin\alpha\\uv=1\end{cases}$, où u et v sont des nombres complexes.

2° Résoudre le système $\begin{cases}(z_1+iz_2)^n+(z_1-iz_2)^n=2\sin\alpha\\z_1^2+z_2^2=1\end{cases}$, où z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

Exercice 5: (20 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\a&2\end{pmatrix}$ où a est un réel non nul. On se propose de déterminer les réels x_n et y_n tels que $A^n=x_nA+y_nI_2$, où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

1° Calculer A^1 et A^2.

2° Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=3x_n+y_n$ et $y_{n+1}=-2x_n$.

3° Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_2$.

4° Déterminer la matrice inverse de A^{2019}.

FIN.